Ueber
einige Anwendungen des Hilfswinkels.

Um einem Zahlenausdruck, wodurch er für eine logarithmische Berechnung geeignet wird, eine andere Form zu geben, bedient man sich vielfach der trigonometrischen Functionen.

Diese nehmen bekanntlich bei der Veränderlichkeit der zugehörigen Winkel die Werthe aller möglichen unbenannten Zahlen an. Es umfassen nämlich die Sinus und Cosinus der Winkel alle ächte Brüche zwischen 0 und 1, diese selbst mit eingeschlossen, die Tangenten und Cotangenten jedoch sämmtliche Zahlen zwischen 0 und ∞, auch diese eingeschlossen. Daher kann auch umgekehrt ein Zahlenwerth als eine trigonometrische Function angesehen werden und als solche in der Rechnung Verwerthung finden. Die Winkel solcher verwendeten Functionen nennt man Hilfswinkel.

Sollen nun Ausdrücke vortheilhaft mit Hilfe der Logarithmen berechnet werden können, so müssen Summen und Differenzen auf eine andere Form gebracht werden, jedoch lassen sich über die Weise, wie man dabei verfahren soll, keine bestimmte Regeln feststellen.

Einige Beispiele mögen dies erläutern.

Es sei z. B. die Summe $a + b$ in eine für logarithmische Berechnung bequeme Form zu bringen. Setzt man $a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ und für $\frac{b}{a}$ die Function $\sin\varphi$, wenn a grösser ist als b, so ist

$$a + b = a\,(1 + \sin\varphi).$$

Wenn man in der goniometrischen Gleichung

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Winkel $\alpha = 90^0$ und $\beta = 2\varphi$ setzt, so erhält man

$$\begin{aligned} 1 + \sin 2\varphi &= 2\sin(45^0 + \varphi)\cos(45^0 - \varphi) \\ &= 2\sin(45^0 + \varphi)^2 \\ &= 2\cos(45^0 - \varphi)^2 \end{aligned}$$

$$\text{und } 1 + \sin\varphi = 2 \sin (45^0 + {}^1/_2\varphi)^2$$
$$= 2 \cos (45^0 - {}^1/_2\varphi)^2$$
$$\text{folglich } a + b = 2\,a \sin (45^0 + {}^1/_2\varphi)^2$$
$$= 2\,a \cos (45^0 - {}^1/_2\varphi)^2$$

Gebraucht man $\cos\varphi$ für $\frac{b}{a}$ so ist

$$a + b = a\,(1 + \cos\varphi)$$

oder wenn man für $1 + \cos\varphi = 2 \cos^2 {}^1/_2\varphi$ setzt

$$a + b = 2\,a \cos^2 {}^1/_2\varphi$$

Wird für $\frac{b}{a}$ die Function tang φ gesetzt, so ist

$$a + b = a\,(1 + \operatorname{tang}\varphi) = \frac{a\,\sqrt{2}\,\sin\,(45^0 + \varphi}{\cos\varphi}.$$

In ähnlicher Weise lässt sich die Cotangente anwenden.

Soll $\sqrt{a^2 + b^2}$ bestimmt werden, so ist

$$x = a \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Setzt man $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \operatorname{tang}{}^2\varphi$, so ist

$$x = a\ \sqrt{1 + \operatorname{tang}{}^2\varphi} = \frac{a}{\cos\varphi}$$
$$\text{und } \log x = \log a - \log \cos \varphi.$$

Wenn $x = \sqrt[m]{a^n + b^n}$ berechnet werden soll, so erhält man $x = \sqrt[m]{a^n\left(1 + \frac{b^n}{a^n}\right)}$, und setzt man

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \operatorname{tang}{}^2\varphi$$

$$\text{so ist } x = \sqrt[m]{a^n\,(1 + \operatorname{tg}{}^2\varphi)} = \sqrt[m]{\frac{a^n}{\cos{}^2\varphi}}$$

In vielen Fällen wird man durch Anwendung dieser Gleichung schneller die Ausrechnung vollzogen haben, als wenn man x direct aus dem gegebenen Ausdrucke berechnet.

Soll z. B. berechnet werden $x = \sqrt[6]{42{,}516^3 + 65{,}753^3}$, so ist $\left(\frac{65{,}753}{42{,}516}\right)^3 = \operatorname{tg}{}^2\varphi$ zu setzen.

$$\text{Es ist daher } {}^3/_2\ (\log 65{,}753 - \log 42{,}516) = \log \operatorname{tg}\varphi$$
$$\log 65{,}753 = 1{,}8179156$$
$$\log 42{,}516 = 1{,}6285422$$
$${}^3/_2 \times 0{,}1893734$$
$$= \log \operatorname{tg}\varphi = 0{,}2840601$$
$$\varphi = 62^0\ 31'\ 44''$$

Nun ist $x = \sqrt[6]{\frac{42{,}516^3}{\cos^2\varphi}}$ zu berechnen.

$$\text{Daher } x = N\ {}^1/_6\ (3 \log 42{,}516 - 2 \log \cos \varphi),$$

$$3 \log 42{,}516 = 4{,}8856266$$

$$2 \log \cos \varphi = 9{,}3279694 - 10$$

$$x = N\ {}^1/_6 \times 5{,}5576572$$

$$x = N\ 0{,}9262762$$

$$x = 8{,}43871.$$

Es soll der Ausdruck $x = \frac{a \sin \alpha}{1 + a \cos \alpha}$ logarithmisch umgeformt werden.

Wird $x = \operatorname{tang} \varphi$ gesetzt, so heisst die Gleichung $\operatorname{tang} \varphi = \frac{a \sin \alpha}{1 + a \cos \alpha}$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + \frac{a \sin \varphi \cos \alpha}{\cos \varphi} = a \sin \alpha$$

$$\sin \varphi = a \sin (\alpha - \varphi)$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin (\alpha - \varphi)} = a$$

$$1 \pm \frac{\sin \varphi}{\sin (\alpha - \varphi)} = 1 \pm a$$

$$\frac{\sin (\alpha - \varphi) \pm \sin \varphi}{\sin (\alpha - \varphi)} = 1 \pm a$$

$$\frac{2 \sin {}^1/_2\alpha \cos ({}^1/_2\alpha - \varphi)}{\sin (\alpha - \varphi)} = 1 + a$$

$$\frac{2 \sin ({}^1/_2\alpha - \varphi) \cos {}^1/_2\alpha}{\sin (\alpha - \varphi} = 1 - a$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2\alpha \operatorname{cotg} ({}^1/_2\alpha - \varphi) = \frac{1 + a}{1 - \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} ({}^1/_2\alpha - \varphi) = \frac{1 + a}{1 - a} \operatorname{ctg} {}^1/_2\alpha$$

$$\text{oder } \operatorname{tg} ({}^1/_2\alpha - \varphi) = \frac{1 - a}{1 + a} \operatorname{tg} {}^1/_2\alpha$$

Wenn a grösser ist als 1, und φ grösser ist als ${}^1/_2\alpha$, so ist

$$\frac{2 \sin (\varphi - {}^1/_2\alpha) \cos {}^1/_2\alpha}{\sin (\alpha - \varphi)} = a - 1$$

$$\frac{2 \sin {}^1/_2\alpha \cos (\varphi - {}^1/_2\alpha)}{\sin (\alpha - \varphi)} = a + 1$$

$$\text{und } \operatorname{cotg} (\varphi - {}^1/_2\alpha) = \frac{a + 1}{a - 1} \operatorname{ctg} {}^1/_2\alpha$$

Ist in dem Ausdruck $x = \frac{a \sin \alpha}{1 - a \cos \alpha}$ der Werth a kleiner als 1 und $= 0{,}45632$, ausserdem $\alpha = 32^\circ$ $15'$ $4''$ gegeben, so ist aus der obigen Formel $\operatorname{ctg} ({}^1/_2\alpha - \varphi) = \frac{1 + a}{1 - a} \operatorname{ctg} {}^1/_2\alpha$ die Tangente des Winkels φ zu berechnen.

Es ist $\log \operatorname{ctg} (\tfrac{1}{2}\alpha - \varphi) = \log (1 + a) + \log \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\alpha - \log (1 - a)$

$$\begin{aligned}
\log (1 + a) &= \log 1{,}45632 = 0{,}1632568 \\
\log \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\alpha &= \log \operatorname{ctg} 16^0\ 7'\ 32'' = 0{,}5389558 \\
& \qquad 0{,}7022126 \\
\log (1 - a) &= \log 0{,}54368 = 0{,}7353434 - 1 \\
\log \operatorname{ctg} (\tfrac{1}{2}\alpha - \varphi) &= 0{,}9668692 \\
\tfrac{1}{2}\alpha - \varphi &= 6^0\ 9'\ 36'' \\
\varphi &= 9^0\ 57'\ 56'' \\
\log \operatorname{tang} \varphi &= 9{,}2447992 - 10
\end{aligned}$$

und somit $\operatorname{tang} \varphi = x = 0{,}175711.$

In ähnlicher Weise kann man auch den Ausdruck $x = \dfrac{a \cos \alpha}{1 + a \sin \alpha}$ berechnen.

Setzt man für x die Cotangente φ, so erhält man

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{a \cos \alpha}{1 + a \sin \alpha} \text{ und}$$

$$\begin{aligned}
\cos \varphi &= a (\cos \alpha \sin \varphi - \sin \alpha \cos \varphi) \\
&= a \sin (\varphi - \alpha)
\end{aligned}$$

$$\frac{\cos \varphi}{\sin (\varphi - \alpha)} = a$$

$$\frac{\cos \varphi}{\sin (\varphi - \alpha)} \pm 1 = a \pm 1$$

$$\frac{\cos \varphi + \sin (\varphi - \alpha)}{\cos \varphi - \sin (\varphi - \alpha)} = \frac{a + 1}{a - 1} \text{ und}$$

$$\operatorname{tang} (45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha) \operatorname{cotg} [45^0 - (\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha)] = \frac{a + 1}{a - 1}$$

$$\operatorname{cotg} [45^0 - (\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha)] = \frac{a + 1}{a - 1} \operatorname{ctg} (45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha)$$

Daraus lässt sich φ und der Werth $x = \operatorname{cotg} \varphi$ bestimmen.

Auch hier konnte die Tangente benutzt werden.

Der Ausdruck $x = \dfrac{a \operatorname{tg} \alpha \sin \beta + b \cos \alpha}{a \operatorname{tg} \alpha \sin \beta - b \cos \alpha}$ lässt sich auf folgende Weise in einen logarithmischen umformen; dividirt man durch $a \sin \beta$ den Zähler und Nenner des Bruches, so ist

$$x = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \dfrac{b \cos \alpha}{a \sin \beta}}{\operatorname{tg} \alpha - \dfrac{b \cos \alpha}{a \sin \beta}}$$

Wird nun ein Winkel so bestimmt, dass

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b \cos \alpha}{a \sin \beta} \text{ wird, so ist}$$

$$b \cos \alpha = a \sin \beta \operatorname{tg} \varphi \text{ und}$$

$$x = \frac{\operatorname{tg} \alpha \sin \beta + \sin \beta \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \alpha \sin \beta - \sin \beta \operatorname{tg} \varphi} \text{ oder}$$

$$x = \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\sin (\alpha - \varphi)}$$

Ist z. B. $a = 550$, $b = 475$, $\alpha = 52^0\ 20'\ 10''$, $\beta = 32^0\ 14'\ 20''$, so ist zunächst

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{475 \cdot \cos 52^0\ 20'\ 10''}{550 \cdot \sin 32^0\ 14'\ 20''}$$

$$\log \operatorname{tang} = 9{,}9874755 - 10$$

$$\text{und } \varphi = 44^0\ 10'\ 26''$$

$$\text{Da } x = \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\sin (\alpha - \varphi)} = \frac{\sin 96^0\ 30'\ 26''}{\sin 8^0\ 9'\ 44''} \text{ ist, so erhält man}$$

$$\log x = 0{,}8449748 \text{ und}$$

$$x = 6{,}99802.$$

Dem Ausdrucke $x = a \sin \alpha + \frac{b^2 \sin a \sin^2 \beta}{a \cos^2 \gamma}$ soll eine für die logarithmische Berechnung geeignetere Form gegeben werden.

$$\text{Zunächst ist } = a \sin \alpha \left(1 + \frac{b^2 \sin^2 \beta}{a^2 \cos^2 \gamma}\right)$$

$$= a \sin \alpha \left[1 + \left(\frac{b \sin \beta}{a \cos \gamma}\right)^2\right]$$

$$\text{Wird nun } \frac{b \sin \beta}{a \cos \gamma} = \operatorname{tang} \varphi \text{ gesetzt,}$$

$$\text{so ist } \frac{b^2 \sin^2 \beta}{a \cos^2 \gamma} = a \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Daher geht der obige Ausdruck über

$$\text{in } x = a \sin \alpha + a \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi$$

$$= a \sin \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)$$

und da $1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ ist,

$$\text{wird } x = \frac{a \sin \alpha}{\cos^2 \varphi}.$$

Die Berechnung wird auch in diesem Falle abgekürzt.

Der Ausdruck $x = a (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma)$ wird auf folgende Weise umgeformt werden können.

Wenn $\operatorname{tang} \alpha \cos \gamma = \frac{\sin \alpha \cos \gamma}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \varphi$ gesetzt wird, so ist

$$a\,(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma) = a\cos\alpha\left(\cos\beta - \frac{\sin\beta\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)$$

$$= a\,\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}\,(\cos\beta\cos\varphi - \sin\beta\sin\varphi)$$

$$= a\,\frac{\cos\alpha\cos(\beta+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

In gleicher Weise wird der Ausdruck $x = a\,(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma)$ umgeformt, wenn $\tang\alpha\;\cos\gamma = \frac{\sin\alpha\cos\gamma}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\varphi$ angenommen wird.

Es ist alsdann $x = \frac{a\cos\alpha\cos(\beta-\varphi)}{\cos\varphi}$.

Der Ausdruck $x = \frac{a\sin\alpha - b\sin\beta}{a\sin\alpha + b\sin\beta}$ ist logarithmisch zu machen.

Wird Zähler und Nenner durch $a\sin\alpha$ dividirt, so erhält man

$$x = \frac{1 - \frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha}}{1 + \frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha}}.$$

Setzt man $\frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha} = \operatorname{tg}\varphi$, so ist

$$x = \frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}$$

$$= \operatorname{tang}(45^0 - \varphi).$$

Sind zur Berechnung eines Dreiecks die Grundlinie a, die Höhe h und der Winkel α an der Spitze gegeben, und man will zunächst die übrigen Winkel finden, so ergiebt sich, wenn man die Winkel mit β und γ einführt:

$$\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \frac{a}{h}$$

oder $$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{a}{h}$$

und $$\frac{2\sin(\beta+\gamma)}{\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)} = \frac{a}{h}$$

woraus sich ergiebt $\cos(\beta-\gamma) = \frac{2h}{a}\sin\alpha - \cos\alpha$

Setzt man $\frac{2h}{a} = \operatorname{cotg}\varphi$ so ist

$$\cos(\beta-\gamma) = \operatorname{cotg}\varphi\sin\alpha - \cos\alpha$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\cos(\beta-\gamma) = \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Beispiel: Ist $\alpha = 56$, $h = 38$ und $\alpha = 68^0\ 5'\ 14''$

$$\begin{aligned}
\text{so ist } \log \operatorname{cotg} \varphi &= \log 76 - \log 56 = 0{,}1326256 \\
\varphi &= 36^0\ 23'\ 4'' \\
\log \cos (\beta - \gamma) &= \log \sin (\alpha - \varphi) - \log \sin \varphi \\
&= \log \sin 31^0\ 42'\ 10'' - \log \sin 36^0\ 23'\ 4'' \\
&= 9{,}9473820 \\
\beta - \gamma &= 27^0\ 38'\ 18'' \\
\beta &= 69^0\ 46'\ 32'' \\
\gamma &= 42^0\ \ 8'\ 14''
\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise löst man die Aufgabe, wenn von einem Dreieck die Grundlinia a, die darauf errichtete Höhe h und die Differenz der Winkel an der Grundlinie $\beta - \gamma = \delta$ gegeben sind.

Man erhält zunächst $\cos (\beta - \gamma) = \cos \delta = \frac{2h}{a} \sin (\beta + \gamma) + \cos (\beta + \gamma)$

Schreibt man für $\frac{2h}{a}$ die Cotangente φ, so ergiebt sich, wenn man den Winkel an der Spitze mit α bezeichnet,

$$\cos (\beta - \gamma) = \cos = \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\sin \varphi}$$

und daraus $\sin (\alpha - \varphi) = \sin \varphi \cos \delta$.

Ebenso kann man verfahren, wenn in einem Dreieck die Abschnitte der Grundlinie $m - n = d$, welche durch das Höhenperpendikel h gebildet werden und die Differenz der Winkel $(\beta - \gamma = \delta)$ an der Grundlinie gegeben sind; es ist alsdann, wenn Winkel α der Grundlinie gegenüber liegt, und $\frac{2h}{\alpha} = \operatorname{ctg} \varphi$ gesetzt wird,

$$\cos \varphi = \frac{\sin (\delta - \varphi)}{\sin \varphi}$$

woraus sich die einzelnen Winkel finden lassen.

Auf dieselben Lösungen sind auch Lösungen anderer Aufgaben zurückzuführen.

Bei der Anwendung des Projectionssatzes bedient man sich ebenfalls mit Vortheil des Hilfswinkels.

Es sei zur Berechnung eines Dreiecks gegeben ein Winkel α, die Differenz der ihn einschliessenden Seiten $b - c = d$ und die Höhe h auf die dritte Seite a, so erhält man nach dem Projectionssatz

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\
&= (b - c)^2 + 2bc\,(1 - \cos \alpha)
\end{aligned}$$

und da $2ah = 2bc \sin \alpha$ ist,

$$\begin{aligned}
a^2 &= (b - c)^2 + \frac{2ah}{\sin \alpha}(1 - \cos \alpha) \\
&= (b - c)^2 + 2ah \operatorname{tang} {}^1/_2\alpha
\end{aligned}$$

Oder da b — c = d ist,

$$a^2 - 2ah \operatorname{tg} {}^1\!/_2\alpha = d^2$$

$$a = h \operatorname{tg} {}^1\!/_2\alpha \pm \sqrt{d^2 + h^2 \operatorname{tg}^2 {}^1\!/_2\alpha}$$

$$a = h \operatorname{tg} {}^1\!/_2\alpha \pm \sqrt{\left(1 + \frac{d^2}{h^2 \operatorname{tg}^2 {}^1\!/_2\alpha}\right) h^2 \operatorname{tg}^2 {}^1\!/_2\alpha}$$

Setzt man $\frac{d}{h \operatorname{tg} {}^1\!/_2\alpha} = \operatorname{tg} \varphi$, und berücksichtigt nur das positive Vorzeichen, so ist

$$a = d \operatorname{ctg} \varphi + \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)\, d^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi}$$

und da $1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$, so ist

$$a = d \operatorname{ctg} \varphi + \frac{d}{\sin \varphi} = \frac{d\,(1 + \cos \varphi)}{\sin \varphi}$$

$$\text{und } a = d \operatorname{ctg} {}^1\!/_2\varphi$$

Ist a berechnet, so findet man leicht die übrigen fehlenden Stücke des Dreiecks.

Anwendung des Hilfswinkels zur Lösung der gemischten quadratischen Gleichungen.

Nach bekannten Sätzen über die Lösung der vollständigen quadratischen Gleichungen, welche auf die Form $x^2 + ax + b = 0$ gebracht sind, wo a und b sowohl positive wie negative Zahlen bedeuten können, ist der Coëfficient des zweiten Gliedes gleich der mit entgegengesetztem Vorzeichen versehenen Summe der Wurzeln, das absolute Glied gleich dem Producte derselben. Setzt man für die eine Wurzel der Gleichung tang φ und für die andere tang ψ, wenn die Wurzeln nämlich mögliche Ausdrücke, also nicht imaginäre, enthalten sollen, so ist

$$\operatorname{tang} \varphi + \operatorname{tang} \psi = a \text{ und}$$

$$\operatorname{tang} \varphi \cdot \operatorname{tang} \psi = b$$

$$\text{Nun ist } \operatorname{tang} \varphi + \operatorname{tang} \psi = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi},$$

folglich erhält man, wenn die vorstehenden Werthe für $\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi$ und $\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi$ in diesen Quotient eingesetzt werden,

$$\operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \frac{a}{1 - b}.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die Summe der Winkel $(\varphi + \psi)$ finden.

Um nun die Winkel einzeln zu bestimmen, muss man noch die Differenz $(\varphi - \psi)$ suchen, und diese findet man auf folgende Weise:

Nach den goniometrischen Gleichungen ist

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi$$

$$= \cos \varphi \cos \psi \left(1 + \frac{\sin \varphi \sin \psi}{\cos \varphi \cos \psi}\right)$$

$$= \cos \varphi \cos \psi\, (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi)$$

Nun ist aber $\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi = \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \varphi + \psi}$,

$$\text{und } \cos \varphi \cos \psi = \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi}$$

$$\text{folglich ist } \cos(\varphi - \psi) = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi} \cdot \sin(\varphi + \psi)$$

$$\text{oder } = \frac{1 + b}{a} \sin(\varphi + \psi)$$

Daraus wird nun $\varphi - \psi$ bestimmt werden können.

Ist in der obigen Gleichung $x + ax + b = 0$, $a = -27{,}521$ und $b = 63{,}582$ gegeben, so ist die Gleichung $x^2 - 27{,}521\, x + 63{,}582 = 0$ aufzulösen.

Es ist nach der obigen Entwickelung

$$1.)\quad \operatorname{tang}(\varphi + \psi) = \frac{a}{1 - b}$$

$$2.)\quad \cos(\varphi - \psi) = \frac{1 + b}{a} \sin(\varphi + \psi)$$

da b grösser als 1 ist, und $\frac{a}{1 - b} = - \frac{a}{b - 1}$, so ist

$$\operatorname{tang}(\varphi + \psi) = - \frac{a}{b - 1},$$

$$\text{oder } \operatorname{tang}(\varphi + \psi) = \frac{a}{b - 1}.$$

Nimmt man an, dass die Summe der Winkel $\varphi + \psi$ zwischen 90^0 und 180 liege, so ist

$$\operatorname{tg}[180^0 - (\varphi + \psi)] = \frac{a}{b - 1}$$

oder, wenn man die gegebenen Werthe einträgt,

$$\operatorname{tg}[180^0 - (\varphi + \psi)] = \frac{27{,}521}{62{,}582}$$

$$\log \operatorname{tang}[180^0 - (\varphi + \psi)] = \log 27{,}521 - \log 62{,}582.$$

$$= 9{,}6432148$$

$$180^0 - (\varphi + \psi = 23^0\ 44'\ 16{,}6''$$

$$\varphi + \psi = 156^0\ 15'\ 43{,}4''$$

$$\text{Oben hatte man } \cos(\varphi - \psi) = \frac{1 + b}{a} \sin(\varphi + \psi)$$

$$\text{folglich } \log \cos(\varphi - \psi) = \log(1 + b) + \log \sin(\varphi + \psi) - \log a$$

$$\log(1 + b) = \log 64{,}582 = 1{,}8101115$$

$$\log \sin(\varphi + \psi) = \log \sin 156^0\ 15'\ 43'' = 9{,}6048242 - 10$$

$$1{,}4149357$$

$$\log a = 1{,}4396642$$

$$\text{mithin } \log \cos(\varphi - \psi) = 9{,}9752715 - 10$$

$$\text{und } \varphi - \psi = 19^0\ 9'\ 7{,}4''$$

$$\text{Da } \varphi + \psi = 156^0\ 15'\ 43{,}4'' \text{ war,}$$

$$\text{so ist } \varphi = 87^0\ 42'\ 25{,}4''$$

$$\text{und } \psi = 68^0\ 33'\ 19{,}5''$$

$$\text{Daher ist } \log \operatorname{tang} \varphi = 1{,}3975082$$
$$\text{und } \operatorname{tang} \varphi = 24{,}97516$$
$$\text{Ebenso } \log \operatorname{tang} \psi = 0{,}4058264$$
$$\text{und } \operatorname{tang} \psi = 2{,}54582$$

In ähnlicher Weise lassen sich die Gleichungen lösen, wenn entweder eine der Wurzeln negativ oder auch beide negativ werden.

Löst man die quadratische Gleichung von der Form $x^2 + ax + b = 0$ auf die gewöhnliche Weise auf und berücksichtigt je nach den Vorzeichen von a und b die vier Fälle, die sich ergeben, und hier einzeln zu behandeln sind, so ergiebt sich,

1,) wenn a und b positiv sind

$$x = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b} \quad \text{und}$$
$$x_1 = -\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}.$$

Diese beiden Wurzeln lassen sich auf die Form bringen

$$x = -\tfrac{1}{2}a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right)$$
$$x_1 = -\tfrac{1}{2}a\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right)$$

Nun kann $\frac{4b}{a^2}$ grösser sein als 1, wodurch die Wurzeln imaginär werden und hier unberücksichtigt bleiben dürften. Ist aber $\frac{4b}{a^2}$ kleiner als 1, so kann man einen Hilfswinkel so bestimmen, dass man erhält

$$\sin^2 \varphi = \frac{4b}{a^2} \text{ oder } \sin \varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a} \text{ und}$$

es ist alsdann $x = -\tfrac{1}{2}a\,(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}) = -\tfrac{1}{2}\alpha\,(1 - \cos \varphi)$

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}a\,(1 + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}) = -\tfrac{1}{2}a\,(1 + \cos \varphi)$$

Da ferner $\tfrac{1}{2}a = \frac{\sqrt{b}}{\sin \varphi}$ ist, so wird

$$x = -\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}\sqrt{b} = -\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi \sqrt{b}$$
$$x_1 = -\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi}\sqrt{b} = -\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\varphi \sqrt{b}$$

2.) Wenn a negativ und b positiv ist, so sind die Wurzeln

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \text{ und } x_1 = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Setzt man $\frac{4b}{a^2}$ wieder gleich $\sin^2 \varphi$, so werden die Wurzeln dieser Gleichung denen in der vorangehenden Gleichung gleich sein, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Sie lauten daher: $x = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{b}$

$$x_1 = \operatorname{ctg} \varphi \sqrt{b}$$

3.) Es sei a positiv und b negativ, so erhalten wir aus der Gleichung $x^2 + ax - b = 0$ die Wurzeln

$$x = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} \text{ und } x_1 = -\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

$$\text{oder } x = -\tfrac{1}{2}a\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right) \text{ und } x_1 = -\tfrac{1}{2}a\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right)$$

Setzt man $\frac{4b}{a^2} = tg^2\,\varphi$ und $\frac{2\sqrt{b}}{a} = tg\,\varphi$

so erhält man $x = -\tfrac{1}{2}a\,(1 - \sqrt{1 + tg^2\,\varphi})$ und $x_1 = -\tfrac{1}{2}a\,(1 + \sqrt{1 + tg^2\,\varphi})$

oder $x = -\tfrac{1}{2}a\left(1 - \frac{1}{\cos\varphi}\right)$ und $x_1 = -\tfrac{1}{2}a\left(1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right)$

woraus $x = \tfrac{1}{2}a\left(\frac{1 - \cos\varphi}{\cos\varphi}\right)$

und $x_1 = -\tfrac{1}{2}a\left(\frac{1 + \cos\varphi}{\cos\varphi}\right)$ folgt.

Da $\frac{2\sqrt{b}}{a} = tg\,\varphi$ ist und $\tfrac{1}{2}a = \frac{\sqrt{b}}{tg\,\varphi} = ctg\,\varphi\,\sqrt{b}$, so ergiebt sich daraus

$$x = \frac{1 - \cos\varphi}{\cos\varphi}\,cotg\,\varphi\,\sqrt{b}$$

$$= \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}\,\sqrt{b}$$

$$\text{und } x_1 = -\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}\,ctg\,\varphi\,\sqrt{b}$$

$$= -\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}\,\sqrt{b}.$$

Die beiden Wurzeln sind daher $x = tg\,\tfrac{1}{2}\varphi\,\sqrt{b}$ und

$x_1 = -\,cotg\,\tfrac{1}{2}\varphi\,\sqrt{b}$.

4.) Es sei sowohl a als auch b negativ, und die Gleichung laute $x^2 - ax - b = 0$ so sind die Wurzeln

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\frac{a^2 + b}{4}} \text{ und } x_1 = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

Verfährt man ebenso wie in der voranstehenden Gleichung, so ergiebt sich

$x = -\,tg\,\tfrac{1}{2}\varphi\,\sqrt{b}$ und

$x_1 = cotg\,\tfrac{1}{2}\varphi\,\sqrt{b}$.

Die Wurzeln sind also die entgegengesetzten der vorhergehenden Gleichung.

Ist als Beispiel die Zahlengleichung $x^2 + 18{,}811\,x - 378{,}464 = 0$ gegeben, so ist,

da $b = 378{,}464$ und $a = 18{,}811$ ist, zunächst

$\frac{2\sqrt{b}}{a} = \frac{2\sqrt{378{,}464}}{18{,}811} = tg\,\varphi$ zu berechnen.

$$\log tg\,\varphi = \log 2 + \tfrac{1}{2}\log 378{,}464 - \log 18{,}811$$

$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\tfrac{1}{2}\log 378{,}464 = 1{,}2890123$$

$$1{,}5900423$$

$$\log 18{,}811 = 1{,}2744119$$

$$\log tg\,\varphi = 0{,}3156304$$

$$\varphi = 64^\circ\,11'\,51{,}4'' \text{ und } \tfrac{1}{2}\varphi = 32^\circ\,5'\,55{,}7''.$$

Da nun die Wurzeln oben mit

$$x = \operatorname{tg} {}^1/_2\varphi \sqrt{b} \text{ und}$$
$$x_1 = - \operatorname{cotg} {}^1/_2\varphi \sqrt{b} \text{ bestimmt waren,}$$
$$\text{so ist } x = \text{Num} (\log \operatorname{tg} {}^1/_2\varphi + {}^1/_2 \log b)$$
$$= \text{Num} (\log \operatorname{tg} 32^0\ 5'\ 55{,}7'' + {}^1/_2 \log 378{,}464)$$
$$= \text{Num } 1{,}0864667$$
$$= 12{,}203$$
$$\text{und } x_1 = - \text{Num} (\log \operatorname{cotg} 32^0\ 5'\ 55{,}7'' + {}^1/_2 \log 378{,}464)$$
$$\text{oder } x_1 = - \text{Num } 1{,}4915579$$
$$= - 31{,}014.$$

Die Fortsetzung folgt später).