## I. Absolutes Maass und relative Bewegung.

Das Jahr 1874 wird in der Geschichte der Himmelserscheinungen eine hervorragende Stelle einnehmen.

Am neunten December dieses Jahres befindet sich die Erde in dem über seine Spitze hinaus verlängerten Kernschatten-Kegel des Planeten Venus. Die von irgend einem Puncte der Erdoberfläche an die Venuskugel gezogenen Tangenten treffen, die Anfangs- und Schlussmomente der Erscheinung ausgenommen, sämmtlich den Sonnenkörper und begränzen auf diesem einen kreisförmigen Schlagschatten, welcher so zu sagen eine ringförmige Sonnenfinsterniss im verkleinerten Maasse darstellt. Der Schattenkegel, welchen die Sonne an der Venus erzeugt, ist bei dem im Verhältnisse zu seiner Entfernung von der Sonne überaus geringen Durchmesser des Planeten von sehr spitzer Gestalt — der Winkel an seiner Spitze beträgt noch nicht einen ganzen Bogengrad — und so kommt es, dass die Erde, welche überdies nicht durch die Mitte dieses kegelförmigen Raumes, sondern beträchtlich seitwärts von derselben ihren Weg nimmt, sich nur etwa vier Stunden lang in diesem Raume befindet. Für denjenigen Theil der Erdoberfläche, welcher während dieser vier Stunden von der Sonne abgewendet ist und also Nacht hat, ist demnach die ganze Erscheinung nicht sichtbar. Andere Theile der Erdoberfläche sehen nur den Anfang derselben, ehe für sie, in Folge der von dem ganzen Vorgange völlig unabhängigen Umdrehung der Erde um ihre Axe, die Sonne untergeht, andere nur das Ende, nachdem für sie die Sonne aufgegangen ist.

Die Beleuchtungsgrenze auf der Erdoberfläche ist nur wenig von einem grössten Kugelkreise verschieden und so theilen die beiden Beleuchtungsgrenzen am Anfange und am Ende der Erscheinung die Erdoberfläche in vier sphärische Zweiecke, welche sich leicht auf dem Globus oder den Planigloben des Atlas angeben lassen, wenn man weiss, dass der gemeinschaftliche Schnittpunkt derselben auf der nördlichen Erdhälfte nahezu unter 60 Grad Nordbreite und 150 Grad Ostlänge von Ferro und der Mittelpunkt des mittleren der Sonne zugewendeten Zweiecks wenig nordwestlich von der Mitte des australischen Festlandes fällt, wo die Sonne während der Mitte der Erscheinung am Mittage im Zenith

steht, und wenn man bedenkt, dass, entsprechend der Dauer der Erscheinung die Ausdehnung des mittleren Zweiecks circa 110 Bogengrade beträgt.

Mit blossem Auge kann der Vorgang wegen der geringen Grösse des kreisförmigen Schattens — der Durchmesser desselben beträgt etwa 4 Bogenminuten — auf der Sonnenoberfläche kaum von irgend jemand wahrgenommen werden; aber auch mit dem Fernrohre gesehen bietet sein Anblick dem Auge nichts dar, was besonderes Interesse erwecken könnte. Die Vorübergänge des Merkur oder kreisförmige Sonnenfleken gewähren dasselbe Schauspiel. Deshalb fragt man mit Recht, warum gerade der Beobachtung der Venusvorübergänge so hoher Werth beigelegt werde.

Es ist bekannt, mit welchem Aufwande von Arbeit die Gradmessungen angestellt werden. Der Hauptzweck derselben ist eine möglichst genaue Bestimmung der absoluten Grösse der Erdkugel oder die Kenntniss der Zahl, welche angibt, wie oft ein ganz willkürlich angenommenes unveränderliches Längenmaass in der Länge des Umfanges oder des Durchmessers der Erde enthalten sei.

Wenn man annimmt, dass die Erde kugelförmig sei, so kann man aus blossen Fixsternbeobachtungen ein dem Zwecke sehr vollkommener Belehrung genügendes Bild der Erdoberfläche auf einer Kugel von ganz beliebigem Durchmesser entwerfen, ohne zu wissen oder zu fragen, in welchem Verhältnisse der willkürlich gewählte Durchmesser zu dem der wirklichen Erdkugel steht. Die genaue Bestimmung dieses Verhältnisses macht die sehr mühevollen Erdgradmessungen nöthig.

Aehnliches findet wieder bei unserer Kenntniss des Sonnensystemes statt. Wenn man annimmt, dass das Sonnencentrum fest sei, und die Planeten in Ellipsen sich um dasselbe bewegen, so könnte man die Gestalt der Ellipse, welche die Erde beschreibt, indem man ihrer grossen Axe irgend eine beliebige Länge gäbe, dadurch finden, dass man durch sehr vollständige fortgesetzte Messung der scheinbaren Grösse des Sonnendurchmessers, während ganzer Jahresumläufe die Zunahme und Abnahme der Entfernung, welche im umgekehrten Verhältnisse der scheinbaren Durchmesser der Sonne steht, bestimmte. Lage und Form dieser Ellipse wäre demnach gegeben, und man könnte, indem man die beliebig angenommene halbe grosse Axe dieser Ellipse als Maasseinheit annähme, die Masse der Sonne als Masseneinheit, die Massen der Planeten aber als überaus klein, durch die von der Erde aus gemachten Winkelmessungen das ganze Sonnensystem in der Weise construiren, wie es die Planetarien darstellen, deren praktische Ausführung bei den eigenthümlichen Grössenverhältnissen des Sonnensystems freilich zu besonderen Maass-Reductionen nöthigt, wie sie bei der Reliefdarstellung der Erdoberfläche ebenfalls üblich sind.

Denkt man dann die verschiedenen Bahnen um ihre Schnittlinie mit der Ebene der Erdbahn gedreht, oder sonst wie auf die Erdbahn-Ebene projicirt, so erhält man das Bild des Sonnensystems, wie es gewöhnlich in der mathematischen Geographie dargestellt wird. In diesen Bildern sind die Planeten meist fehlerhafter Weise an beliebigen Puncten ihrer Bahnen eingetragen, während dieselben doch das System nur in einem einzigen genau anzugebenden Zeitmomente darstellen können, in welchem jeder Planet in einem bestimmten Puncte seiner Bahn sich befindet.

Weiter als bis zu einer solchen Darstellung des Sonnensystems geht das Erkenntniss - Bedürfniss für den Zweck der allgemeinen Bildung nicht. Für diesen Zweck hat die Beobachtung der Venusvorübergänge höchstens das Interesse, dass man sich überzeuge, in wie weit die gemachten Messungen, auf denen die Construction des Modelles beruht, an demselben, wenn es in Bewegung gesetzt wird, Constellationen herbeiführen, die mit den wirklich stattfindenden übereinstimmen. Wenn aber die Wege der Planeten in bestimmten Zeiträumen mit irgendwie gewählten Längen oder die kosmischen Massen, ihre Geschwindigkeiten und bewegenden Kräfte mit gegebenen irdischen Kräften verglichen werden sollen, dann hat das Resultat der ganzen Arbeit nur den Werth einer Vorstellung, es fehlt der Maassstab.

Wenn man die absolute Länge einer einzigen bestimmten Linie des Systemes messen oder in bekanntem Maasse angeben kann, dann erst beherrscht man die Wirklichkeit der Vorgänge. Diese Länge kann der Natur der Sache nach keine andere sein, als die Entfernung des Mittelpunctes der Erde vom Mittelpuncte der Sonne in einem bestimmten Zeitmomente.

Keiner der Planeten kann der Erde jemals so nahe kommen, als die Venus zur Zeit ihrer Vorübergänge vor der Sonne. Da man die Umlaufszeiten der Planeten durch directe Beobachtung kennt und durch diese die Winkelgeschwindigkeit derselben in Bezug auf das Sonnencentrum, so genügt die genaue Messung der Zeit, welche verfliesst, während der Planet über einen gemessenen Theil der Sonnenoberfläche sich bewegt, um die Entfernung des Planeten vom Beobachtungsorte zu bestimmen. Wird der Vorübergang von mehreren Puncten aus beobachtet, deren gegenseitige Lage auf der Erdoberfläche bekannt ist, so ergibt die Vergleichung der Beobachtungen auf eine neue Weise die Entfernung der Erde von der Venus in absolutem Maase, und da die Verhältnisse der Entfernungen von den Verhältnissen der bekannten Umlaufszeiten nach den Kepler'schen Gesetzen abhängen, die absolute Entfernung der Erde von der Sonne.

Die Bestimmung dieser Länge in absolutem Maasse ist es, welche den Venusvorübergängen ihr hohes Interesse verleiht.

Alle diese Betrachtungen und Constructionen beruhen auf der Annahme, dass das Centrum der Sonne selbst unbeweglich sei, und dass die Planeten sich in festen Ellipsen um dasselbe drehen.

Die Vorstellung vom Sonnensysteme, in welcher nur die relative Bewegung der einzelnen Körper in Bezug auf das als fest gedachte Sonnencentrum im Betracht gezogen wird, obgleich sie durchaus unnatürlich ist und obgleich sie dem Gravitationsgesetze geradezu widerspricht, hat bei den eigenthümlichen Massen- und Entfernungsverhältnissen unseres Sonnensystemes, in welchem die Masse der Sonne die der übrigen Körper des Systemes beträchtlich überwiegt, den Vortheil, dass in vielen Fragen höchst nützliche Vereinfachungen der Berechnung darauf gegründet werden können. Durch diese Auffassung aber wird das für uns grossartigste und uns zunächstliegende Beispiel freier Massen, die durch ihnen selbst innewohnende Kräfte ohne Hinderniss beständig bewegt werden, seiner für die Uebung der Vorstellungskraft werthvollsten Eigenschaft, seiner völligen

Freiheit nämlich, beraubt. Das System wird an einen Punct gebunden, welcher als fest betrachtet wird, während er doch im Allgemeinen genau dieselbe Bewegung auszuführen hat, wie jeder der andern.

Damit das Centrum der Sonne ein absolut fester Punct sein könnte, müssten nicht nur die beständigen Anziehungen, welche von den sämmtlichen Planeten auf den Sonnenkörper ausgeübt werden und denselben zur Bewegung nöthigen, sich in jedem Momente gegenseitig aufheben, sondern es müsste auch der Sonnenkörper selbst von jeder ihm ursprünglich eigenen bewegenden Kraft völlig frei sein.

Schon bei den Alten und noch mehr seit Copernicus sind mannigfaltige Versuche gemacht worden, die Möglichkeit, dass das Centrum der Sonne stillstehe, zu erklären; es sollten auch die Einwirkungen der Planeten, analog der Wirkung fortgesetzter Stösse auf eine unelastische Masse, nur Molecularwirkungen am Sonnenkörper erzeugen: es ist aber durch die sorgfältige Bestimmung der Fixsternbewegungen bewiesen, dass das ganze Sonnensystem sich in Bewegung befindet, und in neuster Zeit sind durch sinnreiche Anwendung der Spectralanalyse neue Gründe und genauere Bestimmungsmittel dafür aufgefunden. Es ist für uns viel gewisser, dass das Sonnensystem sich bewegt, als für Galilei, dass die Erde sich bewege. Gesetzt aber auch, wir wären nicht thatsächlich belehrt über die Existenz und Beschaffenheit der Bewegung des Sonnencentrums und mit ihm des ganzen Systemes, und wir hätten Grund, dasselbe als an einen festen Punct gebannt vorzustellen, so würde dennoch die Betrachtung der Bewegung einer Anzahl völlig freier nur durch ursprüngliche Wurfkräfte und ihre gegenseitige Anziehung oder Abstossung nach bestimmten Gesetzen getriebener Massen oder Punkte zu den nothwendigen Erfordernissen einer vollkommenen Verstandesausbildung gehören.

Auf die Ansicht des Copernicus, dass die Sonne stillstehe und die Planeten sich in Kreisen um dieselbe bewegen, folgte Keplers Einsicht, dass die Bahnen der Planeten Ellipsen seien, und aus ihr entsprang die grosse Hypothese von der allgemeinen Gravitation. Mag diese nun in Wahrheit der dem menschlichen Verstande entsprechende Ausdruck des allgemeinsten Naturgesetzes sein oder nur eine unvollkommene Form desselben, ihre Kenntniss wird immer, wie die der euclidischen Geometrie ein unentbehrliches Hülfsmittel für das Verstehen der Himmelserscheinungen wie überhaupt der Bewegungen freier Massen oder Molecüle bleiben, und es muss alle Kraft des Verstandes angewendet werden, um sie in gesicherter Weise demselben anzueignen.

Es entsteht demnach für einen guten Elementar-Unterricht in der Lehre von der Bewegung der Himmelskörper die Forderung, das vom Centrum der Sonne aus für einen beliebig gewählten Moment richtig construirte ruhende Bild des Sonnensystemes in ein dem Gravitationsgesetze entsprechend bewegtes System freier, im Wesentlichen gleichbewegter Körper übergehen zu lassen.

Zu diesem Zwecke würde man, so scheint es, als geeignetesten Standpunct der Betrachtung einen ausserhalb der Bewegung befindlichen, absolut ruhenden Punct wählen, man würde jedoch bald erfahren, dass von einem solchen aus das Spiel der Sphären mit der Vorstellung nicht erfassbar ist. Es gibt aber in jedem solchen Systeme wenigstens

einen Punct, für welchen man sich einen Theil der bewegenden Kräfte gewissermaasen vereinigt denken kann und von dem aus es möglich ist, richtige, der Wirksamkeit des Gesetzes entsprechende und verhältnissmässig leicht zu reproducirende Vorstellungen von dem Vorgange der Bewegung aufzunehmen.

Wenn zwei Puncte fest mit einander verbunden sind, und auf beide zugleich parallele Kräfte wirken, so gibt es, je nachdem die beiden Kräfte in demselben oder im entgegengesetzten Sinne wirken, zwei Puncte von solcher Eigenschaft, dass man durch eine einzige Kraft den beiden wirkenden Kräften das Gleichgewicht halten kann, im Falle der Gleichstimmigkeit beider Kräfte mit der Summe, im andern mit der Differenz derselben. Diese beiden Puncte theilen die gerade Verbindungslinie der zuerst angenommenen Puncte nach dem Hebelgesetze harmonisch im umgekehrten Verhältnise der Grösse der wirkenden Kräfte. In dem hier betrachteten Falle nennt man die beiden Theilpuncte Unterstützungspuncte. Denkt man sich aber statt der beiden Angriffspuncte Massen, denen parallele entgegengesetzt oder gleich gerichtete Druck- oder Schwerkräfte innewohnen, dann nennt man die beiden Theilpuncte den äusseren und den inneren gemeinschaftlichen Schwerpunct dieser Massen. Diese beiden Schwerpuncte haben auch dann noch ausgezeichnete Eigenschaften, wenn man die beiden Massen frei und jede für sich bewegt sein lässt, und auf der Kenntniss und Anwendung dieser Eigenschaften beruht die Möglichkeit, sich räumlich vorzustellen, was geschieht, wenn beide Massen zugleich eine gesetzmässige Bewegung beginnen. Mathematisch betrachtet sind beide Puncte von gleichem Werthe, für den vorliegenden Zweck aber beschränkt man sich auf die Betrachtung des inneren gemeinschaftlichen Schwerpunctes freier gesetzmässig bewegter Massen.

---

## II. Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes mehrerer Massen, deren einzelne Schwerpuncte mit gleichförmiger Geschwindigkeit in graden Linien fortschreiten.

Man betrachte zuerst nur zwei Massen, etwa zwei Kugeln, bei denen von aller Rotation abgesehen nur die Bewegung des Mittelpunctes, welche gleichförmig und geradlinig sein soll, aufgefasst wird.

Seien zunächst A und B zwei Grade, welche in derselben Ebene liegen, die Wege der beiden Massen, die Puncte $A_1$, $A_2$ zwei Orte der einen und $B_1$, $B_2$ die gleichzeitigen Orte der anderen Masse, sei $C_1$ der Punct, welcher die Entfernung $A_1B_1$ im umgekehrten Verhältnisse der Zahlen theilt, welche angeben, wie oft dieselbe Masseneinheit in jeder der Massen enthalten ist, so ist also $C_1$ der zu $A_1$ und $B_1$ gehörige Ort des gemeinschaftlichen Schwerpunctes der beiden Massen.

Denkt man zuerst nur die auf A gehende Masse bewegt von $A_1$ nach $A_2$, während die in $B_1$ befindliche ruht, so wird der gemeinschaftliche Schwerpunct auf einer durch $C_1$ gehenden zu A parallelen Graden fortschreiten bis zum Schnittpuncte $C_a$ dieser Parallele mit $B_1A_2$.

Indem dieser gemeinschaftliche Schwerpunct die Grade $C_1C_a$ durchläuft, was unzweifelhaft ist, bewegt er sich aber gerade so, als ob in ihm die beiden Massen vereinigt wären und die Kraft, welche die Bewegung des Punctes auf A hervorgebracht hat, auf ihn gewirkt hätte.

Denn sein Weg hat die Richtung der Kraft, und die Länge desselben verhält sich zur Länge des von der auf A gehenden Masse zurückgelegten, weil $C_1$ die $A_1B_1$ im umgekehrten Verhältnisse der Grössen der beiden Massen theilt, wie die auf A gehende Masse zur Summe der beiden Massen.

Denkt man aber dann die auf B gehende Masse von $B_1$ allein bewegt von $B_1$ bis $B_2$, während die andere in $A_1$ ruht, dann wird ebenso der gemeinschaftliche Schwerpunct eine zu $B_1B_2$ parallele Grade $C_1C_b$ durchlaufen, das heisst sich gerade so bewegen, als ob in ihm beide Massen vereinigt wären und auf ihn die bewegende Kraft wirkte. Man kann also schliessen, dass, wenn beide Kräfte zugleich wirken und die eine Masse von $A_1$ nach $A_2$, die andere von $B_1$ nach $B_2$ treiben, der gemeinschaftliche Schwerpunct beider Massen sich von $C_1$ aus so bewegen wird, als ob beide Massen in ihm vereinigt wären und beide Kräfte zugleich auf ihn wirkten; also nach dem Parallelogramm der Kräfte oder, wie man in diesem Falle sagt, nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten oder Bewegungen, das heisst in der Diagonale des durch $C_1C_a$ und $C_1C_b$ bestimmten Parallelogrammes von $C_1$ nach $C_2$. Man findet auch durch eine rein geometrische Betrachtung, dass der Punct $C_2$, welcher der Endpunct der Diagonale des durch $C_1C_a$ und $C_1C_b$ bestimmten Parallelo-

grammes ist, die Linie $A_2B_2$ in dem dem umgekehrten Verhältnisse der Massen gleichen Verhältnisse $A_1C_1 : A_2C_2$ theilen muss, d. h. mit diesem Theilpuncte zusammenfällt.

Auf der Annahme und Einübung dieses geometrisch - dynamischen Satzes beruht allein die Möglichkeit, das System der Bewegung der Himmelskörper fasslich und die Erwerbung so schöner Einsicht einem Jeden zugänglich zu machen. Betrachtet man die Linien $A_1B_1$; $A_1B_2$ und $B_2A_1$; $B_2A_2$ als die vier Seiten eines überschlagenen Viereckes, dann erscheint der Satz, geometrisch betrachtet, als eine einfache Umkehrung des bekannten Satzes: Wenn die gegenüberliegenden Seiten eines beliebigen Viereckes von den gegenüberliegenden Ecken aus in gleichem Verhältnisse getheilt werden, so bilden die Verbindungslinien der entsprechenden Endpuncte ein Parallelogramm. Man kann auch, indem man die Theilung nur in der Mitte der Seiten stattfinden lässt, durch eine leicht vorzunehmende zweimalige Verallgemeinerung des Satzes: Die vier Mittelpuncte der Seiten eines beliebigen Viereckes sind die vier Eckpuncte eines Parallelogrammes, von den einfachen Congruenz-Sätzen aus und mit der gewöhnlichen Art der Umkehrung durch indirectes Verfahren zum Beweise des Satzes kommen, wenn man von der Berücksichtigung incommensurabeler Längen absieht.

Der Satz kann geometrisch auch als eine Umkehrung des Transversalen-Satzes, den man jetzt häufig Menelaos nennt, aufgefasst werden. Seien A und B die beiden Graden, auf welchen zwei Puncte $A_1$ und $B_1$ liegen, deren Verbindungslinie in $C_1$ in bestimmtem Verhältnisse getheilt wird, und sei $C_0$ der Schnittpunct der beiden Graden, so hat man das Dreieck $A_1B_1C_0$. Eine durch $C_1$ gehende Grade schneide die A und die B in $A_0$ und $B_0$, so hat man nach dem erwähnten Satze

$$C_0A_0 \cdot A_1B_0 \cdot B_1C_1 : A_0B_1 \cdot B_0C_0 \cdot C_1A_1 = -1.$$

Bleibt nun $B_1C_1 : C_1A_1$, d. h. das Verhältniss der Massen, ungeändert, so bleibt demnach auch

$$C_0A_0 \cdot A_1B_0 : A_0B_1 \cdot B_0C_0$$

ungeändert, und wenn in diesem Verhältnisse entweder

$$A_1B_0 : A_0B_1 \text{ oder}$$
$$B_0C_0 : C_0A_0$$

ungeändert bleibt, so bleibt auch das andere ungeändert und umgekehrt. Das heisst, mit Anwendung der angegebenen Beziehungen, wachsen die Linien $A_1B_0$ und $A_0B_1$, indem sich die beiden Massen bewegen, so dass das Längen - Verhältniss derselben ungeändert bleibt, so hat die Grade $B_0A_0$, der Weg des gemeinschaftlichen Schwerpunctes, eine unveränderliche Lage — und umgekehrt schreitet der Schwerpunct auf einer Graden fort, so nehmen die Wege in constantem Verhältnisse zu. Um zu zeigen, dass dann auch der Schwerpunct mit constanter Geschwindigkeit fortschreitet, hätte man das Dreieck $A_0B_0C_0$ zu betrachten.

Dasselbe Resultat erhält man nach der analytischen Methode. Seien die beiden Graden, welche die Wege der beiden Massen darstellen, Coordinaten-Axen eines ebenen Coordinaten-Systems. Die Verbindungslinie zweier gleichzeitigen Oerter habe die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Dann sind die Coordinaten eines die Verbindungslinie der beiden Massen im Verhältniss von $m_1 : m_2$ theilenden Punctes

$$x_1 = \frac{am_1}{m_1 + m_2} \qquad y_1 = \frac{bm_2}{m_1 + m_2}.$$

Ein zweiter Punct liege auf einer zweiten Graden

$$\frac{x}{a + \alpha} + \frac{y}{b + \beta} = 1,$$

welche die Massen verbindet, und theile die Verbindungsstrecke auf dieselbe Weise in demselben Verhältnisse, so sind seine Coordinaten

$$x_2 = \frac{(a + \alpha)m_1}{m_1 + m_2} \qquad y_2 = \frac{(b + \beta)m_2}{m_1 + m_2}.$$

Man hat also zur Bestimmung der Parameter, $a_1$ und $b_1$, einer Graden,

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1,$$

welche durch beide Puncte geht, zwei Gleichungen

$$\frac{am_1}{(m_1 + m_2)\xi} + \frac{bm_2}{(m_1 + m_2)\eta} = 1,$$

$$\frac{(a + \alpha)m_1}{(m_1 + m_2)\xi} + \frac{(b + \beta)m_2}{(m_1 + m_2)\eta} = 1.$$

Zieht man die erste von der zweiten ab, so erhält man

$$\frac{\alpha m_1}{(m_1 + m_2)\xi} + \frac{\beta m_2}{(m_1 + m_2)\eta} = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{\xi}{\eta} = -\frac{\alpha m_1}{\beta m_2}.$$

Das heisst, die Richtung der Graden oder auch das Verhältniss ihrer Parameter ist nur abhängig vom Verhältnisse $\frac{m_1}{m_2}$ und vom Verhältnisse $\frac{\alpha}{\beta}$; sind diese beiden also constant, so hat die Grade eine feste Richtung, und ist einer ihrer Puncte unmittelbar gegeben oder durch gegebene Grössen bestimmt, dann ist der Ort des Punctes eine einzige, völlig bestimmte Grade.

Im Allgemeinen berühren die sämmtlichen Verbindungslinien je zweier Puncte, in welchen die beiden bewegten Körper sich in denselben Momenten befinden, eine bestimmte Parabel.

Denn jede fünf Graden in der Ebene sind Tangenten eines vollständig bestimmten, reellen Kegelschnittes, der, je nachdem die Graden zu zweien oder mehreren parallel sind oder zich zu dreien oder mehreren in demselben Puncte schneiden oder parallel sind, auch in eine Grade oder einen Punct übergehen kann.

Hält man irgend zwei der fünf Graden fest, so wird jede derselben von den drei übrigen Graden in drei Puncten geschnitten, so dass zu jedem Puncte der einen Graden ein einziger bestimmter Punct der anderen gehört. Wählt man auf einer der beiden festen

Graden irgend einen vierten beliebigen Punct, so bestimmt derselbe auf dieser Graden in beliebiger Zuordnung mit den drei anderen Puncten derselben ein Doppelverhältniss. Bestimmt man nun auf der anderen festen Graden aus den entsprechenden Puncten in gleicher Zuordnung einen vierten Punct von gleichem Doppelverhältnisse und verbindet denselben mit seinem entsprechenden auf der ersten Graden, so ist die Verbindungslinie eine neue Tangente des durch die gegebenen fünf Graden bestimmten Kegelschnittes. Auf diese Weise können durch blosse Anwendung der Graden alle Tangenten des Kegelschnittes d. h. der Kegelschnitt selbst construirt werden. Ist insbesondere eine der Tangenten die unendlich ferne Grade, so verwandelt sich das Doppelverhältniss, weil die Abstände zweier im Endlichen liegenden Puncte einer Graden von dem unendlich fernen Puncte dieser Graden als gleich betrachtet werden, jedes der Doppelverhältnisse in ein einfaches, und umgekehrt kann jedes einfache Verhältniss der Abstände zweier Puncte einer Graden von demselben dritten Puncte dieser Graden als ein Doppelverhältniss mit hinzugedachtem unendlich fernen Puncte betrachtet werden. Findet also auf zwei Graden ein einfaches Verhältniss und Gleichheit zwischen den Abständen je zweier Paare entsprechender Puncte statt, so sind alle Verbindungslinien solcher entsprechenden Puncte Tangenten eines Kegelschnittes, welcher die unendlich ferne Grade ebenfalls zur Tangente hat. Dieser Kegelschnitt ist die Parabel oder eine Ellipse mit unendlicher Länge der Hauptaxe. Oder in Steiner'scher Ausdrucksweise: die Verbindungsgraden je zweier entsprechenden Puncte ähnlicher Punctreihen in projectivischer Lage sind Tangenten einer bestimmten Parabel.

In analytischer Behandlung: Seien die beiden Graden, auf denen sich die beiden Körper bewegen, die Coordinaten- Axen und

1) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ eine feste Grade und

2) $\frac{x}{a + \alpha} + \frac{y}{b + \lambda\alpha} = 1$ eine veränderliche Grade mit der

Beschränkung, dass die Zunahmen ihrer Parameter in dem constanten Verhältnisse $1:\lambda$ stehen. Löst man die zweite Gleichung nach $\alpha$ auf, so erhält sie die Form

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0,$$

in welcher p und q lineare Functionen von x und y sind, die ausserdem von den Constanten a, b und $\lambda$ abhängen. Differenziirt nach $\alpha$ erhält man

$$2\alpha + p = 0$$

als Gleichung einer Graden, welche durch den Schnittpunct der Graden 2) mit der durch unendlich kleine Zunahme von $\alpha$ bestimmten Graden geht.

Hieraus folgt

$$\alpha = -\frac{p}{2}$$

und durch Substitution dieses Werthes in die obige Gleichung

$$\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{p^2}{4} - q = 0;$$

dieses ist die Gleichung einer Parabel, da p und q lineare Functionen von x und y sind.

Brennpunct, Scheiteltangente und Directrix dieser Parabel kann man auch leicht synthetisch construiren. Beschreibt man um eines der von irgend welchen dreien der Graden gebildeten Dreiecke einen Kreis und einen zweiten Kreis um ein Dreieck, welches von irgend zweien der drei ersten Graden und einer beliebigen vierten Graden des Systems von Graden gebildet wird, so ist derjenige Schnittpunct der beiden Kreise, welcher kein Eckpunct der Dreiecke ist, Brennpunct, und die Grade durch zwei Fusspuncte irgend zweier Perpendikel vom Brennpuncte auf zwei Seiten eines der beiden Dreiecke die Scheiteltangente der Parabel. Verlängert man die beiden Perpendikel über ihre Fusspuncte hinaus um ihre eigene Länge, so ist die Grade durch ihre Endpuncte die Directrix.

Wenn die beiden bewegten Körper zugleich in dem Schnittpuncte ihrer Wege zusammengetroffen sind, oder bei fortgesetzter Bewegung in demselben zusammentreffen werden, das heisst, wenn das Verhältniss ihrer Geschwindigkeiten gleich ist dem entsprechend genommenen Verhältnisse ihrer gleichzeitigen Abstände vom Schnittpuncte: dann sind alle Verbindungslinien ihrer gleichzeitigen Orte einander parallel, und die Parabel, die sie einhüllen, degenerirt in eine zu ihrer Richtung parallele Grade durch den Schnittpunct, und der Weg des gemeinschaftlichen Schwerpunctes geht ebenfalls durch denselben Punct, indem er gewissermaassen Scheiteltangente von unbestimmter Richtung wird. Sind dann zugleich die beiden Massen einander gleich, so bilden die beiden Wege mit dem Wege des gemeinschaftlichen Schwerpunctes und der degenerirten Parabel vier harmonische Strahlen, welche, wenn auch die Geschwindigkeiten gleich sind, apollonische Strahlenpaare darstellen. Sind die beiden Wege parallel, so treten wieder Besonderheiten auf, von denen jedoch nur der Umstand hervorgehoben werden muss, dass dann zu unterscheiden ist, ob die beiden Körper sich auf derselben Seite irgend einer ihrer Verbindungslinien fortbewegen oder nach verschiedenen Seiten. Im letzteren Falle kann es eintreten, dass der gemeinschaftliche Schwerpunct in Ruhe bleibt oder fest ist, wenn nämlich die Massen sich umgekehrt verhalten wie ihre Geschwindigkeiten. Der gemeinschaftliche Schwerpunct ist dann gewissermaassen der innere Aehnlichkeitspunct der beiden durch die Bewegung der beiden Massen erzeugten geradlinigen Bilder.

Sind mehr als zwei in derselben Ebene gleichförmig und geradlinig fortschreitende Massen zu betrachten: so findet man mit Anwendung desselben dynamischen Grundsatzes, wie er für zwei Körper als gültig angesehen werden muss — dass nämlich auch ein Punct ohne Masse als Träger von Kraft kann angesehen werden — nachdem der Weg des gemeinschaftlichen Schwerpunctes und die Geschwindigkeit desselben aus der Bewegung irgend zweier Massen mit Hülfe des Parallelogrammes der Kräfte bestimmt ist, durch Verbindung eines Ortes desselben mit dem gleichzeitigen eines dritten Körpers den Ort, den Weg und die Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunctes dreier Körper. Die Bestimmung desselben unterliegt in der Reihenfolge der Operationen derselben Willkür, wie in der Arithmetik die Bildung einer Summe aus Summanden oder eines Productes aus Factoren.

Man sieht dabei zugleich, unter welchen Umständen im Falle der Bewegungen in derselben Ebene der für die Betrachtung der Bewegung der Himmelskörper wichtige besondere Fall eintreten kann, dass der gemeinschaftliche Schwerpunct in Ruhe bleibt.

Für die Bewegung im Raume von drei Dimensionen, wenn die beiden geraden Linien, welche die Wege zweier mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitender Körper darstellen, nicht in derselben Ebene liegen, findet die Bestimmung der Bahn und der Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunctes mit Hülfe des Parallelogrammes ebenso statt, wie in der Ebene. Construction und Bezeichnung können unmittelbar auf Vierecke übertragen werden, die nach der Diagonale gebrochen sind, oder durch zwei an derselben Kante liegende Seitenflächen eines Tetraëders gebildet werden. Die Grade, welche als der Weg des gemeinschaftlichen Schwerpunctes gefunden wird, liegt in der durch irgend einen Ort desselben zu den beiden Wegen parallel gelegten Ebene. Die von den sämmtlichen Verbindungslinien in dem gleichzeitigen Orte erzeugte Fläche ist dann eine windschiefe Ebene, ein hyperbolisches Paraboloid, welches mitunter definirt wird als erzeugt von einer Graden, welche drei Grade schneidet, von denen nicht zwei in derselben Ebene liegen, eine davon, aber in einer Ebene, welche beiden andern zugleich parallel ist. Dieselbe Eigenschaft haben dann auch die beiden anderen Graden. Von dieser geometrischen Beziehung macht Olbers Gebrauch zur Erklärung einer früheren Unklarheit in Bezug auf die Bestimmung einer Cometenbahn aus drei vollständigen Beobachtungen.

Man kann unmittelbar aus der Betrachtung der Construction auch sogleich erkennen, dass für zwei Körper, welche nicht in derselben Ebene sich bewegen, der Fall nicht eintreten kann, dass der gemeinschaftliche Schwerpunct in Ruhe bleibt und ebenso, wenn der Weg des gemeinschaftlichen Schwerpunctes zweier Körper mit dem Wege eines dritten nicht in derselben Ebene liegt. Die Bestimmung des Ortes, Weges und der Geschwindigkeit für den gemeinschaftlichen Schwerpunct beliebig vieler, in geraden Linien gleichförmig nach beliebigen Richtungen im Raume fortschreitender Körper besteht demnach in fortgesetzter Anwendung des Parallelogrammes der Kräfte; und man sieht, unter welcher Bedingung es möglich ist, dass der gemeinschaftliche Schwerpunct eines Systems beständig in Ruhe bleibt.

Der im Vorhergehenden mit Hülfe des Parallelogrammes der Kräfte deducirte Satz: „Der gemeinschaftliche Schwerpunct eines Systemes von Körpern, deren jeder in grader Linie mit unveränderlicher Geschwindigkeit sich bewegt oder ruht, muss ebenfalls in gerader Linie mit unveränderlicher Geschwindigkeit sich bewegen oder ruhen“ ist von Newton als ein bei allen Mathematikern unzweifelhaft geltender mechanischer Grundsatz bezeichnet; eine Andeutung des Beweises im geometrischen Sinne enthält der § 58 im fünften Abschnitte des ersten Buches der Principien. Die Anwendung des Satzes auf Körper, deren absolute Bewegung nicht geradlinig ist, wird in den Principien ebenfalls angedeutet; sie bildet nebst ihrem mechanisch analytischen Beweise einen wesentlichen Bestandtheil der Einleitung in die höhere Dynamik.

Bei mindestens drei Körpern kann auch der besondere Fall eintreten, dass die Bewegung des Schwerpunctes eines dieser Körper mit der Bewegung des gemeinschaftlichen

Schwerpunctes aller übrigen zusammenfällt. Annäherungsweise und zeitweilig wird diess immer der Fall sein, wenn die Masse eines der Körper allein die Summe der Massen aller übrigen bedeutend übertrifft.

Für zwei Körper ist es unmittelbar ersichtlich, dass die Bahn des Schwerpunctes, die ja Diagonale eines Parallelogrammes ist, nicht geändert wird, wenn die Geschwindigkeiten beider Körper im gleichen Verhältnisse zunehmen oder abnehmen, nur die Geschwindigkeit des Schwerpunctes wird in gleichem Verhältnisse geändert. Dasselbe gilt, wie man leicht sehen kann, auch für beliebig viele bewegte Körper in beliebigen Bahnen, wenn alle Geschwindigkeiten zugleich in gleichem Verhältnisse ab- oder zunehmen.

Die eine Diagonale eines Parallelogrammes kann aber auch ihrer Lage und Grösse nach vollständig ungeändert bleiben, während die Seiten und Winkel des Parallelogrammes verschiedenartige Veränderungen erfahren. Insbesondere können die Winkel, welche die beiden Seiten mit der Diagonale bilden, in unserem Falle die Bahnrichtungen der beiden bewegten Körper, jede beliebige Grösse annehmen; es werden dann die Seiten des Parallelogrammes oder in unserer Betrachtung die Geschwindigkeiten oder gleichzeitigen Wege der beiden bewegten Körper der Bedingung unterworfen, dass ihr Verhältniss gleich sei dem Verhältnisse der Sinusse der ihnen gegenüberliegenden Winkel. Oder auch, wenn man die Seiten, welche die Geschwindigkeiten darstellen mit a und b, die Diagonale mit d und die andere Diagonale des Parallelogrammes mit c bezeichnet, dann müssen die vier Linien nach dem pythagoreischen Lehrsatze die Bedingung erfüllen, dass

$$2(a^2 + b^2) - c^2 = d^2.$$

Denkt man nun die Bahnrichtungen und die Geschwindigkeiten irgend zweier bewegten Körper gleichzeitig von Moment zu Moment geändert, so jedoch dass eine der gleichbedeutenden Bedingungen (den Fall, dass die beiden Bahnen der bewegten Körper einen gestreckten oder überstumpfen Winkel bilden, zunächst ausgeschlossen) erfüllt bleibt, so wird der gemeinschaftliche Schwerpunct seine geradlinige Bahn mit unveränderter Geschwindigkeit fortsetzen, während die beiden bewegten Körper irgend welche mit der Bedingung verträgliche krummlinige Bewegungen mit veränderlicher Geschwindigkeit im Raume ausführen.

Es kann dabei auch eine der beiden Bahnen der bewegten Körper unverändert eine Grade bleiben und mit constanter Geschwindigkeit durchlaufen werden. Daraus folgt, dass dieselbe Betrachtung auch für drei in der Ebene oder im Raume bewegte Körper gilt, wenn je zwei derselben sich der Bedingung gemäss bewegen, dass ihr gemeinschaftlicher Schwerpunct mit constanter Geschwindigkeit in einer Graden fortschreite. Denn die Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes dreier Körper setzt sich zusammen aus der Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes irgend zweier mit der Bewegung des einzelnen Schwerpunctes des jedesmaligen dritten. Dasselbe gilt nun auch für eine beliebige endliche Anzahl bewegter Körper, welche den auf sie wirkenden Kräften ungehindert nach jeder Richtung folgen können. Auf diese Weise ist es ersichtlich, wie für ein System von Himmelskörpern ein Punct, nämlich der gemeinschaftliche Schwerpunct aller Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit in gerader Linie fortschreiten oder beständig in Ruhe bleiben kann.

---

## III. Absolute Bewegung zweier oder mehrerer freien Körper, welche sich gegenseitig nach dem Gravitationsgesetze anziehen und die ausserdem, wie in Folge eines einmaligen Stosses, das Bestreben zur Bewegung in gerader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit haben.

Wenn zwei Körper sich ohne andere Kräfte nur in Folge gegenseitiger Anziehung bewegen, und die anziehende Kraft ganz allein von der gegenseitigen Entfernung und einer für die Einheit der Entfernung und der Masse geltenden unveränderlichen Grösse, diese selbst als Zahl oder als Linie aufgefasst, abhängt, somit ihrer absoluten Grösse nach für beide Körper dieselbe ist, so wird die Länge des von einem derselben in irgend einem Zeitraume zurückgelegten Weges, wenn beide Körper gleiche Masse haben, also der bewegenden Kraft gleichen Widerstand entgegensetzen, immer gleich der Länge des Weges des anderen Körpers sein. Der Ort des gemeinschaftlichen Schwerpunctes ist und bleibt unveränderlich der Mittelpunct ihrer Verbindungsstrecke. Haben beide Körper ungleiche Massen, so werden die in demselben Zeitraume von beiden zurückgelegten Wege sich umgekehrt wie ihre Massen verhalten, und da ihr gemeinschaftlicher Schwerpunct ihre Verbindungsstrecke ebenfalls in diesem Verhältnisse theilt, so bleibt auch in diesem Falle, weil das Verhältniss zweier Grössen nicht geändert wird, wenn man beide zugleich so vermehrt oder vermindert, dass die Zunahmen oder Abnahmen zugleich das Verhältniss der Grössen behalten, der Ort des gemeinschaftlichen Schwerpunctes unverändert. Beide Körper bewegen sich mit zunehmender Kraft und Geschwindigkeit nach dem stillstehenden gemeinschaftlichen Schwerpuncte, in welchem sie sich zunächst vereinigen, d. h. in demselben Zeitmomente zusammentreffen. Im Falle absoluter Elasticität durchläuft jeder Körper alle Puncte seiner vorigen Bahn mit umgekehrter Reihenfolge der Geschwindigkeiten und man kann die in beständiger Wiederholung von jedem der Körper zurückgelegte doppelte Strecke als eine Ellipse betrachten, deren Brennpuncte an den Enden der Axe liegen.

Tritt zu zwei Körpern ein dritter hinzu, so kann man die ganze Bewegung so construiren, dass man die Masse der beiden ersten Körper in ihrem Schwerpuncte vereinigt auf den dritten nach Verhältniss der Massengrössen wirksam denkt. Die drei gemeinschaftlichen Schwerpuncte je zweier Körper bewegen sich mit dem dritten Körper auf gerader Linie mit beständig zunehmender Kraft und Geschwindigkeit nach dem unbewegten gemeinschaftlichen Schwerpuncte aller drei Körper.

Auf dieselbe Weise folgt für mehr als drei Körper, sie mögen in derselben Ebene oder beliebig im Raume vertheilt sein, dass dieselben sich auf denjenigen geraden Linien, welche ihren Ort mit dem gemeinschaftlichen Schwerpuncte aller übrigen verbinden, nach dem gemeinschaftlichen Schwerpuncte mit zunehmender Kraft und Geschwindigkeit bewegen, in welchem sie sich vereinigen, oder von dem aus sie im Falle absoluter Elasticität

fortwährend dieselbe Strecke zurück durchlaufen. Haben die Körper aber ausser der durch die allgemeine Anziehungskraft hervorgebrachten Bewegung noch das Bestreben, in grader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortzuschreiten, so betrachtet man, um die Bewegungen zu construiren, zunächst zwei Körper, welche das Bestreben haben, in parallelen geraden Linien mit gleichförmigen Geschwindigkeiten fortzuschreiten, welche den Massen umgekehrt proportional sind. In diesem Falle würde der gemeinschaftliche Schwerpunct, wenn keine Anziehung stattfände, wie früher gezeigt ist, ruhen, da aber die Anziehung den Ort des gemeinschaftlichen Schwerpunctes nicht ändert, so wird er auch jetzt ruhen.

Betrachtet man dann zunächst nur die relative Bewegung des einen Körpers in Bezug auf den andern, welchen man als ruhend vorstellt — so kann man nach Newtons Anleitung in den Principien ganz synthetisch deduciren, dass ein Körper, welcher bestimmt ist, mit constanter Geschwindigkeit in gerader Linie fortzuschreiten, und zugleich von einem als ruhend gedachten Centrum angezogen wird, in einem ebenen Kegelschnitte sich bewegt, dessen einer Brennpunct dieses Centrum ist, wenn die anziehende Kraft mit dem Quadrate der Entfernung beider Körper umgekehrt proportionirt ist.

Man bedarf dazu nur weniger Sätze über die Eigenschaften der Kegelschnitte. Die Art des Kegelschnittes ist von der Richtung der Wurfkraft ganz unabhängig und wird durch das Verhältniss zwischen dieser Kraft und der Anziehungskraft bestimmt.

Beschränkt man sich dabei auf die Betrachtung des Falles, in welchem jeder Körper um den andern in relativer Bewegung eine Ellipse beschreibt, so kann man diese Ellipse auf einfache Weise bestimmt denken. Wird nämlich von dem einen der Körper aus fortgesetzt der scheinbare Durchmesser des andern gemessen, so kann man, indem man eine beliebige Länge als grosse Axe annimmt, aus dem Verhältniss des grössten und kleinsten gemessenen scheinbaren Durchmessers den Ort des Brennpunctes auf dieser grossen Axe bestimmen und erhält so die Focaldistanz und Excentricität, also die Gestalt der Ellipse. Mit Anwendung des Satzes, dass bei jeder Centralbewegung die Radienvectoren in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreiben, lässt sich die Richtigkeit der Bestimmungen durch die zwischen dem Maximum und Minimum der Grösse liegenden Messungs-Resultate prüfen.

Kennt man nun auf irgend eine Weise, wie z. B. bei der Erde und Sonne, durch Messung ihrer Wirkung beim freien Falle oder auf das Pendel die Gesammtmasse der Erde, und durch Beobachtung der Ebbe und Fluth, von anderweitigen Bestimmungsmitteln abgesehen, das Verhältniss der beiden Massen, so kann man in der oben angegebenen Ellipse sämmtliche Radienvectoren in diesem Verhältnisse theilen. Man erhält dann die Bahn, welche der gemeinschaftliche Schwerpunct beider Körper in Bezug auf den als unbewegt betrachteten durchläuft. Es war aber angenommen, dass der gemeinschaftliche Schwerpunct unbewegt sei. Verlegt man also alle Radienvectoren parallel mit sich selbst in denselben Punct, welcher den unbewegten geometrischen Schwerpunct darstellt, und begrenzt sie wie in der zuerst construirten Ellipse, so bilden ihre Endpuncte zwei der ersten Ellipse ähnliche Ellipsen, welche die absolute Bewegung der beiden Himmelskörper unmittelbar abbilden. Es ist dabei offenbar ganz gleichgültig für das letzte Resultat, ob

man in der ersten Ellipse den mit grösserer Masse begabten oder den anderen als ruhenden betrachtet hat.

In diesem Falle besteht also die absolute Bewegung beider Körper darin, dass beide um den ruhenden gemeinschaftlichen Schwerpunct ähnliche Ellipsen beschreiben, deren Axen unter einander umgekehrt wie die Massen und zu den Axen der in relativer Bewegung erzeugten Ellipsen wie zur Summe der Massen sich verhalten.

Hat man auf diese Weise die beiden Ellipsen construirt, welche die Bahnen der ganzen absoluten Bewegung darstellen, so sind die gegenüberliegenden Endpuncte jedes der durch den gemeinschaftlichen Schwerpunct gehenden Radienvectoren die zusammengehörigen Orte der beiden bewegten Körper. Die beiden Körper bewegen sich also ebenso, als ob die Summe ihrer Massen im gemeinschaftlichen Schwerpuncte vereinigt, jeden einzelnen nach dem Gravitationsgesetze anzöge.

Aus der elementaren Lehre von der Centralbewegung kennt man die einfache Beziehung, welche zwischen der Grösse der Anziehungskraft und der seitwärts wirkenden Kraft stattfinden muss, damit beide Ellipsen zu concentrischen Kreisen werden.

Sind jedoch die beiden ursprünglichen Kräfte nicht parallel, oder sind sie parallel und das Verhältniss der durch sie erzeugten Geschwindigkeiten ist nicht gleich dem umgekehrten Verhältnisse der Massen, oder finden zugleich beide Abweichungen von den Beschränkungen des vorhergehenden Falles statt, so wird der gemeinschaftliche Schwerpunct beider Körper nicht ruhen, sondern in der im Anfange durch das Parallelogramm der Kräfte bestimmten geraden Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreiten. Die absolute Bewegung der beiden Körper wird dann im Falle der beiden concentrischen Kreise sich darstellen durch zwei gewöhnliche Wellenlinien oder im Falle der Ellipsen durch zwei Curven, wie sie zwei Puncte beschreiben, von denen jeder eine der vorher festliegenden Ellipsen durchläuft, während beide parallel mit sich selbst so verschoben werden, dass ihr gemeinschaftlicher Brennpunct mit der bestimmten Geschwindigkeit auf der bestimmten Graden, dem Wege des gemeinschaftlichen Schwerpunctes, fortschreitet.

Hätte der eine der beiden Körper gar keine eigene Bewegung, so würden die Ellipsen, absolute Elasticität der Massen vorausgesetzt, sich in doppelte Graden verwandeln, und alles übrige sich verhalten wie vorher. Der Wirklichkeit entsprechend werden sich beide Körper, dieselben als fest, undurchdringlich und unelastisch angenommen, im gemeinschaftlichen Schwerpuncte vereinigen, die durch die Gravitation erzeugte lebendige Kraft in Molecularkraft umsetzen und beide Körper würden vereint den Weg des gemeinschaftlichen Schwerpunctes mit der durch das Verhältniss der Summe beider Massen zu der Masse der mit Bewegung begabten, reducirten Geschwindigkeit, die schon vorher dem gemeinschaftlichen Schwerpuncte eigen war, durchlaufen.

Wenn beide betrachteten Körper mit von der Anziehung unabhängiger Bewegung begabt sind, so werden im Allgemeinen die Richtungen der beiden Bewegungen nicht in derselben Ebene liegen. Da die gegenseitige Anziehung auf die Ruhe oder Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes keinen Einfluss hat, so wird auch in diesem Falle der gemeinschaftliche Schwerpunct mit gleichförmiger Geschwindigkeit in gerader Linie

fortschreiten und zwar immer, denn in Ruhe kann er, wenn nur zwei Körper ausserhalb der Ebene sich bewegen, nicht bleiben. Jeder Körper beschreibt in relativer Bewegung um den andern, welcher als unbewegt betrachtet wird, oder, wenn man sich auf ihm befindet, als unbewegt erscheint, einen ebenen Kegelschnitt; Planet um Planet oder Planet um die Sonne und umgekehrt eine ebene Ellipse. Diese bestimmt sich wie im vorhergehenden Falle, wo beide Körper in derselben Ebene bleiben, und aus ihr die beiden Ellipsen, welche beide Körper in relativer Bewegung um den gemeinschaftlichen Schwerpunct beschreiben. Weil dieser aber nicht ruht, sondern in gerader Linie fortschreitet, so lässt sich die absolute Bewegung beider Körper in folgender Weise bestimmen oder beschreiben. Jeder Körper beschreibt um den gemeinschaftlichen Schwerpunct eine ebene Ellipse. Die beiden Ebenen dieser Ellipsen rücken beide parallel einer festen Graden so weiter, dass ihre Schnittlinie durch den gemeinschaftlichen Schwerpunct geht und beide Ellipsen in den Puncten trifft, in welchen die bewegten Körper sich befinden. Der exacte analytische Ausdruck für die Gestalt der Linien, welche beide Körper in absoluter Bewegung durchlaufen, würde demnach für die Bewegung in der Ebene und im Falle der Ruhe des gemeinschaftlichen Schwerpunctes ebene Ellipsen oder Kegelschnitte, im Falle der Bewegung desselben aber krumme Linien aus der Gattung der Cycloiden, in welchen statt der Kreisbogen allgemeinere Kegelschnittbogen vorkämen, darzustellen haben.

Auch ausserhalb der Ebene, im Raume, kann die exacte analytische Darstellung der in Schraubenlinien übergehenden Bahnen für zwei Körper mit denselben Kunstmitteln ausgeführt werden.

Sollen aber die absoluten Bewegungen dreier sich gegenseitig nach dem Gravitationsgesetze anziehender und für sich von irgend welchen Wurfkräften getriebener Körper dargestellt werden, so reichen, wie man weiss, die bekannten analytischen Bestimmungsmittel für räumliche Gestalten nicht aus, um diese Forderung ganz allgemein durch exacte Formeln zu befriedigen.

Für das Ziel aber, das wir uns zu Anfang vorgesetzt haben, nämlich das aus Beobachtung der relativen Bewegung für einen bestimmten Zeitmoment im Raume oder in Projection auf eine Ebene möglichst richtig construirte Bild eines freien Systemes von gravitirenden und durch Wurfkräfte bewegten Körpern in ein der Natur dem Wesen nach entsprechend bewegtes in der Vorstellung übergehen zu lassen, genügen die im Vorhergehenden deducirten Sätze. Die Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes ist allein abhängig von den Wurfkräften und dieser Punct ist der einzige im ganzen Raume, von dem man gewiss wissen kann, dass er sich entweder in Ruhe befindet, oder dass er in gerader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitet. Die gegenseitigen Anziehungen bewirken, dass alle Körper sich zu gleicher Zeit im gemeinschaftlichen Schwerpuncte zu vereinigen streben und entweder durch denselben hindurchgehen oder sich zu zweien oder mehreren in demselben zu vereinigen, wenn in ihnen entweder keine Wurfkräfte wirken, oder diese gerade nach dem gemeinschaftlichen Schwerpuncte gerichtet sind; andernfalls beschreibt jeder in relativer Bewegung um den gemeinschaftlichen Schwerpunct als Brennpunct einen Kegelschnitt, dessen exacte Darstellung, da derselbe von allen

übrigen Körpern bestimmt wird, mit der Zunahme der Zahl der Körper immer schwieriger wird. Ist nun der gemeinschaftliche Schwerpunct des Systemes in Ruhe, so sind die absoluten Bewegungen mit den relativen um diesen Punct identisch; ist derselbe in Bewegung, so sind die absoluten Bewegungen der einzelnen Körper im Wesentlichen auf diesen in gerader Linie gleichförmig fortschreitenden Punct bezogen cycloidische oder schraubenförmige Curven.

Mit Hülfe dieser Sätze ist es auch leicht, die Bedingungen aufzustellen, welche in unserem Sonnensysteme erfüllt sein müssten, damit es der gewöhnlich davon gemachten Vorstellung entsprechen könnte.

Damit das Sonnencentrum in Ruhe bleiben und alle übrigen Körper des Systems eine kegelschnittförmige Linie um dasselbe beschreiben könnten, müsste der gemeinschaftliche Schwerpunct aller übrigen Körper mit dem Sonnencentrum zusammenfallen, dieser gemeinschaftliche Schwerpunct für sich betrachtet müsste in Ruhe bleiben, und der Sonnenkörper auch jeder eigenen Wurfbewegung entbehren.

Man weiss aber aus der Verschiebung der Fixsterne gegen einander nicht allein, dass das ganze System sich fortbewegt, sondern auch nahezu die Richtung und Geschwindigkeit dieser Bewegung. Es könnte nun das Sonnencentrum selbst im gemeinschaftlichen Schwerpuncte des ganzen Systemes liegen und ursprünglich dieselbe geradlinige Wurfgeschwindigkeit haben, wie sie aus den Wurfgeschwindigkeiten aller übrigen Körper des Systemes für den gemeinschaftlichen Schwerpunct folgt.

Da man durchaus nicht alle zum Sonnensystem gehörigen d. h. in die Bewegungen desselben in wahrnehmbarer Weise eingreifenden Massen kennt, so ist die Möglichkeit eines solchen Zustandes im Sonnensysteme nicht ausgeschlossen. Da nun aber nach den bekannten Massen- und Entfernungsverhältnissen der gemeinschaftliche Schwerpunct des Systems nicht mit dem Centrum der Sonne zusammenfällt, so ist die Beantwortung der Frage, wie nun in diesem Falle die Bewegungen stattfinden müssen, und die Begründung der Antwort, soweit dies durch die Sätze der Elementar-Mathematik und Mechanik möglich ist, ein Bedürfniss der Schule. Gewöhnlich sagt man „der gemeinschaftliche Schwerpunct aller Massen des Sonnensystemes fällt zuweilen innerhalb des Sonnenkörpers", man müsste sagen: „Der kürzeste Radiusvector der fast kreisförmigen Ellipse, welche das Sonnencentrum um den gemeinschaftlichen Schwerpunct des Systemes in relativer Bewegung beschreibt, ist kürzer als der Halbmesser der Sonne."

Grade der Umstand, dass das Centrum der Sonne sich vom gemeinschaftlichen Schwerpuncte des gleichförmig bewegten Systemes im Vergleiche zu der räumlichen Ausdehnung des Systemes so sehr wenig entfernt, eine Folge der übermässigen Grösse der Sonnenmasse, ist die Ursache, dass man die Sonne, welche offenbar als Centrum der Molecularthätigkeit im ganzen Systeme dasteht, auch zum Centrum der Massenbewegung gemacht hat, welches sie jedenfalls nur annäherungsweise sein kann. Für die Bahnberechnung entstehen durch diese heliocentrische Auffassung sehr wesentliche Vereinfachungen, aber die Lehre von der Bewegung des Sonnensystemes verliert dadurch den Werth, als grösstes und naheliegendes Beispiel der Bewegung freier Massen im Allgemeinen die-

nen zu können. Die oben ausgeführten Betrachtungen sollen dazu dienen, diesem Mangel für den Zweck des Unterrichtes abzuhelfen.

Die Bewegungen in einem Systeme zweier Körper, die in übergrosser Entfernung von allen andern gravitirenden Massen allein auf einander wirken, wie manche Doppelsterne am Fixsternhimmel sich darstellen, sind damit vollständig bestimmt. Aber auch die Bewegungen in isolirten Systemen von drei oder mehreren Körpern, wie sie als mehrfache Sterne oder Sterngruppen im Universum zu existiren scheinen, lassen sich auf diesem Wege der Vorstellbarkeit nahe bringen. Der allgemein bekannte und als von selbst einleuchtend betrachtete Satz, dass in einem solchen Systeme jeder Körper in relativer Bewegung um jeden andern als Brennpunct irgend einen Kegelschnitt beschreibt, ist nicht geeignet, um als Hülfsmittel für die Erzeugung leicht zu fixirender oder bequem zu reproducirender Vorstellungen zu dienen, und doch sind gerade diese der werthvolle Besitz, welchen man durch diese Art von Verstandesthätigkeit zu erwerben im Stande ist, und wonach man auch auf dem Standpuncte der Schule fast allein trachtet. Wenn man aber den gemeinschaftlichen Schwerpunct aller Körper einführt, für welchen der angeführte Satz ebenfalls gültig ist, so hat man für die Vorstellung den Gewinn, dass dieser Punct, auf den man alle übrigen bezieht, nicht ebenfalls eine durch zahlreiche und beständig veränderliche Einwirkungen bestimmte krumme Linie zu beschreiben hat, sondern dass er entweder ruht, oder gleichförmig auf einer graden Linie fortschreitet. Sein Ort und seine ganze Bewegung ist also vollständig bekannt, wenn man das System in zwei getrennten Momenten als ruhend fixirt hat. Wenn man die oben angegebene Bestimmung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes anwendet, kann man auch durch leicht zu erzeugende Vorstellungen die Veränderungen verfolgen, welche in der Bewegung des Systemes eintreten müssen, wenn in Folge der schon in dem Systeme vorhandenen oder wirkenden Kräfte einer oder mehrere Körper sich ins Unendliche entfernen, durch momentane oder stetige Wirkung sich in Theile trennen, oder wenn mehrere sich vereinigen, oder auch wenn dasselbe durch äussere in dem Systeme vorher nicht vorhandene und plötzlich oder stetig aus unendlicher Ferne in dasselbe eintretende Massen oder Kräfte, die wie freie Massen wirken, geschieht. Für alle diese Vorgänge scheint unser Sonnensystem in den Planetoiden, Trabanten, Ringen, Asteroiden-Schwärmen und Cometen Beispiele darzubieten.

Die Lehre von der Bewegung der Atome in Molecülen, welche als ein neuer Zweig der mathematischen Naturphilosophie so erfolgreich fortschreitet und so zu sagen täglich neue Brücken zwischen dem Kosmos und dem Mikrokosmos baut, bedient sich ebenfalls mit Vortheil der Lehre von der Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes, da dieselbe für jede gesetzmässige Anziehung ebenso wie für gesetzmässige Abstossung anwendbar ist.

Deshalb scheint es an der Zeit, diese Lehren, welche man gewohnt ist, in ihrer universelleren analytischen Form als ein Corollarium zu den Differentialgleichungen der Bewegung anzusehen, durch eine elementare Deduction in den Kreis der Gegenstände allgemeiner höherer Bildung zu ziehen.

---