Integralrechnung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Erstes Kapitel.

Allgemeine Begriffe und Sätze.

§. 1.

Es sey X eine beliebige Function der einen unabhängigen veränderlichen Grösse x. So wie man nach dem Differentialquotienten dieser Function fragen kann; so kann man auch umgekehrt eine Function von x zu finden verlangen, deren Differentialquotient die gegebene Function X, oder was dasselbe ist, deren Differential die Grösse $X\partial x$ ist.

Jede Function, deren Differential die Grösse $X\partial x$ ist, durch deren Differentiation man also diese Grösse erhält, heisst ein Integral von $X\partial x$, und wird im Allgemeinen dadurch bezeichnet, dass man der Grösse $X\partial x$ das Zeichen $\int$, welches in dieser Beziehung das Integralzeichen genannt wird, vorschreibt, so dass also $\int X\partial x$ eine Function, deren Differential $X\partial x$ ist, d. h. eine Function von solcher Beschaffenheit, dass

$$\partial \int X\partial x = X\partial x$$

ist, bezeichnet.

Aus vorstehender Gleichung sieht man auch, dass das Differential- und Integralzeichen, wenn das erstere vor dem letztern steht, sich jederzeit gegenseitig aufheben.

Es würde leicht seyn, den vorhergehenden Begriff des Integrals auf Functionen mit mehr als einer veränderlichen Grösse zu erweitern. Für jetzt wollen wir aber, so lange nicht etwas Anderes besonders bemerkt wird, immer bloss Functionen mit einer veränderlichen Grösse betrachten.

Die Wissenschaft, welche sich mit der Entwickelung der Integrale, d. i mit der sogenannten Integration aller Arten von Differentialen beschäftigt, ist die Integralrechnung.

§. 2.

Die Integrale sind nicht wie die Differentiale völlig bestimmte Grössen. Ist nämlich $f(x)$ ein Integral von $X\partial x$, so dass also $\partial f(x) = X\partial x$ ist; so ist, weil, wenn C eine ganz beliebige constante Grösse bezeichnet, nach D. §. 38.

$$\partial\{f(x) + C\} = \partial f(x) = X\partial x$$

ist, auch $f(x) + C$ ein Integral von $X\partial x$, und es folgt also hieraus, dass, wenn man auf irgend einem Wege ein Integral eines Differentials entwickelt hat, zu diesem Integrale immer noch eine constante, von x also unabhängige Grösse, die aber übrigens an sich ganz willkührlich ist, und der daher jeder beliebige Werth beigelegt werden kann, addirt werden muss.

Ist Y eine beliebige Function von x und also ∂Y deren Differential; so ist nach dem Vorhergehenden immer

$$\int \partial Y = Y + C,$$

und man sieht also hieraus, dass auch dann das Differential- und Integralzeichen sich immer gegenseitig aufheben, wenn das letztere vor dem erstern steht, nur dass man in diesem Falle zu der nach gegenseitiger Aufhebung der beiden Zeichen erhaltenen Function immer noch eine willkührliche Constante addiren muss.

§. 3.

Wenn überhaupt

$$\int X\partial x = f(x) + C$$

ist; so heisst die Differenz

$$\{f(b) + C\} - \{f(a) + C\}$$

zwischen den beiden Werthen, welche unser Integral für $x = a$ und $x = b$ erhält, das zwischen den Gränzen a und b, oder das von $x = a$ bis $x = b$ genommene Integral von $X\partial x$, und wird durch $\int_a^b X\partial x$ bezeichnet.

Da aber offenbar

$$\{f(b) + C\} - \{f(a) + C\} = f(b) - f(a)$$

ist; so ist auch

$$\int_a^b X\partial x = f(b) - f(a),$$

und man sieht also hieraus, dass aus jedem zwischen bestimmten Gränzen genommenen Integrale die willkührliche Constante ganz verschwindet, und dass also ein solches Integral jederzeit eine völlig bestimmte Grösse ist. Man nennt daher auch jedes zwischen bestimmten Gränzen genommene Integral ein bestimmtes Integral.

Weil

$$\int_b^a X\partial x = f(a) - f(b)$$

ist; so ist offenbar immer

$$\int_a^b X\partial x = -\int_b^a X\partial x.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Weil ferner

$$\int_a^b X\partial x = f(b) - f(a),$$

$$\int_b^c X\partial x = f(c) - f(b),$$

$$\int_c^d X\partial x = f(d) - f(c),$$

u. s. w.

$$\int_p^q X\partial x = f(q) - f(p),$$

$$\int_q^A X\partial x = f(A) - f(q)$$

ist; so ist, wie man durch Addition dieser Gleichungen leicht findet,

$$f(A) - f(a)$$

$$= \int_a^b X\partial x + \int_b^c X\partial x + \int_c^d X\partial x + \ldots + \int_p^q X\partial x + \int_q^A X\partial x,$$

d. i. immer

$$\int_a^b X\partial x + \int_b^c X\partial x + \int_c^d X\partial x + \ldots + \int_p^q X\partial x + \int_q^A X\partial x = \int_a^A X\partial x.$$

Bemerkt zu werden verdient, dass man, um das Integral

$$\int X\partial x = f(x) + C$$

zwischen den bestimmten Gränzen a und b zu nehmen, noch auf eine andere Art wie vorher verfahren kann.

Man bestimme nämlich mittelst der Gleichung

$$f(a) + C = 0,$$

die willkührliche Constante C so, dass das gegebene Integral für $x = a$ verschwindet; so erhält man $C = -f(a)$, und

$$f(x) - f(a)$$

ist also, wie auch auf der Stelle in die Augen fällt, der für $x = a$ verschwindende Werth unsers Integrals. Setzt man nun in dem Ausdrucke

$$f(x) - f(a)$$

$x = b$; so erhält man die Differenz

$$f(b) - f(a),$$

d. h. das zwischen den Gränzen a und b genommene Integral von $X\partial x$ oder $\int_a^b X\partial x$. Man sieht also hieraus, dass man das Integral $\int X\partial x$ auch so zwischen den Gränzen a und b nehmen kann, dass man zuerst die willkührliche Constante so

bestimmt, dass das Integral für $x = a$ verschwindet, und in dem auf diese Weise erhaltenen Werthe des Integrals dann $x = b$ setzt.

Der für $x = a$ verschwindende Werth

$$f(x) - f(a)$$

des Integrals von $X\partial x$ ist nach dem Vorhergehenden offenbar nichts anders als das zwischen den Gränzen a und x genommene Integral von $X\partial x$, und kann also durch $\int_a^x X\partial x$ bezeichnet werden. Den für $x = 0$ verschwindenden Werth des Integrals von $X\partial x$ kann man folglich durch $\int_0^x X\partial x$ bezeichnen.

§. 4.

Lehrsatz. Wenn X eine Function von x, α eine constante Grösse bezeichnet; so ist immer

$$\int \alpha X\partial x = \alpha \int X\partial x + C.$$

Beweis. Weil nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung

$$\partial\{\alpha \int X\partial x + C\} = \alpha\partial \int X\partial x = \alpha X\partial x$$

ist; so erhellet die Richtigkeit des Satzes.

§. 5.

Zusatz. Unter denselben Voraussetzungen wie vorher ist

$$\int_a^b \alpha X\partial x = \alpha \int_a^b X\partial x.$$

Der Beweis dieses Satzes hat nicht die mindeste Schwierigkeit.

§. 6.

Lehrsatz. Wenn $X, X_1, X_2, \ldots X_n$ Functionen von x, dagegen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ constante Grössen bezeichnen, und

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \ldots + \alpha_n X_n$$

ist; so ist

$$\int X\partial x = \alpha_1 \int X_1 \partial x + \alpha_2 \int X_2 \partial x + \alpha_3 \int X_3 \partial x + \ldots + \alpha_n \int X_n \partial x + C.$$

Beweis. Weil, wie man nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung leicht findet, das Differential der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der zu beweisenden Gleichung

$$\alpha_1 X_1 \partial x + \alpha_2 X_2 \partial x + \alpha_3 X_3 \partial x + \ldots + \alpha_n X_n \partial x,$$

d. i. $X\partial x$ ist; so erhellet die Richtigkeit des Satzes.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 7.

Zusatz. Unter denselben Voraussetzungen wie vorher ist

$$\int_a^b X\partial x =$$

$$\alpha_1\int_a^b X_1\partial x + \alpha_2\int_a^b X_2\partial x + \alpha_3\int_a^b X_3\partial x + \ldots + \alpha_n\int_a^b X_n\partial x.$$

Der Beweis dieses Satzes hat nicht die mindeste Schwierigkeit.

§. 8.

Lehrsatz. Wenn die Grössen

$$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$$

Functionen von x sind, und eine für jedes x von $x = a$ bis $x = b$ convergirende Reihe bilden, deren Summe s ist; so bilden auch die Integrale

$$\int_a^x u_0\partial x, \int_a^x u_1\partial x, \int_a^x u_2\partial x, \int_a^x u_3\partial x, \int_a^x u_4\partial x, \ldots$$

für jedes x von $x = a$ bis $x = b$ eine convergirende Reihe, und die Summe dieser Reihe ist $\int_a^x s\partial x$; oder wenn, indem wir uns der in D. §. 112. eingeführten Bezeichnung bedienen,

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$
$$\{a = x = b\}$$

ist; so ist immer

$$\int_a^x s\partial x = \int_a^x u_0\partial x + \int_a^x u_1\partial x + \int_a^x u_2\partial x + \int_a^x u_3\partial x + \ldots$$
$$\{a = x = b\}.$$

Beweis. Sey

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + \varphi_n(x);$$

so ist nach §. 7.

$$\int_a^x s\partial x =$$

$$\int_a^x u_0\partial x + \int_a^x u_1\partial x + \int_a^x u_2\partial x + \ldots + \int_a^x u_{n-1}\partial x + \int_a^x \varphi_n(x)\partial x.$$

Setzen wir nun überhaupt

$$\int\varphi_n(x)\partial x = f_n(x) + C;$$

so ist

$$\int_a^x \varphi_n(x)\partial x = f_n(x) - f_n(a).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach D. §. 110. I. ist aber

$$f_n(x) = f_n(a) + (x-a)\, f'_n(a + \varrho(x-a)),$$

oder, weil $f'_n(x) = \varphi_n(x)$ ist,

$$f_n(x) - f_n(a) = (x-a)\, \varphi_n(a + \varrho(x-a)),$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Also ist

$$\int_a^x \varphi_n(x)\partial x = (x-a)\ \varphi_n(a + \varrho(x-a)),$$

und folglich

$$\int_a^x s\,\partial x = \int_a^x u_0 \partial x + \int_a^x u_1 \partial x + \int_a^x u_2\,\partial x + \ldots$$

$$\ldots + \int_a^x u_{n-1}\partial x + (x-a)\varphi_n(a + \varrho(x-a)).$$

Weil nun nach der Voraussetzung die Reihe u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, ... für jedes x von $x = a$ bis $x = b$ convergirt; so nähert sich, für jedes x von $x = a$ bis $x = b$, die Grösse $\varphi_n(x)$, wenn n wächst, der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Die Grösse $a + \varrho(x-a)$ ist, weil ϱ ein positiver echter Bruch ist, für jedes x von $x = a$ bis $x = b$, wie leicht erhellen wird, immer zwischen a und b enthalten, d. h. immer grösser wie die kleinere, kleiner wie die grössere dieser beiden Grössen. Also nähert sich, wenn n wächst, für jedes x von $x = a$ bis $x = b$, auch $\varphi_n(a + \varrho(x-a))$, und folglich offenbar auch $(x-a)\varphi_n(a + \varrho(x-a))$, der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Daher ist

$$\int_a^x s\,\partial x = \int_a^x u_0 \partial x + \int_a^x u_1 \partial x + \int_a^x u_2 \partial x + \int_a^x u_3 \partial x + \ldots,$$

$$\{a = x = b\}$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 9.

Zusatz. Wenn

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

$$\left\{ a \overset{=}{\underset{<}{<}} x \overset{\leq}{\underset{<}{=}} b \right\}$$

ist; so ist auch

$$\int_a^x s\,\partial x = \int_a^x u_0 \partial x + \int_a^x u_1 \partial x + \int_a^x u_2 \partial x + \int_a^x u_3 \partial x + \ldots$$

$$\left\{ a \overset{=}{\underset{<}{<}} x \overset{\leq}{\underset{<}{=}} b \right\}$$

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem in §. 8. bewiesenen Satze.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 10.

Der Begriff des Integrals lässt sich auf folgende Art noch erweitern.

Man versteht nämlich, wenn wieder X eine Function von x bezeichnet, überhaupt unter dem Integral von $X\partial x^n$ eine Function von x, deren $n$tes Differential $X\partial x^n$ ist, und bezeichnet, wie hier wenigstens geschehen soll, ein solches Integral durch $\overset{n}{\int} X\partial x^n$, so dass also für jede durch dieses Symbol bezeichnete Function

$$\partial^n \overset{n}{\int} X\partial x^n = X\partial x^n$$

ist.

Man kann übrigens das Integral $\overset{n}{\int} X\partial x^n$ immer bloss durch gewöhnliche Integrale ausdrücken, indem sich nämlich leicht zeigen lässt, dass immer

$$\overset{n}{\int} X\partial x^n = \int\partial x \int\partial x \int\partial x \ldots \int\partial x \int X\partial x,$$

wo die Anzahl der Integralzeichen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens $= n$ ist, d. h.

$$\overset{2}{\int} X\partial x^2 = \int\partial x \int X\partial x,$$

$$\overset{3}{\int} X\partial x^3 = \int\partial x \int\partial x \int X\partial x,$$

$$\overset{4}{\int} X\partial x^4 = \int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x,$$

$$\overset{5}{\int} X\partial x^5 = \int\partial x \int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x,$$

u. s. w.

gesetzt werden kann.

Um dies zu beweisen, wird es hinreichend seyn, bloss die Grösse

$$\int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x$$

zu betrachten.

Durch successive Differentiation erhält man leicht

$$\partial\int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x = \partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x,$$

$$\partial^2\int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x = \partial x . \partial\int\partial x \int\partial x \int X\partial x = \partial x^2 \int\partial x \int X\partial x,$$

$$\partial^3\int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x = \partial x^2 . \partial\int\partial x \int X\partial x = \partial x^3 \int X\partial x,$$

$$\partial^4\int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x = \partial x^3 . \partial\int X\partial x = X\partial x^4.$$

Also ist

$$\int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x$$

wirklich eine Function, deren viertes Differential $X\partial x^4$ ist, und man kann folglich

$$\overset{4}{\int} X\partial x^4 = \int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x$$

setzen, wie bewiesen werden sollte.

Bei jeder der n auf einander folgenden Integrationen, durch welche hiernach das Integral $\overset{n}{\int} X\partial x^n$ erhalten wird, muss immer eine willkührliche Constante eingeführt werden, so dass also dieses Integral jederzeit im Allgemeinen n willkührliche Constanten enthalten wird.

Zweites Kapitel.

Von der Zerlegung der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen in Partialbrüche.

§. 11.

Die Zerlegung der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen in sogenannte Partial- oder einfache Brüche ist zwar nur eine Hülfsoperation der Integralrechnung, für diese Wissenschaft aber von so grosser Wichtigkeit, dass wir in derselben, ohne die in Rede stehende wichtige Operation vollständig kennen gelernt zu haben, keinen Schritt weiter gehen können.

Im Allgemeinen bemerken wir, dass wir im Folgenden bloss sogenannte echte gebrochene rationale algebraische Functionen, d. h. solche gebrochene rationale algebraische Functionen betrachten werden, deren Zähler eine ganze rationale algebraische Function von einem niedrigern Grade wie der Nenner ist. Dass dadurch die Allgemeinheit der Untersuchung nicht im Mindesten beeinträchtigt wird, erhellet auf der Stelle, weil jede unechte gebrochene rationale algebraische Function, deren Zähler eine ganze rationale algebraische Function von einem höhern oder von demselben Grade wie der Nenner ist, mittelst gemeiner algebraischer Division in eine ganze und in eine echte gebrochene rationale algebraische Function zerlegt werden kann.

§. 12.

Lehrsatz. Wenn die ganze rationale algebraische Function

$$X = Ax^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

des $n$ten Grades für $x = a$ verschwindet; so ist dieselbe jederzeit durch $x - a$ ohne Rest theilbar,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und der Quotient ist eine ganze algebraische Function des $(n-1)$sten Grades.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist

$$X = Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

und

$$0 = Aa^n + A_1a^{n-1} + A_2a^{n-2} + \ldots + A_{n-1}a + A_n.$$

Subtrahirt man nun die zweite Gleichung von der ersten; so erhält man

$$X = A(x^n - a^n) + A_1(x^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + A_{n-2}(x^2 - a^2) + A_{n-1}(x-a)$$

und folglich

$$\frac{X}{x-a} = A\frac{x^n - a^n}{x-a} + A_1\frac{x^{n-1} - a^{n-1}}{x-a} + \ldots + A_{n-2}\frac{x^2 - a^2}{x-a} + A_{n-1}.$$

Also ist, wie leicht erhellen wird,

$$\begin{aligned}\frac{X}{x-a} = {} & A(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ & + A_1(x^{n-2} + x^{n-3}a + \ldots + xa^{n-3} + a^{n-2}) \\ & + A_2(x^{n-3} + \ldots + xa^{n-4} + a^{n-3}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_{n-2}(x+a) \\ & + A_{n-1}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\frac{X}{x-a} = {} & Ax^{n-1} \\ & + (Aa + A_1)x^{n-2} \\ & + (Aa^2 + A_1a + A_2)x^{n-3} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (Aa^{n-2} + A_1a^{n-3} + A_2a^{n-4} + \ldots + A_{n-2})x \\ & + Aa^{n-1} + A_1a^{n-2} + A_2a^{n-3} + \ldots + A_{n-2}a + A_{n-1},\end{aligned}$$

woraus der zu beweisende Satz unmittelbar erhellet.

§. 13.

Lehrsatz. Wenn die ganze rationale algebraische Function

$$X = Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

des $n$ten Grades für

$$x = a, a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$$

verschwindet; so ist unter der Voraussetzung, dass die n Grössen $a, a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$ sämmtlich unter einander ungleich sind, immer

$$X = A(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. Weil X für $x = a$ verschwindet; so ist nach §. 12.

$$X = (x-a)X_1,$$

wo X_1 eine ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades ist.

Weil nun ferner X, also auch $(x-a)X_1$ für $x = a_1$ verschwindet, aber a nicht $= a_1$ ist; so muss offenbar X_1 für $x = a_1$ verschwinden, und es ist folglich nach §. 12.

$$X_1 = (x-a_1)X_2,$$

wo X_2 eine ganze rationale algebraische Function des $(n-2)$ten Grades bezeichnet.

Also ist nach dem Obigen

$$X = (x-a)(x-a_1)X_2.$$

Nach der Voraussetzung verschwindet aber X, und folglich auch $(x-a)(x-a_1)X_2$, für $x = a_2$. Also muss, weil a_2 keiner der beiden Grössen a und a_1 gleich ist, offenbar X_2 für $x = a_2$ verschwinden, und es ist folglich nach §. 12.

$$X_2 = (x-a_2)X_3,$$

wo X_3 eine ganze rationale algebraische Function des $(n-3)$ten Grades bezeichnet.

Also ist nach dem Obigen

$$X = (x-a)(x-a_1)(x-a_2)X_3.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet nun schon.

Endlich wird man offenbar auf

$$X = (x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})X_n,$$

wo X_n eine ganze rationale algebraische Function des $(n-n)$ten oder nullten Grades, d. i. eine constante Grösse, die wir durch C bezeichnen wollen, kommen, und folglich immer

$$X = C(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})$$

ist.

Die constante Grösse C lässt sich auf folgende Art bestimmen.

Man setze $x = \frac{1}{y}$; so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$A + A_1y + A_2y^2 + \ldots + A_{n-1}y^{n-1} + A_ny^n = Y$$

gesetzt wird,

$$x^nY = C\left(\frac{1}{y} - a\right)\left(\frac{1}{y} - a_1\right)\left(\frac{1}{y} - a_2\right)\ldots\left(\frac{1}{y} - a_{n-1}\right)$$

oder

$$x^ny^nY = C(1-ay)(1-a_1y)(1-a_2y)\ldots(1-a_{n-1}y),$$

und folglich, weil $x^ny^n = 1$ ist,

$$Y = C(1-ay)(1-a_1y)(1-a_2y)\ldots(1-a_{n-1}y),$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

eine für jedes y geltende Gleichung, die für $y = 0$ auf der Stelle zu der Gleichung $C = A$ führt, wodurch also die Constante C bestimmt ist.

Folglich ist nach dem Obigen

$$X = A(x-a)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 14.

Lehrsatz. Wenn $f(x)$ und $\varphi_1(x)$ ganze rationale algebraische Functionen sind, und $f(x)$ von keinem höhern Grade wie $\varphi_1(x)$, also

$$\frac{f(x)}{(x-a)\varphi_1(x)}$$

eine echte gebrochene rationale algebraische Function ist; so kann man unter der Voraussetzung, dass $\varphi_1(x)$ für $x = a$ *nicht* verschwindet, jederzeit

$$\frac{f(x)}{(x-a)\varphi_1(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$$

setzen, wo A eine völlig bestimmte constante Grösse, und $f_1(x)$ eine völlig bestimmte ganze rationale algebraische Function von einem niedrigern Grade wie $\varphi_1(x)$, also $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$ eine echte gebrochene rationale algebraische Function ist.

Beweis. Um dies zu beweisen, muss man zeigen, dass unter den gemachten Voraussetzungen für jedes x sowohl der Gleichung

$$\frac{f(x)}{(x-a)\varphi_1(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)},$$

als auch allen übrigen Bedingungen unsers Satzes vollständig genügt werden kann.

Aus der zu erfüllenden Gleichung folgt

$$f(x) = A\varphi_1(x) + (x-a)f_1(x),$$

und es wird offenbar, wenn diese Gleichung erfüllt ist, auch die erstere Gleichung erfüllt seyn.

Da aber die vorstehende Gleichung für jedes x gelten soll; so muss dieselbe auch für $x = a$ gelten, und es muss also nothwendig $f(a) = A\varphi_1(a)$, d. i.

$$A = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}$$

seyn, wodurch die constante Grösse A, weil nach der Voraussetzung $\varphi_1(a)$ nicht $= 0$ ist, vollständig bestimmt ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hat man nun auf diese Weise A bestimmt; so wird die obige Gleichung für jedes x erfüllt werden, wenn man

$$f_1(x) = \frac{f(x) - A\varphi_1(x)}{x - a}$$

setzt, weil sich dieselbe, wenn man diesen Ausdruck von $f_1(x)$ in sie einführt, offenbar auf die identische Gleichung $f(x) = f(x)$ reducirt, und es wird sich also bloss noch fragen, ob die auf diese Weise bestimmte Function $f_1(x)$ allen in unserm Satze ausgesprochenen Bedingungen genügt, d. h. eine ganze rationale algebraische Function von einem niedrigern Grade wie $\varphi_1(x)$ ist.

Weil nach dem Vorhergehenden

$$A = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}$$

ist; so ist

$$f(a) - \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}\varphi_1(a) = 0$$

der Werth, welchen die Function

$$f(x) - A\varphi_1(x)$$

erhält, wenn man $x = a$ setzt, und nach §. 12. geht also $x - a$ in dieser Function auf, oder $f_1(x)$ ist eine ganze rationale algebraische Function. Da aber nach der Voraussetzung $f(x)$ von keinem höhern Grade wie $\varphi_1(x)$ ist; so ist

$$\frac{f(x) - A\varphi_1(x)}{x - a},$$

d. i. $f_1(x)$, offenbar von einem niedrigern Grade wie $\varphi_1(x)$, und die Function $f_1(x)$ genügt also augenscheinlich allen in unserm Satze ausgesprochenen Bedingungen.

Daher ist der Satz durch das Vorhergehende vollständig bewiesen.

§. 15.

Lehrsatz. Wenn die Grössen $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ sämmtlich unter einander ungleich sind, und die ganze rationale algebraische Function $f(x)$ von einem niedrigern Grade wie vom $n$ten ist; so kann man jederzeit die echte gebrochene rationale algebraische Function

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}$$
$$= \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a_{n-1}},$$

wo $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ völlig bestimmte constante Grössen bezeichnen, setzen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. Man bezeichne der Kürze wegen die Producte

$$\begin{array}{l}(x-a)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}),\\ \quad(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}),\\ \qquad(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}),\\ \qquad\quad(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}),\\ \qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\\ \qquad\qquad\qquad\qquad x-a_{n-1}\end{array}$$

nach der Reihe durch

$$\varphi(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots\ \varphi_{n-1}(x);$$

so kann man, weil nach der Voraussetzung die Grössen a, a_1, a_2, a_3, ... a_{n-1} sämmtlich unter einander ungleich sind, nach §. 14.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)\varphi_1(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)},$$

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}=\frac{f_1(x)}{(x-a_1)\varphi_2(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)},$$

$$\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}=\frac{f_2(x)}{(x-a_2)\varphi_3(x)}=\frac{A_2}{x-a_2}+\frac{f_3(x)}{\varphi_3(x)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{f_{n-2}(x)}{\varphi_{n-2}(x)}=\frac{f_{n-2}(x)}{(x-a_{n-2})\varphi_{n-1}(x)}=\frac{A_{n-2}}{x-a_{n-2}}+\frac{f_{n-1}(x)}{\varphi_{n-1}(x)}$$

setzen, wo die Grössen A, A_1, A_2, ... A_{n-2} constante Grössen, und

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)},\ \frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)},\ \frac{f_3(x)}{\varphi_3(x)},\ \ldots\ \frac{f_{n-1}(x)}{\varphi_{n-1}(x)}$$

sämmtlich echte gebrochene rationale algebraische Functionen sind.

Addirt man die sämmtlichen obigen Gleichungen zusammen; so erhält man, nachdem man aufgehoben hat, was sich aufheben lässt,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_{n-2}}{x-a_{n-2}}+\frac{f_{n-1}(x)}{\varphi_{n-1}(x)}.$$

Weil aber $\frac{f_{n-1}(x)}{\varphi_{n-1}(x)}$ eine echte gebrochene rationale algebraische Function, und $\varphi_{n-1}(x)=x-a_{n-1}$ ist; so kann $f_{n-1}(x)$ offenbar bloss eine constante Grösse seyn, die wir durch A_{n-1} bezeichnen, und folglich

$$\frac{f_{n-1}(x)}{\varphi_{n-1}(x)}=\frac{A_{n-1}}{x-a_{n-1}}$$

setzen wollen. Führt man dies nun in die obige Gleichung ein, und setzt für $\varphi(x)$ wieder seinen obigen Werth; so erhält man

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}$$
$$= \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a_{n-1}},$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 16.

Aufgabe. Wenn die Grössen $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ sämmtlich unter einander ungleich sind, $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function von einem niedrigern Grade wie vom $n$ten ist, und der Kürze wegen

$$\varphi(x) = (x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})$$

gesetzt wird, in der Gleichung

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a_{n-1}}$$

die constanten Zähler $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ zu bestimmen.

Auflösung. Wir wollen einen beliebigen der zu bestimmenden Zähler durch A_k bezeichnen, und setzen der Kürze wegen

$$\varphi(x) = (x-a_k)\,\varphi_k(x).$$

Denken wir uns nun alle Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a_{n-1}},$$

mit Ausnahme des Gliedes

$$\frac{A_k}{x-a_k},$$

mit einander vereinigt; so erhalten wir offenbar eine Gleichung von der Form

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_k}{x-a_k} + \frac{f_k(x)}{\varphi_k(x)},$$

aus der sich, wenn man auf beiden Seiten mit $\varphi(x)$ multiplicirt, unmittelbar die natürlich für jedes x geltende Gleichung

$$f(x) = A_k\,\varphi_k(x) + (x-a_k)\,f_k(x)$$

ergiebt. Setzen wir nun in dieser Gleichung $x = a_k$; so erhalten wir

$$f(a_k) = A_k\,\varphi_k(a_k),\ A_k = \frac{f(a_k)}{\varphi_k(a_k)},$$

wodurch der Zähler A_k bestimmt ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Haben also $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, . . . $\varphi_{n-1}(x)$ eine ganz ähnliche Bedeutung wie $\varphi_k(x)$; so ist

$$A = \frac{f(a)}{\varphi_0(a)},\ A_1 = \frac{f(a_1)}{\varphi_1(a_1)},\ A_2 = \frac{f(a_2)}{\varphi_2(a_2)},\ \ldots A_{n-1} = \frac{f(a_{n-1})}{\varphi_{n-1}(a_{n-1})}.$$

Man kann aber noch einen von dem vorigen verschiedenen merkwürdigen Ausdruck für A_k finden.

Durch Differentiation der Gleichung

$$\varphi(x) = (x - a_k)\varphi_k(x)$$

ergiebt sich nämlich

$$\varphi'(x) = (x - a_k)\varphi'_k(x) + \varphi_k(x),$$

und folglich, wenn man $x = a_k$ setzt,

$$\varphi_k(a_k) = \varphi'(a_k),$$

so dass also

$$A_k = \frac{f(a_k)}{\varphi'(a_k)},$$

folglich

$$A = \frac{f(a)}{\varphi'(a)},\ A_1 = \frac{f(a_1)}{\varphi'(a_1)},\ A_2 = \frac{f(a_2)}{\varphi'(a_2)},\ \ldots A_{n-1} = \frac{f(a_{n-1})}{\varphi'(a_{n-1})}$$

ist.

§. 17.

Wir wollen, um die vorhergehende Aufgabe durch ein Beispiel zu erläutern, die Function

$$\frac{1 + x^2}{x(x-1)(x+1)}$$

betrachten.

In diesem Falle ist $f(x) = 1 + x^2$, $a = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, und

$$\varphi_0(x) = (x-1)(x+1),\ \varphi_1(x) = x(x+1),\ \varphi_2(x) = x(x-1);$$

also

$$\varphi_0(a) = -1,\ \varphi_1(a_1) = 2,\ \varphi_2(a_2) = 2.$$

Weil nun ferner

$$f(a) = 1,\ f(a_1) = 2,\ f(a_2) = 2$$

ist; so ist nach den ersten der im vorigen Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln

$$A = -1,\ A_1 = 1,\ A_2 = 1,$$

und folglich

$$\frac{1 + x^2}{x(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1},$$

eine Gleichung, von deren Richtigkeit man sich auch leicht durch Vereinigung der Brüche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens mit einander überzeugen wird.

Will man sich der zweiten im vorigen Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln, deren Anwendung hier aber nicht so bequem wie die Anwendung der ersten seyn dürfte, bedienen; so muss man zuvörderst den Differentialquotienten

$$\varphi'(x) = x(x-1) + x(x+1) + (x-1)(x+1) = 3x^2 - 1$$

des Nenners

$$\varphi(x) = x(x-1)(x+1)$$

entwickeln.

Weil nun

$$\varphi'(a) = -1, \quad \varphi'(a_1) = 2, \quad \varphi'(a_2) = 2$$

ist; so erhält man mittelst der zweiten der im vorigen Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln für A, A_1, A_2 offenbar ganz dieselben Werthe wie vorher.

§. 18.

Lehrsatz. Wir wollen jetzt annehmen, dass die ganze rationale algebraische Function $(x-a)^\alpha \varphi_1(x)$ vom $n$ten, also $\varphi_1(x)$ vom $(n-\alpha)$ten Grade sey, dass $\varphi_1(x)$ für $x = a$ *nicht* verschwinde, und dass die ganze rationale algebraische Function $f(x)$ höchstens vom $(n-1)$sten Grade sey; so kann man immer

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha \varphi_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi_1(x)}$$

setzen, wo A eine völlig bestimmte constante Grösse, und $f_1(x)$ eine ganze rationale algebraische Function, welche höchstens vom $(n-2)$ten Grade ist, bezeichnet.

Beweis. Die Gleichung

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha \varphi_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi_1(x)}$$

ist für jedes x erfüllt, wenn die Gleichung

$$f(x) = A\varphi_1(x) + (x-a) f_1(x)$$

für jedes x erfüllt ist. Soll aber diese Gleichung für jedes x gelten; so muss sie auch für $x = a$ gelten, und es muss also nothwendig $f(a) = A\varphi_1(a)$, d. i.

$$A = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}$$

seyn, wodurch die constante Grösse A, weil nach der Voraussetzung $\varphi_1(a)$ nicht $= 0$ ist, vollständig bestimmt ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hat man nun auf diese Weise A bestimmt; so wird die obige Gleichung für jedes x erfüllt werden, wenn man

$$f_1(x) = \frac{f(x) - A\varphi_1(x)}{x-a}$$

setzt, weil sich dieselbe, wenn man diesen Ausdruck von $f_1(x)$ in sie einführt, offenbar auf die identische Gleichung $f(x) = f(x)$ reducirt, und es wird sich also bloss noch fragen, ob die auf diese Weise bestimmte Function $f_1(x)$ allen in unserm Satze ausgesprochenen Bedingungen genügt, d. h. eine ganze rationale algebraische Function ist, deren Grad den $(n-2)$ten nicht übersteigt.

Weil nach dem Vorhergehenden

$$A = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}$$

ist; so ist

$$f(a) - \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}\varphi_1(a) = 0$$

der Werth, welchen die Function

$$f(x) - A\varphi_1(x)$$

erhält, wenn man $x = a$ setzt, und nach §. 12. geht also $x-a$ in dieser Function auf, oder $f_1(x)$ ist eine ganze rationale algebraische Function. Da aber nach der Voraussetzung die Function $f(x)$ höchstens vom $(n-1)$sten, die Function $\varphi_1(x)$ vom $(n-\alpha)$ten Grade ist; so erhellet leicht, dass die Function

$$\frac{f(x) - A\varphi_1(x)}{x-a},$$

d. i. $f_1(x)$, höchstens vom $(n-2)$ten Grade ist, und dass also diese Function in der That allen in unserm Satze ausgesprochenen Bedingungen genügt, derselbe folglich durch das Vorhergehende vollständig bewiesen ist.

§. 19.

Erster Zusatz. Durch successive Anwendung des vorhergehenden Satzes erhält man ohne Schwierigkeit:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha \varphi_1(x)}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi_1(x)}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\varphi_2(x)}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \frac{f_3(x)}{(x-a)^{\alpha-3}\varphi_1(x)}$$

u. s. w. u. s. w.

$$= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wo die ganzen rationalen algebraischen Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, . . . $f_\alpha(x)$ respective höchstens vom $(n-2)$ten, $(n-3)$ten, $(n-4)$ten,... $(n-\alpha-1)$ten Grade sind, so dass also, weil $\varphi_1(x)$ vom $(n-\alpha)$ten Grade ist, $\frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)}$ jederzeit eine echte gebrochene rationale algebraische Function ist.

Setzen wir der Kürze wegen

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}=\Sigma\frac{A_{\alpha-1}}{x-a};$$

so ist

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha\,\varphi_1(x)}=\Sigma\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)},$$

und der letzte Bruch auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist jederzeit eine echte gebrochene rationale algebraische Function.

Wenn $\varphi_1(x)=1$ ist; so erhält man ganz auf dieselbe Weise wie vorher

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}=$$

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-2}}{(x-a)^2}+\frac{f_{\alpha-1}(x)}{x-a},$$

wo $f_{\alpha-1}(x)$ höchstens vom $\{n-(\alpha-1)-1\}$ten, d. i., weil in diesem Falle $n=\alpha$ ist, höchstens vom 0ten, d. i. $f_{\alpha-1}(x)$ eine constante Grösse ist, und daher $=A_{\alpha-1}$, also

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a},$$

oder

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}=\Sigma\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$

gesetzt werden kann.

§. 20.

Zweiter Zusatz. Wir wollen jetzt, indem wir annehmen, dass die Grössen a, a_1, a_2, . . . a_k sämmtlich unter einander ungleich sind,

$$\varphi(x)=(x-a)^\alpha(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}$$

und

$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=n$$

setzen, so dass also $\varphi(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades ist. Ferner soll $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function seyn, welche höchstens vom $(n-1)$sten Grade ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\varphi(x) = (x-a)^{\alpha}\,\varphi_1(x),$$
$$\varphi_1(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}\varphi_2(x),$$
$$\varphi_2(x) = (x-a_2)^{\alpha_2}\varphi_3(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_{k-1}(x) = (x-a_{k-1})^{\alpha_{k-1}}\varphi_k(x),$$
$$\varphi_k(x) = (x-a_k)^{\alpha_k};$$

so ist nach §. 19.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \Sigma\,\frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{f_{\alpha}(x)}{\varphi_1(x)},$$
$$\frac{f_{\alpha}(x)}{\varphi_1(x)} = \Sigma\,\frac{B_{\alpha_1-1}}{x-a_1} + \frac{f_{\alpha_1}(x)}{\varphi_2(x)},$$
$$\frac{f_{\alpha_1}(x)}{\varphi_2(x)} = \Sigma\,\frac{C_{\alpha_2-1}}{x-a_2} + \frac{f_{\alpha_2}(x)}{\varphi_3(x)},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{f_{\alpha_{k-2}}(x)}{\varphi_{k-1}(x)} = \Sigma\,\frac{K_{\alpha_{k-1}-1}}{x-a_{k-1}} + \frac{f_{\alpha_{k-1}}(x)}{\varphi_k(x)},$$
$$\frac{f_{\alpha_{k-1}}(x)}{\varphi_k(x)} = \Sigma\,\frac{L_{\alpha_k-1}}{x-a_k},$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt, und aufhebt, was sich aufheben lässt,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \Sigma\,\frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \Sigma\,\frac{B_{\alpha_1-1}}{x-a_1} + \Sigma\,\frac{C_{\alpha_2-1}}{x-a_2} + \ldots + \Sigma\,\frac{L_{\alpha_k-1}}{x-a_k}.$$

§. 21.

Aufgabe. Wenn die Grössen $a, a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$ sämmtlich unter einander ungleich sind, und

$$\varphi(x) = (x-a)^{\alpha}(x-a)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}$$

und

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_k = n$$

ist, $f(x)$ aber eine ganze rationale algebraische Function bezeichnet, welche höchstens vom $(n-1)$sten Grade ist: in der Gleichung

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \Sigma\,\frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \Sigma\,\frac{B_{\alpha_1-1}}{x-a_1} + \Sigma\,\frac{C_{\alpha_2-1}}{x-a_2} + \ldots + \Sigma\,\frac{L_{\alpha_k-1}}{x-a_k}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die constanten Zähler sämmtlicher Brüche zu bestimmen.

Auflösung. I. Es wird hinreichend seyn, bloss die Bestimmung der constanten Zähler

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_{\alpha-1}$$

zu zeigen, weil alle übrigen Zähler ganz auf dieselbe Weise bestimmt werden.

Setzen wir

$$\varphi_1(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}\,(x-a_2)^{\alpha_2}\ \ldots\ (x-a_k)^{\alpha_k};$$

so ist

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \Sigma\,\frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)},$$

d. i.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} =$$

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)},$$

wo $f_\alpha(x)$ eine ganze rationale algebraische Function bezeichnet.

Aus dieser Gleichung folgt, wenn wir der Kürze wegen

$$A + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1} = Z$$

setzen, leicht

$$1.\quad f(x) - Z\varphi_1(x) = (x-a)^\alpha f_\alpha(x)$$

und

$$2.\quad \frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - Z = (x-a)^\alpha\,\frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Jede dieser beiden Gleichungen führt zu einer merkwürdigen Methode zur Bestimmung der constanten Zähler $A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_{\alpha-1}$.

II. Bevor wir aber zur Entwickelung dieser beiden Methoden übergehen können, müssen wir zuvörderst den folgenden Satz beweisen.

Wenn $Y = (x-a)^\alpha X$ ist, und weder die Function X der Grösse x selbst, noch irgend einer ihrer Differentialquotienten vom ersten bis zum $(\alpha-1)$sten für $x = a$ unendlich wird; so verschwinden die Grössen

$$Y,\ \frac{\partial Y}{\partial x},\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3},\ \ldots\ \frac{\partial^{\alpha-1} Y}{\partial x^{\alpha-1}}$$

für $x = a$ sämmtlich.

Man findet nämlich für

$$Y,\ \frac{\partial Y}{\partial x},\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3},\ \ldots$$

durch leichte Rechnung die folgenden Ausdrücke:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(x-a)^\alpha X,$$

$$(x-a)^\alpha \frac{\partial X}{\partial x} + \alpha(x-a)^{\alpha-1}X,$$

$$(x-a)^\alpha \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + 2\alpha(x-a)^{\alpha-1}\frac{\partial X}{\partial x} + \alpha(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-2}X,$$

$$(x-a)^\alpha \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + 3\alpha(x-a)^{\alpha-1}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + 3\alpha(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-2}\frac{\partial X}{\partial x} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(x-a)^{\alpha-3}X,$$

u. s. w. u. s. w.

und überzeugt sich bei näherer Ansicht dieser Ausdrücke auf der Stelle, dass auch noch der Ausdruck für den $(\alpha-1)$sten Differentialquotienten von Y in allen seinen Gliedern den Factor $x-a$ enthält, und dass also, weil nach der Voraussetzung keine der Grössen

$$X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 X}{\partial x^3}, \ldots \frac{\partial^{\alpha-1} X}{\partial x^{\alpha-1}}$$

für $x = a$ unendlich wird, in der That die Grössen

$$Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}, \ldots \frac{\partial^{\alpha-1} Y}{\partial x^{\alpha-1}}$$

für $x = a$ sämmtlich verschwinden, wie behauptet wurde.

III. Nach dem Obigen ist $f_\alpha(x)$ eine ganze rationale algebraische Function von x, und es wird folglich offenbar weder diese Function selbst, noch irgend einer ihrer Differentialquotienten für $x = a$ unendlich. Daher verschwinden nach II. die Function $(x-a)^\alpha f_\alpha(x)$ und ihre sämmtlichen Differentialquotienten vom ersten bis zum $(\alpha-1)$sten für $x = a$. Differentiirt man also die Gleichung 1. in I; so erhält man die folgenden, jedoch bloss für $x = a$ geltenden Gleichungen:

$$f(x) - Z\varphi_1(x) = 0,$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} - \frac{\partial . Z\varphi_1(x)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 . Z\varphi_1(x)}{\partial x^2} = 0,$$

u. s. w.

$$\frac{\partial^{\alpha-1} f(x)}{\partial x^{\alpha-1}} - \frac{\partial^{\alpha-1} . Z\varphi_1(x)}{\partial x^{\alpha-1}} = 0.$$

Entwickelt man nun die Differentialquotienten des Products $Z\varphi_1(x)$, und bemerkt, dass, wie man leicht durch Differentiation der Grösse Z findet, für $x = a$

$$Z = A,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 1A_1,$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 1.2 A_2,$$

$$\frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} = 1.2.3 A_3,$$

u. s. w.

$$\frac{\partial^{\alpha-1} Z}{\partial x^{\alpha-1}} = 1.2.3.4 \ldots (\alpha-1) A_{\alpha-1}$$

ist; so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$f(a) - A\varphi_1(a) = 0,$$
$$f'(a) - A\varphi'_1(a) - 1 A_1 \varphi_1(a) = 0,$$
$$f''(a) - A\varphi''_1(a) - 2.1 A_1 \varphi'_1(a) - 1.2 A_2 \varphi_1(a) = 0,$$
$$f'''(a) - A\varphi'''_1(a) - 3.1 A_1 \varphi''_1(a) - 3.1.2 A_2 \varphi'_1(a) - 1.2.3 A_3 \varphi_1(a) = 0,$$

u. s. w. u. s. w.

die man aber nach ihrem sich leicht kund gebenden allgemeinen Gesetze immer bloss bis zur αten fortsetzen darf, welches, wie man sogleich übersieht, auch völlig hinreichend ist, um die gesuchten Grössen A, A_1, A_2, A_3, . . . $A_{\alpha-1}$ nach und nach sämmtlich bestimmen zu können.

IV. Eine zweite Methode zur Bestimmung der in Rede stehenden Grössen ergiebt sich aus der Gleichung 2. in I. Da nämlich $f_\alpha(x)$ eine ganze rationale algebraische Function ist, und nach der Voraussetzung $\varphi_1(x)$ für $x = a$ nicht verschwindet; so wird offenbar weder die Function $\frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)}$ selbst, noch irgend einer ihrer Differentialquotienten für $x = a$ unendlich, und man erhält also durch Differentiation der Gleichung 2. in I. nach II. die folgenden für $x = a$ geltenden Gleichungen:

$$\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - Z = 0,$$

$$\frac{1}{\partial x} \partial . \frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{1}{\partial x^2} \partial^2 . \frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 0,$$

u. s. w.

$$\frac{1}{\partial x^{\alpha-1}} \partial^{\alpha-1} . \frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - \frac{\partial^{\alpha-1} Z}{\partial x^{\alpha-1}} = 0;$$

und folglich nach III.

$$\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - A = 0,$$

$$\frac{1}{\partial x} \partial . \frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - 1 A_1 = 0,$$

$$\frac{1}{\partial x^2} \partial^2 . \frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - 1.2 A_2 = 0,$$

u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{1}{\partial x^{\alpha-1}}\,\partial^{\alpha-1}.\,\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - 1.2.3\ldots(\alpha-1)\,A_{\alpha-1} = 0;$$

also

$$A = \frac{f(x)}{\varphi_1(x)},$$

$$A_1 = \frac{1}{1.\partial x}\,\partial.\,\frac{f(x)}{\varphi_1(x)},$$

$$A_2 = \frac{1}{1.2\,\partial x^2}\,\partial^2.\,\frac{f(x)}{\varphi_1(x)},$$

u. s. w.

$$A_{\alpha-1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(\alpha-1)\,\partial x^{\alpha-1}}\,\partial^{\alpha-1}.\,\frac{f(x)}{\varphi_1(x)},$$

unter der Bedingung nämlich, dass man nach der Differentiation in allen Differentialquotienten $x = a$ setzt.

§. 22.

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die Function

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)}$$

betrachten.

Nach dem Vorhergehenden haben wir

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

zu setzen.

Da in diesem Falle $f(x) = 1$ ist; so ist $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = 0$.

Um nun zuerst A, A_1, A_2 zu bestimmen, müssen wir $a = 0$ und

$$\varphi_1(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1;$$

also

$$\varphi'_1(x) = 3x^2 - 2x - 1, \quad \varphi''_1(x) = 6x - 2,$$

und folglich

$$\varphi_1(a) = 1, \quad \varphi'_1(a) = -1, \quad \varphi''_1(a) = -2$$

setzen. Also haben wir nach §. 21. III. zur Bestimmung von A, A_1, A_2 die drei Gleichungen

$$1 - A = 0, \quad A - A_1 = 0, \quad 2A + 2A_1 - 2A_2 = 0,$$

aus denen sich $A = 1$, $A_1 = 1$, $A_2 = 2$ ergiebt.

Um ferner B und B_1 zu bestimmen, setzen wir $a_1 = 1$ und

$$\varphi_1(x) = x^3(x+1) = x^4 + x^3, \quad \varphi'_1(x) = 4x^3 + 3x^2;$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also $\varphi_1(a_1) = 2$, $\varphi'_1(a_1) = 7$, und haben nun nach §. 21. III. zur Bestimmung von B und B_1 die beiden Gleichungen

$$1 - 2B = 0, \quad -7B - 2B_1 = 0,$$

aus denen sich $B = \frac{1}{2}$, $B_1 = -\frac{7}{4}$ ergiebt.

Um endlich C zu bestimmen, setzen wir $a_2 = -1$, und

$$\varphi_1(x) = x^3(x-1)^2 = x^5 - 2x^4 + x^3;$$

also $\varphi_1(a_2) = -4$, und haben nun nach §. 21. III. zur Bestimmung von C die Gleichung $1 + 4C = 0$, aus der sich $C = -\frac{1}{4}$ ergiebt.

Also ist

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)} =$$
$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{7}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}.$$

Dasselbe Resultat würde man mittelst der in §. 21. IV. entwickelten Formeln gefunden haben.

Um noch einen Fall zu betrachten, setze man

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{(x-2)^2(x+3)(x-1)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{A_1}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1};$$

so erhält man, weil jetzt

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$$

ist, nach §. 21. III. zur Bestimmung von A, A_1, B, C leicht die folgenden Gleichungen:

$$12 - 5A = 0, \quad 17 - 6A - 5A_1 = 0, \quad 2 + 100B = 0, \quad 2 - 4C = 0.$$

Da sich nun aus diesen Gleichungen $A = \frac{12}{5}$, $A_1 = \frac{13}{25}$, $B = -\frac{1}{50}$, $C = \frac{1}{2}$ ergiebt; so ist

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{(x-2)^2(x+3)(x-1)} =$$
$$\frac{12}{5(x-2)^2} + \frac{13}{25(x-2)} - \frac{1}{50(x+3)} + \frac{1}{2(x-1)}.$$

§. 23.

Ganz in der Kürze wollen wir nun noch auf eine Methode zur Zerlegung der gebrochenen Functionen in Partialbrüche aufmerksam machen, die bei praktischen Rechnungen zuweilen von Nutzen seyn kann.

Um nämlich z. B. die schon in §. 17. betrachtete gebrochene Function

$$\frac{x^2 + 1}{x(x-1)(x+1)}$$

in Partialbrüche zu zerlegen, setze man

$$\frac{x^2 + 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und addire nun die Brüche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens zusammen; so erhält man

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B+C)\,x^2+(B-C)x-A}{x(x-1)(x+1)},$$

und folglich

$$x^2+1 = (A+B+C)x^2+(B-C)\,x-A.$$

Damit nun diese Gleichung und folglich auch die Gleichung

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1},$$

wie es erforderlich ist, für jedes x erfüllt werde, muss man die Grössen A, B, C aus den drei Gleichungen

$$A+B+C=1,\quad B-C=0,\quad -A=1,$$

indem man nämlich die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung

$$x^2+1 = (A+B+C)x^2+(B-C)\,x-A$$

einander gleich setzt, bestimmen, und erhält auf diese Art ohne Schwierigkeit $A=-1$, $B=1$, $C=1$; also

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1},$$

ganz wie in §. 17.

Ein ganz ähnliches Verfahren lässt sich in dem in §. 21. betrachteten Falle anwenden, wobei wir aber, da die Sache nicht die geringste Schwierigkeit hat, und sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar ergiebt, hier nicht länger verweilen.

§. 24.

I. In der Theorie der Gleichungen wird in aller Strenge bewiesen, dass sich jederzeit ein reeller oder imaginärer Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse einer ganzen rationalen algebraischen Function finden lässt, für welchen dieselbe verschwindet. Wegen der Schwierigkeit und Weitläufigkeit dieses Beweises kann derselbe hier nicht mitgetheilt werden, und wir müssen daher wegen des in Rede stehenden wichtigen Satzes überhaupt auf die Theorie der Gleichungen verweisen, da derselbe nach unserer Meinung nicht, wie früher häufig geschah, als ein für sich klarer Satz angenommen werden darf. Unter Voraussetzung dieses Satzes lässt sich aber die folgende Betrachtung über die ganzen rationalen algebraischen Functionen anstellen.

Es sey $\varphi(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades, und a ein Werth von x, für welchen dieselbe verschwindet, den es nach der obigen einleitenden Bemerkung immer geben muss; so ist nach §. 12.

$$\varphi(x) = (x-a)\,\varphi_1(x),$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wo $\varphi_1(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades ist.

Ist nun ferner a_1 ein Werth von x, für welchen die Function $\varphi_1(x)$ verschwindet; so ist nach §. 12.

$$\varphi_1(x) = (x - a_1)\ \varphi_2(x),$$

wo $\varphi_2(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-2)$ten Grades ist.

Eben so ist, wenn a_2 ein Werth von x ist, für welchen die Function $\varphi_2(x)$ verschwindet, nach §. 12.

$$\varphi_2(x) = (x - a_2)\ \varphi_3(x),$$

wo $\varphi_3(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-3)$ten Grades ist.

Auf diese Art weiter gehend, kommt man endlich auf

$$\varphi_{n-1}(x) = (x - a_{n-1})\ \varphi_n(x),$$

wo $\varphi_n(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-n)$ten $=$ 0ten Grades, d. i. eine constante Grösse ist, die wir durch C bezeichnen wollen.

Daher haben wir jetzt die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= (x - a)\ \varphi_1(x),\\
\varphi_1(x) &= (x - a_1)\ \varphi_2(x),\\
\varphi_2(x) &= (x - a_2)\ \varphi_3(x),\\
&\ldots\ldots\\
\varphi_{n-2}(x) &= (x - a_{n-2})\ \varphi_{n-1}(x),\\
\varphi_{n-1}(x) &= C(x - a_{n-1})\ ;
\end{aligned}$$

und erhalten aus denselben, wenn wir auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen alle Grössen in einander multipliciren,

$$\varphi(x) = C(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ \ldots\ (x-a_{n-1}),$$

so dass sich also jede ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades als ein Product mit n Factoren des ersten Grades von der allgemeinen Form $x - p$ darstellen lässt, wenn man dieses Product nur noch mit einer gewissen, vorher durch C bezeichneten constanten Grösse multiplicirt.

Ueberlegt man, dass das höchste Glied des Products

$$C(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ \ldots\ (x-a_{n-1})$$

die Grösse Cx^n ist; so erhellet leicht, dass die Constante C jederzeit der Coefficient des höchsten Gliedes der Function $\varphi(x)$ ist, welches sich übrigens auch durch den, in §. 13. bei der Bestimmung der dortigen Constante C gebrauchten ganz ähnliche Schlüsse beweisen lassen würde.

Unter den Grössen $a, a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$ können natürlich gleiche vorkommen. Nimmt man nun aber an, dass die Grös-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sen $a, a_1, a_2, \ldots a_k$ sämmtlich unter einander ungleich sind; so wird sich die ganze rationale algebraische Function $\varphi(x)$ nach dem Vorhergehenden offenbar immer als ein Product von der Form

$$C(x-a)^{\alpha}(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k},$$

wo C der Coefficient des höchsten Gliedes in $\varphi(x)$, und

$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_k=n$$

ist, darstellen lassen.

Ist nun ferner $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, wo $\varphi(x)$ wie vorher eine ganze rationale Function des $n$ten, $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function eines niedrigern Grades bezeichnen soll, eine beliebige echte gebrochene rationale algebraische Function; so wird sich dieselbe nach dem Vorhergehenden jederzeit auf die Form

$$\frac{f(x)}{C(x-a)^{\alpha}(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}},$$

wo $a, a_1, a_2, \ldots a_k$ sämmtlich unter einander ungleich sind, C der Coefficient des höchsten Gliedes in $\varphi(x)$ und

$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_k=n$$

ist, bringen, und folglich nach §. 16. und §. 21. jederzeit als ein Aggregat von lauter Brüchen von der allgemeinen Form

$$\frac{A}{C(x-p)^q},$$

wo A, p, q, so wie C, constante Grössen bezeichnen, darstellen lassen, eine Wahrheit, die für alles Folgende von der höchsten Wichtigkeit ist.

II. Es sind hierbei nun aber noch die folgenden ebenfalls sehr wichtigen Bemerkungen zu machen. Wenn nämlich die Function $\varphi(x)$, wie dies häufig der Fall ist, imaginäre Factoren des ersten Grades enthält, so werden, wenn man die gebrochene Function $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nach dem Vorhergehenden in Partialbrüche zerlegt, die den imaginären Factoren des ersten Grades der Function $\varphi(x)$ entsprechenden Partialbrüche ebenfalls imaginär seyn. In der Theorie der Gleichungen wird aber streng bewiesen, dass, wenn die Function $\varphi(x)$, vorausgesetzt, dass dieselbe reell ist, den imagirären Factor $(x-p-q\sqrt{-1})^{\alpha}$ hat, jederzeit auch $(x-p+q\sqrt{-1})^{\alpha}$ ein Factor der Function $\varphi(x)$ ist. Weil nun diese beiden imaginären Factoren, mit einander verbunden, das reelle Product $\{(x-p)^2+q^2\}^{\alpha}$ geben; so ist klar, dass sich die Functin $\varphi(x)$ jederzeit in lauter reelle Factoren des ersten oder des zweiten Grades zerlegen lassen wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$(x-p)^2 + q^2 = P$$

und $\varphi(x) = CP^n\varphi_1(x)$, wo die ganze rationale algebraische Function $\varphi_1(x)$ den Factor P nicht mehr enthalten soll; so kann man nach dem Obigen bekanntlich immer

$$\frac{f(x)}{P\varphi_1(x)} = \frac{A}{x-p-q\sqrt{-1}} + \frac{B}{x-p+q\sqrt{-1}} + \frac{Q}{\varphi_1(x)}$$

setzen, wo A und B constante Grössen sind und Q eine ganze rationale algebraische Function von x bezeichnet. Multiplicirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit $P\varphi_1(x)$; so ergiebt sich die Gleichung

$$f(x) = \{A(x-p+q\sqrt{-1}) + B(x-p-q\sqrt{-1})\}\varphi_1(x) + PQ,$$

aus der, wenn man zuerst $x = p+q\sqrt{-1}$, dann $x = p-q\sqrt{-1}$ setzt, ferner

$$A = \frac{1}{2q\sqrt{-1}} \cdot \frac{f(p+q\sqrt{-1})}{\varphi_1(p+q\sqrt{-1})}, \quad B = -\frac{1}{2q\sqrt{-1}} \cdot \frac{f(p-q\sqrt{-1})}{\varphi_1(p-q\sqrt{-1})}$$

folgt.

Mit Hülfe des Binomial-Theorems für Potenzen mit positiven ganzen Exponenten überzeugt man sich aber sehr leicht, dass sich, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander, die Grössen

$$f(p \pm q\sqrt{-1}) \text{ und } \varphi_1(p \pm q\sqrt{-1})$$

jederzeit respective auf die Form

$$s \pm t\sqrt{-1} \text{ und } s_1 \pm t_1\sqrt{-1}$$

bringen lassen*), und dass also

---

*) Noch leichter erhellet dies mittelst der in §. 86. und §. 88. der Differentialrechnung bewiesenen Sätze. Nach §. 86. kann man nämlich

$$p \pm q\sqrt{-1} = \varrho(\cos\theta \pm \sin\theta\sqrt{-1})$$

setzen. Ist dann überhaupt

$$f(x) = a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n;$$

so ist

$$\begin{aligned} f(p \pm q\sqrt{-1}) = a &+ a_1\varrho(\cos\theta \pm \sin\theta\sqrt{-1}) \\ &+ a_2\varrho^2(\cos\theta \pm \sin\theta\sqrt{-1})^2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &+ a_n\varrho^n(\cos\theta \pm \sin\theta\sqrt{-1})^n, \end{aligned}$$

d. i. nach §. 88.

$$\begin{aligned} f(p \pm q\sqrt{-1}) = a &+ a_1\varrho\cos\theta + a_2\varrho^2\cos 2\theta + \ldots + a_n\varrho^n\cos n\theta \\ &\pm(a_1\varrho\sin\theta + a_2\varrho^2\sin 2\theta + \ldots + a_n\varrho^n\sin n\theta)\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

welches offenbar die verlangte Form ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$A = \frac{1}{2q\sqrt{-1}} \cdot \frac{s+t\sqrt{-1}}{s_1+t_1\sqrt{-1}}, \quad B = -\frac{1}{2q\sqrt{-1}} \cdot \frac{s-t\sqrt{-1}}{s_1-t_1\sqrt{-1}}$$

gesetzt werden kann. Multiplicirt man aber den Ausdruck von A im Zähler und Nenner mit $s_1 - t_1\sqrt{-1}$, den Ausdruck von B im Zähler und Nenner mit $s_1 + t_1\sqrt{-1}$; so erhält man nach leichter Rechnung

$$A = \frac{1}{2q\sqrt{-1}} \cdot \frac{ss_1 + tt_1 - (st_1 - s_1 t)\sqrt{-1}}{s_1 s_1 + t_1 t_1},$$

$$B = -\frac{1}{2q\sqrt{-1}} \cdot \frac{ss_1 + tt_1 + (st_1 - s_1 t)\sqrt{-1}}{s_1 s_1 + t_1 t_1};$$

oder, wenn man nun noch Zähler und Nenner jedes dieser beiden Ausdrücke mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt,

$$A = \frac{s_1 t - s t_1}{2q(s_1 s_1 + t_1 t_1)} - \frac{s s_1 + t t_1}{2q(s_1 s_1 + t_1 t_1)}\sqrt{-1},$$

$$B = \frac{s_1 t - s t_1}{2q(s_1 s_1 + t_1 t_1)} + \frac{s s_1 + t t_1}{2q(s_1 s_1 + t_1 t_1)}\sqrt{-1},$$

und es erhellet also hieraus, dass die Grössen A und B immer von der Form

$$A = m - n\sqrt{-1}, \quad B = m + n\sqrt{-1}$$

seyn werden. Also ist nach dem Obigen

$$\frac{f(x)}{P\varphi_1(x)} = \frac{m - n\sqrt{-1}}{x - p - q\sqrt{-1}} + \frac{m + n\sqrt{-1}}{x - p + q\sqrt{-1}} + \frac{Q}{\varphi_1(x)},$$

oder, wenn man die beiden ersten Brüche mit einander vereinigt,

$$\frac{f(x)}{P\varphi_1(x)} = \frac{2(nq - mp) + 2mx}{P} + \frac{Q}{\varphi_1(x)},$$

wofür wir kürzer

$$\frac{f(x)}{P\varphi_1(x)} = \frac{M + Nx}{P} + \frac{Q}{\varphi_1(x)}$$

schreiben wollen.

Hieraus folgt nun ferner

$$\frac{f(x)}{P^2\varphi_1(x)} = \frac{M + Nx}{P^2} + \frac{Q}{P\varphi_1(x)}$$
$$= \frac{M + Nx}{P^2} + \frac{M_1 + N_1 x}{P} + \frac{Q_1}{\varphi_1(x)},$$

und hieraus ergiebt sich auf ähnliche Art

$$\frac{f(x)}{P^3\varphi_1(x)} = \frac{M + Nx}{P^3} + \frac{M_1 + N_1 x}{P^2} + \frac{Q_1}{P\varphi_1(x)}$$
$$= \frac{M + Nx}{P^3} + \frac{M_1 + N_1 x}{P^2} + \frac{M_2 + N_2 x}{P} + \frac{Q_2}{\varphi_1(x)},$$

wo nun auch schon erhellet, wie man auf diese Art weiter gehen kann.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ueberhaupt wird nämlich immer

$$\frac{f(x)}{(x^2-2px+p^2+q^2)^\alpha\,\varphi_1(x)} = \frac{M+Nx}{(x^2-2px+p^2+q^2)^\alpha}$$
$$+\frac{M_1+N_1x}{(x^2-2px+p^2+q^2)^{\alpha-1}}$$
$$+\frac{M_2+N_2x}{(x^2-2px+p^2+q^2)^{\alpha-2}}$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$+\frac{M_{\alpha-1}+N_{\alpha-1}x}{x^2-2px+p^2+q^2}+\frac{Q_{\alpha-1}}{\varphi_1(x)},$$

wo $Q_{\alpha-1}$ eine ganze rationale algebraische Function von x bezeichnet, gesetzt werden können.

Aus dieser Gleichung folgt aber

$$\begin{aligned}(x^2-2px+p^2+q^2)^\alpha\,Q_{\alpha-1} = f(x) &- (M+Nx)\varphi_1(x)\\ &- (M_1+N_1x)(x^2-2px+p^2+q^2)\,\varphi_1(x)\\ &- (M_2+N_2x)(x^2-2px+p^2+q^2)^2\varphi_1(x)\\ &\text{u. s. w.}\\ &- (M_{\alpha-1}+N_{\alpha-1}x)(x^2-2px+p^2+q^2)^{\alpha-1}\varphi_1(x),\end{aligned}$$

und es erhellet nun, wenn wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned}S = f(x) &- (M+Nx)\,\varphi_1(x)\\ &- (M_1+N_1x)\,(x^2-2px+p^2+q^2)\,\varphi_1(x)\\ &- (M_2+N_2x)\,(x^2-2px+p^2+q^2)^2\,\varphi_1(x)\\ &\text{u. s. w.}\\ &- (M_{\alpha-1}+N_{\alpha-1}x)\,(x^2-2px+p^2+q^2)^{\alpha-1}\,\varphi_1(x)\end{aligned}$$

setzen, auf ganz ähnliche Art wie in §. 21. II. sehr leicht, dass für

$$x^2-2px+p^2+q^2 = 0$$

jederzeit

$$S=0,\quad \partial S=0,\quad \partial^2 S=0,\quad \partial^3 S=0,\ \ldots\ \partial^{\alpha-1}S=0$$

ist.

Weil nun aber sowohl für $x = p + q\sqrt{-1}$, als auch für $x = p - q\sqrt{-1}$,

$$x^2-2px+p^2+q^2 = 0$$

ist; so ergeben sich aus dem Obigen offenbar immer 2α Gleichungen zwischen den Grössen M, M_1, M_2, . . . $M_{\alpha-1}$; N, N_1, N_2, . . . $N_{\alpha-1}$, welche also zur vollständigen Bestimmung dieser Grössen gerade hinreichen.

Im Allgemeinen werden diese 2α Gleichungen die Form

$$\begin{aligned}V \pm U\sqrt{-1} &= 0,\\ V_1 \pm U_1\sqrt{-1} &= 0,\\ V_2 \pm U_2\sqrt{-1} &= 0,\\ &\text{u. s. w.}\\ V_{\alpha-1} \pm U_{\alpha-1}\sqrt{-1} &= 0\end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

haben, und führen folglich unmittelbar zu den 2α reellen Gleichungen

$$V = 0,\ V_1 = 0,\ V_2 = 0, \ldots V_{\alpha-1} = 0;$$
$$U = 0,\ U_1 = 0,\ U_2 = 0, \ldots U_{\alpha-1} = 0$$

zwischen den gesuchten Grössen.

Fassen wir nun alles Obige zusammen; so ergiebt sich, dass jede reelle gebrochene rationale algebraische Function als ein Aggregat reeller Brüche von der Form

$$\frac{A}{C(x-a)^{\gamma}} \text{ oder } \frac{M+Nx}{C(x^2-2px+p^2+q^2)^{\alpha}},$$

und, wenn die gegebene Function eine unechte gebrochene Function ist, einer ganzen rationalen algebraischen Function dargestellt werden kann.

Drittes Kapitel.

Entwickelung der wichtigsten Reductionsformeln.

§. 25.

Von sehr vielfachem Gebrauche sind in der Integralrechnung gewisse Formeln, mittelst welcher in vielen Fällen Integrale durch andere Integrale ausgedrückt werden können, welche entweder schon bekannt, oder wenigstens einfacher wie die zu findenden Integrale sind, woraus die grosse Bedeutung dieser Formeln, die überhaupt Reductionsformeln genannt werden, für alle Theile der Integralrechnung von selbst erhellet. Die wichtigsten dieser Formeln, welche fast in jedem der folgenden Kapitel Anwendung finden werden, wollen wir daher in diesem Kapitel entwickeln.

§. 26.

Bevor wir aber zu dieser Entwickelung selbst übergehen, machen wir auf eine, sich unmittelbar aus den bekannten Formeln der Differentialrechnung ergebende Formel aufmerksam, welche für alles Folgende von der grössten Wichtigkeit ist.

Bezeichnet nämlich X eine Function von x; so ist bekanntlich

$$\partial . X^{n+1} = (n+1)\, X^n \partial X,$$

und folglich nach §. 4.

$$X^{n+1} = (n+1) \int X^n \partial X + C;$$

also

$$\int X^n \partial X = \frac{X^{n+1}}{n+1} + C.$$

Als Ausnahmefall von dieser Formel ist der Fall zu bemerken, wenn $n = -1$ ist, weil dann $n + 1 = 0$ ist. Weil nun aber bekanntlich, wenn man, unter der Voraussetzung, dass X reell ist, das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem X positiv oder negativ ist,

$$\partial l(\pm X) = \frac{\pm \partial X}{\pm X} = \frac{\partial X}{X}$$

ist; so ist

$$\int X^{-1} \partial X = \int \frac{\partial X}{X} = l(\pm X) + C,$$

mit derselben Bestimmung wie vorher wegen des Zeichens. Um aber die durch das doppelte Zeichen verursachte Unbequemlichkeit zu vermeiden, wollen wir im Folgenden, was offenbar verstattet ist, immer

$$\int X^{-1} \partial X = \int \frac{\partial X}{X} = \tfrac{1}{2}\, l.X^2 + C$$

setzen.

§. 27.

Allgemeinste Reductionsformel.

Bezeichnen P und X Functionen von x; so ist bekanntlich

$$\partial . PX = P\partial X + X\partial P,$$

und folglich nach §. 6.

$$PX = \int P\partial X + \int X\partial P + C'.$$

Setzen wir aber

$$\partial P = Y\partial x, \quad P = \int Y\partial x;$$

so wird

$$X\int Y\partial x = \int \partial X \int Y\partial x + \int XY\partial x + C',$$

und folglich

$$\int XY\partial x = X\int Y\partial x - \int \partial X \int Y\partial x + C,$$

oder, wenn wir, was in der Folge der Kürze wegen meistens geschehen wird, die willkührliche Constante weglassen,

$$\int XY\partial x = X\int Y\partial x - \int \partial X \int Y\partial x.$$

Natürlich ist auch

$$\int XY\partial x = Y\int X\partial x - \int \partial Y \int X\partial x.$$

§. 28.

Reductionsformeln für das Integral $\int x^{m-1}(a + bx^n)^p \partial x$.

Der Kürze wegen wollen wir $a + bx^n = X$ setzen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach §. 27. ist

$$\int x^{m-1} X^p \partial x = X^p \int x^{m-1} \partial x - \int \partial . X^p \int x^{m-1} \partial x,$$

und folglich nach den Regeln der Differentialrechnung, nach §. 26. und §. 4.

$$1. \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^p}{m} - \frac{pnb}{m} \int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x.$$

Drückt man nun das Integral auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens durch das Integral auf der linken Seite des Gleichheitszeichens aus; so erhält man

$$\int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x = \frac{x^m X^p}{pnb} - \frac{m}{pnb} \int x^{m-1} X^p \partial x,$$

und folglich, wenn man in dieser Gleichung $m-n$ für m, $p+1$ für p setzt,

$$2. \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^{m-n} X^{p+1}}{(p+1)nb} - \frac{m-n}{(p+1)nb} \int x^{m-n-1} X^{p+1} \partial x.$$

Ferner ist nach §. 6.

$$3. \int x^{m-1} X^p \partial x = \int x^{m-1} X^{p-1} (a + bx^n) \partial x$$
$$= a \int x^{m-1} X^{p-1} \partial x + b \int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x.$$

Führen wir nun in diese Gleichung für $\int x^{m-1} X^p \partial x$ den Ausdruck 1. ein; so erhalten wir

$$\frac{x^m X^p}{m} - \frac{pnb}{m} \int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x$$
$$= a \int x^{m-1} X^{p-1} \partial x + b \int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x,$$

und folglich, wenn wir mittelst dieser Gleichung $\int x^{m-1} X^{p-1} \partial x$ bestimmen,

$$\int x^{m-1} X^{p-1} \partial x = \frac{x^m X^p}{ma} - \frac{(m+np)b}{ma} \int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x;$$

also, wenn wir in dieser Gleichung $p+1$ für p setzen,

$$4. \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^{p+1}}{ma} - \frac{(m+n+np)b}{ma} \int x^{m+n-1} X^p \partial x.$$

Drücken wir aber mittelst dieser Gleichung das Integral auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens durch das Integral auf der linken Seite des Gleichheitszeichens aus; so erhalten wir

$$\int x^{m+n-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^{p+1}}{(m+n+np)b} - \frac{ma}{(m+n+np)b} \int x^{m-1} X^p \partial x,$$

und folglich, wenn $m-n$ für m gesetzt wird,

$$5. \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^{m-n} X^{p+1}}{(m+np)b} - \frac{(m-n)a}{(m+np)b} \int x^{m-n-1} X^p \partial x.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenden wir auf das Integral $\int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x$ in der Gleichung 3. die Formel 2. an; so erhalten wir

$$\int x^{m-1} X^p \partial x = a \int x^{m-1} X^{p-1} \partial x + b \left\{ \frac{x^m X^p}{pnb} - \frac{m}{pnb} \int x^{m-1} X^p \partial x \right\},$$

und folglich, wenn wir aus dieser Gleichung $\int x^{m-1} X^p \partial x$ entwickeln:

$$6. \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^p}{m+np} + \frac{pna}{m+np} \int x^{m-1} X^{p-1} \partial x.$$

Bestimmen wir nun endlich aus dieser Gleichung $\int x^{m-1} X^{p-1} \partial x$ durch $\int x^{m-1} X^p \partial x$; so erhalten wir

$$\int x^{m-1} X^{p-1} \partial x = - \frac{x^m X^p}{pna} + \frac{m+np}{pna} \int x^{m-1} X^p \partial x,$$

und folglich, wenn wir $p + 1$ für p setzen,

$$7. \int x^{m-1} X^p \partial x = - \frac{x^m X^{p+1}}{(p+1)na} + \frac{m+n+np}{(p+1)na} \int x^{m-1} X^{p+1} \partial x.$$

Wir haben also jetzt die sechs folgenden höchst wichtigen Gleichungen:

$$\text{I.} \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^p}{m} - \frac{pnb}{m} \int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x,$$

$$\text{II.} \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^{m-n} X^{p+1}}{(p+1)nb} - \frac{m-n}{(p+1)nb} \int x^{m-n-1} X^{p+1} \partial x,$$

$$\text{III.} \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^{p+1}}{ma} - \frac{(m+n+np)b}{ma} \int x^{m+n-1} X^p \partial x,$$

$$\text{IV.} \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^{m-n} X^{p+1}}{(m+np)b} - \frac{(m-n)a}{(m+np)b} \int x^{m-n-1} X^p \partial x,$$

$$\text{V.} \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^p}{m+np} + \frac{pna}{m+np} \int x^{m-1} X^{p-1} \partial x,$$

$$\text{VI.} \int x^{m-1} X \partial x = - \frac{x^m X^{p+1}}{(p+1)na} + \frac{m+n+np}{(p+1)na} \int x^{m-1} X^{p+1} \partial x.$$

Durch jede dieser sechs Formeln wird $\int x^{m-1} X^p \partial x$ durch ein anderes Integral von ganz ähnlicher Form ausgedrückt. Die Formel I. gebraucht man, wenn m vergrössert, p vermindert werden soll; die Formel II. wird angewandt, wenn man m zu vermindern, p zu vergrössern die Absicht hat; der Formel III. bedient man sich, wenn m vermehrt werden, p ungeändert bleiben soll; die Formel IV. gebraucht man, wenn man, indem p ungeändert bleibt, m zu vermindern die Absicht hat; die Formel V. wendet man an, wenn, indem m ungeändert bleibt, p

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

vermindert werden soll; dagegen bedient man sich der Formel VI., wenn, indem m ungeändert bleibt, p vergrössert werden soll. Dies gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, dass n eine positive Grösse ist.

Die hier entwickelten sechs Reductionsformeln werden uns in der Folge die vortrefflichsten Dienste leisten.

§. 29.

Reductionsformeln für das Integral

$$\int x^{m-1}(a+bx^n+cx^{2n})^p\,\partial x.$$

Der Kürze wegen wollen wir wieder $a+bx^n+cx^{2n}=X$ setzen.

Nach §. 27. ist

$$\int x^{m-1}X^p\,\partial x = X^p\int x^{m-1}\partial x - \int\partial . X^p\int x^{m-1}\partial x$$
$$= \frac{x^mX^p}{m} - \frac{p}{m}\int(nbx^{n-1}+2ncx^{2n-1})\,x^m X^{p-1}\,\partial x,$$

d. i.

$$1.\quad \int x^{m-1}X^p\,\partial x =$$
$$\frac{x^mX^p}{m} - \frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x - \frac{2pnc}{m}\int x^{m+2n-1}X^{p-1}\partial x.$$

Ferner ist

$$\int x^{m-1}X^p\partial x = \int x^{m-1}(a+bx^n+cx^{2n})X^{p-1}\partial x$$
$$= a\int x^{m-1}X^{p-1}\partial x + b\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x + c\int x^{m+2n-1}X^{p-1}\partial x,$$

und folglich nach 1.

$$\frac{x^mX^p}{m} - \frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x - \frac{2pnc}{m}\int x^{m+2n-1}X^{p-1}\partial x$$
$$= a\int x^{m-1}X^{p-1}\partial x + b\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x + c\int x^{m+2n-1}X^{p-1}\partial x;$$

also, wie sich aus dieser Gleichung leicht ergiebt,

$$\int x^{m-1}X^{p-1}\partial x =$$
$$\frac{x^mX^p}{ma} - \frac{(m+pn)b}{ma}\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x - \frac{(m+2pn)c}{ma}\int x^{m+2n-1}X^{p-1}\partial x,$$

und folglich, wenn man $p+1$ für p setzt,

$$2.\quad \int x^{m-1}X^p\partial x = \frac{x^mX^{p+1}}{ma} - \frac{(m+n+pn)b}{ma}\int x^{m+n-1}X^p\partial x$$
$$- \frac{(m+2n+2pn)c}{ma}\int x^{m+2n-1}X^p\partial x.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man nun aber in dieser Gleichung $m - 2n$ für m; so erhält man

$$\int x^{m-2n-1} X^p \partial x = \frac{x^{m-2n} X^{p+1}}{(m-2n)a} - \frac{(m-n+pn)b}{(m-2n)a} \int x^{m-n-1} X^p \partial x$$
$$- \frac{(m+2pn)c}{(m-2n)a} \int x^{m-1} X^p \partial x,$$

und folglich nach leichter Rechnung

$$3. \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^{m-2n} X^{p+1}}{(m+2pn)c} - \frac{(m-n+pn)b}{(m+2pn)c} \int x^{m-n-1} X^p \partial x$$
$$- \frac{(m-2n)a}{(m+2pn)c} \int x^{m-2n-1} X^p \partial x.$$

Wendet man diese Formel auf das Integral $\int x^{m+2n-1} X^{p-1} \partial x$ in der Formel 1. an; so erhält man nach 1.

$$\int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^p}{m} - \frac{pnb}{m} \int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x - \frac{2pnx^m X^p}{m(m+2pn)}$$
$$+ \frac{2pn(m+pn)b}{m(m+2pn)} \int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x + \frac{2pna}{m+2pn} \int x^{m-1} X^{p-1} \partial x,$$

d. i.

$$4. \int x^{m-1} X^p \partial x =$$
$$\frac{x^m X^p}{m+2pn} + \frac{2pna}{m+2pn} \int x^{m-1} X^{p-1} \partial x + \frac{pnb}{m+2pn} \int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x.$$

Nach den Gleichungen 4. und 1. hat man nun:

$$\int x^{m-1} X^{p+1} \partial x = \frac{x^m X^{p+1}}{m+2n+2pn} + \frac{2(p+1)na}{m+2n+2pn} \int x^{m-1} X^p \partial x$$
$$+ \frac{(p+1)nb}{m+2n+2pn} \int x^{m+n-1} X^p \partial x,$$

$$\int x^{m+n-1} X^{p+1} \partial x = \frac{x^{m+n} X^{p+1}}{m+3n+2pn} + \frac{2(p+1)na}{m+3n+2pn} \int x^{m+n-1} X^p \partial x$$
$$+ \frac{(p+1)nb}{m+3n+2pn} \int x^{m+2n-1} X^p \partial x,$$

$$\int x^{m-1} X^{p+1} \partial x = \frac{x^m X^{p+1}}{m} - \frac{(p+1)nb}{m} \int x^{m+n-1} X^p \partial x$$
$$- \frac{2(p+1)nc}{m} \int x^{m+2n-1} X^p \partial x;$$

und folglich, wenn der Kürze wegen

$$\int x^{m-1} X^p \partial x = P, \quad \int x^{m-1} X^{p+1} \partial x = Q, \quad \int x^{m+n-1} X^{p+1} \partial x = R,$$
$$\int x^{m+n-1} X^p \partial x = S, \quad \int x^{m+2n-1} X^p \partial x = T;$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{x^m X^{p+1}}{m+2n+2pn} = \varphi, \quad \frac{x^{m+n} X^{p+1}}{m+3n+2pn} = \psi, \quad \frac{x^m X^{p+1}}{m} = \chi;$$

$$\frac{(p+1)n}{m+2n+2pn} = \alpha, \quad \frac{(p+1)n}{m+3n+2pn} = \beta, \quad \frac{(p+1)n}{m} = \gamma$$

gesetzt wird:

$$Q = \varphi + 2\alpha a P + \alpha b S,$$
$$R = \psi + 2\beta a S + \beta b T,$$
$$Q = \chi - \gamma b S - 2\gamma c T.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen zwischen den fünf Integralen P, Q, R, S, T die Integrale S, T; so erhält man eine Gleichung zwischen den drei Integralen P, Q, R.

Um diese Elimination auszuführen, eliminire man aus der zweiten und dritten Gleichung zuerst T, und verbinde mit der dadurch erhaltenen Gleichung die erste der drei obigen Gleichungen; so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$Q = \varphi + 2\alpha a P + \alpha b S,$$
$$\beta b Q + 2\gamma c R = 2\gamma c\psi + \beta b\chi + \beta\gamma(4ac-b^2)S,$$

aus denen man nun ferner S eliminiren muss.

Dadurch erhält man die Gleichung

$$2\alpha\beta\gamma a(4ac-b^2)P + \beta\{\alpha b^2-(4ac-b^2)\gamma\}Q + 2\alpha\gamma bc R$$
$$= -\beta\gamma(4ac-b^2)\varphi + 2\alpha\gamma bc\psi + \alpha\beta b^2\chi,$$

oder, wie man leicht findet,

$$2\alpha\beta\gamma a(4ac-b^2)P + \beta\{\alpha b^2-(4ac-b^2)\gamma\}Q + 2\alpha\gamma bc R$$
$$= \frac{2(p+1)^2n^2\{b^2-2ac+bcx^n\}x^m X^{p+1}}{m(m+2n+2pn)(m+3n+2pn)}.$$

Weil nun aber

$$\alpha\beta\gamma = \frac{(p+1)^3n^3}{m(m+2n+2pn)(m+3n+2pn)},$$

$$\beta\{ab^2-(4ac-b^2)\gamma\} = \frac{2(p+1)^2n^2\{(b^2-4ac)(p+1)n-(2ac-b^2)m\}}{m(m+2n+2pn)(m+3n+2pn)},$$

$$\alpha\gamma = \frac{(p+1)^2n^2}{m(m+2n+2pn)}$$

ist; so ist offenbar

$$(b^2-2ac+bcx^n)x^m X^{p+1}$$
$$= (p+1)na(4ac-b^2)P + \{(b^2-4ac)(p+1)n-(2ac-b^2)m\}Q$$
$$+ (m+3n+2pn)bcR$$

oder

$$(2ac-b^2-bcx^n)x^m X^{p+1}$$
$$= (p+1)na(b^2-4ac)P - \{n(p+1)(b^2-4ac)-m(2ac-b^2)\}Q$$
$$- (m+3n+2pn)bcR,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$A = 2ac - b^2,$$
$$B = -bc,$$
$$C = n(p+1)(b^2 - 4ac) - m(2ac - b^2),$$
$$D = (m + 3n + 2pn)bc,$$
$$K = (p+1)(b^2 - 4ac)na$$

setzen:

$$5.\quad \int x^{m-1} X^p \partial x =$$
$$\frac{A + Bx^n}{K} x^m X^{p+1} + \frac{1}{K}\int \left(Cx^{m-1} + Dx^{m+n-1}\right) X^{p+1} \partial x.$$

Wir haben also jetzt die folgenden fünf Reductionsformeln, welche im Folgenden auch häufige Anwendung finden werden:

$$\text{I.}\quad \int x^{m-1} X^p \partial x =$$
$$\frac{x^m X^p}{m} - \frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x - \frac{2pnc}{m}\int x^{m+2n-1} X^{p-1} \partial x,$$

$$\text{II.}\quad \int x^{m-1} X^p \partial x =$$
$$\frac{x^m X^p}{m+2pn} + \frac{2pna}{m+2pn}\int x^{m-1} X^{p-1} \partial x + \frac{pnb}{m+2pn}\int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x,$$

$$\text{III.}\quad \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^{p+1}}{ma} - \frac{(m+n+pn)b}{ma}\int x^{m+n-1} X^p \partial x$$
$$- \frac{(m+2n+2pn)c}{ma}\int x^{m+2n-1} X^p \partial x,$$

$$\text{IV.}\quad \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^{m-2n} X^{p+1}}{(m+2pn)c} - \frac{(m-n+pn)b}{(m+2pn)c}\int x^{m-n-1} X^p \partial x$$
$$- \frac{(m-2n)a}{(m+2pn)c}\int x^{m-2n-1} X^p \partial x,$$

$$\text{V.}\quad \int x^{m-1} X^p \partial x =$$
$$\frac{A + Bx^n}{K} x^m X^{p+1} + \frac{1}{K}\int \left(Cx^{m-1} + Dx^{m+n-1}\right) X^{p+1} \partial x,$$

für

$$A = 2ac - b^2,$$
$$B = -bc,$$
$$C = n(p+1)(b^2 - 4ac) - m(2ac - b^2),$$
$$D = (m + 3n + 2pn)bc,$$
$$K = (p+1)(b^2 - 4ac)na.$$

Der Gebrauch dieser Formeln ist ein ähnlicher wie der bei den Formeln des vorigen Paragraphen erläuterte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Viertes Kapitel.

Integration der rationalen algebraischen Differentiale.

§. 30.

Das Differential $X\partial x$, wo X eine Function von x bezeichnet, heisst ein rationales algebraisches Differential, wenn X eine rationale algebraische Function von x ist. Jenachdem X eine ganze oder gebrochene rationale algebraische Function von x ist, soll auch $X\partial x$ ein ganzes oder gebrochenes rationales algebraisches Differential genannt werden, und wir werden uns daher jetzt zunächst mit der Integration der ganzen, dann mit der Integration der gebrochenen rationalen algebraischen Differentiale zu beschäftigen haben.

§. 31.

Was zunächst die Integration der ganzen rationalen algebraischen Differentiale betrifft; so unterliegt dieselbe nicht der mindesten Schwierigkeit. Ist nämlich X eine ganze rationale algebraische Function; so ist dieselbe von der allgemeinen Form

$$X = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n$$

und folglich nach §. 6. und §. 26.

$$\int X\partial x = A\int\partial x + A_1\int x\,\partial x + A_2\int x^2\partial x + \ldots + A_n\int x^n\,\partial x$$
$$= Ax + \tfrac{1}{2}A_1x^2 + \tfrac{1}{3}A_2x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}A_nx^{n+1},$$

wo nun eigentlich noch eine willkührliche Constante beigefügt werden müsste.

Hiernach lässt sich jedes ganze rationale algebraische Differential ohne alle Schwierigkeit integriren, und wir wollen daher jetzt gleich zu der, viel grössere Schwierigkeiten darbietenden Integration der gebrochenen rationalen algebraischen Differentiale übergehen.

§. 32.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{\partial x}{(a+bx)^n}.$$

Man setze $a + bx = z$; so ist $b\partial x = \partial z$, und folglich nach §. 4. und §. 26.

$$\int\frac{\partial x}{(a+bx)^n} = \frac{1}{b}\int\frac{\partial z}{z^n} = \frac{1}{b}\int z^{-n}\partial z = -\frac{1}{(n-1)bz^{n-1}},$$

d. i.

$$\int\frac{\partial x}{(a+bx)^n} = -\frac{1}{(n-1)b(a+bx)^{n-1}},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wo nun aber der Fall, wenn $n = 1$ ist, noch besonders betrachtet werden muss.

In diesem Falle ist nach §. 4. und §. 26.

$$\int \frac{\partial x}{a + bx} = \frac{1}{b}\int \frac{\partial z}{z} = \frac{1}{b}\int z^{-1}\partial z = \frac{1}{2b} l . z^2 ,$$

d. i.

$$\int \frac{\partial x}{a + bx} = \frac{1}{2b} l . (a + bx)^2 .$$

§. 33.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a + bx)^n} .$$

Nach §. 28. IV. ist

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a + bx)^n} = \frac{x^{m-1}}{(m - n) b (a + bx)^{n-1}} - \frac{(m - 1) a}{(m - n) b}\int \frac{x^{m-2}\partial x}{(a + bx)^n} .$$

1. Wenn $m < n$ ist, kann man durch wiederholte Anwendung dieser Reductionsformel das gesuchte Integreal immer endlich auf das Integral

$$\int \frac{\partial x}{(a + bx)^n} ,$$

welches aus §. 32. bekannt ist, zurückführen.

So ist z. B., wenn wir der Kürze wegen $a + bx = X$ setzen,

$$\int \frac{x^3\partial x}{X^6} = - \frac{x^3}{2bX^5} + \frac{3a}{2b}\int \frac{x^2\partial x}{X^6}$$

$$= - \left\{\frac{x^3}{2b} + \frac{ax^2}{2b^2}\right\} \frac{1}{X^5} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{x\partial x}{X^6}$$

$$= - \left\{\frac{x^3}{2b} + \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{a^2x}{4b^3}\right\} \frac{1}{X^5} + \frac{a^3}{4b^3}\int \frac{\partial x}{X^6}$$

$$= - \left\{\frac{x^3}{2b} + \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{a^2x}{4b^3} + \frac{a^3}{20b^3}\right\} \frac{1}{X^5} .$$

2. Wenn aber $m = n$ ist; so ist die obige Reductionsformel nicht mehr anwendbar, weil dann $m - n = 0$ ist, und man muss also in diesem Falle das gesuchte Integral auf eine andere Art entwickeln.

Es ist nämlich

$$\int \frac{x^{n-2}\partial x}{(a + bx)^{n-1}} =$$

$$\int \frac{(a + bx) x^{n-2}\partial x}{(a + bx)^n} = a\int \frac{x^{n-2}\partial x}{(a + bx)^n} + b\int \frac{x^{n-1}\partial x}{(a + bx)^n} ,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und folglich

$$\int \frac{x^{n-1}\partial x}{(a+bx)^n} = -\frac{a}{b}\int \frac{x^{n-2}\partial x}{(a+bx)^n} + \frac{1}{b}\int \frac{x^{n-2}\partial x}{(a+bx)^{n-1}},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen wieder $a + bx = X$ setzen,

$$\int \frac{x^{n-1}\partial x}{X^n} = -\frac{a}{b}\int \frac{x^{n-2}\partial x}{X^n} + \frac{1}{b}\int \frac{x^{n-2}\partial x}{X^{n-1}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel ergiebt sich aber ohne alle Schwierigkeit

$$\int \frac{x^{n-1}\partial x}{X^n}$$

$$= -\frac{a}{b}\int \frac{x^{n-2}\partial x}{X^n} - \frac{a}{b^2}\int \frac{x^{n-3}\partial x}{X^{n-1}} - \frac{a}{b^3}\int \frac{x^{n-4}\partial x}{X^{n-2}} - \ldots$$

$$\ldots\ldots - \frac{a}{b^{n-1}}\int \frac{\partial x}{X^2} + \frac{1}{b^{n-1}}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Weil nun nach 1. die Integrale

$$\int \frac{x^{n-2}\partial x}{X^n},\quad \int \frac{x^{n-3}\partial x}{X^{n-1}},\quad \int \frac{x^{n-4}\partial x}{X^{n-2}},\quad \ldots \int \frac{\partial x}{X^2}.$$

gefunden werden können, und nach §. 32.

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{2b} l.X^2$$

ist; so kann auch immer das gesuchte Integral gefunden werden.

3. Wenn $m > n$ ist; so kann man das Integral

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx)^n}$$

mittelst der Reductionsformel

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx)^n} = \frac{x^{m-1}}{(m-n)\,b\,(a+bx)^{n-1}} - \frac{(m-1)\,a}{(m-n)\,b}\int \frac{x^{m-2}\partial x}{(a+bx)^n}$$

immer auf das in 2. gefundene Integral zurückführen.

So ist z. B.

$$\int \frac{x^6\partial x}{X^4} = \frac{x^6}{3b\,X^3} - \frac{6a}{3b}\int \frac{x^5\partial x}{X^4}$$

$$= \left\{\frac{x^6}{3b} - \frac{ax^5}{b^2}\right\}\frac{1}{X^3} + \frac{5a^2}{b^2}\int \frac{x^4\partial x}{X^4}$$

$$= \left\{\frac{x^6}{3b} - \frac{ax^5}{b^2} + \frac{5a^2x^4}{b^3}\right\}\frac{1}{X^3} - \frac{20a^3}{b^3}\int \frac{x^3\partial x}{X^4},$$

wo nun das Integral auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nach 2. entwickelt werden kann.

Man kann aber das gesuchte Integral auch noch auf folgende Art finden. Setzt man nämlich wieder $a + bx = z$; so ist

$$(a+bx)^n = z^n, \quad x = \frac{z-a}{b}, \quad b\partial x = \partial z,$$

und folglich

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx)^n} = \frac{1}{b^m}\int \frac{(z-a)^{m-1}}{z^n}\partial z\,.$$

Entwickelt man nun $(z-a)^{m-1}$ nach dem Binomischen Lehrsatze und dividirt durch z^n; so lässt sich das gesuchte Integral durch eine Reihe von Integralen von der Form $\int z^k \partial z$ ausdrücken, die bekanntlich immer leicht gefunden werden können.

§. 34.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{x^{m+1}(a+bx)^n}.$$

Für $a+bx = X$ ist nach §. 28. III.

$$\int \frac{\partial x}{x^{m+1}X^n} = -\frac{1}{m\,a\,x^m X^{n-1}} - \frac{(m+n-1)\,b}{ma}\int \frac{\partial x}{x^m X^n},$$

und mittelst wiederholter Anwendung dieser Reductionsformel kann das gesuchte Integral offenbar jederzeit endlich auf $\int \frac{\partial x}{xX^n}$ reducirt werden, so dass es also jetzt ferner auf die Entwickelung dieses Integrals ankommt.

Nach §. 28. VI. ist aber

$$\int \frac{\partial x}{xX^n} = \frac{1}{(n-1)\,a X^{n-1}} + \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{xX^{n-1}},$$

und man kann mittelst dieser Formel $\int \frac{\partial x}{xX^n}$ offenbar endlich auf $\int \frac{\partial x}{xX}$ reduciren, so dass es also nun endlich noch auf die Entwickelung dieses letzten Integrals ankommt.

Zu dem Ende zerlege man den Bruch

$$\frac{1}{xX} = \frac{1}{x(a+bx)}$$

in zwei Partialbrüche, und setze deshalb, wobei §. 23. zu vergleichen,

$$\frac{1}{x(a+bx)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a+bx};$$

so erhält man zur Bestimmung der Zähler A und B die beiden Gleichungen $Aa = 1$, $Ab + B = 0$, aus denen sich $A = \frac{1}{a}$, $B = -\frac{b}{a}$, und folglich

$$\int \frac{\partial x}{xX} = \int \frac{\partial x}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{a+bx},$$

d. i. nach §. 32.

$$\int \frac{\partial x}{xX} = \frac{1}{2a} l.x^2 - \frac{1}{2a} l.(a+bx)^2,$$

oder auch

$$\int \frac{\partial x}{xX} = \frac{1}{2a} l.\left(\frac{x}{a+bx}\right)^2 = -\frac{1}{2a} l.\left(\frac{a+bx}{x}\right)^2$$

ergiebt.

Das Vorhergehende reicht in allen Fällen zur vollständigen Entwickelung des gegebenen Integrals hin.

§. 35.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}\partial x.$$

Wir wollen dieses Integral durch Zerlegung der gebrochenen Function

$$\frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}$$

zu entwickeln suchen, und müssen daher zuerst den Nenner dieser gebrochenen Function in Factoren zerlegen.

Lösen wir zu dem Ende die quadratische Gleichung

$$a+bx+cx^2 = 0$$

auf; so erhalten wir

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2c},$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$f = \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}, \quad g = \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$$

setzen,

$$a+bx+cx^2 = c(x+f)(x+g).$$

Nun unterscheiden wir die drei folgenden Fälle.

$$\text{I.}\quad b^2-4ac = 0.$$

In diesem Falle ist $f = g = \frac{b}{2c}$, und also reell. Folglich setzen wir

$$\frac{K+Lx}{a+bx+cx^2} = \frac{A}{c(x+f)^2} + \frac{B}{c(x+f)},$$

und erhalten, wenn wir die Brüche auf der rechten Seite des

Gleichheitszeichens zu einander wirklich addiren, zur Bestimmung von A und B die beiden Gleichungen

$$A + fB = K, \quad B = L.$$

Da sich nun aus diesen Gleichungen

$$A = K - fL, \quad B = L$$

ergiebt; so ist

$$\frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} = \frac{K - fL}{c(x+f)^2} + \frac{L}{c(x+f)},$$

und folglich

$$\int \frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} \partial x = \frac{K - fL}{c} \int \frac{\partial x}{(x+f)^2} + \frac{L}{c} \int \frac{\partial x}{x+f}.$$

Also ist nach §. 32.

$$\int \frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} \partial x = \frac{fL - K}{c(x+f)} + \frac{L}{2c} l.(x+f)^2.$$

Setzen wir aber für f seinen obigen Werth; so erhalten wir

$$\int \frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} \partial x = \frac{bL - 2cK}{c(b + 2cx)} + \frac{L}{2c} l.\left(\frac{b + 2cx}{2c}\right)^2,$$

oder, wenn wir die in diesem Integrale noch enthaltene Constante $-\frac{L}{2c} l.(2c)^2$ weglassen,

$$\int \frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} \partial x = \frac{bL - 2cK}{c(b + 2cx)} + \frac{L}{2c} l.(b + 2cx)^2.$$

II. $b^2 - 4ac > 0$.

In diesem Falle sind f und g beide reell und ungleich. Wir setzen also

$$\frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} = \frac{A}{c(x+f)} + \frac{B}{c(x+g)},$$

und erhalten, wenn wir die Brüche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens unter einerlei Nenner bringen, zur Bestimmung von A und B die beiden Gleichungen

$$gA + fB = K, \quad A + B = L,$$

aus denen sich

$$A = \frac{K - fL}{g - f}, \quad B = -\frac{K - gL}{g - f},$$

und folglich

$$\frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} = \frac{K - fL}{c(g-f)(x+f)} - \frac{K - gL}{c(g-f)(x+g)},$$

also

$$\int \frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} \partial x = \frac{K - fL}{c(g-f)} \int \frac{\partial x}{x+f} - \frac{K - gL}{c(g-f)} \int \frac{\partial x}{x+g},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

d. i. nach §. 32.

$$\int \frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}\,\partial x = \frac{K-fL}{2c(g-f)}\,l.(x+f)^2 - \frac{K-gL}{2c(g-f)}\,l.(x+g)^2$$

ergiebt.

Führt man aber die obigen Werthe von f und g in diese Formel wirklich ein, und lässt die in dem Integrale dann noch enthaltenen Constanten weg; so ergiebt sich

$$\int \frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}\,\partial x = \frac{2cK-L(b-\sqrt{b^2-4ac})}{4c\sqrt{b^2-4ac}}\,l.(2cx+b-\sqrt{b^2-4ac})^2$$
$$-\frac{2cK-L(b+\sqrt{b^2-4ac})}{4c\sqrt{b^2-4ac}}\,l.(2cx+b+\sqrt{b^2-4ac})^2.$$

Für $K=1$, $L=0$ wird

$$\int \frac{\partial x}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-4ac}}\,l.\left(\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right)^2.$$

III. $b^2-4ac<0$.

In diesem Falle sind f und g beide imaginär, und wir können also

$$f=\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad g=\alpha-\beta\sqrt{-1};$$

folglich

$$(x+f)(x+g)=(x+\alpha+\beta\sqrt{-1})(x+\alpha-\beta\sqrt{-1})=(x+\alpha)^2+\beta^2,$$
$$\frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}=\frac{K+Lx}{c\{(x+\alpha)^2+\beta^2\}}$$

setzen.

Setzen wir nun $x+\alpha=z$, $x=z-\alpha$, $\partial x=\partial z$; so wird

$$\frac{K+Lx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}=\frac{K-L\alpha}{z^2+\beta^2}+\frac{Lz}{z^2+\beta^2},$$

und folglich

$$\int\frac{K+Lx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\,\partial x=(K-L\alpha)\int\frac{\partial z}{z^2+\beta^2}+L\int\frac{z\partial z}{z^2+\beta^2}.$$

Für $z=\beta u$, $\partial z=\beta\partial u$ ist nun

$$\frac{\partial z}{z^2+\beta^2}=\frac{\partial u}{\beta(1+u^2)},$$

und folglich nach D. §. 70.

$$\int\frac{\partial z}{z^2+\beta^2}=\frac{1}{\beta}\int\frac{\partial u}{1+u^2}=\frac{1}{\beta}\,Arc\,tang\,u=\frac{1}{\beta}\,Arc\,tang\,\frac{x+\alpha}{\beta}.$$

Für $z^2+\beta^2=v$ ist ferner $2z\partial z=\partial v$, und folglich

$$\int\frac{z\partial z}{z^2+\beta^2}=\tfrac{1}{2}\int\frac{\partial v}{v}=\tfrac{1}{2}lv=\tfrac{1}{2}l(z^2+\beta^2)=l\sqrt{(x+\alpha)^2+\beta^2},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Quadratwurzel positiv genommen. Dass wir hier nicht $\int \frac{\partial v}{v} = \frac{1}{2} l . v^2$, wobei §. 26. zu vergleichen ist, gesetzt haben, hat darin seinen Grund, weil v, als die Summe zweier Quadrate, nothwendig positiv ist.

Folglich ist nach dem Obigen

$$\int \frac{K+Lx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\,\partial x = Ll\sqrt{(x+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{K-L\alpha}{\beta}\,Arc\,tang\,\frac{x+\alpha}{\beta};$$

also

$$\int \frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}\,\partial x = \frac{L}{c}\,l\sqrt{(x+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{K-L\alpha}{\beta c}\,Arc\,tang\,\frac{x+\alpha}{\beta}.$$

Bemerkt man nun, dass

$$\alpha = \frac{b}{2c},\quad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2c}$$

ist, und führt diese Werthe von α und β in die obige Gleichung ein; so erhält man

$$\int \frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}\,\partial x =$$

$$\frac{L}{c}\,l\sqrt{\frac{a+bx+cx^2}{c}} + \frac{2Kc-Lb}{c\sqrt{4ac-b^2}}\,Arc\,tang\,\frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

Für $K = 1$, $L = 0$ ergiebt sich hieraus

$$\int \frac{\partial x}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,Arc\,tang\,\frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

Weil nun bekanntlich, unter der Bedingung, dass man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem sich $Arc\,sin\,\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ im ersten oder vierten, oder im zweiten oder dritten Quadraten endigt,

$$tang\,Arc\,sin\,\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \pm\frac{\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}}{\sqrt{1-\frac{z^2}{1+z^2}}} = +z$$

oder

$$tang\left\{\pm\,Arc\,sin\,\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right\} = z$$

ist; so kann man, immer unter der Bedingung, dass man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $Arc\,sin\,\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sich im ersten oder vierten, oder im zweiten oder dritten Quadranten endigt, für $Arc\,tang\,z$ offenbar jederzeit $\pm\, Arc\,sin \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ setzen. Also ist nach dem Obigen

$$\int \frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}\,\partial x =$$

$$\frac{L}{c}\,l\sqrt{\frac{a+bx+cx^2}{c}} \pm \frac{2Kc-Lb}{c\sqrt{4ac-b^2}}\,Arc\,sin\,\frac{b+2cx}{2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}},$$

$$\int \frac{\partial x}{a+bx+cx^2} = \pm \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,Arc\,sin\,\frac{b+2cx}{2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem sich

$$Arc\,sin\,\frac{b+2cx}{2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}}$$

im ersten oder vierten, oder im zweiten oder dritten Quadranten endigt, d. i. jenachdem

$$cos\,Arc\,sin\,\frac{b+2cx}{2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}}$$

positiv oder negativ ist.

§. 36.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{K+Lx}{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}\,\partial x.$$

Durch Auflösung der Gleichung

$$a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2=0$$

ergiebt sich

$$x=\frac{a}{b}\,(\cos\theta\pm\sin\theta\sqrt{-1}),$$

und unser Integral ist also, weil diese Werthe von x imaginär sind, wenn nur, was wir hier annehmen wollen, $\sin\theta$ nicht $=0$ ist, unter dem Falle §. 35. III. enthalten. Wenden wir also auf dasselbe die a. a. O. entwickelten Formeln an; so erhalten wir

$$\int \frac{K+Lx}{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}\,\partial x =$$

$$\frac{L}{b^2}\,l\sqrt{\frac{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}{b^2}} + \frac{Kb+La\cos\theta}{ab^2\sin\theta}\,Arc\,tang\,\frac{bx-a\cos\theta}{a\sin\theta},$$

oder auch, wenn die in diesem Integrale noch enthaltene Constante $-\frac{L}{2b^2}\,l.b^2$ weggelassen wird,

$$\int \frac{K+Lx}{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}\,\partial x =$$

$$\frac{L}{b^2}\,l\sqrt{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}+\frac{Kb+La\cos\theta}{ab^2\sin\theta}\,Arc\,tang\,\frac{bx-a\cos\theta}{a\sin\theta}\,.$$

Addirt man hierzu, was verstattet ist, die Constante

$$\frac{Kb+La\cos\theta}{ab^2\sin\theta}\,Arc\,tang\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,;$$

so wird, weil

$$Arc\,tang\,\frac{bx-a\cos\theta}{a\sin\theta}+Arc\,tang\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=Arc\,tang\,\frac{bx\sin\theta}{a-bx\cos\theta},$$

ist,

$$\int \frac{K+Lx}{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}\,\partial x =$$

$$\frac{L}{b^2}\,l\sqrt{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}+\frac{Kb+La\cos\theta}{ab^2\sin\theta}\,Arc\,tang\,\frac{bx\sin\theta}{a-bx\cos\theta}\,,$$

und, für $K=1$ und $L=0$,

$$\int \frac{\partial x}{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}=\frac{1}{ab\sin\theta}\,Arc\,tang\,\frac{bx\sin\theta}{a-bx\cos\theta}\,.$$

§. 37.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{(a+bx+cx^2)^n}\,.$$

Man setze der Kürze wegen

$$a+bx+cx^2=X\,;$$

so ist

$$\partial x=\frac{\partial X}{b+2cx}\,,$$

und folglich

$$\frac{\partial x}{X^n}=\frac{\partial X}{(b+2cx)X^n}\,.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung mit $(b+2cx)^2$; so erhält man, weil, wie leicht erhellet,

$$(b+2cx)^2=4cX-(4ac-b^2)$$

ist, die Gleichung

$$\frac{4c\partial x}{X^{n-1}}-\frac{(4ac-b^2)\partial x}{X^n}=(b+2cx)\,\frac{\partial X}{X^n}\,,$$

und folglich nach §. 27.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$4c\int\frac{\partial x}{X^{n-1}} - (4ac-b^2)\int\frac{\partial x}{X^n} =$$
$$(b+2cx)\int\frac{\partial X}{X^n} - 2c\int\partial x\int\frac{\partial X}{X^n},$$

d. i., wenn wir der Kürze wegen $4ac - b^2 = k$ setzen,

$$4c\int\frac{\partial x}{X^{n-1}} - k\int\frac{\partial x}{X^n} = -\frac{b+2cx}{(n-1)X^{n-1}} + \frac{2c}{n-1}\int\frac{\partial x}{X^{n-1}}.$$

Also ist

$$\int\frac{\partial x}{X^n} = \frac{b+2cx}{(n-1)kX^{n-1}} + \frac{2(2n-3)c}{(n-1)k}\int\frac{\partial x}{X^{n-1}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel kann man das gesuchte Integral jederzeit auf das in §. 35. entwickelte Integral $\int\frac{\partial x}{X}$ zurückführen.

§. 38.

Entwickelung des Integrals $\int\frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx+cx^2)^n}$.

Setzen wir der Kürze wegen wieder

$$a+bx+cx^2 = X;$$

so ist nach §. 29. IV.

$$\int\frac{x^{m-1}\partial x}{X^n} =$$
$$\frac{x^{m-2}}{(m-2n)cX^{n-1}} - \frac{(m-n-1)b}{(m-2n)c}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{X^n} - \frac{(m-2)a}{(m-2n)c}\int\frac{x^{m-3}\partial x}{X^n}.$$

Mittelst dieser Formel kann man das gesuchte Integral auf niedrigere Integrale von derselben Art zurückführen. Nur der Fall, wenn $m = 2n$ ist, leidet eine Ausnahme, und wir müssen also jetzt das Integral

$$\int\frac{x^{2n-1}\partial x}{X^n} = \int\frac{x^{2n-1}\partial x}{(a+bx+cx^2)^n}$$

noch besonders betrachten.

Weil aber

$$cx^{2n-1} = (a+bx+cx^2)x^{2n-3} - ax^{2n-3} - bx^{2n-2},$$

d. i.

$$cx^{2n-1} = Xx^{2n-3} - ax^{2n-3} - bx^{2n-2}$$

ist; so ist

$$c\int\frac{x^{2n-1}\partial x}{X^n} = \int\frac{x^{2n-3}\partial x}{X^{n-1}} - a\int\frac{x^{2n-3}\partial x}{X^n} - b\int\frac{x^{2n-2}\partial x}{X^n}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und folglich

$$\int \frac{x^{2n-1}\,\partial x}{X^n} = \frac{1}{c}\int \frac{x^{2n-3}\,\partial x}{X^{n-1}} - \frac{a}{c}\int \frac{x^{2n-3}\,\partial x}{X^n} - \frac{b}{c}\int \frac{x^{2n-2}\,\partial x}{X^n},$$

eine Relation, mittelst welcher, wenn $n > 1$ ist, die Reduction des gesuchten Integrals auf niedrigere Integrale ähnlicher Art sich immer bewerkstelligen lässt. Für $n = 1$ wird diese Relation

$$\int \frac{x\partial x}{X} = \frac{1}{c}\int \frac{\partial x}{x} - \frac{a}{c}\int \frac{\partial x}{xX} - \frac{b}{c}\int \frac{\partial x}{X},$$

und dieser Fall, welcher gleich nachher besonders betrachtet werden soll, leidet also eine Ausnahme.

Für $m = 2$ erhält man aus dem Obigen leicht

$$\int \frac{x\partial x}{X^n} = -\frac{1}{2(n-1)cX^{n-1}} - \frac{b}{2c}\int \frac{\partial x}{X^n},$$

eine Formel, mittelst welcher, wenn $n > 1$ ist, das Integral $\int \frac{x\partial x}{X^n}$ immer gefunden werden kann, weil das Integral $\int \frac{\partial x}{X^n}$ aus §. 37. bekannt ist.

Ist $n = 1$, so kann man auf folgende Art verfahren.

Weil

$$\partial X = b\partial x + 2cx\partial x$$

ist; so ist

$$2cx\,\partial x = \partial X - b\partial x$$

und folglich

$$\frac{2cx\,\partial x}{X} = \frac{\partial X}{X} - \frac{b\partial x}{X};$$

also

$$2c\int \frac{x\partial x}{X} = \int \frac{\partial X}{X} - b\int \frac{\partial x}{X},$$

d. i.

$$\int \frac{x\partial x}{X} = \frac{1}{4c}\,l.X^2 - \frac{b}{2c}\int \frac{\partial x}{X},$$

wodurch das gesuchte Integral wieder auf das in §. 35. entwickelte Integral zurückgeführt ist.

§. 39.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{K + Lx}{(a + bx + cx^2)^n}\,\partial x.$$

Weil

$$\int \frac{K + Lx}{(a + bx + cx^2)^n}\,\partial x = K\int \frac{\partial x}{(a + bx + cx^2)^n} + L\int \frac{x\partial x}{(a + bx + cx^2)^n}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist, und nach §. 37. und §. 38. die Integrale

$$\int\frac{\partial x}{(a+bx+cx^2)^n} \text{ und } \int\frac{x\partial x}{(a+bx+cx^2)^n}$$

entwickelt werden können; so lässt sich auch das gesuchte Integral jederzeit entwickeln.

§. 40.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{\partial x}{x^{m+1}(a+bx+cx^2)^n}.$$

Nach der Formel §. 29. III. ist, wenn wir der Kürze wegen $a+bx+cx^2=X$ setzen,

$$\int\frac{\partial x}{x^{m+1}X^n}=-\frac{1}{max^mX^{n-1}}-\frac{(m+n-1)b}{ma}\int\frac{\partial x}{x^mX^n}$$
$$-\frac{(m+2n-2)c}{ma}\int\frac{\partial x}{x^{m-1}X^n},$$

und mittelst dieser Formel kann man offenbar das gesuchte Integral auf niedrigere Integrale derselben Art reduciren.

Der Fall, wenn $m=0$ ist, muss aber besonders betrachtet werden. Aus der Formel §. 29. V. ergiebt sich leicht

$$\int\frac{\partial x}{xX^n}=-\frac{2ac-b^2-bcx}{(n-1)(b^2-4ac)a}\cdot\frac{1}{X^{n-1}}+\frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{n-1}}$$
$$+\frac{(2n-3)bc}{(n-1)(b^2-4ac)a}\int\frac{\partial x}{X^{n-1}}$$
$$=\frac{1}{2(n-1)aX^{n-1}}+\frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{n-1}}-\frac{b}{2a}\left\{\frac{b+2cx}{(n-1)kX^{n-1}}\right.$$
$$\left.+\frac{2(2n-3)c}{(n-1)k}\int\frac{\partial x}{X^{n-1}}\right\},$$

wenn wir $4ac-b^2=k$ setzen. Also ist nach §. 37.

$$\int\frac{\partial x}{xX^n}=\frac{1}{2(n-1)aX^{n-1}}+\frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{n-1}}-\frac{b}{2a}\int\frac{\partial x}{X^n}.$$

Mittelst dieser Gleichung lässt sich das gesuchte Integral auf niedrigere Integrale von derselben Form und auf die aus §. 37. bekannten Integrale zurückführen.

Nur der Fall, wenn $n=1$ ist, in welchem $n-1=0$ wird, muss noch besonders betrachtet werden. Es ist aber

$$\int\frac{\partial x}{xX}=$$
$$\int\frac{(X-bx-cx^2)\,\partial x}{axX}=\frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x}-\frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{X}-\frac{c}{a}\int\frac{x\partial x}{X},$$

d. i. nach §. 26. und §. 38.

$$\int \frac{\partial x}{xX} = \frac{1}{2a} l.x^2 - \frac{1}{4a} l.X^2 - \frac{b}{2a}\int \frac{\partial x}{X}$$

oder

$$\int \frac{\partial x}{xX} = \frac{1}{4a} l.\frac{x^4}{X^2} - \frac{b}{2a}\int \frac{\partial x}{X},$$

so dass also hierdurch das gesuchte Integral wieder auf das aus §. 35. bekannte Integral zurückgeführt, und daher selbst bekannt ist.

Anmerkung. Die Integrale

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx^2)^n} \text{ und } \int \frac{\partial x}{x^{m+1}(a+bx^2)^n}$$

werden aus §. 38. und dem in diesem Paragraphen entwickelten Integrale erhalten, wenn man $b = 0$ und $c = b$ setzt.

§. 41.

Aufgabe. Jedes reelle gebrochene rationale algebraische Differential zu integriren.

Auflösung. Nach §. 24. II. lässt sich jedes reelle gebrochene rationale algebraische Differential $X\partial x$ in lauter reelle gebrochene rationale algebraische Differentiale von der Form

$$\frac{A\partial x}{C(x-a)^\gamma} \text{ oder } \frac{(M+Nx)\partial x}{C(x^2-2px+p^2+q^2)^\alpha},$$

und, wenn X eine unechte gebrochene Function ist, in ein reelles ganzes rationales algebraisches Differential zerlegen. Da nun die Differentiale

$$\frac{A\partial x}{C(x-a)^\gamma} \text{ und } \frac{(M+Nx)\partial x}{C(x^2-2px+p^2+q^2)^\alpha}$$

sich jederzeit nach §. 32. und §. 39. integriren lassen, und jedes ganze rationale algebraische Differential nach §. 31. integrirt werden kann; so kann auch das reelle gebrochene rationale algebraische Differential $X\partial x$ jederzeit nach §. 6. integrirt werden.

Beispiele.

I. Das Differential

$$\frac{\partial x}{a+bx^3}$$

zu integriren.

Aus der Gleichung

$$a + bx^3 = 0 \text{ oder } x^3 + \frac{a}{b} = 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

erhält man $x = -\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, oder, wenn der Kürze wegen $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = k$ gesetzt wird, $x = -k$. Dividirt man nun mit $x + k$ in $x^3 + k^3$ hinein; so ergiebt sich $x^2 - kx + k^2$ als Quotient, und es ist folglich

$$a + bx^3 = b(x + k)(x^2 - kx + k^2).$$

Deshalb setzen wir

$$\frac{1}{a + bx^3} = \frac{A}{b(x + k)} + \frac{M + Nx}{b(x^2 - kx + k^2)},$$

indem wir zugleich bemerken, dass die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - kx + k^2 = 0$$

beide imaginär, nämlich

$$x = \tfrac{1}{2}k(1 + \sqrt{-3}) \text{ und } x = \tfrac{1}{2}k(1 - \sqrt{-3})$$

sind.

Aus obiger Gleichung folgt nun

$$1 = A(x^2 - kx + k^2) + (M + Nx)(x + k).$$

Für $x + k = 0$, d. i. $x = -k$, ergiebt sich hieraus

$$1 = 3Ak^2, \quad A = \frac{1}{3k^2}.$$

Setzen wir ferner $x = \frac{1}{2}k(1 + \sqrt{-3})$, so wird

$$1 = \{M + \tfrac{1}{2}Nk(1 + \sqrt{-3})\}\{k + \tfrac{1}{2}k(1 + \sqrt{-3})\}$$

oder

$$\frac{2}{k} = (M + \tfrac{1}{2}Nk + \tfrac{1}{2}Nk\sqrt{-3})(3 + \sqrt{-3})$$
$$= 3M + (M + 2Nk)\sqrt{-3},$$

eine Gleichung, welche auf die beiden Gleichungen

$$3M = \frac{2}{k}, \quad M + 2Nk = 0$$

führt, aus denen sich

$$M = \frac{2}{3k}, \quad N = -\frac{1}{3k^2}$$

ergiebt.

Folglich ist

$$\frac{1}{a + bx^3} = \frac{1}{3bk^2(x + k)} + \frac{2k - x}{3bk^2(x^2 - kx + k^2)},$$

und also

$$\int \frac{\partial x}{a + bx^3} = \frac{1}{3bk^2}\int \frac{\partial x}{x + k} + \frac{1}{3bk^2}\int \frac{(2k - x)\partial x}{x^2 - kx + k^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach §. 32. und §. 35. III. ist aber

$$\int \frac{\partial x}{x+k} = \tfrac{1}{2} l.(x+k)^2$$

und

$$\int \frac{(2k-x)\partial x}{x^2-kx+k^2} = -l\sqrt{x^2-kx+k^2} + \sqrt{3}.Arc\,tang\,\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}.$$

Also ist

$$\int \frac{\partial x}{a+bx^3} = \frac{1}{3bk^2}\left\{\tfrac{1}{2} l\frac{(x+k)^2}{x^2-kx+k^2} + \sqrt{3}.Arc\,tang\,\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right\}.$$

Soll dieses Integral so bestimmt werden, dass es für $x=0$ verschwindet; so muss man offenbar die Constante $\frac{\sqrt{3}}{3bk^2}\,Arc\,tang\,\frac{1}{\sqrt{3}}$ zu demselben addiren. Weil nun aber

$$Arc\,tang\,\frac{2x-k}{k\sqrt{3}} + Arc\,tang\,\frac{1}{\sqrt{3}} = Arc\,tang\,\frac{x\sqrt{3}}{2k-x}$$

ist; so ist

$$\int_0^x \frac{\partial x}{a+bx^3} = \frac{1}{3bk^2}\left\{\tfrac{1}{2} l\frac{(x+k)^2}{x^2-kx+k^2} + \sqrt{3}.Arc\,tang\,\frac{x\sqrt{3}}{2k-x}\right\}.$$

II. Das Differential

$$\frac{x\partial x}{a+bx^3}$$

zu integriren.

Wir setzen

$$\frac{x}{a+bx^3} = \frac{A}{b(x+k)} + \frac{M+Nx}{b(x^2-kx+k^2)},$$

d. i.

$$x = A(x^2-kx+k^2) + (M+Nx)(x+k).$$

Für $x = -k$ ergiebt sich

$$-k = 3Ak^2, \quad A = -\frac{1}{3k}.$$

Für $x = \frac{1}{2}k\,(1+\sqrt{-3})$ wird

$$\tfrac{1}{2}k(1+\sqrt{-3}) = \{M+\tfrac{1}{2}Nk(1+\sqrt{-3})\}\{k+\tfrac{1}{2}k(1+\sqrt{-3})\},$$

oder

$$1+\sqrt{-3} = 3M+(M+2Nk)\sqrt{-3},$$

und folglich

$$3M = 1, \quad M+2Nk = 1; \quad M = \tfrac{1}{3}, \quad N = \frac{1}{3k}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Also ist

$$\int \frac{x\partial x}{a+bx^3} = -\frac{1}{3bk}\int \frac{\partial x}{x+k} + \frac{1}{3bk}\int \frac{(k+x)\partial x}{x^2-kx+k^2},$$

und folglich nach §. 32. und §. 35. III.

$$\int \frac{x\partial x}{a+bx^3} = -\frac{1}{3bk}\left\{\tfrac{1}{2}l.\frac{(x+k)^2}{x^2-kx+k^2} - \sqrt{3}.Arctang\,\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right\},$$

und auf ähnliche Art wie in I.

$$\int_0^x \frac{x\partial x}{a+bx^3} = -\frac{1}{3bk}\left\{\tfrac{1}{2}l.\frac{(x+k)^2}{x^2-kx+k^2} - \sqrt{3}.Arctang\,\frac{x\sqrt{3}}{2k-x}\right\}.$$

Anmerkung. Das Differential

$$\frac{x^2\partial x}{a+bx^3}$$

lässt sich sehr leicht auf folgende Art integriren.

Man setze $a+bx^3=z$; so ist $3bx^2\partial x=\partial z$, und folglich

$$\frac{x^2\partial x}{a+bx^3} = \frac{\partial z}{3bz}.$$

Also ist

$$\int \frac{x^2\partial x}{a+bx^3} = \frac{1}{3b}\int \frac{\partial z}{z} = \frac{1}{6b}\,l.z^2 = \frac{1}{6b}\,l.(a+bx^3)^2.$$

§. 42.

Aufgabe. Das Differential

$$\frac{x^{m-1}\partial x}{x^n+a^n}$$

zu integriren, unter der Voraussetzung, dass $m-1$ kleiner als n ist.

Auflösung. I. Zerlegung der Function x^n+a^n in Factoren.

1. n eine gerade Zahl.

Die allgemeine Form der Wurzeln der Gleichung $x^n+a^n=0$ ist

$$x = a.(-1)^{\frac{1}{n}}.$$

Weil nun

$$-1 = \cos\pi + \sin\pi\sqrt{-1}$$

ist; so sind nach D. §. 89. III.

$$\cos\frac{\pi}{n} \pm \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n} \pm \sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n} \pm \sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}$$

n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe von $(-1)^{\frac{1}{n}}$, und folglich

$$a(\cos\frac{\pi}{n} \pm \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$a(\cos\frac{3\pi}{n} \pm \sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$a(\cos\frac{5\pi}{n} \pm \sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$a(\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1})$$

n sämmtlich unter einander ungleiche Wurzeln der Gleichung $x^n + a^n = 0$. Also ist nach §. 13.

$$\begin{aligned} x^n + a^n = \; & (x - a\cos\frac{\pi}{n} - a\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}) \\ & \times (x - a\cos\frac{\pi}{n} + a\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}) \\ & \times (x - a\cos\frac{3\pi}{n} - a\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1}) \\ & \times (x - a\cos\frac{3\pi}{n} + a\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1}) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & \times (x - a\cos\frac{(n-1)\pi}{n} - a\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}) \\ & \times (x - a\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + a\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}), \end{aligned}$$

oder auch, wenn man je zwei dieser Factoren durch Multiplication mit einander verbindet,

$$\begin{aligned} x^n + a^n = \; & (x^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{n} + a^2) \\ & \times (x^2 - 2ax\cos\frac{3\pi}{n} + a^2) \\ & \times (x^2 - 2ax\cos\frac{5\pi}{n} + a^2) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & \times (x^2 - 2ax\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + a^2), \end{aligned}$$

wo nun alle Factoren reell sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. n eine ungerade Zahl.

Ganz auf ähnliche Art wie vorher sind nach D. §. 89. III.

$$-1,$$

$$\cos\frac{\pi}{n} \pm \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n} \pm \sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n} \pm \sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}$$

n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe von $(-1)^{\frac{1}{n}}$; also

$$-a,$$

$$a(\cos\frac{\pi}{n} \pm \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$a(\cos\frac{3\pi}{n} \pm \sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$a(\cos\frac{5\pi}{n} \pm \sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$a\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

n sämmtlich unter einander ungleiche Wurzeln der Gleichung $x^n + a^n = 0$. Folglich ist nach §. 13.

$$\begin{aligned} x^n + a^n = (x+a)\,&(x - a\cos\frac{\pi}{n} - a\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}) \\ &\times(x - a\cos\frac{\pi}{n} + a\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}) \\ &\times(x - a\cos\frac{3\pi}{n} - a\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1}) \\ &\times(x - a\cos\frac{3\pi}{n} + a\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1}) \\ &\quad\cdots\cdots\cdots \\ &\times\left(x - a\cos\frac{(n-2)\pi}{n} - a\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ &\times\left(x - a\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + a\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right), \end{aligned}$$

oder

$$x^n + a^n = (x+a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{n} + a^2\right)$$
$$\times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3\pi}{n} + a^2\right)$$
$$\times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{5\pi}{n} + a^2\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + a^2\right),$$

wo nun alle Factoren reell sind.

II. Zerlegung der gebrochenen Function

$$\frac{x^{m-1}}{x^n + a^n}$$

in Partialbrüche.

1. n eine gerade Zahl.

Der Zähler des dem Factor

$$x - a\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} \mp a\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sqrt{-1}$$

von $x^n + a^n$ entsprechenden Partialbruchs ist nach §. 16.

$$\frac{a^{m-1}\left\{\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}^{m-1}}{na^{n-1}\left\{\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}^{n-1}},$$

d. i.

$$\frac{1}{n}a^{m-n}\left\{\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}^{m-n},$$

und folglich nach D. §. 88.

$$\frac{1}{n}a^{m-n}\left\{\cos\frac{(2k-1)(m-n)\pi}{n} \pm \sin\frac{(2k-1)(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}$$

oder

$$-\frac{1}{n}a^{m-n}\left\{\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n} \pm \sin\frac{(2k-1)m\pi}{n}\sqrt{-1}\right\},$$

weil

$$\cos\frac{(2k-1)(m-n)\pi}{n}$$
$$= \cos\left\{(2k-1)\left(\frac{m\pi}{n} - \pi\right)\right\} = -\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n},$$
$$\sin\frac{(2k-1)(m-n)\pi}{n}$$
$$= \sin\left\{(2k-1)\left(\frac{m\pi}{n} - \pi\right)\right\} = -\sin\frac{(2k-1)m\pi}{n}$$

ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Summe der beiden Brüche

$$\frac{\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n} + \sin\frac{(2k-1)m\pi}{n}\sqrt{-1}}{x - a\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} - \sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

und

$$\frac{\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n} - \sin\frac{(2k-1)m\pi}{n}\sqrt{-1}}{x - a\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} + a\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

ist aber, wie man leicht findet,

$$\frac{2x\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n} - 2a\cos\frac{(2k-1)(m-1)\pi}{n}}{x^2 - 2ax\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} + a^2}\ ^{*)}.$$

Also ist

$$\frac{x^{m-1}}{x^n + a^n} = -\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{m\pi}{n} - a\cos\frac{(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{n} + a^2\right)}$$

$$-\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{3m\pi}{n} - a\cos\frac{3(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3\pi}{n} + a^2\right)}$$

$$-\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{5m\pi}{n} - a\cos\frac{5(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2 - 2ax\cos\frac{5\pi}{n} + a^2\right)}$$

. . . . . .

$$-\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{(n-1)m\pi}{n} - a\cos\frac{(n-1)(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2 - 2ax\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + a^2\right)}.$$

2. n eine ungerade Zahl.

Der dem Factor $x + a$ entsprechende Partialbruch ist nach §. 16.

$$\frac{(-a)^{m-n}}{n(x+a)} = (-1)^{m-1}\cdot\frac{a^{m-n}}{n(x+a)},$$

weil n eine ungerade Zahl ist.

---

*) Man muss bei dieser Addition jeden der beiden Nenner bloss als eine zweitheilige Grösse betrachten, so dass der reelle Theil den ersten, der imaginäre Theil den zweiten Theil bildet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die übrigen Brüche findet man ganz auf dieselbe Art wie in 1., und es ist folglich

$$\frac{x^{m-1}}{x^n+a^n} = (-1)^{m-1}\cdot\frac{a^{m-n}}{n(x+a)}$$

$$-\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{m\pi}{n} - a\cos\frac{(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{\pi}{n}+a^2\right)}$$

$$-\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{3m\pi}{n} - a\cos\frac{3(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{3\pi}{n}+a^2\right)}$$

$$-\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{5m\pi}{n} - a\cos\frac{5(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{5\pi}{n}+a^2\right)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{(n-2)m\pi}{n} - a\cos\frac{(n-2)(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+a^2\right)}.$$

III. Integration des Differentials

$$\frac{x^{m-1}\partial x}{x^n+a^n}.$$

1. n eine gerade Zahl.

Nach §. 36. erhält man leicht

$$\frac{n}{2a^{m-n}}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{x^n+a^n}$$

$$= -\cos\frac{m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{\pi}{n}+a^2}$$

$$+\sin\frac{m\pi}{n}\,Arctang\,\frac{x\sin\frac{\pi}{n}}{a-x\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$-\cos\frac{3m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{3\pi}{n}+a^2}$$

$$+\sin\frac{3m\pi}{n}\,Arctang\,\frac{x\sin\frac{3\pi}{n}}{a-x\cos\frac{3\pi}{n}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$- \cos \frac{5m\pi}{n} l \sqrt{x^2 - 2ax \cos \frac{5\pi}{n} + a^2}$$

$$+ \sin \frac{5m\pi}{n} Arc\,tang \frac{x \sin \frac{5\pi}{n}}{a - x \cos \frac{5\pi}{n}}.$$

. . . . . .

$$- \cos \frac{(n-1)m\pi}{n} l \sqrt{x^2 - 2ax \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + a^2}$$

$$+ \sin \frac{(n-1)m\pi}{n} Arc\,tang \frac{x \sin \frac{(n-1)\pi}{n}}{a - x \cos \frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

2. n eine ungerade Zahl.

Nach §. 32. und §. 36. ist

$$\frac{n}{2a^{m-n}} \int \frac{x^{m-1}\partial x}{x^n + a^n}$$

$$= (-1)^{m-1} . \tfrac{1}{4} l . (x + a)^2$$

$$- \cos \frac{m\pi}{n} l \sqrt{x^2 - 2ax \cos \frac{\pi}{n} + a^2}$$

$$+ \sin \frac{m\pi}{n} Arc\,tang \frac{x \sin \frac{\pi}{n}}{a - x \cos \frac{\pi}{n}}$$

$$- \cos \frac{3m\pi}{n} l \sqrt{x^2 - 2ax \cos \frac{3\pi}{n} + a^2}$$

$$+ \sin \frac{3m\pi}{n} Arc\,tang \frac{x \sin \frac{3\pi}{n}}{a - x \cos \frac{3\pi}{n}}$$

$$- \cos \frac{5m\pi}{n} l \sqrt{x^2 - 2ax \cos \frac{5\pi}{n} + a^2}$$

$$+ \sin \frac{5m\pi}{n} Arc\,tang \frac{x \sin \frac{5\pi}{n}}{a - \cos \frac{5\pi}{n}}$$

. . . . . .

$$- \cos \frac{(n-2)m\pi}{n} l \sqrt{x^2 - 2ax \cos \frac{(n-2)\pi}{n} + a^2}$$

$$+ \sin \frac{(n-2)m\pi}{n} Arc\,tang \frac{x \sin \frac{(n-2)\pi}{n}}{a - x \cos \frac{(n-2)\pi}{n}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

IV. Als Beispiel zu dem Vorhergehenden wollen wir nun das Integral $\int \frac{\partial x}{x^6+1}$ entwickeln.

Nach III. 1. ist

$$3\int \frac{\partial x}{x^6+1}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{6}\, l\sqrt{x^2-2x\cos\frac{\pi}{6}+1} + \sin\frac{\pi}{6}\, Arctang\, \frac{x\sin\frac{\pi}{6}}{1-x\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$-\cos\frac{3\pi}{6}\, l\sqrt{x^2-2x\cos\frac{3\pi}{6}+1} + \sin\frac{3\pi}{6}\, Arctang\, \frac{x\sin\frac{3\pi}{6}}{1-x\cos\frac{3\pi}{6}}$$

$$-\cos\frac{5\pi}{6}\, l\sqrt{x^2-2x\cos\frac{5\pi}{6}+1} + \sin\frac{5\pi}{6}\, Arctang\, \frac{x\sin\frac{5\pi}{6}}{1-x\cos\frac{5\pi}{6}}\,.$$

Aber $\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$; $\cos\frac{3}{6}\pi = 0$, $\sin\frac{3}{6}\pi = 1$; $\cos\frac{5}{6}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$, und folglich

$$3\int\frac{\partial x}{x^6+1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\, l\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}}$$

$$+\tfrac{1}{2}\, Arctang\, \frac{x}{2-x\sqrt{3}} + Arctang\, x + \tfrac{1}{2}\, Arctang\, \frac{x}{2+x\sqrt{3}},$$

oder, weil

$$Arctang\, \frac{x}{2-x\sqrt{3}} + Arctang\, \frac{x}{2+x\sqrt{3}} + 2\, Arctang\, x$$

$$= Arctang\, \frac{x}{2-x\sqrt{3}} + Arctang\, \frac{x}{2+x\sqrt{3}} + Arctang\, \frac{2x}{1-x^2}$$

$$= Arctang\, \frac{x}{1-x^2} + Arctang\, \frac{2x}{1-x^2} = Arctang\, \frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4}$$

ist,

$$\int\frac{\partial x}{x^6+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\, l\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}} + \tfrac{1}{6}\, Arctang\, \frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4}\,.$$

Sollte man nun das Integral $\int\frac{\partial x}{a+bx^6}$ unter der Voraussetzung, dass a und b gleiche Vorzeichen haben, entwickeln; so setze man

$$\sqrt[6]{\frac{a}{b}} = k, \qquad \frac{x}{k} = z.$$

Dann wird

$$\int \frac{\partial x}{a+bx^6} = \frac{k}{a}\int \frac{\partial z}{1+z^6},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int \frac{\partial x}{a+bx^6}$$

$$= \frac{k}{a}\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}\, l \sqrt{\frac{x^2+kx\sqrt{3}+k^2}{x^2-kx\sqrt{3}+k^2}} + \tfrac{1}{6}\, Arctang\, \frac{3kx(k^2-x^2)}{x^4-4k^2x^2+k^4}\right\}$$

oder auch

$$\int \frac{\partial x}{a+bx^6}$$

$$= \frac{1}{6bk^5}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\, l\, \frac{x^2+kx\sqrt{3}+k^2}{x^2-kx\sqrt{3}+k^2} + Arctang\, \frac{3kx(k^2-x^2)}{x^4-4k^2x^2+k^4}\right\}.$$

§. 43.

Aufgabe. Das Differential

$$\frac{x^{m-1}\partial x}{x^n-a^n}$$

zu integriren, unter der Voraussetzung, dass $m-1$ kleiner als n ist.

Auflösung. 1. Zerlegung der Function $x^n - a^n$ in Factoren.

1. n eine gerade Zahl.

Die allgemeine Form der Wurzeln der Gleichung $x^n - a^n = 0$ ist

$$x = a.(+1)^{\frac{1}{n}}.$$

Weil nun

$$+1 = \cos 2\pi + \sin 2\pi\sqrt{-1}$$

ist; so sind nach D. §. 89. III.

$$+1,\ -1,$$

$$\cos\frac{2\pi}{n} \pm \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{4\pi}{n} \pm \sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{6\pi}{n} \pm \sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}$$

n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe von $(+1)^{\frac{1}{n}}$, und folglich

$$+a, -a,$$
$$a\left(\cos\frac{2\pi}{n} \pm \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$
$$a\left(\cos\frac{4\pi}{n} \pm \sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$
$$a\left(\cos\frac{6\pi}{n} \pm \sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

n sämmtlich unter einander ungleiche Wurzeln der Gleichung $x^n - a^n = 0$. Also ist nach §. 13.

$$\begin{aligned} x^n - a^n = \; & (x-a)(x+a) \\ & \times\left(x - a\cos\frac{2\pi}{n} - a\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ & \times\left(x - a\cos\frac{2\pi}{n} + a\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ & \times\left(x - a\cos\frac{4\pi}{n} - a\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ & \times\left((x - a\cos\frac{4\pi}{n} + a\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & \times\left(x - a\cos\frac{(n-2)\pi}{n} - a\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ & \times\left(x - a\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + a\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right), \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} x^n - a^n = \; & (x-a)(x+a) \\ & \times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{n} + a^2\right) \\ & \times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{n} + a^2\right) \\ & \times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{6\pi}{n} + a^2\right) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & \times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + a^2\right). \end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. n eine ungerade Zahl.

Ganz auf ähnliche Art wie vorher sind nach D. §. 89. III.

$$+1,$$
$$\cos\frac{2\pi}{n} \pm \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},$$
$$\cos\frac{4\pi}{n} \pm \sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1},$$
$$\cos\frac{6\pi}{n} \pm \sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}$$

n sämmtlich unter einander verschiedene Werthe von $(+1)^{\frac{1}{n}}$, und folglich

$$+a,$$
$$a\left(\cos\frac{2\pi}{n} \pm \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$
$$a\left(\cos\frac{4\pi}{n} \pm \sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$
$$a\left(\cos\frac{6\pi}{n} \pm \sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$
$$\cdots\cdots$$
$$a\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

n sämmtlich unter einander ungleiche Wurzeln der Gleichung $x^n - a^n = 0$. Also ist nach §. 13.

$$\begin{aligned} x^n - a^n = \; & (x-a) \\ & \times\left(x - a\cos\frac{2\pi}{n} - a\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ & \times\left(x - a\cos\frac{2\pi}{n} + a\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ & \times\left(x - a\cos\frac{4\pi}{n} - a\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ & \times\left(x - a\cos\frac{4\pi}{n} + a\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ & \cdots\cdots \\ & \times\left(x - a\cos\frac{(n-1)\pi}{n} - a\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ & \times\left(x - a\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + a\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}\right), \end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder

$$\begin{aligned} x^n - a^n = \; & (x-a) \\ & \times \left(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{n} + a^2\right) \\ & \times \left(x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{n} + a^2\right) \\ & \times \left(x^2 - 2ax\cos\frac{6\pi}{n} + a^2\right) \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & \times \left(x^2 - 2ax\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + a^2\right). \end{aligned}$$

II. Zerlegung der gebrochenen Function $\frac{x^{m-1}}{x^n - a^n}$ in Partialbrüche.

1. n eine gerade Zahl.

Der Zähler des dem Factor

$$x - a\cos\frac{2k\pi}{n} \mp a\sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$

von $x^n - a^n$ entsprechenden Partialbruchs ist nach §. 16.

$$\frac{a^{m-1}\left\{\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}^{m-1}}{na^{n-1}\left\{\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}^{n-1}},$$

d. i.

$$\frac{1}{n}\,a^{m-n}\left\{\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}^{m-n},$$

und folglich nach D. §. 88.

$$\frac{1}{n}\,a^{m-n}\left\{\cos\frac{2k(m-n)\pi}{n} \pm \sin\frac{2k(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}$$

oder

$$\frac{1}{n}\,a^{m-n}\left\{\cos\frac{2km\pi}{n} \pm \sin\frac{2km\pi}{n}\sqrt{-1}\right\},$$

weil

$$\cos\frac{2k(m-n)\pi}{n} = \cos\left\{2k\left(\frac{m\pi}{n} - \pi\right)\right\} = \cos\frac{2km\pi}{n},$$

$$\sin\frac{2k(m-n)\pi}{n} = \sin\left\{2k\left(\frac{m\pi}{n} - \pi\right)\right\} = \sin\frac{2km\pi}{n}$$

ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Summe der beiden Brüche

$$\frac{\cos\frac{2km\pi}{n} + \sin\frac{2km\pi}{n}\sqrt{-1}}{x - a\cos\frac{2k\pi}{n} - a\sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

und

$$\frac{\cos\frac{2km\pi}{n} - \sin\frac{2km\pi}{n}\sqrt{-1}}{x - a\cos\frac{2k\pi}{n} + a\sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

ist aber, wie man leicht findet,

$$\frac{2x\cos\frac{2km\pi}{n} - 2a\cos\frac{2k(m-1)\pi}{n}}{x^2 - 2ax\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2}\text{*)}.$$

Endlich sind nach §. 16. die beiden den Factoren $x - a$ und $x + a$ von $x^n - a^n$ entsprechenden Partialbrüche

$$\frac{a^{m-1}}{na^{n-1}(x-a)} \text{ und } \frac{(-a)^{m-1}}{n(-a)^{n-1}(x+a)},$$

d. i.

$$\frac{a^{m-n}}{n(x-a)} \text{ und } \frac{(-a)^{m-n}}{n(x+a)},$$

oder, weil n eine gerade Zahl ist,

$$\frac{a^{m-n}}{n(x-a)} \text{ und } (-1)^m.\frac{a^{m-n}}{n(x+a)}.$$

Also ist

$$\frac{x^{m-1}}{x^n - a^n} = \frac{a^{m-n}}{n(x-a)} + (-1)^m.\frac{a^{m-n}}{n(x+a)}$$

$$+ \frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{2m\pi}{n} - a\cos\frac{2(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{n} + a^2\right)}$$

$$+ \frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{4m\pi}{n} - a\cos\frac{4(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{n} + a^2\right)}$$

---

*) Man muss bei dieser Addition jeden der beiden Nenner bloss als eine zweitheilige Grösse betrachten, so dass der reelle Theil den ersten, der imaginäre Theil den zweiten Theil bildet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$+\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{6m\pi}{n}-a\cos\frac{6(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{6\pi}{n}+a^2\right)}$$

. . . . . .

$$+\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{(n-2)m\pi}{n}-a\cos\frac{(n-2)(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+a^2\right)}.$$

2. n eine ungerade Zahl.

Man erhält ganz auf ähnliche Art wie vorher

$$\frac{x^{m-1}}{x^n-a^n}=\frac{a^{m-n}}{n(x-a)}$$

$$+\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{2m\pi}{n}-a\cos\frac{2(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{2\pi}{n}+a^2\right)}$$

$$+\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{4m\pi}{n}-a\cos\frac{4(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{4\pi}{n}+a^2\right)}$$

$$+\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{6m\pi}{n}-a\cos\frac{6(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{6\pi}{n}+a^2\right)}$$

. . . . . .

$$+\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{(n-1)m\pi}{n}-a\cos\frac{(n-1)(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+a^2\right)}.$$

III. Integration des Differentials

$$\frac{x^{m-1}\partial x}{x^n-a^n}.$$

1. n eine gerade Zahl.

Nach §. 32. und §. 36. ist

$$\frac{n}{2a^{m-n}}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{x^n-a^n}$$

$$= \tfrac{1}{4}l.(x-a)^2 + (-1)^m.\tfrac{1}{4}l.(x+a)^2$$

$$+ \cos\frac{2m\pi}{n}\, l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{2\pi}{n}+a^2}$$

$$-\sin\frac{2m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{2\pi}{n}}{a-x\cos\frac{2\pi}{n}}$$

$$+ \cos\frac{4m\pi}{n}\, l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{4\pi}{n}+a^2}$$

$$-\sin\frac{4m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{4\pi}{n}}{a-x\cos\frac{4\pi}{n}}$$

$$+ \cos\frac{6m\pi}{n}\, l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{6\pi}{n}+a^2}$$

$$-\sin\frac{6m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{6\pi}{n}}{a-x\cos\frac{6\pi}{n}}$$

. . . . . .

$$+ \cos\frac{(n-2)m\pi}{n}\, l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+a^2}$$

$$-\sin\frac{(n-2)m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{(n-2)}{n}}{a-x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}}.$$

2. n eine ungerade Zahl.

Auf ganz ähnliche Art wie vorher erhält man

$$\frac{n}{2a^{m-n}}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{x^n-a^n}$$

$$= \tfrac{1}{4}l.(x-a)^2$$

$$+ \cos\frac{2m\pi}{n}\, l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{2\pi}{n}+a^2}$$

$$-\sin\frac{2m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{2\pi}{n}}{a-x\cos\frac{2\pi}{n}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$+ \cos\frac{4m\pi}{n}\, l\sqrt{x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{n} + a^2}$$

$$- \sin\frac{4m\pi}{n}\, Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{4\pi}{n}}{a - x\cos\frac{4\pi}{n}}$$

$$+ \cos\frac{6m\pi}{n}\, l\sqrt{x^2 - 2ax\cos\frac{6\pi}{n} + a^2}$$

$$- \sin\frac{6m\pi}{n}\, Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{6\pi}{n}}{a - x\cos\frac{6\pi}{n}}$$

. . . . . .

$$+ \cos\frac{(n-1)m\pi}{n}\, l\sqrt{x^2 - 2ax\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + a^2}$$

$$- \sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\, Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{a - x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

IV. Als Beispiel zu dem Vorhergehenden wollen wir das Integral $\int\frac{\partial x}{x^6-1}$ entwickeln.

Es ist

$$3\int\frac{\partial x}{x^6-1} = \tfrac{1}{4}\, l.(x-1)^2 - \tfrac{1}{4}\, l.(x+1)^2$$

$$+ \cos\tfrac{1}{3}\pi . l\sqrt{x^2 - 2x\cos\tfrac{1}{3}\pi + 1} - \sin\tfrac{1}{3}\pi . Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{1}{3}\pi}{1 - x\cos\frac{1}{3}\pi}$$

$$+ \cos\tfrac{2}{3}\pi . l\sqrt{x^2 - 2x\cos\tfrac{2}{3}\pi + 1} - \sin\tfrac{2}{3}\pi . Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{2}{3}\pi}{1 - x\cos\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \tfrac{1}{4}\, l.(x-1)^2 - \tfrac{1}{4}\, l.(x+1)^2$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, l\sqrt{x^2 - x + 1} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} . Arc\,tang\,\frac{\frac{1}{2}x\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{2}x}$$

$$- \tfrac{1}{2}\, l\sqrt{x^2 + x + 1} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} . Arc\,tang\,\frac{\frac{1}{2}x\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{2}x}$$

$$= \tfrac{1}{4}\, l\frac{(x-1)^2(x^2 - x + 1)}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\left\{ Arc\,tang\,\frac{\frac{1}{2}x\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{2}x} + Arc\,tang\,\frac{\frac{1}{2}x\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{2}x} \right\},$$

d. i.

$$\int\frac{\partial x}{x^6-1} = \tfrac{1}{12}\, l\frac{(x-1)^2(x^2 - x + 1)}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)} - \tfrac{1}{6}\sqrt{3}.Arc\,tang\,\frac{x\sqrt{3}}{1 - x^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Soll nun, unter der Voraussetzung, dass a und b entgegengesetzte Vorzeichen haben, $\int \frac{\partial x}{a+bx^6}$ entwickelt werden; so setze man

$$\sqrt[6]{-\frac{a}{b}} = k, \quad \frac{x}{k} = z.$$

Dann ist

$$\int \frac{\partial x}{a+bx^6} = \frac{k}{a}\int \frac{\partial z}{1-z^6} = -\frac{k}{a}\int \frac{\partial z}{z^6-1},$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{a+bx^6}$$

$$= -\frac{k}{6a}\left\{\tfrac{1}{2}\, l\, \frac{(x-k)^2(x^2-kx+k^2)}{(x+k)^2(x^2+kx+k^2)} - \sqrt{3}.\, Arctang\, \frac{kx\sqrt{3}}{k^2-x^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{6bk^5}\left\{\tfrac{1}{2}\, l\, \frac{(x-k)^2(x^2-kx+k^2)}{(x+k)^2(x^2+kx+k^2)} - \sqrt{3}.\, Arctang\, \frac{kx\sqrt{3}}{k^2-x^2}\right\},$$

oder auch

$$\int \frac{\partial x}{a+bx^6}$$

$$= \frac{-1}{6bk^5}\left\{\tfrac{1}{2}\, l\, \frac{(x+k)^2(x^2+kx+k^2)}{(x-k)^2(x^2-kx+k^2)} + \sqrt{3}.\, Arctang\, \frac{kx\sqrt{3}}{k^2-x^2}\right\}.$$

Fünftes Kapitel.

Integration der irrationalen algebraischen Differentiale.

§. 44.

Ein vorzügliches und sich zuerst darbietendes Mittel zur Integration irrationaler algebraischer Differentiale ist, dass man dieselben durch geeignete Substitutionen rational zu machen und dadurch ihre Integration auf das vorhergehende Kapitel zurückzuführen sucht. Ausserdem kann man Integrale irrationaler algebraischer Differentiale durch zweckmässige Substitutionen oft auf schon bekannte Integrale irrationaler algebraischer Differentiale zurückführen. Ferner leisten auch hier wieder die im zweiten Kapitel entwickelten Reductionsformeln in vielen Fällen die vortrefflichsten Dienste, und endlich muss man zuweilen zur Entwickelung der gegebenen Differentiale in convergirende Reihen, wenn dies möglich ist, seine Zuflucht nehmen, indem man dann auf diese Reihen die in §. 8. und §. 9. bewiesenen wichtigen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

allgemeinen Sätze anwendet. Von allen diesen Integrationsmethoden werden im Folgenden Beispiele vorkommen.

§. 45.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}$$

Wir nehmen hier und im Folgenden immer an, dass n eine durch 2 nicht theilbare Zahl ist. Setzen wir nun $a + bx = z$; so ist $b\partial x = \partial z$, und folglich

$$\int \frac{\partial x}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{1}{b}\int z^{-\frac{n}{2}}\partial z = -\frac{2}{(n-2)bz^{\frac{n-2}{2}}} = -\frac{2}{(n-2)b(a+bx)^{\frac{n-2}{2}}}.$$

§. 46.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}.$$

Nach §. 28. IV. ist.

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{2x^{m-1}}{(2m-n)\,b\,(a+bx)^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{2(m-1)a}{(2m-n)b}\int \frac{x^{m-2}\partial x}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}.$$

Mittelst dieser Reductionsformel lässt sich das gesuchte Integral immer auf das in §. 45. entwickelte Integral zurückführen.

Man kann aber dieses Integral auch noch auf folgende Art entwickeln. Setzt man nämlich $a + bx = z^2$; so ist

$$(a+bx)^{\frac{n}{2}} = z^n, \quad x = \frac{z^2-a}{b}, \quad b\partial x = 2z\partial z,$$

und folglich

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}} = \frac{2}{b^m}\int \frac{(z^2-a)^{m-1}}{z^{n-1}}\,\partial z.$$

Entwickelt man nun $(z^2-a)^{m-1}$ nach dem binomischen Lehrsatze und dividirt durch z^{n-1}; so lässt sich das gesuchte Integral durch eine Reihe von Integralen von der Form $\int z^k\partial z$ ausdrücken, die bekanntlich immer leicht zu finden sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 47.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a+bx}}$$

Man setze $a + bx = z^2$; so ist

$$\sqrt{a+bx} = z, \quad x = \frac{z^2-a}{b}, \quad b\partial x = 2z\partial z,$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a+bx}} = 2\int \frac{\partial z}{z^2-a},$$

wodurch also unser Integral auf das Integral eines rationalen algebraischen Differentials zurückgeführt ist, und nach §. 35. gefunden werden kann.

Wir unterscheiden bei der Integration die drei folgenden Fälle.

I. $a = 0$.

In diesem Falle ist

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a+bx}} = \int \frac{\partial x}{x\sqrt{bx}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\int x^{-\frac{3}{2}}\partial x = -\frac{2}{\sqrt{bx}}.$$

II. $a > 0$.

Die Grösse $b^2 - 4ac$ in §. 35. ist in Bezug auf das Integral $\int \frac{\partial z}{z^2-a}$, wie sogleich erhellet, $= 4a$, und im vorliegenden Falle also > 0. Folglich ist nach §. 35. II.

$$\int \frac{\partial z}{z^2-a} = \frac{1}{4\sqrt{a}}\, l.\left(\frac{2z-2\sqrt{a}}{2z+2\sqrt{a}}\right)^2,$$

oder

$$\int \frac{\partial z}{z^2-a} = \frac{1}{4\sqrt{a}}\, l.\left(\frac{z-\sqrt{a}}{z+\sqrt{a}}\right)^2.$$

Also ist

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\, l.\left(\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right)^2.$$

III. $a < 0$.

In diesem Falle ist die Grösse $b^2 - 4ac$ in §. 35. < 0, und folglich nach §. 35. III.

$$\int \frac{\partial z}{z^2-a} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\, Arc\, tang\, \frac{z}{\sqrt{-a}};$$

also

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \, Arc\ tang \frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}}.$$

§. 48.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{x(a+bx)^{\frac{n}{2}}}.$$

Nach §. 28. VI. ist

$$\int \frac{\partial x}{x(a+bx)^{\frac{n}{2}}} = \frac{2}{(n-2)\,a\,(a+bx)^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x(a+bx)^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Mittelst dieser Reductionsformel kann das gesuchte Integral immer auf das in §. 47. entwickelte Integral zurückgeführt werden.

§. 49.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{x^{m+1}(a+bx)^{\frac{n}{2}}}.$$

Nach §. 28. III. ist

$$\int \frac{\partial x}{x^{m+1}(a+bx)^{\frac{n}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{max^m(a+bx)^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{(2m+n-2)b}{2ma}\int \frac{\partial x}{x^m(a+bx)^{\frac{n}{2}}}.$$

Mittelst dieser Reductionsformel lässt sich das gesuchte Integral immer auf das in §. 48. entwickelte Integral zurückführen.

§. 50.

Entwickelung des Integrals

$$\int x^m(a+bx)^{\frac{n}{2}}\partial x.$$

Man setze $a + bx = z^2$; so ist

$$(a+bx)^{\frac{n}{2}} = z^n, \quad x = \frac{z^2-a}{b}, \quad b\partial x = 2z\partial z,$$

und folglich

$$\int x^m(a+bx)^{\frac{n}{2}}\partial x = \frac{2}{b^{m+1}}\int (z^2-a)^m z^{n+1}\partial z.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Entwickelt man nun $(z^2 - a)^m$ nach dem binomischen Lehrsatze und multiplicirt den durch diese Entwickelung erhaltenen Ausdruck mit z^{n+1}; so wird das gesuchte Integral durch eine Reihe von Integralen von der Form $\int z^k \partial z$ ausgedrückt, die sich bekanntlich immer leicht finden lassen.

§. 51.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}} \partial x}{x^{m+1}} .$$

Nach §. 28. III. ist

$$\int \frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}} \partial x}{x^{m+1}}$$

$$= - \frac{(a+bx)^{\frac{n+2}{2}}}{max^m} - \frac{(2m-n-2)b}{2ma} \int \frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}} \partial x}{x^m} .$$

Mittelst dieser Reductionsformel kann man das gesuchte Integral immer auf das Integral

$$\int \frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}} \partial x}{x}$$

zurückführen, so dass es also jetzt bloss noch auf die Entwickelung dieses Integrals ankommt.

Nach §. 28. V. ist aber

$$\int \frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}} \partial x}{x} = \frac{2(a+bx)^{\frac{n}{2}}}{n} + a \int \frac{(a+bx)^{\frac{n-2}{2}} \partial x}{x}$$

Mittelst dieser Formel kann man, weil n eine ungerade Zahl ist, das gesuchte Integral offenbar immer auf

$$\int \frac{(a+bx)^{\frac{1}{2}} \partial x}{x}$$

zurückführen, und für dieses Integral ergiebt sich ferner mittelst derselben Reductionsformel

$$\int \frac{(a+bx)^{\frac{1}{2}} \partial x}{x} = 2(a+bx)^{\frac{1}{2}} + a \int \frac{\partial x}{x \sqrt{a+bx}} ,$$

so dass sich also dass gesuchte Integral immer auf das in §. 47. entwickelte Integral zurückführen lässt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 52.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt[3]{a+bx}}.$$

Man setze $a + bx = z^3$; so ist

$$\sqrt[3]{a+bx} = z, \quad b\partial x = 3z^2\partial z, \quad x = \frac{z^3-a}{b},$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt[3]{a+bx}} = 3\int \frac{z\partial z}{z^3-a}.$$

Nach §. 43. III. 2. ist aber

$$\frac{3\sqrt[3]{a}}{2}\int \frac{z\partial z}{z^3-a} = \tfrac{1}{4}l.(z-\sqrt[3]{a})^2$$

$$+ \cos\frac{4\pi}{3}\, l\sqrt{z^2 - 2z\sqrt[3]{a}.\cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt[3]{a^2}}$$

$$- \sin\frac{4\pi}{3}\, Arctang\frac{z\sin\frac{2\pi}{3}}{\sqrt[3]{a} - z\cos\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \tfrac{1}{4}l.(z-\sqrt[3]{a})^2$$

$$- \tfrac{1}{2}l\sqrt{z^2+z\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.Arctang\frac{z\sqrt{3}}{z+2\sqrt[3]{a}}$$

$$= \tfrac{1}{4}l\frac{(z-\sqrt[3]{a})^2}{z^2+z\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.Arctang\frac{z\sqrt{3}}{z+2\sqrt[3]{a}}.$$

Aber

$$z^3 - a = (z-\sqrt[3]{a})(z^2+z\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}).$$

Also

$$\frac{3\sqrt[3]{a}}{2}\int \frac{z\partial z}{z^3-a} = \tfrac{1}{4}l\frac{(z-\sqrt[3]{a})^3}{z^3-a} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.Arctang\frac{z\sqrt{3}}{z+2\sqrt[3]{a}}$$

$$= \tfrac{3}{4}l\frac{z-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{z^3-a}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.Arctang\frac{z\sqrt{3}}{z+2\sqrt[3]{a}},$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a+bx}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\left\{\tfrac{3}{2}l\frac{\sqrt[3]{a+bx}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{bx}} + \sqrt{3}.Arctang\frac{\sqrt{3}.\sqrt[3]{a+bx}}{\sqrt[3]{a+bx}+2\sqrt[3]{a}}\right\}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 53.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt[3]{(a+bx)^2}}.$$

Man setze wieder $a + bx = z^3$; so ist auf ganz ähnliche Art wie vorher

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = 3\int \frac{\partial z}{z^3 - a},$$

und nach §. 43. III. 2.

$$\frac{3\sqrt[3]{a^2}}{2}\int \frac{\partial z}{z^3 - a} = \tfrac{1}{4} l.(z - \sqrt[3]{a})^2$$

$$+ \cos\frac{2\pi}{3} l\sqrt{z^2 - 2z\sqrt[3]{a}.\cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt[3]{a^2}}$$

$$- \sin\frac{2\pi}{3} \operatorname{Arc\,tang} \frac{z\sin\frac{2\pi}{3}}{\sqrt[3]{a} - z\cos\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \tfrac{1}{4} l.(z - \sqrt[3]{a})^2$$

$$- \tfrac{1}{2} l\sqrt{z^2 + z\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\operatorname{Arc\,tang} \frac{z\sqrt{3}}{z + 2\sqrt[3]{a}},$$

woraus auf ganz ähnliche Art wie im vorigen Paragraphen

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt[3]{(a+bx)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\left\{ \tfrac{3}{2} l\frac{\sqrt[3]{a+bx} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{bx}} - \sqrt{3}.\operatorname{Arc\,tang} \frac{\sqrt{3}.\sqrt[3]{a+bx}}{\sqrt[3]{a+bx} + 2\sqrt[3]{a}} \right\}$$

erhalten wird.

§. 54.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}}.$$

Wir unterscheiden bei der Entwickelung dieses wichtigen Integrals zwei Fälle, jenachdem $c > 0$ oder $c < 0$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I. $c > 0$.

Man bringe die Grösse unter dem Wurzelzeichen auf die Form

$$a + bx + cx^2 = c\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x + x^2\right)$$

und setze der Kürze wegen

$$\frac{a}{c} = \alpha, \quad \frac{b}{c} = \beta, \quad c = \gamma^2,$$

wo γ eine reelle Grösse bezeichnet; so ist

$$a + bx + cx^2 = \gamma^2(\alpha + \beta x + x^2)$$

und folglich

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\gamma}\int\frac{\partial x}{\sqrt{\alpha + \beta x + x^2}}.$$

Nun setze man ferner

$$\sqrt{\alpha + \beta x + x^2} = x + z$$

oder

$$\alpha + \beta x + x^2 = x^2 + 2xz + z^2;$$

so ist

$$x = \frac{\alpha - z^2}{2z - \beta}, \; x + z = \frac{\alpha - \beta z + z^2}{2z - \beta}, \; \partial x = -\frac{2(\alpha - \beta z + z^2)\partial x}{(2z - \beta)^2},$$

und folglich

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = -\frac{2}{\gamma}\int\frac{\partial x}{2z - \beta}.$$

Aber nach §. 32.

$$\int\frac{\partial z}{2z - \beta} = \tfrac{1}{4}l.(2z - \beta)^2.$$

Folglich

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = -\frac{1}{2\gamma}l.(2z - \beta)^2,$$

woraus nach gehöriger Substitution

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = -\frac{1}{2\gamma c}l.\left\{-\frac{b}{c} - 2x + \frac{2}{\gamma c}\sqrt{a + bx + cx^2}\right\}^2$$

$$= -\frac{1}{2\gamma c}l.\left\{-\frac{1}{c}\left(b + 2cx - 2\gamma c.\sqrt{a + bx + cx^2}\right)\right\}^2,$$

oder, wenn man die in diesem Integrale noch enthaltene Constante weglässt,

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = -\frac{1}{2\gamma c}l.(b + 2cx - 2\gamma c.\sqrt{a + bx + cx^2})^2$$

folgt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zu bemerken hat man übrigens noch, dass man in diesem Ausdrucke des gesuchten Integrals offenbar $\sqrt{c}$ positiv und negativ nehmen, und daher auch

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\, l.(b+2cx+2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx})^2$$

setzen kann.

Will man also $\sqrt{c}$ immer positiv nehmen; so muss man eigentlich

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{c}}\, l.(b+2cx \pm 2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})^2$$

setzen.

Weil aber

$$(b+2cx+2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})(b+2cx-2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})$$
$$= (b+2cx)^2 - 4c(a+bx+cx^2) = b^2 - 4ac,$$

und folglich

$$-\frac{1}{2\sqrt{c}}\, l.(b+2cx-2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})^2$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{c}}\, l.(b+2cx+2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})^2 - \frac{1}{2\sqrt{c}}\, l.(b^2-4ac)^2$$

ist; so reicht es, weil

$$-\frac{1}{2\sqrt{c}}\, l.(b^2-4ac)^2$$

eine constante Grösse ist, offenbar hin,

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\, l.(b+2cx+2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})^2$$

zu setzen, und $\sqrt{c}$ immer positiv zu nehmen, welches im Folgenden auch meistens geschehen wird.

II. $c < 0$.

In diesem Falle setzen wir

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \int \frac{\partial x}{\sqrt{-\frac{a}{c} - \frac{b}{c}x - x^2}},$$

oder, für $-\frac{a}{c} = \alpha$, $-\frac{b}{c} = \beta$, $-c = \gamma^2$,

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\gamma} \int \frac{\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x - x^2}}.$$

Setzen wir nun ferner $x - \frac{1}{2}\beta = z$; so ist $\partial x = \partial z$, $\alpha + \beta x - x^2 = \alpha + \frac{1}{4}\beta^2 - z^2$, und folglich, für $\alpha + \frac{1}{4}\beta^2 = g^2$,

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\gamma}\int \frac{\partial z}{\sqrt{g^2 - z^2}}.$$

Für $z^2 = \frac{g^2 u^2}{1 + u^2}$ ist aber

$$g^2 - z^2 = \frac{g^2}{1 + u^2},\ \partial z = \frac{g\partial u}{(1 + u^2)\sqrt{1 + u^2}},$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\gamma}\int \frac{\partial u}{1 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\, Arc\,tang\, u.$$

Weil nun

$$u^2 = \frac{z^2}{g^2 - z^2} = \frac{(x - \frac{1}{2}\beta)^2}{\alpha + \beta x - x^2} = \frac{(b + 2cx)^2}{-4c(a + bx + cx^2)}$$

und folglich

$$u = \pm \frac{b + 2cx}{2\sqrt{-c}.\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

ist; so ist

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\, Arc\,tang \pm \frac{b + 2cx}{2\sqrt{-c}.\sqrt{a + bx + cx^2}},$$

wo sich nun noch fragt, ob man das obere oder untere Zeichen zn nehmen hat, eine Frage, welche sich am leichtesten beantworten lässt, wenn man die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens differentiirt. Dadurch findet man, dass man das untere Zeichen nehmen muss, und dass also

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\, Arc\,tang \frac{-b - 2cx}{2\sqrt{-c}.\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

ist.

Auch hier kann man $\sqrt{-c}$ positiv und negativ nehmen, und man muss also, wenn man $\sqrt{-c}$ immer positiv nehmen will, eigentlich

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{-c}}\, Arc\,tang \frac{-b - 2cx}{\pm 2\sqrt{-c}.\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

setzen. Weil aber alle die trigonometrische Tangente

$$\frac{-b - 2cx}{-2\sqrt{-c}.\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

habende Kreisbogen, wie leicht erhellen wird, in dem analytischen Ausdrucke

$$-\, Arc\,tang \frac{-b - 2cx}{2\sqrt{-c}.\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

zusammengefasst werden können; so reicht es offenbar hin,

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{-c}}\,Arc\,tang\,\frac{-b-2cx}{2\sqrt{-c}.\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

zu setzen, und $\sqrt{-c}$ immer positiv zu nehmen.

§. 55.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{\partial x}{(a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Wir setzen der Kürze wegen

$$a+bx+cx^2=X,\ (b+2cx)\,\partial x=\partial X;$$

folglich überhaupt

$$\frac{\partial x}{X^p}=\frac{\partial X}{(b+2cx)X^p},$$

und, wenn man auf beiden Seiten mit $(b+2cx)^2$ multiplicirt,

$$\frac{(b^2+4bcx+4c^2x^2)\partial x}{X^p}=\frac{(b+2cx)\partial X}{X^p},$$

oder, weil

$$b^2+4bcx+4c^2x^2=b^2-4ac+4cX$$

ist, wenn wir der Kürze wegen $4ac-b^2=k$ setzen,

$$\frac{(4cX-k)\partial x}{X^p}=\frac{(b+2cx)\,\partial X}{X^p}.$$

Also ist nach §. 27.

$$4c\int\frac{\partial x}{X^{p-1}}-k\int\frac{\partial x}{X^p}=(b+2cx)\int X^{-p}\partial X-2c\int\partial x\int X^{-p}\partial X$$

$$=-\frac{b+2cx}{(p-1)X^{p-1}}+\frac{2c}{p-1}\int\frac{\partial x}{X^{p-1}},$$

und folglich

$$\int\frac{\partial x}{X^p}=\frac{b+2cx}{(p-1)kX^{p-1}}+\frac{2(2p-3)c}{(p-1)k}\int\frac{\partial x}{X^{p-1}}.$$

Durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel ergiebt sich für $p=\frac{n}{2}$, wenn wir

$$A=\frac{1}{(n-2)k},\ B=\frac{4(n-3)c}{(n-4)k}A,\ C=\frac{4(n-5)c}{(n-6)k}B,\ D=\frac{4(n-7)c}{(n-8)k}C,\ldots$$

$$\ldots\ldots L=\frac{4(n-2i+1)c}{(n-2i)k}K$$

setzen, leicht

$$\int \frac{\partial x}{X^{\frac{n}{2}}} =$$

$$\left\{ \frac{A}{X^{\frac{n-3}{2}}} + \frac{B}{X^{\frac{n-5}{2}}} + \frac{C}{X^{\frac{n-7}{2}}} + \ldots + \frac{K}{X^{\frac{n-2i+1}{2}}} + \frac{L}{X^{\frac{n-2i-1}{2}}} \right\} \frac{2(b+2cx)}{\sqrt{X}}$$

$$+ 4(n-2i-1)cL \int \frac{\partial x}{X^{\frac{n}{2}-i}} .$$

Ist nun n eine ungerade Zahl und grösser als die Einheit, wie wir hier annehmen wollen; so kann man $i = \frac{n-1}{2}$ setzen, und wird also, da für diesen Werth von i das Glied

$$4(n-2i-1)cL \int \frac{\partial x}{X^{\frac{n}{2}-i}}$$

verschwindet, mittelst der vorhergehenden Formel das gesuchte Integral immer vollständig entwickeln können. Der Fall, wenn $n = 1$ ist, ist im vorigen Paragraphen ausführlich betrachtet worden.

Für $n = 3$ und $n = 5$ erhält man z. B.

$$\int \frac{\partial x}{X^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(b+2cx)}{k\sqrt{X}}, \quad \int \frac{\partial x}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{1}{3kX} + \frac{8c}{3k^2}\right) \frac{2(b+2cx)}{\sqrt{X}} .$$

§. 56.

Entwickelung des Integrals

$$\int (a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}} \partial x.$$

Kehrt man die im vorigen Paragraphen entwickelte allgemeine Relation um; so erhält man für $k = 4ac - b^2$,

$$\int \frac{\partial x}{X^{p-1}} = -\frac{b+2cx}{2(2p-3)cX} + \frac{(p-1)k}{2(2p-3)c} \int \frac{\partial x}{X^p} ,$$

und folglich, wenn man $-p+1$ für p setzt,

$$\int X^p \partial x = \frac{b+2cx}{2(2p+1)c} X^p + \frac{pk}{2(2p+1)c} \int X^{p-1} \partial x .$$

Durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel ergiebt sich für $p = \frac{n}{2}$, wenn wir

$$A = \frac{1}{2(n+1)c}, \; B = \frac{nk}{4(n-1)c} A, \; C = \frac{(n-2)k}{4(n-3)c} B, \; D = \frac{(n-4)k}{4(n-5)c}, \ldots$$

$$\ldots\ldots L = \frac{(n-2i+4)k}{4(n-2i+3)c} K$$

setzen,

$$\int X^{\frac{n}{2}}\partial x =$$

$$\left\{AX^{\frac{n-1}{2}}+BX^{\frac{n-3}{2}}+CX^{\frac{n-5}{2}}+\ldots+KX^{\frac{n-2i+3}{2}}+LX^{\frac{n-2i+1}{2}}\right\}(b+2cx)\sqrt{X}$$

$$+\frac{n-2i+2}{2}kL\int X^{\frac{n}{2}-i}\partial x.$$

Nehmen wir nun wieder an, dass n eine ungerade Zahl ist, die auch die Einheit seyn kann; so können wir $i=\frac{n+1}{2}$ setzen, und werden also offenbar mittelst der vorhergehenden Formel das gesuchte Integral immer auf das in §. 54. entwickelte Integral $\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}$ zurückführen können. Für $n=1$ und $n=3$ ergiebt sich z. B.

$$\int X^{\frac{1}{2}}\partial x=\frac{(b+2cx)\sqrt{X}}{4c}+\frac{k}{8c}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}},$$

$$\int X^{\frac{3}{2}}\partial x=\left(\frac{X}{8c}+\frac{3k}{64c^2}\right)(b+2cx)\sqrt{X}+\frac{3k^2}{128c^2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

§. 57.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{x^m\partial x}{(a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Wir nehmen an, dass n eine ungerade Zahl ist, und setzen der Kürze wegen $a+bx+cx^2=X$.

Nach §. 29. IV. ist

$$\int\frac{x^m\partial x}{X^{\frac{n}{2}}}=$$

$$\frac{x^{m-1}}{(m-n+1)cX^{\frac{n-2}{2}}}-\frac{(2m-n)b}{2(m-n+1)c}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{X^{\frac{n}{2}}}-\frac{(m-1)a}{(m-n+1)c}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{X^{\frac{n}{2}}}.$$

Mittelst dieser Formel kann das gesuchte Integral auf niedrigere Integrale derselben Art zurückgeführt werden. Für $m=1$ ist z. B.

$$\int\frac{x\partial x}{X^{\frac{n}{2}}}=-\frac{1}{(n-2)cX^{\frac{n-2}{2}}}-\frac{b}{2c}\int\frac{\partial x}{X^{\frac{n}{2}}},$$

wodurch das Integral auf das in §. 55. entwickelte Integral zurückgeführt ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nur für $m = n - 1$ ist die obige allgemeine Formel nicht mehr anwendbar, weil dann $m - n + 1 = 0$ wird, und dieser Fall muss also besonders betrachtet werden.

Weil aber

$$cx^{n-1} = (a + bx + cx^2)x^{n-3} - ax^{n-3} - bx^{n-2}$$

ist; so ist

$$c\int\frac{x^{n-1}\partial x}{X^{\frac{n}{2}}} = \int\frac{x^{n-3}\partial x}{X^{\frac{n-2}{2}}} - a\int\frac{x^{n-3}\partial x}{X^{\frac{n}{2}}} - b\int\frac{x^{n-2}\partial x}{X^{\frac{n}{2}}},$$

und folglich

$$\int\frac{x^{n-1}\partial x}{X^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{c}\int\frac{x^{n-3}\partial x}{X^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{a}{c}\int\frac{x^{n-3}\partial x}{X^{\frac{n}{2}}} - \frac{b}{c}\int\frac{x^{n-2}\partial x}{X^{\frac{n}{2}}},$$

mittelst welcher Formel die Reduction des gesuchten Integrals auf niedrigere Integrale ähnlicher Art immer bewerkstelligt werden kann. Für $n = 1$ ist das Integral aus §. 54. bekannt.

§. 58.

Entwickelung des Integrals $\int\frac{\partial x}{x^m(a + bx + cx^2)^{\frac{n}{2}}}$.

Auch hier nehmen wir an, dass n eine ungerade Zahl ist, und setzen der Kürze wegen $a + bx + cx^2 = X$.

Nach §. 29. III. ist

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\frac{n}{2}}} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}X^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{(2m+n-4)b}{2(m-1)a}\int\frac{\partial x}{x^{m-1}X^{\frac{n}{2}}}$$
$$- \frac{(m+n-3)c}{(m-1)a}\int\frac{\partial x}{x^{m-2}X^{\frac{n}{2}}}.$$

Mittelst dieser Formel lässt sich das gesuchte Integral auf niedrigere Integrale derselben Art zurückführen. Nur der Fall, wenn $m = 1$ ist, macht eine Ausnahme, und muss daher besonders behandelt werden.

Setzt man aber in dem für $\int\frac{\partial x}{xX^n}$ gefundenen Ausdrucke in §. 40. $\frac{n}{2}$ für n; so erhält man

$$\int\frac{\partial x}{xX^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{(n-2)aX^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{b}{2a}\int\frac{\partial x}{X^{\frac{n}{2}}},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und kann also mittelst dieser Relation das gesuchte Integral immer auf Integrale von der in §. 55. betrachteten Form und auf das Integral $\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}$ zurückführen, so dass uns jetzt bloss noch die Entwickelung des letzten Integrals übrig bleibt.

Setzen wir aber $\frac{1}{x} = z$ so ist $-\frac{\partial x}{x^2} = \partial z$, $\frac{\partial x}{x} = -x\partial z$, und folglich, wie man leicht findet,

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} = -\int \frac{\partial z}{\sqrt{c + bz + az^2}},$$

wodurch also das erstere Integral wieder auf die in §. 55. betrachtete Form gebracht ist, und daher immer gefunden werden kann.

§. 59.

Entwickelung des Integrals

$$\int x^m (a + bx + cx^2)^{\frac{n}{2}} \partial x.$$

Nach §. 29. IV. ist, wenn wir $a + bx + cx^2 = X$ setzen,

$$\int x^m X^{\frac{n}{2}} \partial x = \frac{x^{m-1} X^{\frac{n+2}{2}}}{(m+n+1)c} - \frac{(2m+n)b}{2(m+n+1)c} \int x^{m-1} X^{\frac{n}{2}} \partial x$$
$$- \frac{(m-1)a}{(m+n+1)c} \int x^{m-2} X^{\frac{n}{2}} \partial x.$$

Mittelst dieser Formel wird sich das gesuchte Integral immer ohne Schwierigkeit auf bekannte Integrale zurückführen lassen.

Es ist auch

$$\int x^m X^{\frac{n}{2}} \partial x = \int \frac{x^m X^n \partial x}{X^{\frac{n}{2}}}.$$

Entwickelt man nun $x^m X^n$ nach Potenzen von x; so wird sich mittelst §. 6. das gesuchte Integral in lauter Integrale von der in §. 57. betrachteten Form zerlegen lassen, und wird daher auch auf diese Weise immer entwickelt werden können.

§. 60.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{(a + bx + cx^2)^{\frac{n}{2}} \partial x.}{x^m}.$$

Nach §. 29. III. ist, wenn wir $a + bx + cx^2 = X$ setzen,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\int \frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x^m} = -\frac{X^{\frac{n+2}{2}}}{(m-1)ax^{m-1}} - \frac{(2m-n-4)b}{(m-1)a}\int \frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x^{m-1}}$$

$$- \frac{(m-n-3)c}{(m-1)a}\int \frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x^{m-2}}.$$

Mittelst dieser Formel lässt sich das gesuchte Integral immer auf bekannte Integrale reduciren; nur der Fall, wenn $m = 1$ ist, macht eine Ausnahme, und muss besonders betrachtet werden.

Setzt man in dem für $\int \frac{\partial x}{xX^{\frac{n}{2}}}$ gefundenen Ausdrucke in §. 58. — n für n; so erhält man

$$\int \frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x} = -\frac{X^{\frac{n+2}{2}}}{(n+2)a} + \frac{1}{a}\int \frac{X^{\frac{n+2}{2}}\partial x}{x} - \frac{b}{2a}\int X^{\frac{n}{2}}\partial x,$$

und folglich

$$\int \frac{X^{\frac{n+2}{2}}\partial x}{x} = \frac{X^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} + a\int \frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x} + \tfrac{1}{2}b\int X^{\frac{n}{2}}\partial x,$$

oder, wenn man jetzt $n - 2$ für n setzt,

$$\int \frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x} = \frac{X^{\frac{n}{2}}}{n} + a\int \frac{X^{\frac{n-2}{2}}\partial x}{x} + \tfrac{1}{2}b\int X^{\frac{n-2}{2}}\partial x.$$

Mittelst dieser Formel lässt sich $\int \frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x}$ immer auf bekannte Integrale zurückführen. Für $n = 1$ ist z. B.

$$\int \frac{X^{\frac{1}{2}}\partial x}{x} = X^{\frac{1}{2}} + a\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} + \tfrac{1}{2}b\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}},$$

wo beide Integrale auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens aus dem Vorhergehenden bekannt sind.

Es ist auch

$$\int \frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x^m} = \int \frac{X^n\partial x}{x^m X^{\frac{n}{2}}}.$$

Entwickelt man nun $\frac{X^n}{x^m}$ nach Potenzen von x, die positive und negative Exponenten haben können; so wird sich mittelst §. 6. das gesuchte Integral immer in lauter Integrale von der in §. 57. und §. 58. betrachteten Form zerlegen, und sich also auch auf diese Weise immer entwickeln lassen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 61.

Entwickelung des Integrals

$$\int(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots+\lambda x^m)X^{+\frac{n}{2}}\partial x.$$

Mittelst §. 6. lässt sich das gesuchte Integral immer in lauter Integrale von der in §. 57. oder §. 59. betrachteten Form zerlegen, und kann daher immer gefunden werden.

§. 62.

Die Integration irrationaler algebraischer Differentiale durch Reihen wollen wir nur an einem Beispiele zeigen.

Nach D. §. 117. ist, wenn wir die Quadratwurzel positiv nehmen,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8+\ldots.$$

$$\{0=x<1\}.$$

Also ist nach §. 9.

$$\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\int_0^x\partial x+\tfrac{1}{2}\int_0^x x^2\partial x+\frac{1.3}{2.4}\int_0^x x^4\partial x+\frac{1.3.5}{2.4.6}\int^x x^6\partial x+\ldots,$$

$$\{0=x<1\},$$

d. i.

$$\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=x+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots.$$

Bezeichnet nun aber $Arc\,sin\,x$ den zu x als Sinus gehörenden Kreisbogen, welcher den kleinsten absoluten Werth hat; so ist nach D. §. 68. offenbar

$$\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=Arc\,sin\,x,$$

und folglich

$$Arc\,sin\,x=x+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots.$$

$$\{0=x<1\}.$$

§. 63.

Es lässt sich aber zeigen, dass die Reihe

$$x,\ \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3},\ \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5},\ \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7},\ \ldots.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

auch noch für $x = 1$ convergirt, d. h. man kann beweisen, dass die Reihe

$$1, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}, \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}, \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}, \ldots.$$

eine convergirende Reihe ist.

Lassen wir jetzt x immer eine positive Grösse bezeichnen, die kleiner als die Einheit ist; so ist nach D. §. 117.

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots,$$

oder der Kürze wegen

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots.$$

Setzen wir also

$$s_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1};$$

so nähert sich s_n, wenn n wächst, der endlichen völlig bestimmten Grösse $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ immer mehr und mehr, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Daher muss für jedes beliebig grosse, aber bestimmte m die Grösse

$$s_{n+m} - s_n = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots + a_{n+m-1} x^{n+m-1}$$

sich, wenn n wächst der Null immer mehr und mehr nähern, und wird derselben, wenn man nur n gross genug nimmt, auch beliebig nahe gebracht werden können.

Da nun die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ offenbar beständig abnehmen; so kann man, wie leicht erhellen wird, die positive ganze Zahl k immer so annehmen, dass zugleich

$$\frac{1}{2k+1} < x^{n+m-1}, \; a_k < a_{n+m-1}$$

ist. Weil aber

$$\frac{1}{2k+1} \text{ und } a_k$$

unter den Grössen

$$\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k+3}, \frac{1}{2k+5}, \ldots \frac{1}{2k+2m-1}$$

und

$$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_{k+m-1}$$

respective die grössten, dagegen

$$x^{n+m-1} \text{ und } a_{n+m-1}$$

unter den Grössen

$$x^n, x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots x^{n+m-1}$$

und

$$a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots\ a_{n+m-1}$$

respective die kleinsten sind; so ist offenbar

$$\frac{1}{2k+1} < x^n, \qquad a_k < a_n;$$

$$\frac{1}{2k+3} < x^{n+1}, \qquad a_{k+1} < a_{n+1};$$

$$\frac{1}{2k+5} < x^{n+2}, \qquad a_{k+2} < a_{n+2}$$

u. s. w. u. s. w.

$$\frac{1}{2k+2m-1} < x^{n+m-1}, \qquad a_{k+m-1} < a_{n+m-1}.$$

Folglich ist

$$a_k \cdot \frac{1}{2k+1} + a_{k+1} \cdot \frac{1}{2k+3} + \ldots + a_{k+m-1} \cdot \frac{1}{2k+2m-1}$$
$$< a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots + a_{n+m-1} x^{n+m-1},$$

d. i., wenn wir

$$S_k = a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{3} + a_2 \cdot \frac{1}{5} + a_3 \cdot \frac{1}{7} + \ldots + a_{k-1} \cdot \frac{1}{2k-1}$$

setzen,

$$S_{k+m} - S_k < s_{n+m} - s_n.$$

Ueberlegt man nun, dass, wenn n wächst, offenbar auch k wächst; so ist aus dem Obigen klar, dass $S_{k+m} - S_k$ sich, wenn k wächst, der Null immer mehr und mehr nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur k gross genug werden lässt. Daher wird S_k sich offenbar, wenn k wächst, einer gewissen bestimmten endlichen Grösse immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, und die Reihe

$$a_0,\ a_1 \cdot \frac{1}{3},\ a_2 \cdot \frac{1}{5},\ a_3 \cdot \frac{1}{7},\ a_4 \cdot \frac{1}{9},\ \ldots,$$

d. i. die Reihe

$$1,\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3},\ \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5},\ \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7},\ \ldots,$$

folglich convergiren, wie behauptet wurde.

Weil nun, wenn i eine unendlich kleine positive Grösse bezeichnet, nach §. 62. auch noch für $x = 1 - i$

$$Arc\,sin\,x = x + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

ist; weil ferner $Arc\,sin\,1$ eine endlich völlig bestimmte Grösse ist, und nach dem Vorhergehenden die Reihe auf der rechten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Seite des Gleichheitszeichens auch noch für $x = 1$ eine endliche völlig bestimmte Summe hat; so erhellet leicht, dass die obige Gleichung auch noch für $x = 1$ gilt, oder dass

$$Arc\,sin\,1 = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots,$$

und folglich

$$Arc\,sin\,x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$
$$\{0 = x = 1\}$$

ist. Offenbar gilt diese Gleichung nun aber auch noch für jedes x von $x = 0$ bis $x = -1$, und es ist also

$$Arc\,sin\,x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$
$$\{-1 = x = +1\}$$

Für $x = 1$ und $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ erhält man hieraus die beiden merkwürdigen Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots$$

und

$$\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\right\}.$$

Besonders die letztere Gleichuug, welche sich auch unter der Form

$$\pi = 2\sqrt{2}.\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\right\}$$

schreiben lässt, ist wegen der ziemlich starken Convergenz der Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens zur Berechnung des numerischen Werthes von π geschickt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sechstes Kapitel.

Integration der Differentiale, welche Kreisfunctionen enthalten.

§. 64.

Reductionsformeln für das Integral

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x.$$

1. Weil nach D. §. 60. und §. 61. $\partial \sin x = \cos x \partial x$ und $\partial \cos x = - \sin x \partial x$ ist; so ist umgekehrt

$$\int \cos x \partial x = \sin x, \quad \int \sin x \partial x = - \cos x,$$

zwei Formeln, welche die Grundlage von allem Folgenden bilden.

2. Nach §. 27. ist

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x = \sin x^m \cos x^{n-1} \int \cos x \partial x - \int \partial . \sin x^m \cos x^{n-1} \int \cos x \partial x$$
$$= \sin x^{m+1} \cos x^{n-1} - \int \{ m \sin x^m \cos x^n - (n-1) \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} \} \partial x$$
$$= \sin x^{m+1} \cos x^{n-1} - m \int \sin x^m \cos x^n \partial x + (n-1) \int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} \partial x,$$

und folglich

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} \partial x.$$

3. Ganz auf ähnliche Art ist nach §. 27.

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x = \sin x^{m-1} \cos x^n \int \sin x \partial x - \int \partial . \sin x^{m-1} \cos x^n \int \sin x \partial x$$
$$= - \sin x^{m-1} \cos x^{n+1} - \int \{ -(m-1) \sin x^{m-2} \cos x^{n+2} + n \sin x^m \cos x^n \} \partial x$$
$$= - \sin x^{m-1} \cos x^{n+1} + (m-1) \int \sin x^{m-2} \cos x^{n+2} \partial x - n \int \sin x^m \cos x^n \partial x,$$

und folglich

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x = - \frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{m+1} \int \sin x^{m-2} \cos x^{n+2} \partial x.$$

4. Setzt man in 2.

$$\sin x^{m+2} = \sin x^m (1 - \cos x^2);$$

so wird

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x$$
$$= \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \left\{ \int \sin x^m \cos x^{n-2} \partial x - \int \sin x^m \cos x^n \partial x \right\},$$

und folglich

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin x^m \cos x^{n-2} \partial x.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. Setzt man in 3.

$$\cos x^{n+2} = \cos x^n (1 - \sin x^2);$$

so wird

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x$$
$$= -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\left\{\int \sin x^{m-2} \cos x^n \partial x - \int \sin x^m \cos x^n \partial x\right\},$$

und folglich

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x$$
$$= -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin x^{m-2} \cos x^n \partial x.$$

6. Durch Umkehrung der Gleichung in 4. ergiebt sich

$$\int \sin x^m \cos x^{n-2} \partial x$$
$$= -\frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{n-1} + \frac{m+n}{n-1}\int \sin x^m \cos x^n \partial x,$$

und folglich, wenn wir nun $n + 2$ für n setzen,

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x$$
$$= -\frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin x^m \cos x^{n+2} \partial x.$$

7. Durch Umkehrung der Gleichung in 5. ergiebt sich

$$\int \sin x^{m-2} \cos x^n \partial x$$
$$= \frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{m-1} + \frac{m+n}{m-1}\int \sin x^m \cos x^n \partial x,$$

und folglich, wenn wir nun $m + 2$ für m setzen,

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x$$
$$= \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \sin x^{m+2} \cos x^n \partial x.$$

Wir haben also jetzt die folgenden Reductionsformeln:

I. $\int \sin x^m \cos x^n \partial x$
$$= \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} \partial x,$$

II. $\int \sin x^m \cos x^n \partial x$
$$= -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin x^{m-2} \cos x^{n+2} \partial x,$$

III. $\int \sin x^m \cos x^n \partial x$
$$= -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin x^{m-2} \cos x^n \partial x,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

IV. $\int \sin x^m \cos x^n \partial x$

$$= \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin x^m \cos x^{n-2} \partial x,$$

V. $\int \sin x^m \cos x^n \partial x$

$$= \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin x^{m+2} \cos x^n \partial x,$$

VI. $\int \sin x^m \cos x^n \partial x$

$$= - \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin x^m \cos x^{n+2} \partial x.$$

§. 65.

Entwickelung des Integrals $\int \sin x^n \partial x$.

Nach §. 64. III. ist

$$\int \sin x^n \partial x = - \frac{\sin x^{n-1} \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin x^{n-2} \partial x.$$

Ist nun

1. n eine gerade Zahl;

so erhält man durch wiederholte Anwendung der vorhergehenden Relation

$$\int \sin x^n \partial x = - \left\{ \frac{1}{n} \sin x^{n-1} + \frac{n-1}{n(n-2)} \sin x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)} \sin x^{n-5} + \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3}{n(n-2)\ldots 2} \sin x \right\} \cos x + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 1}{n(n-2)(n-4)\ldots 2} x.$$

Ist aber

2. n eine ungerade Zahl;

so erhält man durch wiederholte Anwendung der obigen Relation

$$\int \sin x^n \partial x = - \left\{ \frac{1}{n} \sin x^{n-1} + \frac{n-1}{n(n-2)} \sin x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)} \sin x^{n-5} + \ldots \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4}{n(n-2)\ldots 3} \sin x^2 + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)\ldots 1} \right\} \cos x.$$

§. 66.

Entwickelung des Integrals $\int \cos x^n \partial x$.

Nach §. 64. IV. ist

$$\int \cos x^n \partial x = \frac{\sin x \cos x^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos x^{n-2} \partial x.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist nun

1. n eine gerade Zahl;

so erhält man durch wiederholte Anwendung der vorhergehenden Relation

$$\int \cos x^n \partial x = \left\{ \frac{1}{n} \cos x^{n-1} + \frac{n-1}{n(n-2)} \cos x^{n-3} \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)} \cos x^{n-5} + \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3}{n(n-2)\ldots 2} \cos x \right\} \sin x$$
$$+ \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 1}{n(n-2)(n-4)\ldots 2} x.$$

Ist dagegen

2. n eine ungerade Zahl;

so giebt die wiederholte Anwendung der obigen Relation

$$\int \cos x^n \partial x =$$
$$\left\{ \frac{1}{n} \cos x^{n-1} + \frac{n-1}{n(n-2)} \cos x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)} \cos x^{n-5} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4}{n(n-2)\ldots 3} \cos x^2 + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)\ldots 1} \right\} \sin x.$$

§. 67.

Entwickelung des Integrals $\int \frac{\partial x}{\sin x^n}$.

Nach §. 64. V. ist

$$\int \frac{\partial x}{\sin x^n} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{\partial x}{\sin x^{n-2}}.$$

Für $n = 1$ ist diese Relation nicht gültig, und das Integral $\int \frac{\partial x}{\sin x}$ wird also besonders zu entwickeln seyn.

Es ist aber

$$\int \frac{\partial x}{\sin x} = \int \frac{\sin x \partial x}{\sin x^2} = \int \frac{\sin x \partial x}{1 - \cos x^2} = -\int \frac{\cos x}{1 - \cos x^2},$$

oder, wenn wir $\cos x = z$ setzen,

$$\int \frac{\partial x}{\sin x} = -\int \frac{\partial z}{1 - z^2},$$

und folglich, wie man leicht durch Zerlegung in Partialbrüche findet, oder auch nach §. 35. II.

$$\int \frac{\partial x}{\sin x} = -\tfrac{1}{4} l. \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = -\tfrac{1}{4} l. \left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)^2 = \tfrac{1}{2} l. \tan g \tfrac{1}{2} x^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist nun

1. n eine gerade Zahl;

so ergiebt sich aus der obigen Relation ohne Schwierigkeit

$$\int\frac{\partial x}{\sin x^n} = -\left\{\frac{1}{(n-1)\sin x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)(n-3)\sin x^{n-3}} + \frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)(n-5)\sin x^{n-5}} + \ldots + \frac{(n-2)(n-4)\ldots 2}{(n-1)(n-3)\ldots 1\sin x}\right\}\cos x.$$

Ist aber

2. n eine ungerade Zahl;

so erhält man aus der obigen Relation

$$\int\frac{\partial x}{\sin x^n} = -\left\{\frac{1}{(n-1)\sin x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)(n-3)\sin x^{n-3}} + \ldots \frac{(n-2)(n-4)\ldots 3}{(n-1)(n-3)\ldots 2\sin x^2}\right\}\cos x + \frac{(n-2)(n-4)\ldots 3.1}{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}\int\frac{\partial x}{\sin x}.$$

§. 68.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{\partial x}{\cos x^n}.$$

Nach §. 64. VI. ist

$$\int\frac{\partial x}{\cos x^n} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{\partial x}{\cos x^{n-2}}.$$

Der Fall, wenn $n = 1$ ist, muss zuerst wieder besonders betrachtet werden.

Es ist aber

$$\int\frac{\partial x}{\cos x} = \int\frac{\partial x}{\sin(\frac{1}{2}\pi - x)} = -\int\frac{\partial(\frac{1}{2}\pi - x)}{\sin(\frac{1}{2}\pi - x)},$$

und folglich nach §. 67.

$$\int\frac{\partial x}{\cos x} = -\tfrac{1}{2}l.\{tang(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x)\}^2 = \tfrac{1}{2}l.\{tang(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x)\}^2.$$

Ist nun

1. n eine gerade Zahl;

so ergiebt sich aus der obigen Relation

$$\int\frac{\partial x}{\cos x^n} = \left\{\frac{1}{(n-1)\cos x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)(n-3)\cos x^{n-3}} + \frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)(n-5)\cos x^{n-5}} + \ldots + \frac{(n-2)(n-4)\ldots 2}{(n-1(n-3)\ldots 1\cos x}\right\}\sin x.$$

Ist aber

2. n eine ungerade Zahl;

so giebt die obige Relation

$$\int \frac{\partial x}{\cos x^n} = \left\{ \frac{1}{(n-1)\cos x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)(n-3)\cos x^{n-3}} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(n-2)(n-4)\ldots 3}{(n-1)(n-3)\ldots 2\cos x^2} \right\} \sin x$$
$$+ \frac{(n-2)(n-4)\ldots 3.1}{(n-1)(n-3)\ldots 4.2} \int \frac{\partial x}{\cos x}.$$

§. 69.

Entwickelung des Integrals $\int \sin x^m \cos x^n \, \partial x$.

Um deutlich zu zeigen, wie man sich bei der Entwickelung der Integrale von dieser Form zu verhalten hat, wird die Betrachtung einiger besondern Fälle hinreichend seyn.

Für $m = 8$ und $n = 7$ erhält man mittelst abwechselnder Anwendung der Formeln §. 64. III. und IV.

$$\int \sin x^8 \cos x^7 \partial x = -\tfrac{1}{15} \sin x^7 \cos x^8 + \tfrac{7}{15} \int \sin x^6 \cos x^7 \partial x,$$
$$\int \sin x^6 \cos x^7 \partial x = \tfrac{1}{13} \sin x^7 \cos x^6 + \tfrac{6}{11} \int \sin x^6 \cos x^5 \partial x,$$
$$\int \sin x^6 \cos x^5 \partial x = -\tfrac{1}{11} \sin x^5 \cos x^6 + \tfrac{5}{11} \int \sin x^4 \cos x^5 \partial x,$$
$$\int \sin x^4 \cos x^5 \partial x = \tfrac{1}{9} \sin x^5 \cos x^4 + \tfrac{4}{9} \int \sin x^4 \cos x^3 \partial x,$$
$$\int \sin x^4 \cos x^3 \partial x = -\tfrac{1}{7} \sin x^3 \cos x^4 + \tfrac{3}{7} \int \sin x^2 \cos x^3 \partial x,$$
$$\int \sin x^2 \cos x^3 \partial x = \tfrac{1}{5} \sin x^3 \cos x^2 + \tfrac{2}{5} \int \sin x^2 \cos x \partial x,$$
$$\int \sin x^2 \cos x \partial x = -\tfrac{1}{3} \sin x \cos x^2 + \tfrac{1}{3} \int \cos x \partial x.$$

Weil nun $\int \cos x \partial x = \sin x$ ist; so kann man mittelst der vorhergehenden Ausdrücke das gesuchte Integral offenbar vollständig entwickeln.

Für $m = 9$, $n = 4$ ergiebt sich aus §. 64. III. und IV.

$$\int \sin x^9 \cos x^4 \partial x = -\tfrac{1}{13} \sin x^8 \cos x^5 + \tfrac{8}{13} \int \sin x^7 \cos x^4 \partial x,$$
$$\int \sin x^7 \cos x^4 \partial x = -\tfrac{1}{11} \sin x^6 \cos x^5 + \tfrac{6}{11} \int \sin x^5 \cos x^4 \partial x,$$
$$\int \sin x^5 \cos x^4 \partial x = -\tfrac{1}{9} \sin x^4 \cos x^5 + \tfrac{4}{9} \int \sin x^3 \cos x^4 \partial x,$$
$$\int \sin x^3 \cos x^4 \partial x = \tfrac{1}{7} \sin x^4 \cos x^3 + \tfrac{3}{7} \int \sin x^3 \cos x^2 \partial x,$$
$$\int \sin x^3 \cos x^2 \partial x = -\tfrac{1}{5} \sin x^2 \cos x^3 + \tfrac{2}{5} \int \sin x \cos x^2 \partial x,$$
$$\int \sin x \cos x^2 \partial x = \tfrac{1}{3} \sin x^2 \cos x + \tfrac{1}{3} \int \sin x \partial x.$$

Weil nun $\int \sin x \partial x = -\cos x$ ist; so wird sich mittelst der obigen Ausdrücke das gesuchte Integral leicht vollständig entwickeln lassen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für $m = 6$ und $n = 6$ ist nach §. 64. III. und IV.

$$\int \sin x^6 \cos x^6 \partial x = -\tfrac{1}{12} \sin x^5 \cos x^7 \partial x + \tfrac{5}{12} \int \sin x^4 \cos x^6 \partial x,$$
$$\int \sin x^4 \cos x^6 \partial x = \tfrac{1}{10} \sin x^5 \cos x^5 + \tfrac{5}{10} \int \sin x^4 \cos x^4 \partial x,$$
$$\int \sin x^4 \cos x^4 \partial x = -\tfrac{1}{8} \sin x^3 \cos x^5 + \tfrac{3}{8} \int \sin x^2 \cos x^4 \partial x,$$
$$\int \sin x^2 \cos x^4 \partial x = \tfrac{1}{6} \sin x^3 \cos x^3 + \tfrac{3}{6} \int \sin x^2 \cos x^2 \partial x,$$
$$\int \sin x^2 \cos x^2 \partial x = -\tfrac{1}{4} \sin x \cos x^3 + \tfrac{1}{4} \int \cos x^2 \partial x,$$
$$\int \cos x^2 \partial x = \tfrac{1}{2} \sin x \cos x + \tfrac{1}{2} \int \partial x.$$

Weil $\int \partial x = x$ ist; so lässt sich mittelst der vorhergehenden Ausdrücke das gesuchte Integral wieder vollständig entwickeln.

Für $m = 5$ und $n = 5$ ist nach §. 64. III. und IV.

$$\int \sin x^5 \cos x^5 \partial x = -\tfrac{1}{10} \sin x^4 \cos x^6 + \tfrac{4}{10} \int \sin x^3 \cos x^5 \partial x,$$
$$\int \sin x^3 \cos x^5 \partial x = \tfrac{1}{8} \sin x^4 \cos x^4 + \tfrac{4}{8} \int \sin x^3 \cos x^3 \partial x,$$
$$\int \sin x^3 \cos x^3 \partial x = -\tfrac{1}{6} \sin x^2 \cos x^4 + \tfrac{2}{6} \int \sin x \cos x^3 \partial x,$$
$$\int \sin x \cos x^3 \partial x = \tfrac{1}{4} \sin x^2 \cos x^2 + \tfrac{2}{4} \int \sin x \cos x \partial x.$$

Weil nun

$$\int \sin x \cos x \partial x = \tfrac{1}{2} \int \sin 2x \partial x = \tfrac{1}{4} \int \sin 2x \partial . 2x = -\tfrac{1}{4} \cos 2x$$

ist; so lässt sich mittelst der obigen Ausdrücke das gesuchte Integral vollständig entwickeln.

Bemerken wollen wir noch, dass man bei der Entwickelung des Integrals $\int \sin x^m \cos x^n \partial x$ auch auf eine der beiden folgenden Arten verfahren kann.

Mittelst wiederholter Anwendung der Formel §. 64. III. kann man das gesuchte Integral, jenachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, auf $\int \cos x^n \partial x$ oder auf $\int \sin x \cos x^n \partial x$ zurückführen. Im ersten Falle ist das gesuchte Integral als gefunden zu betrachten, weil $\int \cos x^n \partial x$ aus §. 66. bekannt ist. Im zweiten Falle kann man mittelst der Formel §. 64. IV. das Integral $\int \sin x \cos x^n \partial x$ entweder auf $\int \sin x \partial x$ oder $\int \sin x \cos x \partial x$ zurückführen, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Da nun die beiden letzten Integrale bekannt sind; so ist auch in diesem Falle das gesuchte Integral als gefunden zu betrachten.

Man kann aber auch mittelst der Formel §. 64. IV. das Integral $\int \sin x^m \cos x^n \partial x$, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, auf $\int \sin x^m \partial x$ oder $\int \sin x^m \cos x \partial x$ zurückführen. Im ersten Falle ist das gesuchte Integral als gefunden zu betrachten, weil $\int \sin x^m \partial x$ aus §. 65. bekannt ist. Im zweiten Falle kann man mittelst der Formel §. 64. III. das Integral $\int \sin x^m \cos x \partial x$, jenachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist, auf das Integral $\int \cos x \partial x$ oder auf das Integral $\int \sin x \cos x \partial x$ zurückführen, so dass also auch in diesem Falle, weil die beiden letzten Integrale bekannt sind, das gesuchte Integral als gefunden zu betrachten ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für $m = n$ ist überhaupt

$$\int \sin x^m \cos x^m \partial x = \frac{1}{2^m} \int \sin 2x^m \partial x = \frac{1}{2^{m+1}} \int \sin 2x^m \partial . 2x,$$

das gesuchte Integral also auf §. 65. zurückgeführt.

§. 70.

Entwickelung des Integrals $\int \frac{\partial x}{\sin x^m \cos x^n}$.

Nach §. 64. V. und VI. ist

$$\int \frac{\partial x}{\sin x^m \cos x^n}$$

$$= -\frac{1}{(m-1) \sin x^{m-1} \cos x^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{\partial x}{\sin x^{m-2} \cos x^n}$$

und

$$\int \frac{\partial x}{\sin x^m \cos x^n}$$

$$= \frac{1}{(n-1) \sin x^{m-1} \cos x^{n-1}} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{\partial x}{\sin x^m \cos x^{n-2}}.$$

Mittelst der ersten dieser beiden Formeln kann man das gesuchte Integral, jenachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist, auf $\int \frac{\partial x}{\cos x^n}$ oder $\int \frac{\partial x}{\sin x \cos x^n}$ zurückführen. Im ersten Falle ist das gesuchte Integral als gefunden zu betrachten, weil $\int \frac{\partial x}{\cos x^n}$ aus §. 68. bekannt ist. Im zweiten Falle kann man mittelst der zweiten der beiden obigen Relationen $\int \frac{\partial x}{\sin x \cos x^n}$, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, auf $\int \frac{\partial x}{\sin x}$ oder $\int \frac{\partial x}{\sin x \cos x}$ zurückführen. Weil nun

$$\int \frac{\partial x}{\sin x \cos x} = \int \frac{2 \partial x}{\sin 2x} = \int \frac{\partial . 2x}{\sin 2x},$$

und also, so wie $\int \frac{\partial x}{\sin x}$, aus §. 67. bekannt ist; so ist auch im zweiten Falle das gesuchte Integral als gefunden zu betrachten.

Man kann aber das gesuchte Integral auch mittelst der zweiten der beiden obigen Relationen, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, auf $\int \frac{\partial x}{\sin x^m}$ oder $\int \frac{\partial x}{\sin x^m \cos x}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zurückführen. Im ersten Falle ist das gesuchte Integral als gefunden zu betrachten, weil $\int \frac{\partial x}{\sin x^m}$ aus §. 67. bekannt ist. Im zweiten Falle kann man mittelst der ersten der beiden obigen Relationen $\int \frac{\partial x}{\sin x^m \cos x}$, jenachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, auf $\int \frac{\partial x}{\cos x}$ oder $\int \frac{\partial x}{\sin x \cos x}$ zurückführen. Das erste dieser beiden Integrale ist aus §. 68., das zweite aus dem Obigen bekannt.

Für $m = n$ ist auch

$$\int \frac{\partial x}{\sin x^m \cos x^m} = 2^m \int \frac{\partial x}{\sin 2x^m} = 2^{m-1} \int \frac{\partial . 2x}{\sin 2x^m},$$

wodurch das gesuchte Integral auf §. 67. zurückgeführt ist.

§. 71.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\sin x^m}{\cos x^n} \partial x.$$

Nach §. 64. III. ist

$$\int \frac{\sin x^m}{\cos x^n} \partial x$$
$$= - \frac{\sin x^{m-1}}{(m-n)\cos x^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\sin x^{m-2}}{\cos x^n} \partial x.$$

Da diese Relation für $m = n$ nicht gilt; so wollen wir diesen Fall zuerst besonders betrachten, d. h. $\int tang\, x^m \partial x$ zu entwickeln suchen.

Durch Umkehrung der Formel §. 64. I. erhält man

$$\int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} \partial x$$
$$= - \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{n-1} + \frac{m+1}{n-1} \int \sin x^m \cos x^n \partial x,$$

und folglich, wenn jetzt $m - 2$ und $- m + 2$ respective für m und n gesetzt wird,

$$\int tang\, x^m \partial x = \frac{1}{m-1} tang\, x^{m-1} - \int tang\, x^{m-2} \partial x.$$

Ist nun

1. m eine gerade Zahl;

so erhält man mittelst dieser Formel

$$\int tang\, x^m \partial x = \frac{tang\, x^{m-1}}{m-1} - \frac{tang\, x^{m-3}}{m-3} + \frac{tang\, x^{m-5}}{m-5} - \ldots$$
$$\ldots - (-1)^{\frac{m}{2}} . \frac{tang\, x}{1} + (-1)^{\frac{m}{2}} . x.$$

Ist aber

2. m eine ungerade Zahl;

so giebt die obige Relation

$$\int tang\, x^m \partial x = \frac{tang\, x^{m-1}}{m-1} - \frac{tang\, x^{m-3}}{m-3} + \frac{tang\, x^{m-5}}{m-5} - \ldots$$
$$\ldots - (-1)^{\frac{m-1}{2}} . \frac{tang\, x^2}{2} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \int tang\, x \partial x.$$

Weil nun aber

$$\int tang\, x\, \partial x = \int \frac{sin\, x\, \partial x}{cos\, x} = - \int \frac{\partial cos\, x}{cos\, x} = - \tfrac{1}{2} l . cos\, x^2$$

ist; so ist

$$\int tang x^m \partial x = \frac{tang\, x^{m-1}}{m-1} - \frac{tang\, x^{m-3}}{m-3} + \frac{tang\, x^{m-5}}{m-5} - \ldots$$
$$\ldots - (-1)^{\frac{m-1}{2}} . \frac{tang\, x^2}{2} - (-1)^{\frac{m-1}{2}} . \tfrac{1}{2} l . cos\, x^2.$$

Nachdem auf diese Weise $\int tang x^m \partial x$ gefunden ist, kann man mittelst der zu Anfange dieses Paragraphen aufgestellten Relation $\int \frac{sin\, x^m}{cos x^n} \partial x$, wie leicht erhellen wird, immer auf bekannte Integrale reduciren.

§. 72.

Entwickelung des Integrals $\int \frac{cos\, x^m}{sin\, x^n} \partial x$.

Nach §. 64. IV. ist

$$\int \frac{cos\, x^m}{sin\, x^n} \partial x = \frac{cos\, x^{m-1}}{(m-n)\, sin\, x^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{cos\, x^{m-2}}{sin\, x^n} \partial x.$$

Weil diese Relation auf den Fall $m = n$ nicht anwendbar ist; so ist zuerst dieser Fall besonders zu betrachten, d. i. $\int cot x^m \partial x$ zu entwickeln.

Setzt man in der in §. 71. gefundenen Relation

$$\int sin\, x^{m+2}\, cos\, x^{n-2}\, \partial x$$
$$= - \frac{sin\, x^{m+1}\, cos\, x^{n-1}}{n-1} + \frac{m+1}{n-1} \int sin\, x^m cos\, x^n\, \partial x$$

für m und n respective $-m$ und m; so erhält man

$$\int \frac{\cos x^{m-2}}{\sin x^{m-2}} \partial x = -\frac{\cos x^{m-1}}{(m-1)\sin x^{m-1}} - \int \frac{\cos x^m}{\sin x^m} \partial x,$$

und folglich, wenn man diese Gleichung umkehrt, d. h. das zweite Integral durch das erste bestimmt,

$$\int \cot x^m \partial x = -\frac{1}{m-1} \cot x^{m-1} - \int \cot x^{m-2} \partial x.$$

Ist nun

1. m eine gerade Zahl;

so giebt diese Relation

$$\int \cot x^m \partial x = -\frac{\cot x^{m-1}}{m-1} + \frac{\cot x^{m-3}}{m-3} - \frac{\cot x^{m-5}}{m-5} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{\cot x}{1} + (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot x.$$

Ist aber

2. m eine ungerade Zahl;

so giebt die obige Relation

$$\int \cot x^m \partial x = -\frac{\cot x^{m-1}}{m-1} + \frac{\cot x^{m-3}}{m-3} - \frac{\cot x^{m-5}}{m-5} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{\cot x^2}{2} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \int \cot x \, \partial x.$$

Weil nun aber

$$\int \cot x \, \partial x = \int \frac{\cos x \, \partial x}{\sin x} = \int \frac{\partial \sin x}{\sin x} = \tfrac{1}{2} l . \sin x^2$$

ist; so ist

$$\int \cot x^m \partial x = -\frac{\cot x^{m-1}}{m-1} + \frac{\cot x^{m-3}}{m-3} - \frac{\cot x^{m-5}}{m-5} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{\cot x^2}{2} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \tfrac{1}{2} l . \sin x^2.$$

Nachdem auf diese Weise $\int \cot x^m \partial x$ gefunden ist, kann man, wie leicht erhellen wird, $\int \frac{\cos x^m}{\sin x^n} \partial x$ mittelst der zu Anfange dieses Paragraphen aufgestellten Relation immer auf bekannte Integrale reduciren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 73.

Ausdrücke für die positiven ganzen Potenzen der Sinus und Cosinus durch die Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel.

In den im Vorhergehenden entwickelten Formeln sind alle Integrale durch Potenzen der Sinus und Cosinus mit positiven ganzen Exponenten ausgedrückt worden. Will man aber diese Integrale durch Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel ausdrücken; so muss man die merkwürdigen allgemeinen Formeln in Anwendung bringen, durch welche die positiven ganzen Potenzen der Sinus und Cosinus durch die Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel ausgedrückt werden, und wir wollen daher diese in jeder Beziehung höchst wichtigen Formeln jetzt entwickeln.

Zu dem Ende sey

$$u = \cos x + \sin x\sqrt{-1}, \quad v = \cos x - \sin x\sqrt{-1};$$

so ist

$$2\cos x = u + v, \quad 2\sin x\sqrt{-1} = u - v.$$

Also ist, wenn n eine positive ganze Zahl bezeichnet, nach dem Binomial-Theorem für Potenzen mit positiven ganzen Exponenten

$$2^n \cos x^n = (u+v)^n$$
$$= u^n + n_1 u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v^2 + \ldots + n_{n-1} u v^{n-1} + n_n v^n,$$

und, wenn man u und v gegen einander vertauscht,

$$2^n \cos x^n = (v+u)^n$$
$$= v^n + n_1 v^{n-1} u + n_2 v^{n-2} u^2 + \ldots + n_{n-1} v u^{n-1} + n_n u^n.$$

Durch Addition dieser beiden Ausdrücke von $2^n \cos x^n$ ergiebt sich

$$2^{n+1} \cos x^n = u^n + v^n + n_1 (u^{n-1} v + v^{n-1} u) + n_2 (u^{n-2} v^2 + v^{n-2} u^2) + \ldots$$
$$\ldots\ldots + n_{n-1} (u v^{n-1} + v u^{n-1}) + n_n (v^n + u^n).$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe ist $n_k (u^{n-k} v^k + v^{n-k} u^k)$, wo k nicht grösser als n ist. Dieses allgemeine Glied kann man auch auf den Ausdruck $n_k (uv)^k (u^{n-2k} + v^{n-2k})$, oder, weil

$$uv = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})(\cos x - \sin x\sqrt{-1}) = \cos x^2 + \sin x^2 = 1$$

ist, auf den noch einfachern Ausdruck $n_k (u^{n-2k} + v^{n-2k})$ bringen. Weil nun

$$n_{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(k+1)}{1.2.3\ldots(n-k)}, \quad n_k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$$

ist; so ist

$$\frac{n_k}{n_{n-k}} = \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{n(n-1)\ldots 2.1} = 1, \text{ d. i. } n_k = n_{n-k}.$$

Ferner ist für ein beliebiges positives ganzes m

$$u^{-m}+v^{-m}=\frac{1}{u^m}+\frac{1}{v^m}=\frac{u^m+v^m}{(uv)^m}=u^m+v^m,$$

und nach D. §. 88. ist

$$u^m=(\cos x+\sin x\sqrt{-1})^m=\cos mx+\sin mx\sqrt{-1},$$
$$v^m=(\cos x-\sin x\sqrt{-1})^m=\cos mx-\sin mx\sqrt{-1};$$

also $u^m+v^m=2\cos mx$.

1. Ist nun zuerst n eine gerade Zahl; so ist

$$\begin{aligned}2^{n+1}\cos x^n = {} & u^n+v^n + n_n(u^{-n}+v^{-n})\\ & + n_1(u^{n-2}+v^{n-2}) + n_{n-1}(u^{-(n-2)})+v^{-(n-2)})\\ & + n_2(u^{n-4}+v^{n-4}) + n_{n-2}(u^{-(n-4)})+v^{-(n-4)})\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ & + n_{\frac{1}{2}n-1}(u^2+v^2) + n_{\frac{1}{2}n+1}(u^{-2}+v^{-2})\\ & + n_{\frac{1}{2}n}(u^0+v^0)\\ = {} & 2(u^n+v^n)+2n_1(u^{n-2}+v^{n-2})+2n_2(u^{n-4}+v^{n-4})+\ldots\\ & \ldots+2n_{\frac{1}{2}n-1}(u^2+v^2)+2n_{\frac{1}{2}n},\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}2^{n-1}\cos x^n = {} & \cos nx + n_1\cos(n-2)x + n_2\cos(n-4)x+\ldots\\ & \ldots + n_{\frac{1}{2}n-1}\cos 2x + \tfrac{1}{2}n_{\frac{1}{2}n}.\end{aligned}$$

2. Ist ferner n eine ungerade Zahl; so ist

$$\begin{aligned}2^{n+1}\cos x^n = {} & u^n+v^n + n_n(u^{-n}+v^{-n})\\ & + n_1(u^{n-2}+v^{n-2}) + n_{n-1}(u^{-(n-2)}+v^{-(n-2)})\\ & + n_2(u^{n-4}+v^{n-4}) + n_{n-2}(u^{-(n-4)}+v^{-(n-4)})\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ & + n_{\frac{1}{2}(n-1)}(u+v) + n_{\frac{1}{2}(n+1)}(u^{-1}+v^{-1})\\ = {} & 2(u^n+v^n)+2n_1(u^{n-2}+v^{n-2})+2n_2(u^{n-4}+v^{n-4})\ldots\\ & \ldots+2n_{\frac{1}{2}(n-1)}(u+v);\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}2^{n-1}\cos x^n = {} & \cos nx + n_1\cos(n-2)x + n_2\cos(n-4)x+\ldots\\ & \ldots + n_{\frac{1}{2}(n-1)}\cos x.\end{aligned}$$

Nach dem Obigen ist ferner

$$(-1)^{\frac{n}{2}}.2^n\sin x^n=(u-v)^n$$
$$=u^n-n_1u^{n-1}v+n_2u^{n-2}v^2-n_3u^{n-3}v^3+\ldots+(-1)^nv^n.$$

1. Ist nun wieder zuerst n eine gerade Zahl; so ist

$$(-1)^{\frac{n}{2}} . 2^n \sin x^n = (u-v)^n$$
$$= u^n - n_1 u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v^2 - \ldots - n_{n-1} u v^{n-1} + n_n v^n .$$

Weil aber in diesem Falle $(u-v)^n = (v-u)^n$ ist; so kann man u und v gegen einander vertauschen und erhält auf diese Weise

$$(-1)^{\frac{n}{2}} . 2^n \sin x^n = (v-u)^n$$
$$= v^n - n_1 v^{n-1} u + n_2 v^{n-2} u^2 - \ldots - n_{n-1} v u^{n-1} + n_n u^n .$$

Also ist

$$(-1)^{\frac{n}{2}} . 2^{n+1} \sin x^n = u^n + v^n - n_1 (u^{n-1} v + v^{n-1} u) + n_2 (u^{n-2} v^2 + v^{n-2} u^2)$$
$$- \ldots\ldots - n_{n-1} (u v^{n-1} + v u^{n-1}) + n_n (v^n + u^n)$$
$$= u^n + v^n \qquad + n_n (u^{-n} + v^{-n})$$
$$- n_1 (u^{n-2} + v^{n-2}) - n_{n-1} (u^{-(n-2)} + v^{-(n-2)})$$
$$+ n_2 (u^{n-4} + v^{n-4}) + n_{n-2} (u^{-(n-4)} + v^{-(n-4)})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{\frac{n-2}{2}} . n_{\frac{1}{2}n-1} (u^2 + v^2) + (-1)^{\frac{n-2}{2}} . n_{\frac{1}{2}n+1} (u^{-2} + v^{-2})$$
$$+ (-1)^{\frac{n}{2}} . n_{\frac{1}{2}n} (u^0 + v^0)$$
$$= 2(u^n + v^n) - 2n_1 (u^{n-2} + v^{n-2}) + 2n_2 (u^{n-4} + v^{n-4}) - \ldots$$
$$\ldots + 2(-1)^{\frac{n-2}{2}} . n_{\frac{1}{2}n-1} (u^2 + v^2) + 2(-1)^{\frac{n}{2}} . n_{\frac{1}{2}n} ;$$

also

$$(-1)^{\frac{n}{2}} . 2^{n-1} \sin x^n = \cos nx - n_1 \cos (n-2)x + n_2 \cos (n-4)x - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} . n_{\frac{1}{2}n-1} \cos 2x + \tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{n}{2}} . n_{\frac{1}{2}n} .$$

2. Wenn ferner n eine ungerade Zahl ist; so ist, weil $(-1)^{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{-1}$ ist,

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} . \sqrt{-1} . 2^n \sin x^n = (u-v)^n$$
$$= u^n - n_1 u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v^2 - \ldots + n_{n-1} u v^{n-1} - n_n v^n .$$

Weil nun in diesem Falle $(u-v)^n = -(v-u)^n$ ist; so ist auch

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} . \sqrt{-1} . 2^n \sin x^n = -(v-u)^n$$
$$= -v^n + n_1 v^{n-1} u - n_2 v^{n-2} u^2 + \ldots - n_{n-1} v u^{n-1} + n_n u^n ,$$

und folglich

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\sqrt{-1}.2^{n+1}\sin x^n$$
$$= u^n - v^n - n_1(u^{n-1}v - v^{n-1}u) + n_2(u^{n-2}v^2 - v^{n-2}u^2) - \ldots$$
$$\ldots + n_{n-1}(uv^{n-1} - vu^{n-1}) - n_n(v^n - u^n).$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe, ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen, ist $n_k(u^{n-k}v^k - v^{n-k}u^k)$, wo k nicht grösser als n ist, und es erhellet nun wieder leicht, dass man dieses allgemeine Glied auch auf den Ausdruck $n_k(uv)^k(u^{n-2k} - v^{n-2k})$, d. i. auf den Ausdruck $n_k(u^{n-2k} - v^{n-2k})$ bringen kann. Also ist

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\sqrt{-1}.2^{n+1}\sin x^n = u^n - v^n &- n_n(u^{-n} - v^{-n})\\ &- n_1(u^{n-2} - v^{n-2}) + n_{n-1}(u^{-(n-2)} - v^{-(n-2)})\\ &+ n_2(u^{n-4} - v^{n-4}) - n_{n-2}(u^{-n-4)} - v^{-(n-4)})\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n_{\frac{1}{2}(n-1)}(u-v) - (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n_{\frac{1}{2}(n+1)}(u^{-1} - v^{-1}).\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$u^{-m} - v^{-m} = \frac{1}{u^m} - \frac{1}{v^m} = -\frac{u^m - v^m}{(uv)^m} = -(u^m - v^m).$$

Folglich ist

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\sqrt{-1}.2^{n+1}\sin x^n$$
$$= 2(u^n - v^n) - 2n_1(u^{n-2} - v^{n-2}) + 2n_2(u^{n-4} - v^{n-4}) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}.2n_{\frac{1}{2}(n-1)}(u - v).$$

Weil nun ferner nach D. §. 88.

$$u^m = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m = \cos mx + \sin mx\sqrt{-1},$$
$$v^m = (\cos x - \sin x\sqrt{-1})^m = \cos mx - \sin mx\sqrt{-1},$$

also $u^m - v^m = 2\sin mx\sqrt{-1}$ ist; so ist, wenn man zugleich auf beiden Seiten mit $4\sqrt{-1}$ dividirt,

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.2^{n-1}\sin x^n = \sin nx - n_1\sin(n-2)x + n_2\sin(n-4)x - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n_{\frac{1}{2}(n-1)}\sin x.$$

§. 74.

Neue Entwickelung von $\int\sin x^n\partial x$ und $\int\cos x^n\partial x$.

Es ist

$$\int\cos\alpha x\partial x = \frac{1}{\alpha}\int\cos\alpha x\partial.\alpha x = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha x,$$
$$\int\sin\alpha x\partial x = \frac{1}{\alpha}\int\sin\alpha x\partial.\alpha x = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I. Um nun zuvörderst $\int \sin x^n \partial x$ zu entwickeln; so sey

1. n eine gerade Zahl.

Nach §. 73. erhält man in diesem Falle

$$(-1)^{\frac{n}{2}} . 2^{n-1} \int \sin x^n \partial x$$

$$= \frac{1}{n} \sin nx - \frac{n_1}{n-2} \sin(n-2)x + \frac{n_2}{n-4} \sin(n-4)x - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} . \frac{n_{\frac{1}{2}n-1}}{2} \sin 2x + \tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{n}{2}} . n_{\frac{1}{2}n} x .$$

Wenn ferner

2. n eine ungerade Zahl

ist; so ist nach §. 73.

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} . 2^{n-1} \int \sin x^n \partial x$$

$$= -\frac{1}{n} \cos nx + \frac{n_1}{n-2} \cos(n-2)x - \frac{n_2}{n-4} \cos(n-4)x + \ldots$$

$$\ldots - (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \frac{n_{\frac{1}{2}(n-1)}}{1} \cos x .$$

II. Für $\int \cos x^n \partial x$ ergiebt sich ganz eben so aus §. 73., wenn

1. n eine gerade Zahl

ist:

$$2^{n-1} \int \cos x^n \partial x = \frac{1}{n} \sin nx + \frac{n_1}{n-2} \sin(n-2)x + \frac{n_2}{n-4} \sin(n-4)x + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n_{\frac{1}{2}n-1}}{2} \sin 2x + \tfrac{1}{2} n_{\frac{1}{2}n} x ;$$

und wenn

2. n eine ungerade Zahl

ist:

$$2^{n-1} \int \cos x^n \partial x = \frac{1}{n} \sin nx + \frac{n_1}{n-2} \sin(n-2)x + \frac{n_2}{n-4} \sin(n-4)x + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n_{\frac{1}{2}(n-1)}}{1} \sin x .$$

§. 75.

Entwickelung von $\int x^n \sin x \partial x$ und $\int x^n \cos x \partial x$.

Es wird hinreichend seyn, die Entwickelung jedes dieser beiden Integrale bloss an einem Beispiele zu erläutern, da dieselbe sehr einfach ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach §. 27. ist nämlich z. B.

$$\begin{aligned}
\int x^4 \sin x \partial x &= x \int \sin x \partial x - 4 \int x^3 \partial x \int \sin x \partial x \\
&= - x^4 \cos x + 4 \int x^3 \cos x \partial x \\
&= - x^4 \cos x + 4 x^3 \int \cos x \partial x - 12 \int x^2 \partial x \int \cos x \partial x \\
&= - x^4 \cos x + 4 x^3 \sin x - 12 \int x^2 \sin x \partial x \\
&= - x^4 \cos x + 4 x^3 \sin x - 12 x^2 \int \sin x \partial x + 24 \int x \partial x \int \sin x \partial x \\
&= - x^4 \cos x + 4 x^3 \sin x + 12 x^2 \cos x - 24 \int x \cos x \partial x \\
&= - x^4 \cos x + 4 x^3 \sin x + 12 x^2 \cos x - 24 x \int \cos x \partial x + 24 \int \partial x \int \cos x \partial x \\
&= - x^4 \cos x + 4 x^3 \sin x + 12 x^2 \cos x - 24 x \sin x + 24 \int \sin x \partial x \\
&= - x^4 \cos x + 4 x^3 \sin x + 12 x^2 \cos x - 24 x \sin x - 24 \cos x,
\end{aligned}$$

und ganz auf ähnliche Art

$$\begin{aligned}
\int x^3 \cos x \partial x &= x^3 \int \cos x \partial x - 3 \int x^2 \partial x \int \cos x \partial x \\
&= x^3 \sin x - 3 \int x^2 \sin x \partial x \\
&= x^3 \sin x - 3 x^2 \int \sin x \partial x + 6 \int x \partial x \int \sin x \partial x \\
&= x^3 \sin x + 3 x^2 \cos x - 6 \int x \cos x \partial x \\
&= x^3 \sin x + 3 x^2 \cos x - 6 x \int \cos x \partial x + 6 \int \partial x \int \cos x \partial x \\
&= x^3 \sin x + 3 x^2 \cos x - 6 x \sin x + 6 \int \sin x \partial x \\
&= x^3 \sin x + 3 x^2 \cos x - 6 x \sin x - 6 \cos x.
\end{aligned}$$

§. 76.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{a + b \cos x}.$$

Man setze $\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$, und nehme z, was offenbar verstattet ist, als positiv oder negativ an, jenachdem $\sin x$ positiv oder negativ ist; so ist

$$\sin x = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad \cos x \partial x = \frac{2(1 - z^2) \partial z}{(1 + z^2)^2}, \quad \partial x = \frac{2 \partial z}{1 + z^2},$$

und folglich

$$\frac{\partial x}{a + b \cos x} = \frac{2 \partial z}{a + b + (a - b) z^2}.$$

Aus der Gleichung $\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$ ergiebt sich leicht

$$z^2 = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} x^2}{2 \cos \frac{1}{2} x^2} = \tang \tfrac{1}{2} x^2,$$

und folglich $z = \pm \tang \frac{1}{2} x$, wo sich nun noch fragt, welches Zeichen man zu nehmen hat. Führt man aber $\pm \tang \frac{1}{2} x$ für z in den obigen Ausdruck von $\sin x$ ein; so erhält man

$$\sin x = \pm \frac{2\,tang\,\frac{1}{2}x}{1+tang\,\frac{1}{2}x^2} = \pm\, 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x = \pm\,\sin x,$$

und sieht also, dass man das obere Zeichen nehmen, d. i. $z = tang\,\frac{1}{2}x$ setzen muss.

Wir unterscheiden nun bei der Integration des gegebenen Differentials drei Fälle.

I. $a = b$.

In diesem Falle ergiebt sich aus dem Obigen auf der Stelle

$$\int\frac{\partial x}{a + a\cos x} = \frac{1}{a}\int\partial z = \frac{1}{a}z = \frac{1}{a}tang\,\tfrac{1}{2}x.$$

II. $a^2 > b^2$.

Nach dem Obigen ist

$$\int\frac{\partial x}{a + b\cos x} = 2\int\frac{\partial z}{a + b + (a-b)z^2}.$$

Vergleicht man nun das Integral auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens mit dem in §. 35. betrachteten Integrale; so findet man, dass die dortige Grösse $b^2 - 4ac$ im vorliegenden Falle $-4(a+b)(a-b) = -4(a^2-b^2)$, und folglich < 0 ist. Daher ist nach §. 35. III.

$$\int\frac{\partial z}{a+b+(a-b)z^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\,Arctang\,\frac{(a-b)z}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

und folglich

$$\int\frac{\partial x}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,Arctang\,\frac{(a-b)\,tang\,\frac{1}{2}x}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

III. $a^2 < b^2$.

In diesem Falle ist die Grösse $b^2 - 4ac$ in §. 35. offenbar > 0, und folglich nach §. 35. II.

$$\int\frac{\partial z}{a+b+(a-b)z^2} = \frac{1}{4\sqrt{b^2-a^2}}\,l.\left\{\frac{(a-b)z - \sqrt{b^2-a^2}}{(a-b)z + \sqrt{b^2-a^2}}\right\}^2;$$

also

$$\int\frac{\partial x}{a + b\cos x} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\,l.\left\{\frac{(a-b)\,tang\,\frac{1}{2}x - \sqrt{b^2-a^2}}{(a-b)\,tang\,\frac{1}{2}x + \sqrt{b^2-a^2}}\right\}^2,$$

oder

$$\int\frac{\partial x}{a + b\cos x} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\,l.\left\{\frac{\sqrt{b^2-a^2} + (b-a)\,tang\,\frac{1}{2}x}{\sqrt{b^2-a^2} - (b-a)\,tang\,\frac{1}{2}x}\right\}^2.$$

Multiplicirt man aber Zähler und Nenner des Bruchs in der Klammer mit seinem Zähler, hebt den dadurch erhaltenen Bruch durch $-a$ auf, und multiplicirt dann Zähler und Nenner mit $\cos\frac{1}{2}x^2$;

so ergiebt sich mittelst sehr bekannter goniometrischer Relationen leicht

$$\int \frac{\partial x}{a+b\cos x} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\, l.\left\{\frac{b+a\cos x+\sin x\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}\right\}^2.$$

§. 77.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{(f+g\cos x)\,\partial x}{(a+b\cos x)^n}.$$

Man setze

$$\int \frac{(f+g\cos x)\,\partial x}{(a+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \int \frac{(B+C\cos x)\,\partial x}{(a+b\cos x)^{n-1}},$$

und suche die unbestimmten Coefficienten A, B, C dieser Gleichung gemäss zu bestimmen. Differentiirt man zu dem Ende die obige Gleichung, dividirt auf beiden Seiten durch ∂x, und schafft dann die Nenner weg; so erhält man die Gleichung

$$f+g\cos x = A\cos x(a+b\cos x) + (n-1)\,Ab\sin x^2 + (B+C\cos x)(a+b\cos x)$$

oder

$$0 = \left.\begin{matrix}(n-1)Ab + Aa\\ +Ba + Bb\\ -f + Ca\\ -g\end{matrix}\right\}\cos x + \left.\begin{matrix}Ab\\ -(n-1)Ab\\ +Cb\end{matrix}\right\}\cos x^2,$$

eine Gleichung, welche unabhängig von besondern Werthen von x gelten wird, wenn man die unbestimmten Coefficienten A, B, C den drei Gleichungen

$$(n-1)Ab + Ba - f = 0,$$
$$Aa + Bb + Ca - g = 0,$$
$$-(n-2)A + C = 0$$

gemäss bestimmt.

Da sich nun aus diesen Gleichungen

$$A = \frac{ag-bf}{(n-1)(a^2-b^2)},\quad B = \frac{af-bg}{a^2-b^2},\quad C = \frac{(n-2)(ag-bf)}{(n-1)(a^2-b)}$$

ergiebt; so ist

$$\int \frac{(f+g\cos x)\,\partial x}{(a+b\cos x)^n} = \frac{(ag-bf)\sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)}\int \frac{\{(n-1)(af-bg)+(n-2)(ag-bf)\cos x\}\,\partial x}{(a+b\cos x)^{n-1}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nehmen wir jetzt zuerst an, dass $a^2 - b^2$ nicht $= 0$ und $n > 1$ ist; so wird sich mittelst dieser Reductionsformel das gesuchte Integral offenbar immer auf das in §. 76. betrachtete Integral zurückführen lassen. Für $n = 1$ ist aber

$$\int \frac{(f + g\cos x)\partial x}{a + b\cos x} = f\int \frac{\partial x}{a + b\cos x} + g\int \frac{\cos x\,\partial x}{a + b\cos x}$$

$$= f\int \frac{\partial x}{a + b\cos x} + \frac{g}{b}\int \frac{(a + b\cos x - a)\partial x}{a + b\cos x}$$

$$= \frac{gx}{b} - \frac{ag - bf}{b}\int \frac{\partial x}{a + b\cos x},$$

wodurch das gesuchte Integral wieder auf das in §. 76. betrachtete Integral zurückgeführt ist.

Endlich ist nun noch der Fall zu betrachten, wenn $b = \pm a$ ist. Es ist aber

$$\int \frac{(f + g\cos x)\partial x}{(a + a\cos x)^n} = \int \frac{\{f - g + g(1 + \cos x)\}\partial x}{a^n(1 + \cos x)^n}$$

$$= \frac{f - g}{a^n}\int \frac{\partial x}{(1 + \cos x)^n} + \frac{g}{a^n}\int \frac{\partial x}{(1 + \cos x)^{n-1}}$$

$$= \frac{f - g}{2^n a^n}\int \frac{\partial x}{\cos\frac{1}{2}x^{2n}} + \frac{g}{2^{n-1}a^n}\int \frac{\partial x}{\cos\frac{1}{2}x^{2n-2}}$$

$$= \frac{f - g}{2^{n-1}a^n}\int \frac{\partial \cdot \frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x^{2n}} + \frac{g}{2^{n-2}a^n}\int \frac{\partial \cdot \frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x^{2n-2}},$$

wodurch das gesuchte Integral auf das in §. 68. betrachtete Integral zurückgeführt ist. Auf ganz ähnliche Art lässt sich der Fall, wenn $b = -a$ ist, auf §. 67. zurückführen.

Beiläufig bemerken wir hierbei noch, dass, wenn wir $a + b\cos x = u$, $-b\sin x\,\partial x = \partial u$ setzen,

$$\int \frac{\sin x\,\partial x}{a + b\cos x} = -\int \frac{\partial u}{bu} = -\frac{1}{2b}l.u^2 = -\frac{1}{2b}l.(a + b\cos x)^2$$

ist; ein Integral, welches auch zuweilen gebraucht wird.

§. 78.

Integration der Differentiale, welche Kreisbogen enthalten.

Durch X soll im Folgenden immer eine Function von x bezeichnet werden.

I. Nach §. 27. ist

$$\int X\,Arc\sin x\,\partial x = Arc\sin x\int X\partial x - \int \partial\,Arc\sin x\int X\partial x\,.$$

Nach D. §. 68. ist aber

$$\partial\,Arc\sin x = \pm\frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

unter der Bedingung, dass man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\cos Arc \sin x$ positiv oder negativ ist, d. i. jenachdem sich der Bogen $Arc \sin x$ im ersten oder vierten, oder im zweiten oder dritten Quadranten endigt. Also ist

$$\int X Arc \sin x \, \partial x = Arc \sin x \int X \partial x \mp \int \frac{\partial x \int X \partial x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

indem das Vorzeichen immer der obigen Bedingung gemäss genommen wird, welches auch im Folgenden stets festzuhalten ist.

Die folgenden Beispiele werden den Gebrauch der vorstehenden allgemeinen Formel erläutern.

1. $$\int x^n Arc \sin x \, \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1} Arc \sin x \mp \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} \partial x}{\sqrt{1 - x^2}};$$

also z. B. für $n = 0$

$$\int Arc \sin x \, \partial x = x Arc \sin x \mp \int \frac{x \partial x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

oder, wie man leicht findet, wenn man $1 - x^2 = z^2$ setzt,

$$\int Arc \sin x \, \partial x = x Arc \sin x \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

2. $$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} Arc \sin x = Arc \sin x \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} \mp \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Aber nach D. §. 68. ist

$$\partial Arc \sin x = \pm \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} = \pm Arc \sin x.$$

Also

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} Arc \sin x = \pm (Arc \sin x)^2 - \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} Arc \sin x,$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} Arc \sin x = \pm \tfrac{1}{2} (Arc \sin x)^2.$$

3. $$\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} Arc \sin x = Arc \sin x \int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} \mp \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} \int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Nach §. 28. IV. ist aber

$$\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} = - \frac{x^{n-1} \sqrt{1 - x^2}}{n} + \frac{n-1}{n} \int \frac{x^{n-2} \partial x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} \int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} = - \frac{1}{n^2} x^n + \frac{n-1}{n} \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} \int \frac{x^{n-2} \partial x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln wird man das gesuchte Integral immer zu entwickeln im Stande seyn.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für $n = 4$ ist z. B.

$$\int \frac{x^4\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\,Arc\sin x = Arc\sin x \int \frac{x^4\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \mp \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{x^4\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Aber

$$\int \frac{x^4\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2} + \tfrac{3}{4}\int \frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -(\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{3}{8}x)\sqrt{1-x^2} + \tfrac{3}{8}\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -(\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{3}{8}x)\sqrt{1-x^2} \pm \tfrac{3}{8}\,Arc\sin x\,;$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{x^4\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{16}x^4 + \tfrac{3}{4}\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\tfrac{1}{16}x^4 - \tfrac{3}{16}x^2 + \tfrac{3}{8}\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\tfrac{1}{16}x^4 - \tfrac{3}{16}x^2 \pm \tfrac{3}{8}\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\,Arc\sin x$$

$$= -\tfrac{1}{16}x^4 - \tfrac{3}{16}x^2 + \tfrac{3}{16}(Arc\sin x)^2.$$

Also ist

$$\int \frac{x^4\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\,Arc\sin x$$

$$= \{-(\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{3}{8}x)\sqrt{1-x^2} \pm \tfrac{3}{16}\,Arc\sin x\}\,Arc\sin x \pm \tfrac{1}{16}x^4 \pm \tfrac{3}{16}x^2.$$

Für $n = 5$ ist

$$\int \frac{x^5\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\,Arc\sin x = Arc\sin x \int \frac{x^5\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \mp \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{x^5\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Aber

$$\int \frac{x^5\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{5}x^4\sqrt{1-x^2} + \tfrac{4}{5}\int \frac{x^3\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -(\tfrac{1}{5}x^4 + \tfrac{4}{15}x^2)\sqrt{1-x^2} + \tfrac{8}{15}\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -(\tfrac{1}{5}x^4 + \tfrac{4}{15}x^2 + \tfrac{8}{15})\sqrt{1-x^2}\,;$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{x^5\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{25}x^5 + \tfrac{4}{5}\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{x^3\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -(\tfrac{1}{25}x^5 + \tfrac{4}{45}x^3) + \tfrac{8}{15}\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -(\tfrac{1}{25}x^5 + \tfrac{4}{45}x^3 + \tfrac{8}{15}x).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Folglich

$$\int \frac{x^5\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\,Arc\sin x$$

$$= -\left(\tfrac{1}{5}x^4 + \tfrac{4}{15}x^2 + \tfrac{8}{15}\right)\sqrt{1-x^2}\,.\,Arc\sin x \pm \tfrac{1}{25}x^5 \pm \tfrac{4}{45}x^3 \pm \tfrac{8}{15}x.$$

4. $$\int \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,Arc\sin x = Arc\sin x \int \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mp \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Also nach §. 55.

$$\int \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,Arc\sin x = \frac{x\,Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \mp \int \frac{x\,\partial x}{1-x^2},$$

d. i., wenn wir das Integral auf der rechten Seite durch die Substitution $1 - x^2 = z$ entwickeln,

$$\int \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{2}{2}}}\,Arc\sin x = \frac{x\,Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \pm \tfrac{1}{4}l.(1-x^2)^2,$$

oder, weil hier $1 - x^2$ offenbar positiv ist,

$$\int \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,Arc\sin x = \frac{x\,Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \pm \tfrac{1}{2}l(1-x^2).$$

5. $$\int \frac{x\,\partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,Arc\sin x = Arc\sin x \int \frac{x\,\partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mp \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{x\,\partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$= \frac{Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \mp \int \frac{\partial x}{1-x^2} \quad (\S.\,57.)$$

$$= \frac{Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \mp \tfrac{1}{4}l\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \quad (\S.\,35.\,\text{II.})$$

$$= \frac{Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \pm \tfrac{1}{2}l\,\frac{1-x}{1+x}.$$

II. Nach §. 27. ist ferner

$$\int X\,Arc\cos x\,\partial x = Arc\cos x \int X\partial x - \int \partial Arc\cos x \int X\partial x,$$

und folglich nach D. §. 69.

$$\int X\,Arc\cos x\,\partial x = Arc\cos x \int X\partial x \pm \int \frac{\partial x \int X\partial x}{\sqrt{1-x^2}},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem $\sin Arc\cos x$ positiv oder negativ ist, d. h. jenachdem der Bogen $Arc\cos x$ sich im ersten oder zweiten, oder im dritten oder vierten Quadranten endigt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

So ist z. B.

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \, Arc\cos x = Arc\cos x \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \pm \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \mp (Arc\cos x)^2 - \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} Arc\cos x \,,$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \, Arc\cos x = \mp \tfrac{1}{2} (Arc\cos x)^2 \,.$$

III. Ferner ist nach §. 27. und D. §. 70.

$$\int X \, Arc\,tang\, x \, \partial x = Arc\,tang\, x \int X \partial x - \int \frac{\partial x \int X \partial x}{1+x^2} \,.$$

Also ist z. B.

$$\int x^n \, Arc\,tang\, x \, \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1} Arc\,tang\, x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} \partial x}{1+x^2} \,.$$

Ferner ist

$$\int \frac{\partial x}{1+x^2} \, Arc\,tang\, x = Arc\,tang\, x \int \frac{\partial x}{1+x^2} - \int \frac{\partial x}{1+x^2} \int \frac{\partial x}{1+x^2}$$

$$= (Arc\,tang\, x)^2 - \int \frac{\partial x}{1+x^2} \, Arc\,tang\, x \,,$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{1+x^2} \, Arc\,tang\, x = \tfrac{1}{2} (Arc\,tang\, x)^2 \,.$$

Eben so ist

$$\int \frac{x^2 \partial x}{1+x^2} \, Arc\,tang\, x = Arc\,tang\, x \int \frac{x^2 \partial x}{1+x^2} = \int \frac{\partial x}{1+x^2} \int \frac{x^2 \partial x}{1+x^2} \,.$$

Aber

$$\int \frac{x^2 \partial x}{1+x^2} = \int \frac{(1+x^2-1)\partial x}{1+x^2} = \int \partial x - \int \frac{\partial x}{1+x^2} = x - Arc\,tang\, x \,.$$

Also

$$\int \frac{x^2 \partial x}{1+x^2} \, Arc\,tang\, x = (x - Arc\,tang\, x) \, Arc\,tang\, x - \int \frac{x \partial x}{1+x^2}$$

$$+ \int \frac{\partial x}{1+x^2} \, Arc\,tang\, x \,,$$

und folglich nach §. 35. III. und dem Vorhergehenden

$$\int \frac{x^2 \partial x}{1+x^2} \, Arc\,tang\, x = (x - \tfrac{1}{2} Arc\,tang\, x) \, Arc\,tang\, x - \tfrac{1}{2} l (1+x^2) \,.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auf ähnliche Art wie bei den vorigen Beispielen ist

$$\int \frac{\partial x}{(1+x^2)^2} Arc\,tang\,x = Arc\,tang\,x \int \frac{\partial x}{(1+x^2)^2} - \int \frac{\partial x}{1+x^2} \int \frac{\partial x}{(1+x^2)^2}.$$

Nach §. 37. ist aber

$$\int \frac{\partial x}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{1+x^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \tfrac{1}{2} Arc\,tang\,x$$

Also ist

$$\int \frac{\partial x}{(1+x^2)^2} Arc\,tang\,x = \left\{\frac{x}{2(1+x^2)} + \tfrac{1}{2} Arc\,tang\,x\right\} Arc\,tang\,x - \tfrac{1}{2}\int \frac{x\,\partial x}{(1+x^2)^2} - \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{1+x^2} Arc\,tang\,x$$

$$= \left\{\frac{x}{2(1+x^2)} + \tfrac{1}{4} Arc\,tang\,x\right\} Arc\,tang\,x - \tfrac{1}{2}\int \frac{x\,\partial x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \left\{\frac{x}{2(1+x^2)} + \tfrac{1}{4} Arc\,tang\,x\right\} Arc\,tang\,x + \frac{1}{4(1+x^2)},$$

nach §. 38., oder, wenn man das Integral auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens durch die Substitution $1 + x^2 = z$ entwickelt.

IV. Nach §. 27. und D. §. 71. ist auch

$$\int X\,Arc\,cot\,x\,\partial x = Arc\,cot\,x \int X\partial x + \int \frac{\partial x \int X\partial x}{1+x^2}.$$

Also z. B.

$$\int \frac{\partial x}{1+x^2} Arc\,cot\,x = Arc\,cot\,x \int \frac{\partial x}{1+x^2} + \int \frac{\partial x}{1+x^2} \int \frac{\partial x}{1+x^2}$$

$$= -(Arc\,cot\,x)^2 - \int \frac{\partial x}{1+x^2} Arc\,cot\,x,$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{1+x^2} Arc\,cot\,x = -\tfrac{1}{2}(Arc\,cot\,x)^2.$$

Es wird nun schon von selbst erhellen, wie man sich bei der Entwickelung der Integrale von $X\,Arc\,sec\,x\,\partial x$, $X\,Arc\,cosec\,x\partial x$, $X\,Arc\,sinv\,x\,\partial x$ und $X\,Arc\,cosv\,x\,\partial x$ zu verhalten hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Siebentes Kapitel.

Integration der Differentiale, welche Logarithmen und Exponentialgrössen enthalten.

§. 79.

Allgemeine Reductionsformel für Differentiale, die Logarithmen enthalten.

Wir nehmen an, dass X und Z Functionen von x sind; auch soll Z, damit lZ reell sey, immer als positiv angenommen werden. Unter diesen Voraussetzungen ergiebt sich aus §. 27. und einer bekannten Formel der Differentialrechnung auf der Stelle die Gleichung

$$\int X l Z \partial x = l Z \int X \partial x - \int \frac{\partial Z \int X \partial x}{Z},$$

welche bei der Integration der Differentiale, die Logarithmen enthalten, fast immer in Anwendung gebracht werden muss.

Für das Differential $\frac{\partial x}{x \sqrt{x}} l \frac{1}{1-x}$, wo x positiv und kleiner als die Einheit seyn soll, giebt die obige allgemeine Gleichung z. B.

$$\int \frac{\partial x}{x \sqrt{x}} l \frac{1}{1-x} = l \frac{1}{1-x} \int \frac{\partial x}{x \sqrt{x}} - \int \frac{\partial x}{1-x} \int \frac{\partial x}{x \sqrt{x}},$$

oder, weil $\int \frac{\partial x}{x \sqrt{x}} = \int x^{-\frac{3}{2}} \partial x = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ ist,

$$\int \frac{\partial x}{x \sqrt{x}} l \frac{1}{1-x} = -\frac{2}{\sqrt{x}} l \frac{1}{1-x} + 2 \int \frac{\partial x}{(1-x) \sqrt{x}}.$$

Für $x = y^2$ ergiebt sich aber

$$\int \frac{\partial x}{(1-x) \sqrt{x}} = 2 \int \frac{\partial y}{1-y^2} = \tfrac{1}{2} l . \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2 \text{ (§. 35. II.)},$$

oder auch, weil unter den gemachten Voraussetzungen $\frac{1+y}{1-y}$ offenbar positiv ist,

$$\int \frac{\partial x}{(1-x) \sqrt{x}} = l \frac{1+y}{1-y} = l \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}},$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{x \sqrt{x}} l \frac{1}{1-x} = -\frac{2}{\sqrt{x}} l \frac{1}{1-x} + 2 l \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 80.

Entwickelung des Integrals $\int X(lx)^n \partial x$.

Angenommen wird, dass x positiv sey. Aus §. 27. und bekannten Formeln der Differentialrechnung ergiebt sich

$$\int X(lx)^n \partial x = (lx)^n \int X \partial x - n \int \frac{\partial x}{x} (lx)^{n-1} \int X \partial x .$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\int X \partial x = X_1 , \quad \int \frac{X_1 \partial x}{x} = X_2 , \quad \int \frac{X_2 \partial x}{x} = X_3 , \ldots$$

$$\int \frac{X_{k-1} \partial x}{x} = X_k ;$$

so ergeben sich aus der obigen Gleichung folgende Gleichungen:

$$\int X(lx)^n \partial x = X_1 (lx)^n - n \int \frac{X_1}{x} (lx)^{n-1} \partial x ,$$

$$\int \frac{X_1}{x} (lx)^{n-1} \partial x = X_2 (lx)^{n-1} - (n-1) \int \frac{X_2}{x} (lx)^{n-2} \partial x ,$$

$$\int \frac{X_2}{x} (lx)^{n-2} \partial x = X_3 (lx)^{n-2} - (n-2) \int \frac{X_3}{x} (lx)^{n-3} \partial x ,$$

u. s. w.

$$\int \frac{X_{k-1}}{x} (lx)^{n-k+1} \partial x = X_k (lx)^{n-k+1} - (n-k+1) \int \frac{X_k}{x} (lx)^{n-k} \partial x .$$

Mittelst dieser Gleichungen erhält man nach gehöriger Substitution:

$$\begin{aligned} \int X (lx)^n \partial x = {} & X_1 (lx)^n - n X_2 (lx)^{n-1} + n(n-1) X_3 (lx)^{n-2} - \ldots \\ & \ldots + (-1)^{k-1} . n(n-1) .. (n-k+2) X_k (lx)^{n-k+1} \\ & + (-1)^k . n(n-1) .. (n-k+1) \int \frac{X_k}{x} (lx)^{n-k} \partial x . \end{aligned}$$

Setzen wir nun, unter der Voraussetzung, dass n eine positive ganze Zahl ist, $k = n + 1$; so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int X (lx)^n \partial x = {} & X_1 (lx)^n - n X_2 (lx)^{n-1} + n(n-1) X_3 (lx)^{n-2} - \ldots \\ & \ldots\ldots + (-1)^n . n(n-1) \ldots 1 X_{n+1} . \end{aligned}$$

Für $X = x^m$ ist z. B.

$$X_1 = \frac{x^{m+1}}{m+1} , \quad X_2 = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} , \quad X_3 = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3} , \ldots$$

$$X_{n+1} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^{n+1}} ;$$

und folglich

$$\int x^m (lx)^n \partial x = \left\{ \frac{(lx)^n}{m+1} - \frac{n (lx)^{n-1}}{(m+1)^2} + \frac{n(n-1)(lx)^{n-2}}{(m+1)^3} - \ldots\ldots \right. \\ \left. \ldots\ldots + (-1)^n . \frac{n(n-1) \ldots 2 . 1}{(m+1)^{n+1}} \right\} x^{m+1} .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Fall, wenn $m = -1$ ist, muss besonders betrachtet werden.

In diesem Falle ist aber

$$X_1 = \int \frac{\partial x}{x} = lx,$$

$$X_2 = \int lx \frac{\partial x}{x} = lx \int \frac{\partial x}{x} - \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} = (lx)^2 - \int lx \frac{\partial x}{x}$$

$$= (lx)^2 - X_2 = \tfrac{1}{2}(lx)^2,$$

$$X_3 = \tfrac{1}{2}\int (lx)^2 \frac{\partial x}{x} = \tfrac{1}{2}(lx)^2 \int \frac{\partial x}{x} - \int lx \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x}$$

$$= \tfrac{1}{2}(lx)^3 - \int (lx)^2 \frac{\partial x}{x} = \tfrac{1}{2}(lx)^3 - 2X_3 = \frac{1}{2.3}(lx)^3,$$

$$X_4 = \frac{1}{2.3}\int (lx)^3 \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2.3}(lx)^3 \int \frac{\partial x}{x} - \tfrac{1}{2}\int (lx)^2 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x}$$

$$= \frac{1}{2.3}(lx)^4 - \tfrac{1}{2}\int (lx)^3 \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2.3}(lx)^4 - 3X_4 = \frac{1}{2.3.4}(lx)^4,$$

u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, liegt deutlich vor Augen. Es ist also nach dem Obigen

$$\int (lx)^n \frac{\partial x}{x} = \left\{1 - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2.3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4} + \ldots \ldots + (-1)^n \cdot \frac{n(n-1)\ldots 1}{2.3.4..(n+1)}\right\}(lx)^{n+1},$$

und folglich, wenn wir die eingeklammerte Reihe der Kürze wegen $= N$ setzen,

$$\int_a^x (lx)^n \frac{\partial x}{x} = N\left\{(lx)^{n+1} - (la)^{n+1}\right\}.$$

Man kann aber auf eine sehr einfache Weise noch einen andern Ausdruck für dieses Integral finden. Es ist nämlich

$$\int (lx)^n \frac{\partial x}{x} = \int (lx)^n \partial lx = \frac{1}{n+1}(lx)^{n+1},$$

und folglich

$$\int_a^x (lx)^n \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{n+1}\{(lx)^{n+1} - (la)^{n+1}\}.$$

Durch Vergleichung der beiden hier gefundenen Ausdrücke dieses Integrals ergiebt sich die bemerkenswerthe Summation

$$\frac{1}{n+1} = 1 - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2.3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{n(n-1)\ldots 1}{2.3.\ldots.(n+1)}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{n}{1} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2} - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots$$

$$+ (-n)^n\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2\ldots n}$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}n_1 + \tfrac{1}{3}n_2 - \tfrac{1}{4}n_3 + \ldots + (-1)^n\cdot\frac{1}{n+1}n_n.$$

§. 81.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{X\partial x}{(lx)^n}.$$

Nach §. 27. ist

$$\int\frac{X\partial x}{(lx)^n} = \int Xx\frac{\partial x}{x(lx)^n} = Xx\int\frac{\partial x}{x(lx)^n} - \int\partial.Xx\int\frac{\partial x}{x(lx)^n},$$

wobei wir wieder x als positiv annehmen. Da nun aber

$$\int\frac{\partial x}{x(lx)^n} = \int(lx)^{-n}\partial lx = -\frac{1}{(n-1)(lx)^{n-1}}$$

ist; so ist

$$\int\frac{X\partial x}{(lx)^n} = -\frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{\partial.Xx}{(lx)^{n-1}}.$$

Für

$$\partial.Xx = X_1\partial x,\ \partial.X_1x = X_2\partial x,\ \partial.X_2x = X_3\partial x,\ \ldots$$
$$\partial.X_{k-1}x = X_k\partial x$$

erhalten wir also

$$\int\frac{X\partial x}{(lx)^n} = -\frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{X_1\partial x}{(lx)^{n-1}},$$

$$\int\frac{X_1\partial x}{(lx)^{n-1}} = -\frac{X_1x}{(n-2)(lx)^{n-2}} + \frac{1}{n-2}\int\frac{X_2\partial x}{(lx)^{n-2}},$$

$$\int\frac{X_2\partial x}{(lx)^{n-2}} = -\frac{X_2x}{(n-3)(lx)^{n-3}} + \frac{1}{n-3}\int\frac{X_3\partial x}{(lx)^{n-3}},$$

u. s. w.

$$\int\frac{X_{k-1}\partial x}{(lx)^{n-k+1}} = -\frac{X_{k-1}x}{(n-k)(lx)^{n-k}} + \frac{1}{n-k}\int\frac{X_k\partial x}{(lx)^{n-k}},$$

und folglich nach gehöriger Substitution

$$\int\frac{X\partial x}{(lx)^n}$$

$$= -\frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{X_1x}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \frac{X_2x}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{X_{k-1}x}{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)(lx)^{n-k}} + \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}\int\frac{X_k\partial x}{(lx)^{n-k}};$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also, wenn wir, vorausgesetzt, dass n eine positive ganze Zahl ist, $k = n - 1$ setzen:

$$\int \frac{X\partial x}{(lx)^n}$$

$$= -\frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{X_1 x}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \frac{X_2 x}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} - \ldots$$

$$\ldots\ldots - \frac{X_{n-2}\, x}{(n-1)(n-2)\ldots 1\, lx} + \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots 1} \int \frac{X_{n-1}\partial x}{lx}.$$

Für $X = x^m$ ist z. B.

$$\int \frac{x^m \partial x}{(lx)^n}$$

$$= -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \frac{(m+1)^2 x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} - \ldots$$

$$\ldots\ldots - \frac{(m+1)^{n-2} x^{m+1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1\, lx} + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1} \int \frac{x^m \partial x}{lx},$$

so dass sich also das gesuchte Integral immer auf $\int \frac{x^m \partial x}{lx}$ zurückführen lässt.

Für $m = -1$ erhält man aus der gefundenen Formel

$$\int \frac{\partial x}{x(lx)^n} = -\frac{1}{(n-1)(lx)^{n-1}},$$

wo aber der Fall, wenn $n = 1$ ist, noch besonders betrachtet werden muss. Setzt man zu dem Ende $lx = u$; so ist $\frac{\partial x}{x} = \partial u$, und folglich

$$\int \frac{\partial x}{x\, lx} = \int \frac{\partial u}{u} = \tfrac{1}{2} l . u^2 = \tfrac{1}{2} l . (lx)^2.$$

Setzt man $x^{m+1} = z$; so ist

$$(m+1)x^m \partial x = \partial z, \quad (m+1)\, lx = lz,$$

und folglich

$$\int \frac{x^m \partial x}{lx} = \int \frac{(m+1)x^m \partial x}{(m+1)\, lx} = \int \frac{\partial z}{lz}.$$

Auf dieses Integral kann also nach dem Vorhergehenden das Integral von $\frac{x^m \partial x}{(lx)^n}$ im Allgemeinen immer zurückgeführt werden, und wir würden uns also jetzt zunächst mit der nähern Betrachtung des in Rede stehenden Integrals, oder, was dasselbe ist, des Integrals $\int \frac{\partial x}{lx}$ zu beschäftigen haben, werden aber erst weiter unten auf diesen Gegenstand zurückkommen, indem wir jetzt zuvörderst auch Differentiale, welche Exponentialgrössen enthalten, zu integriren lehren wollen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 82.

Allgemeine Formeln für Differentiale, die Exponentialgrössen enthalten.

Es sey X eine Function von x, a eine positive constante Grösse.

Weil nach D. §. 57. $\partial . a^x = a^x la \partial x$ ist; so ist umgekehrt

$$\int a^x \partial x = \frac{a^x}{la}, \int e^x \partial x = e^x.$$

Auch erhellet nun leicht, dass

$$\int a^{\alpha x} \partial x = \frac{a^{\alpha x}}{\alpha la}, \int e^{\alpha x} \partial x = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$$

ist.

Nach §. 27. ist

$$\int X a^x \partial x = X \int a^x \partial x - \int \partial X \int a^x \partial x,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int X a^x \partial x = \frac{1}{la} X a^x - \frac{1}{la} \int a^x \partial X .$$

Setzen wir nun

$$\partial X = X_1 \partial x, \quad \partial X_1 = X_2 \partial x, \quad \partial X_2 = X_3 \partial x, \ldots$$
$$\partial X_{k-1} = X_k \partial x;$$

so erhalten wir

$$\int X a^x \partial x = \frac{1}{la} X a^x - \frac{1}{la} \int X_1 a^x \partial x,$$

$$\int X_1 a^x \partial x = \frac{1}{la} X_1 a^x - \frac{1}{la} \int X_2 a^x \partial x,$$

$$\int X_2 a^x \partial x = \frac{1}{la} X_2 a^x - \frac{1}{la} \int X_3 a^x \partial x,$$

u. s. w.

$$\int X_{k-1} a^x \partial x = \frac{1}{a} X_{k-1} a^x - \frac{1}{la} \int X_k a^x \partial x,$$

und folglich nach gehöriger Substitution

$$1. \int X a^x \partial x = \frac{1}{la} X a^x - \frac{1}{(la)^2} X_1 a^x + \frac{1}{(la)^3} X_2 a^x - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} . \frac{1}{(la)^k} X_{k-1} a^x + (-1)^k . \frac{1}{(la)^k} \int X_k a^x \partial x.$$

Mittelst dieser Formel wird sich, wenn die Differentiation der Function X irgend einmal auf ein constantes Differential führt, das gegebene Differential immer integriren lassen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach §. 27. ist aber auch

$$\int X a^x \partial x = a^x \int X \partial x - \int \partial . a^x \int X \partial x$$
$$= a^x \int X \partial x - la \int a^x \partial x \int X \partial x .$$

Setzen wir nun

$$\int X \partial x = Z, \ \int Z \partial x = Z_1, \ \int Z_1 \partial x = Z_2, \ \ldots \int Z_{k-1} \partial x = Z_k;$$

so erhalten wir

$$\int X a^x \partial x = a^x Z - la \int Z a^x \partial x ,$$
$$\int Z a^x \partial x = a^x Z_1 - la \int Z_1 a^x \partial x ,$$
$$\int Z_1 a^x \partial x = a^x Z_2 - la \int Z_2 a^x \partial x ,$$

u. s. w.

$$\int Z_{k-1} a^x \partial x = a^x Z_k - la \int Z_k a^x \partial x ,$$

und folglich nach gehöriger Substitution

2. $$\int X a^x \partial x = a^x Z - la . a^x Z_1 + (la)^2 . a^x Z_2 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k (la)^k . a^x Z_k + (-1)^{k+1} (la)^{k+1} \int Z_k a^x \partial x .$$

Mittelst dieser Formel wird man das gegebene Differential nur dann integriren können, wenn sich die Integrale Z, Z_1, Z_2, Z_3, ... sämmtlich entwickeln lassen.

§. 83.

Entwickelung des Integrals $\int a^x x^n \partial x$.

Wir nehmen an, dass n eine positive ganze Zahl sey, und werden also die Formel 1. in §. 82. in Anwendung zu bringen haben.

Setzen wir also $X = x^n$; so ist

$$X_k = n(n-1) \ldots (n-k+1) x^{n-k},$$

und folglich

$$\int a^x x^n \partial x =$$
$$a^x \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^n}{la} - \frac{n x^{n-1}}{(la)^2} + \frac{n(n-1) x^{n-2}}{(la)^3} - \frac{n(n-1)(n-2) x^{n-3}}{(la)^4} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{k-1} . \frac{n(n-1) \ldots (n-k+2) x^{n-k+1}}{(la)^k} \\ + (-1)^k . \frac{n(n-1) \ldots (n-k+1)}{(la)^k} \int a^x x^{n-k} \partial x \end{array} \right\} ;$$

also für $k = n$:

$$\int a^x x^n \partial x =$$
$$a^x \left\{ \frac{x^n}{la} - \frac{n x^{n-1}}{(la)^2} + \frac{n(n-1) x^{n-2}}{(la)^3} - \ldots + (-1)^n . \frac{n(n-1) \ldots 1}{(la)^{n+1}} \right\} .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 84.

Entwickelung des Integrals $\int \frac{a^x \partial x}{x^n}$.

Für $X = x^{-n}$ erhält man, um die Formel 2. in §. 82. auf das gesuchte Integral anzuwenden, ohne Schwierigkeit

$$Z_k = \frac{(-1)^{k+1}}{(n-1)(n-2)..(n-k-1)\,x^{n-k-1}},$$

und folglich

$$\int \frac{a^x \partial x}{x^n}$$

$$= -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a^x\,la}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{a^x\,(la)^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{a^x\,(la)^k}{(n-1)(n-2)..(n-k-1)x^{n-k-1}} + \frac{(la)^{k+1}}{(n-1)(n-2)..(n-k-1)} \int \frac{a^x \partial x}{x^{n-k-1}};$$

also für $k = n - 2$:

$$\int \frac{a^x \partial x}{x^n}$$

$$= -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a^x\,la}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{a^x\,(la)^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{a^x\,(la)^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 1\,x} + \frac{(la)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1} \int \frac{a^x \partial x}{x}.$$

Mittelst dieser Formel kann folglich das gesuchte Integral immer auf $\int \frac{a^x \partial x}{x}$ zurückgeführt werden. Dieses Integral ist aber kein anderes als das Integral, auf welches wir in §. 81. geführt wurden. Setzen wir nämlich $a^x = z$; so ist $a^x\,la\,\partial x = \partial z$, $x\,la = lz$, und folglich

$$\frac{a^x \partial x}{x} = \frac{\partial z}{lz}, \quad \int \frac{a^x \partial x}{x} = \int \frac{\partial z}{lz}.$$

Daher werden wir uns nun mit dem Integral $\int \frac{\partial x}{lx}$ zu beschäftigen haben.

§. 85.

Ueber das Integral $\int \frac{\partial x}{lx}$.

Unter der Voraussetzung, dass x positiv ist, setze man $x = e^y$; so ist $\partial x = e^y \partial y$, $lx = y$, und folglich $\frac{\partial x}{lx} = \frac{e^y \partial y}{y}$. Nach D. §. 118. ist aber für jedes reelle y

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{e^y \partial y}{y} = \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial y}{1} + \frac{y \partial y}{1.2} + \frac{y^2 \partial y}{1.2.3} + \frac{y^3 \partial y}{1...4} + \ldots,$$

und folglich, weil $y = lx$, für $x = a$, also $y = la$ ist, nach §. 8. für jedes positive x und jedes positive a

$$\int_a^x \frac{\partial x}{lx} = \int_{la}^{lx} \frac{e^y \partial y}{y}$$

$$= \tfrac{1}{2} l.\left(\frac{lx}{la}\right)^2 + \frac{lx - la}{1} \cdot \tfrac{1}{1} + \frac{(lx)^2 - (la)^2}{1.2} \cdot \tfrac{1}{2} + \frac{(lx)^3 - (la)^3}{1.2.3} \cdot \tfrac{1}{3}$$

$$+ \frac{(lx)^4 - (la)^4}{1.2.3.4} \cdot \tfrac{1}{4} + \ldots\ldots$$

Das Integral $\int_o^x \frac{\partial x}{lx}$ nennt man den Integrallogarithmus, und bezeichnet es, wie auch im Folgenden geschehen soll, gewöhnlich durch $li.x$. In dieser Bezeichnung ist nach dem Vorhergehenden

$$li.x = C + \tfrac{1}{2} l.(lx)^2 + \frac{lx}{1} \cdot \tfrac{1}{1} + \frac{(lx)^2}{1.2} \cdot \tfrac{1}{2} + \frac{(lx)^3}{1.2.3} \cdot \tfrac{1}{3} + \ldots,$$

wo aber die Bestimmung der Constante C besondere Schwierigkeit macht, da sich dieselbe mittelst des aus dem Vorhergehenden sich ergebenden Ausdrucks

$$C = -\tfrac{1}{2} l.(lo)^2 - \frac{lo}{1} \cdot \tfrac{1}{1} - \frac{(lo)^2}{1.2} \cdot \tfrac{1}{2} - \frac{(lo)^3}{1.2.3} \cdot \tfrac{1}{3} - \ldots$$

offenbar nicht bestimmen lässt. Unter den verschiedenen Methoden, welche zu dieser Bestimmung in Vorschlag gebracht worden sind, scheint uns die folgende eine der einfachsten und für unsern gegenwärtigen Zweck passendsten zu seyn.

Aus dem Obigen ergiebt sich, wenn wir e^{-x} für x setzen,

$$li.e^{-x} = C + \tfrac{1}{2} l.x^2 - \tfrac{1}{1} \cdot \frac{x}{1} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{1.2} - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

wo x positiv und negativ seyn kann. Nach D. §. 118. ist aber

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1...4} - \ldots,$$

und folglich

$$\frac{e^{-x} - 1}{x} \partial x = -\frac{\partial x}{1} + \frac{x \partial x}{1.2} - \frac{x^2 \partial x}{1.2.3} + \frac{x^3 \partial x}{1...4} - \ldots;$$

also

$$\int_o^x \frac{e^{-x} - 1}{x} \partial x = -\tfrac{1}{1} \cdot \frac{x}{1} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{1.2} - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

und daher nach dem Obigen

$$li.e^{-x} = C + \tfrac{1}{2} l.x^2 + \int_o^x \frac{e^{-x} - 1}{x} \partial x.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach dem allgemeinen Begriffe eines bestimmten Integrals ist aber offenbar $li.0 = li.e^{-\infty} = 0$. Also ist

$$0 = C + l\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x\,;$$

folglich

$$C = -l\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x\,,$$

oder, wenn wir durch

$$lim\left\{ln + \int_0^n \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x\right\}$$

die Gränze bezeichnen, welcher die eingeklammerte Grösse sich nähert, wenn n in's Unendliche wächst,

$$C = -\,lim\left\{ln + \int_0^n \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x\right\}.$$

Nach dem Binomischen Lehrsatze ist nun, wenn jetzt n eine positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= 1 + \tfrac{1}{1} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{1.2} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{1\ldots n}\,,$$

und folglich, weil bekanntlich

$$e = 1 + \tfrac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

ist, offenbar immer

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Die Grösse

$$S_k = 1 + \tfrac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1\ldots k}$$

lässt sich, wenn man nur k gross genug nimmt, der Grösse e beliebig nahe bringen.

Die Grösse

$$\Sigma_{n,k} = 1 + \tfrac{1}{1} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{1.2} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{1.2.3} + \ldots$$
$$\ldots\ldots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{1\ldots k}$$

lässt sich, wenn man nur n gross genug nimmt, der Grösse S_k beliebig nahe bringen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Also nähert sich, wenn n und k wachsen, die Grösse $\Sigma_{n,k}$ der Grösse e, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur k und n gross genug nimmt.

Nimmt man aber, was offenbar verstattet ist, $n > k$; so ist augenscheinlich

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \Sigma_{n,k},$$

und folglich

$$\Sigma_{n,k} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e,$$

d. i. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ zwischen $\Sigma_{n,k}$ und e enthalten.

Daher nähert sich offenbar auch $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, wenn n wächst, der Grösse e, und kann derselben, wenn man nur n gross genug nimmt, beliebig nahe gebracht werden, oder es ist

$$lim\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} = e.$$

Setzen wir nun, unter der Voraussetzung, dass n grösser als die Einheit ist,

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{1+m},$$

wo also m positiv ist; so ist $n = \frac{1+m}{m}$, und folglich

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{1+m}\right)^{\frac{1+m}{m}} = \left\{\frac{1}{(1+m)^{\frac{1}{m}}}\right\}^{1+m}.$$

Wenn n sich dem Unendlichen nähert, nähert m sich der Null, und es ist also nach dem Vorhergehenden offenbar

$$lim\left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right\} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Folglich ist, immer unter der Voraussetzung, dass n sich dem Unendlichen nähert, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander,

$$lim\left\{\left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^n\right\} = e^{\pm 1}.$$

Also ist offenbar auch

$$lim\left\{\left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right\} = e^{\pm 1}.$$

Aber, wie leicht erhellen wird,

$$lim\left\{\left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right\} = \left\{lim\left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^n\right\}^{\frac{1}{x}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Also

$$\left\{lim.\left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^n\right\}^{\frac{1}{x}} = e^{\pm 1},$$

und folglich

$$lim\left\{\left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^n\right\} = e^{\pm x}.$$

Setzen wir nun $1 - \frac{x}{n} = z$; so ist

$$\frac{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n - 1}{x}\partial x = \frac{1 - z^n}{1 - z}\partial z,$$

und folglich, weil für $x = 0$ und $x = n$ respective $z = 1$ und $z = 0$ ist,

$$\int_o^n \frac{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n - 1}{x}\partial x = \int_1^o \frac{1 - z^n}{1 - z}\partial z;$$

also nach dem Obigen

$$lim\int_o^n \frac{e^{-x} - 1}{x}\partial x = lim\int_1^o \frac{1 - z^n}{1 - z}\partial z,$$

und daher

$$C = -lim\left\{ln + \int_1^o \frac{1 - z^n}{1 - z}\partial z\right\}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1 - z^n}{1 - z}\partial z = (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1})\partial z;$$

also

$$\int_1^o \frac{1 - z^n}{1 - z}\partial z = -\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right),$$

und folglich

$$C = lim\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - ln\right).$$

Es erhellet leicht, dass man n sehr gross annehmen müsste, wenn man mittelst dieser Formel C nur mit erträglicher Genauigkeit finden wollte. Ausführlichere Untersuchungen über diesen Gegenstand würden uns aber an diesem Orte zu weit führen, und wir bemerken daher bloss noch, dass der italienische Mathematiker Mascheroni für C den folgenden Werth gefunden hat:

$$C = 0{,}577215\ 664901\ 532860\ 618112.\ ^{*)}$$

---

*) Man kann über die Berechnung der Constante C auch Folgendes merken. Nach dem Obigen ist, wenn wir

$$f(x) = \tfrac{1}{2}l.x^2 - \tfrac{1}{1}\cdot\frac{x}{1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1.2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

setzen, $li.e^{-x} = C + f(x)$, und folglich $li.e^{-\infty} = C + f(\infty)$, oder, weil nach dem Obigen $li.e^{-\infty} = 0$ ist, $C = -f(\infty)$. Nun ist aber, wie man leicht findet, wenn man e^{-x} in eine Reihe entwickelt,

$$\int_a^x \frac{\partial x}{xe^x} = f(x) - f(a) = \varphi(x),$$

§. 86.

Entwickelung der Integrale einiger Differentiale, welche Exponential- und Kreisfunctionen enthalten.

I. $\int e^{ax} \sin x^n \partial x$ und $\int e^{ax} \cos x^n \partial x$.

Nach §. 27. und §. 82. ist

$$\int e^{ax} \sin x^n \partial x = \sin x^n \int e^{ax} \partial x - \int \partial . \sin x^n \int e^{ax} \partial x$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin x^n - \frac{n}{a} \int e^{ax} \sin x^{n-1} \cos x \partial x$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin x^n - \frac{n}{a} \sin x^{n-1} \cos x \int e^{ax} \partial x + \frac{n}{a} \int \partial . \sin x^{n-1} \cos x \int e^{ax} \partial x$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin x^n - \frac{n}{a^2} e^{ax} \sin x^{n-1} \cos x + \frac{n(n-1)}{a^2} \int e^{ax} \sin x^{n-2} \cos x^2 \partial x$$

$$- \frac{n}{a^2} \int e^{ax} \sin x^n \partial x$$

$$= \frac{e^{ax} \sin x^{n-1} (a \sin x - n \cos x)}{a^2} + \frac{n(n-1)}{a^2} \int e^{ax} \sin x^{n-2} \partial x$$

$$- \frac{n^2}{a^2} \int e^{ax} \sin x^n \partial x,$$

und folglich $\int e^{ax} \sin x^n \partial x$

$$= \frac{e^{ax} \sin x^{n-1} (a \sin x - n \cos x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \sin x^{n-2} \partial x.$$

Auf ganz ähnliche Art ist nach §. 27. und §. 82.

$$\int e^{ax} \cos x^n \partial x = \cos x^n \int e^{ax} \partial x - \int \partial . \cos x^n \int e^{ax} \partial x$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos x^n + \frac{n}{a} \int e^{ax} \cos x^{n-1} \sin x \partial x$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos x^n + \frac{n}{a} \cos x^{n-1} \sin x \int e^{ax} \partial x$$

$$- \frac{n}{a} \int \partial . \cos x^{n-1} \sin x \int e^{ax} \partial x$$

---

und folglich $\varphi'(x) = \frac{1}{xe^x}$. Setzen wir aber $\psi(x) = \frac{1}{a}(e^{-a} - e^{-x})$; so ist $\psi'(x) = \frac{1}{ae^x}$. Nehmen wir also an, dass x und a beide positiv sind, und dass $x > a$ ist; so sind $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ beide positiv, und $\psi'(x)$ ist grösser als $\varphi'(x)$. Hieraus sieht man, dass, wenn x von a an stetig in's Unendliche wächst, die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ von Null an stetig wachsen, dass aber, weil $\varphi'(x) < \psi'(x)$ ist, $\varphi(x)$ langsamer wie $\psi(x)$ wächst. Also ist, weil $\psi(\infty) = \frac{1}{ae^a}$ ist, offenbar

$$\varphi(\infty) < \frac{1}{ae^a}, \quad \text{d. i. } f(\infty) - f(a) < \frac{1}{ae^a}.$$

Berechnet man also den Werth von $f(x)$ mittelst der obigen Reihe für einen hinreichend grossen Werth a von x, und setzt $f(\infty) = f(a) + \varepsilon$; so ist dadurch $f(\infty)$ bis auf einen Fehler ε, der positiv und kleiner als $\frac{1}{ae^a}$ ist, gefunden. Nimmt man z. B. $a = 10$, so ist $\varepsilon < \frac{1}{10 . e^{10}}$, d. i. $\varepsilon < 0{,}00001$, und man findet also durch diese Rechnung den Werth von $f(\infty)$ bis zur fünften Decimalstelle genau.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos x^n + \frac{n}{a^2} e^{ax} \cos x^{n-1} \sin x$$

$$+ \frac{n(n-1)}{a^2} \int e^{ax} \cos x^{n-2} \sin x^2 \partial x - \frac{n}{a^2} \int e^{ax} \cos x^n \partial x$$

$$= \frac{e^{ax} \cos x^{n-1} (a \cos x + n \sin x)}{a^2} + \frac{n(n-1)}{a^2} \int e^{ax} \cos x^{n-2} \partial x$$

$$- \frac{n^2}{a^2} \int e^{ax} \cos x^n \partial x,$$

und folglich

$$\int e^{ax} \cos x^n \partial x$$

$$= \frac{e^{ax} \cos x^{n-1} (a \cos x + n \sin x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos x^{n-2} \partial x.$$

Mittelst der beiden hier gefundenen Reductionsformeln kann man die gesuchten Integrale, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, auf $\int e^{ax} \partial x = \frac{1}{a} e^{ax}$, oder respective auf $\int e^{ax} \sin x \, \partial x$ und $\int e^{ax} \cos x \, \partial x$ zurückführen. Für $n = 1$ ergiebt sich aber aus den beiden Reductionsformeln selbst

$$\int e^{ax} \sin x \, \partial x = \frac{e^{ax} (a \sin x - \cos x)}{a^2 + 1}, \quad \int e^{ax} \cos x \, \partial x = \frac{e^{ax} (a \cos x + \sin x)}{a^2 + 1},$$

und die beiden gesuchten Integrale werden sich also in allen Fällen finden lassen.

II. $\int e^{ax} (\sin bx)^n \partial x$ und $\int e^{ax} (\cos bx)^n \partial x$.

Für $bx = z$ wird

$$\int e^{ax} (\sin bx)^n \partial x = \frac{1}{b} \int e^{\frac{a}{b} z} \sin z^n \partial z,$$

$$\int e^{ax} (\cos bx)^n \partial x = \frac{1}{b} \int e^{\frac{a}{b} z} \cos z^n \partial z,$$

wodurch die gesuchten Integrale auf die in I. betrachteten Formen zurückgeführt sind, und daher immer gefunden werden können.

In dem Falle $n = 1$ erhält man aus diesen Formeln und aus I. leicht

$$\int e^{ax} \sin bx \, \partial x = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2},$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, \partial x = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}.$$

III. $\int x^n e^{ax} \sin bx \, \partial x$ und $\int x^n e^{ax} \cos bx \, \partial x$.

Nach §. 27. und dem Vorhergehenden ist

$$\int x^n e^{ax} \sin bx \, \partial x$$

$$= x^n \int e^{ax} \sin bx \, \partial x - n \int x^{n-1} \partial x \int e^{ax} \sin bx \, \partial x$$

$$= x^n \int e^{ax} \sin bx \, \partial x - \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx \, \partial x$$

$$+ \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx \, \partial x,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\int x^n e^{ax} \cos bx \partial x$$
$$= x^n \int e^{ax} \cos bx \partial x - n \int x^{n-1} \partial x \int e^{ax} \cos bx \partial x$$
$$= x^n \int e^{ax} \cos bx \partial x - \frac{na}{a^2+b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx \partial x$$
$$- \frac{nb}{a^2+b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx \partial x.$$

Mittelst dieser Formeln kann man die gesuchten Integrale immer auf die in II. betrachteten Integrale zurückführen.

Achtes Kapitel.

Anwendung der Integralrechnung auf die Theorie der in einer Ebene liegenden Curven oder der sogenannten Curven von einfacher Krümmung.

A. Quadratur.

§. 87.

Erklärung. Wir denken uns eine auf ein beliebiges recht- oder schiefwinkliges Coordinatensystem bezogene Curve. Der Coordinatenwinkel sey α. a und b sollen zwei beliebige Abscissen, a' und b' die entsprechenden Ordinaten, und a soll kleiner als b seyn. Ist nun, wie wir im Folgenden immer annehmen wollen, die Curve zwischen den Punkten aa' und bb' stetig; so wird von dem Theile $b - a$ der Abscissenaxe, von den beiden Ordinaten a' und b', und von dem zwischen den Punkten aa' und bb' liegenden Bogen der Curve eine gewisse ebene Figur begränzt, die man sich durch Bewegung der Ordinate vom Endpunkte der Abscisse a bis zum Endpunkte der Abscisse b, vorausgesetzt, dass bei dieser Bewegung die Ordinate sich selbst immer parallel bleibt, entstanden denken kann. Diese Figur kann aus mehreren auf der Seite der positiven und negativen Ordinaten, d. i. oberhalb und unterhalb der Abscissenaxe liegenden Theilen bestehen. Den Flächeninhalt eines jeden auf der Seite der positiven Ordinaten liegenden Theils, in welchem also alle Ordinaten positiv sind, wollen wir im Folgenden als positiv, dagegen den Flächenraum eines jeden auf der Seite der negativen Ordinaten liegenden Theils, in welchem also alle Ordinaten negativ sind, als negativ betrachten. Unter dem Flächenraume der von dem Theile $b - a$ der Abscissenaxe, von den beiden Ordinaten a' und b', und von dem zwischen den Punkten aa' und bb' liegenden Bogen der Curve begränzten ebenen Figur werden wir

im Folgenden immer die Summe der Flächenräume aller einzelnen, auf beiden Seiten der Abscissenaxe liegenden Theile dieser Figur, vorausgesetzt, dass man jeden dieser Flächenräume mit dem ihm nach den vorher gegebenen Bestimmungen zukommenden Zeichen nimmt, verstehen. Die Bestimmung des Flächenraumes der von dem Theile $b - a$ der Abscissenaxe, von den beiden Ordinaten a' und b', und von dem zwischen den Punkten aa' und bb' liegenden Bogen der gegeben Curve begränzten ebenen Figur heisst die Quadratur der Curve.

§. 88.

Aufgabe. Es seyen x, y die recht- oder schiefwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes einer gegebenen Curve; der Coordinatenwinkel sey α. Man soll den Flächenraum v des von der Abscisse x, der dem Anfange der Coordinaten entsprechenden Ordinate, der Ordinate y, und dem zwischen den Endpunkten dieser beiden Ordinaten liegenden Bogen der Curve begränzten ebenen Figur bestimmen.

Auflösung. Der gesuchte Flächenraum ist unstreitig eine Function von x, und es wird sich also, wenn x sich um Δx ändert, y um Δy, v um Δv ändern.

Die Veränderung Δx der Abscisse denken wir uns immer der Null sehr nahe kommend, und unterscheiden nun die folgenden Fälle.

I. y positiv.

1. x positiv. In diesem Falle nimmt v offenbar zu und ab, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. Δv ist mit Δx gleichzeitig positiv und negativ; die Summe $2y + \Delta y$ der Ordinaten y und $y + \Delta y$ ist positiv, weil diese beiden Ordinaten selbst positiv sind; $\sin \alpha$ ist immer positiv. Also ist mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta v = \tfrac{1}{2} \sin \alpha . (2y + \Delta y) \Delta x,$$

wie sogleich erhellen wird, wenn man nur überlegt, dass der absolute Werth von Δv dem Flächenraume des von Δx, y, $y + \Delta y$ und der die Endpunkte der Ordinaten y und $y + \Delta y$ verbindenden Sehne der Curve eingeschlossenen Trapeziums, dessen Höhe durch den absoluten Werth des Products $\Delta x \sin \alpha$ arithmetisch ausgedrückt wird, offenbar deste näher kommt, je näher Δx der Null kommt.

2. x negativ. In diesem Falle nimmt v offenbar ab und zu, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. Δv ist negativ oder positiv, wenn Δx respective positiv oder negativ ist; die Summe $2y + \Delta y$ der Ordinaten y und $y + \Delta y$ ist wieder positiv, weil diese Ordinaten selbst positiv sind; $\sin \alpha$ ist immer positiv. Also

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist nach einer ganz ähnlichen Betrachtung wie vorher mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta v = -\tfrac{1}{2} \sin\alpha . (2y + \Delta y) \Delta x .$$

II. y negativ.

1. x positiv. In diesem Falle nimmt v offenbar ab und zu, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. Δv ist negativ oder positiv, wenn Δx respective positiv oder negativ ist; die Summe $2y + \Delta y$ der Ordinaten y und $y + \Delta y$ ist negativ, weil diese beiden Ordinaten selbst negativ sind; $\sin\alpha$ ist immer positiv. Also ist nach einer ganz ähnlichen Betrachtung wie oben mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta v = \tfrac{1}{2} \sin\alpha . (2y + \Delta y) \Delta x .$$

2. x negativ. In diesem Falle nimmt v offenbar zu und ab, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. Δv ist positiv oder negativ, wenn Δx respective positiv oder negativ ist; die Summe $2y + \Delta y$ der Ordinaten y und $y + \Delta y$ ist negativ, weil diese Ordinaten selbst negativ sind; $\sin\alpha$ ist immer positiv. Also ist nach einer ganz ähnlichen Betrachtung wie oben mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta v = -\tfrac{1}{2} \sin\alpha . (2y + \Delta y) \Delta x .$$

Im Allgemeinen ist folglich mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta v = \pm \tfrac{1}{2} \sin\alpha . (2y + \Delta y) \Delta x ,$$

oder

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = \pm \sin\alpha . (y + \tfrac{1}{2} \Delta y) ,$$

unter der Bedingung, dass man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist.

Bezeichnet man nun, wie gewöhnlich, die Gränze, welcher $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ sich nähert, wenn Δx sich der Null nähert, durch $Lim \frac{\Delta v}{\Delta x}$; so ist offenbar

$$Lim \frac{\Delta v}{\Delta x} = \pm y \sin\alpha ,$$

d. i. nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \pm y \sin\alpha ;$$

also $\partial v = \pm \sin\alpha . y \partial x$, und folglich

$$v = \pm \sin\alpha \int y \partial x + C ,$$

wo in beiden Fällen die willkührliche Constante C offenbar so bestimmt werden muss, dass v für $x = 0$ verschwindet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dies giebt nach §. 3. auf der Stelle

$$v = \pm \sin\alpha \int_o^x y\,\partial x,$$

indem man immer das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist.

§. 89.

Aufgabe. Es seyen a und b die Abscissen zweier beliebigen Punkte A und B einer Curve; der Coordinatenwinkel sey α, und die Abscisse a sey kleiner als b. Man soll den Flächenraum v der von dem Theile $b - a$ der Abscissenaxe, den beiden Ordinaten der Punkte A und B, und dem zwischen den Punkten A und B liegenden Bogen der Curve begränzten ebenen Figur bestimmen.

Auflösung. 1. Wenn a und b beide positiv sind; so ist, weil nach der Voraussetzung a kleiner als b ist, nach §. 88. offenbar

$$v = \sin\alpha \int_o^b y\,\partial x - \sin\alpha \int_o^a y\,\partial x = \sin\alpha \left\{ \int_o^b y\,\partial x - \int_o^a y\,\partial x \right\},$$

oder nach §. 3.

$$v = \sin\alpha \left\{ \int_a^o y\,\partial x + \int_o^b y\,\partial x \right\},$$

und folglich nach §. 3.

$$v = \sin\alpha \int_a^b y\,\partial x.$$

2. Wenn a und b beide negativ sind; so ist, weil nach der Voraussetzung a kleiner als b ist, nach §. 88. offenbar

$$v = -\sin\alpha \int_o^a y\,\partial x + \sin\alpha \int_o^b y\,\partial x = \sin\alpha \left\{ \int_o^b y\,\partial x - \int_o^a y\,\partial x \right\},$$

oder nach §. 3.

$$v = \sin\alpha \left\{ \int_a^o y\,\partial x + \int_o^b y\,\partial x \right\},$$

und folglich nach §. 3.

$$v = \sin\alpha \int_a^b y\,\partial x.$$

3. Wenn endlich a negativ, b positiv ist; so ist nach §. 88. offenbar

$$v = -\sin\alpha \int_o^a y\,\partial x + \sin\alpha \int_o^b y\,\partial x = \sin\alpha \left\{ \int_o^b y\,\partial x - \int_o^a y\,\partial x \right\},$$

oder nach §. 3.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$v = \sin\alpha \left\{ \int_a^o y\,\partial x + \int_o^b y\,\partial x \right\},$$

und folglich nach §. 3.

$$v = \sin\alpha \int_a^b y\,\partial x.$$

Also ist in allen Fällen

$$v = \sin\alpha \int_a^b y\,\partial x,$$

wenn nur, wie hierbei immer angenommen wird, die Abscisse a kleiner wie die Abscisse b ist.

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist $\alpha = 90^o$, und folglich $v = \int_a^b y\,\partial x$.

§. 90.

Die im vorhergehenden Paragraphen entwickelte allgemeine Formel wollen wir nun auf einige specielle Fälle anwenden.

1. Die Parabel. Die Gleichung der Parabel zwischen rechtwinkligen Coordinaten, den Scheitel als Anfang der Abscissen angenommen, ist bekanntlich $y^2 = px$. Also ist

$$\int y\,\partial x = p^{\frac{1}{2}} \int x^{\frac{1}{2}}\,\partial x = \tfrac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}.$$

Bezeichnet nun v den Flächenraum der von der Abscisse x, der Ordinate y, und dem zwischen dem Scheitel und dem Punkte xy liegenden Bogen der Parabel begränzten ebenen Figur; so ist nach §. 89.

$$v = \int_o^x y\,\partial x = \tfrac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3} x \sqrt{px} = \tfrac{2}{3} xy,$$

und v beträgt also immer zwei Drittheile des unter der Abscisse x und der Ordinate y enthaltenen Rechtecks.

2. Die Ellipse. Die Gleichung der Ellipse zwischen rechtwinkligen Coordinaten, ihren Mittelpunkt als Anfang der Abscissen angenommen, ist bekanntlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

und folglich

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

wo, wenn y, wie im Folgenden geschehen soll, als positiv betrachtet wird, die Quadratwurzel positiv genommen werden muss.

Nehmen wir nun auch die Abscisse x als positiv an, und bezeichnen den Flächenraum der von der Abscisse x, dem posi-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

tiven Theile der Nebenaxe, der Ordinate y, und dem zwischen dem Endpunkte des positiven Theils der Nebenaxe und dem Punkte xy liegenden Bogen der Ellipse begränzten ebenen Figur durch v; so ist nach §. 89.

$$v = \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \partial x.$$

Denken wir uns jetzt, wie Fig. 1. zeigt, über der Axe $AB = 2a$ der Ellipse als Durchmesser einen Kreis beschrieben, und bezeichnen, wenn $CP = x$, $PQ = y$ ist, den Flächenraum des Stücks $CPD'Q'$ dieses Kreises durch v'; so ist, wie leicht erhellen wird, nach §. 89.

$$v' = \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \partial x.$$

Also ist

$$v = \frac{b}{a} v'.$$

Zieht man aber den Radius CQ' des beschriebenen Kreises; so erhellet mittelst einiger bekannten geometrischen Elementarsätze sehr leicht die Richtigkeit der Gleichung

$$v' = \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{a},$$

oder

$$v' = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{a},$$

oder

$$v' = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

wo offenbar keiner der beiden Bogen

$$\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{a} \text{ und } \operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$\frac{1}{2}\pi$ übersteigt.

Folglich ist nach dem Obigen

$$v = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}ab \operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{a}$$

oder

$$v = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}ab \operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Für den elliptischen Quadranten Q ist $x = a$, und folglich, wie aus jeder der beiden vorigen Formeln leicht geschlossen wird, $Q = \frac{1}{4}ab\pi$; also, wenn E den Flächeninhalt der ganzen Ellipse bezeichnet, $E = ab\pi$.

3. Die Hyperbel. Wir wollen zuvörderst die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten betrachten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zu dem Ende nehmen wir in *Fig.* 2. C als Anfang der Coordinaten, CK als den positiven Theil der Abscissenaxe, CL als den positiven Theil der Ordinatenaxe an, und bezeichnen den Asymptotenwinkel durch α.

Ist nun Q ein Punkt der Hyperbel und $CR = x$, $RQ = y$; so ist nach der Theorie der Kegelschnitte bekanntlich, wenn a und b die beiden Halbaxen sind,

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen $\frac{a^2 + b^2}{4} = k^2$ setzen, $xy = k^2$.

Die Coordinaten des Scheitels A sind $CB = AB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = k$. Also ist, wenn wir $ABRQ = v$ setzen, nach §. 89.

$$v = \sin\alpha \int_k^x \frac{k^2\,\partial x}{x} = k^2 \sin\alpha \int_k^x \frac{\partial x}{x},$$

und folglich, wie leicht erhellen wird,

$$v = k^2 \sin\alpha\, l\frac{x}{k},$$

oder

$$v = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2)\sin\alpha\, l\frac{2x}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Bei der gleichseitigen Hyperbel ist $\alpha = 90^\circ$, $a = b$, und folglich

$$v = k^2\, l\frac{x}{k} = \tfrac{1}{2}a^2\, l\frac{x\sqrt{2}}{a}.$$

Für $k = CB = AB = 1$ ist bei der gleichseitigen Hyperbel $v = lx$, d. i. $ABRQ = l.\ CR$. Wegen dieser Beziehung der durch l bezeichneten natürlichen Logarithmen zur gleichseitigen Hyperbel werden dieselben auch hyperbolische Logarithmen (D. §. 56.) genannt.

Zieht man CQ; so hat die Figur CAQ mit $ABRQ$ immer gleichen Flächeninhalt, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Es ist

$$CAQ = CARQ - CRQ,\quad ABRQ = CARQ - ABC.$$

Nach der Gleichung der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist aber $CR.\ RQ = CB.\ AB$, also nach einem bekannten geometrischen Satze $\Delta CRQ = \Delta ABC$, und folglich nach dem Vorhergehenden $CAQ = ABRQ$, wie behauptet wurde. Also ist auch immer

$$CAQ = k^2 \sin\alpha\, l\frac{x}{k} = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2)\sin\alpha\, l\frac{2x}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Nun lässt sich, wenn PQ auf der Hauptaxe der Hyperbel senkrecht steht, auch die Grösse der Figur $APQ = u$ leicht bestimmen. Setzen wir nämlich $AP = x'$, $PQ = y'$; so ist

$$u = CPQ - CAQ = \tfrac{1}{2}(a + x')y' - k^2 \sin\alpha\, l \frac{x}{k}.$$

Ferner ist

$$AB : RQ = CR : BC = x : k,$$
$$AB : RQ = AD : QS = b : PS - y',$$

und folglich

$$x : k = b : PS - y', \quad \frac{x}{k} = \frac{b}{PS - y'}.$$

Weil nun aber offenbar

$$a : b = a + x' : PS, \quad PS = \frac{b(a + x')}{a}$$

ist; so ist

$$\frac{x}{k} = \frac{ab}{b(a + x') - ay'},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$u = \tfrac{1}{2}(a + x')y' - k^2 \sin\alpha\, l \frac{ab}{b(a + x') - ay'}.$$

Aus dieser Gleichung wollen wir nun noch den Winkel α eliminiren. Es ist aber in dem rechtwinkligen Dreiecke CAD

$$\frac{b}{a} = \tang \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha^2}{1 - \sin \frac{1}{2}\alpha^2};$$

also

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \quad \cos \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2},$$

und folglich

$$\sin\alpha = 2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \quad k^2 \sin\alpha = \tfrac{1}{2}ab.$$

Also ist nach dem Obigen

$$u = \tfrac{1}{2}(a + x')y' - \tfrac{1}{2}ab\, l \frac{ab}{b(a + x') - ay'},$$

oder, weil nach der Theorie der Hyperbel $y' = \frac{b}{a}\sqrt{2ax' + x'^2}$ ist,

$$u = \frac{b(a + x')\sqrt{2ax' + x'^2}}{2a} - \tfrac{1}{2}ab\, l \frac{a}{a + x' - \sqrt{2ax' + x'^2}},$$

oder

$$u = \frac{b(a + x')\sqrt{(2a + x')x'}}{2a} - \tfrac{1}{2}ab\, l \frac{a + x' + \sqrt{(2a + x')x'}}{a}.$$

Nimmt man den Mittelpunkt der Hyperbel als Anfang der Coordinaten an, und bezeichnet die Coordinaten des Punktes Q in Bezug auf dieses System durch x, y; so ist $a + x' = x$, $(2a + x')x' = (x + a)(x - a) = x^2 - a^2$, und folglich

$$u = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \tfrac{1}{2}ab\, l \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a},$$

oder auch

$$u = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2} - \tfrac{1}{2}abl\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}},$$

oder auch

$$u = \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{4}abl\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}},$$

oder auch nach der ersten der vorstehenden drei Gleichungen

$$u = \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{2}abl\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

4. Die Cycloide. Nach D. §. 192. ist, wenn in D. *Fig.* 4. AB als Axe, A als Anfang der Abscissen angenommen wird,

$$AP = x = r(\varphi - \sin\varphi),\quad PQ = y = r(1-\cos\varphi),$$

wo φ dieselbe Bedeutung wie a. a. O. hat. Weil nun

$$\partial x = r(1-\cos\varphi)\,\partial\varphi$$

ist; so ist

$$y\,\partial x = r^2(1-\cos\varphi)^2\,\partial\varphi = r^2(1-2\cos\varphi+\cos\varphi^2)\,\partial\varphi,$$

und folglich

$$\int y\,\partial x = r^2\varphi - 2r^2\sin\varphi + r^2\int\cos\varphi^2\,\partial\varphi.$$

Aber

$$\int\cos\varphi^2\,\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\int(1+\cos 2\varphi)\,\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\int\cos 2\varphi\,\partial.2\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi.$$

Also ist

$$\int y\,\partial x = r^2(\tfrac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi) + C.$$

Setzen wir nun $APQ = v$; so ist nach §. 89.

$$v = \int_0^x y\,\partial x = \int_0^\varphi y\,\partial x = r^2(\tfrac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi).$$

Für die ganze Cycloide $ASB = F$ ist $\varphi = 2\pi$, und folglich $F = 3r^2\pi$, so dass also der Flächeninhalt der ganzen Cycloide drei Mal so gross wie der Inhalt des erzeugenden Kreises ist.

5. Die logarithmische Linie. Nach D. §. 194. ist $y = \log x$ die Gleichung der logarithmischen Linie. In D. *Fig.* 5. ist $AE = 1$. Sollen wir nun für $AQ = x$, $PQ = y$, wo also $x > 1$ ist, den Flächeninhalt v von PEQ bestimmen; so haben wir nach §. 89.

$$v = \int_1^x y\,\partial x = \int_1^x \log x\,\partial x.$$

Aber

$$\int\log x\,\partial x = \log x\int\partial x - \int\partial\log x\int\partial x = x\log x - \frac{x}{lb},$$

und folglich

$$v = x \log x - \frac{x}{lb} + \frac{1}{lb}.$$

Setzen wir ferner den ganzen zwischen der logarithmischen Linie und dem Theile AC' der Ordinatenaxe enthaltenen Raum $= u$; so ist nach §. 89.

$$u = \int_0^1 y \partial x = \int_0^1 \log x \partial x,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden, weil nach D. §. 150. die Grösse $x \log x$ für $x = 0$ verschwindet, $u = -\frac{1}{lb}$. Also ist der durch u bezeichnete Raum eine endliche völlig bestimmte Grösse. Das Zeichen vor dem Bruche $\frac{1}{lb}$ kann nach dem, was in §. 87. beigebracht worden ist, nicht auffallen.

B. Rectification.

§. 91.

Erklärung. Die Bestimmung der Länge eines zwischen zwei durch ihre Coordinaten gegebenen Punkten einer auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogenen Curve liegenden Bogens dieser Curve, wobei alle Bogen als positiv betrachtet werden, heisst die Rectification der gegebenen Curve.

Im Folgenden werden wir der Einfachheit wegen das Coordinatensystem immer rechtwinklig annehmen.

§. 92.

Aufgabe. Es seyen x, y die Coordinaten eines beliebigen Punktes einer gegebenen Curve. Man soll die Länge s des zwischen dem Endpunkte der dem Anfange der Coordinaten entsprechenden Ordinate und dem Punkte xy liegenden Bogens dieser Curve bestimmen, vorausgesetzt, dass dieselbe zwischen den beiden in Rede stehenden Punkten stetig ist.

Auflösung. s ist offenbar eine Function von x, und es wird sich also, wenn x sich um Δx verändert, y um Δy, s um Δs verändern. Nach Principien der analytischen Geometrie ist mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta s^2 = (x + \Delta x - x)^2 + (y + \Delta y - y)^2,$$

d. i. $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ oder

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist nun

1. x positiv;

so nimmt s mit x offenbar gleichzeitig zu und ab, d. i. Δs ist mit Δx gleichzeitig positiv und negativ. Also ist mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

die Quadratwurzel immer positiv genommen.

Ist ferner

2. x negativ;

so nimmt s offenbar ab und zu, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. Δs ist negativ und positiv, wenn Δx respective positiv und negativ ist. Also ist in diesem Falle mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = -\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

die Quadratwurzel immer positiv genommen.

Ueberhaupt ist folglich mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

unter der Bedingung, dass man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist.

Also ist, unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähert, offenbar

$$Lim \frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm \sqrt{1 + Lim \left\{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}}.$$

Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten ist aber

$$Lim \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x},$$

und folglich, weil offenbar

$$Lim \left\{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\} = \left(Lim \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

ist,

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}, \quad \partial s = \pm \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

unter der Bedingung, dass man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist *).

---

*) Man vergleiche hiermit die in D. §. 219. gegebene Entwickelung.

Also ist

$$s = \pm \int \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + C,$$

und die Constante C offenbar so zu bestimmen, dass s für $x = 0$ verschwindet.

Diess giebt nach §. 3. auf der Stelle

$$s = \pm \int_0^x \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

indem man immer das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist.

§. 93.

Aufgabe. Es seyen a und b die Abscissen zweier beliebigen Punkte A und B einer zwischen diesen Punkten stetigen Curve, und die Abscisse a sey kleiner als b. Man soll die Länge s des zwischen den beiden Punkten A und B liegenden Bogens dieser Curve bestimmen.

Auflösung. Mittelst einer der in §. 89. gegebenen ganz ähnlichen Auseinandersetzung ergiebt sich aus §. 92. in völliger Allgemeinheit

$$s = \int_a^b \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

§. 94.

Die im vorigen Paragraphen entwickelte allgemeine Formel wollen wir nun bei der Rectification einiger Curven anwenden.

1. Die Parabel. Die Gleichung der Parabel ist $y^2 = px$. Der zwischen ihrem Scheitel und dem Punkte xy, wo natürlich x positiv ist, liegende Bogen sey s; so ist nach §. 93.

$$s = \int_0^x \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

Weil nun

$$2y\frac{\partial y}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y} = \frac{p}{2\sqrt{px}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$$

ist; so ist

$$s = \int_0^x \partial x \sqrt{1 + \frac{p}{4x}}.$$

Für

$$\sqrt{1 + \frac{p}{4x}} = z, \quad x = \frac{p}{4(z^2 - 1)}$$

ist aber

$$\int \partial x \sqrt{1+\frac{p}{4x}} = \int z\,\partial x = zx - \int x\,\partial z = zx - \frac{p}{4}\int \frac{\partial z}{z^2-1}$$

$$= zx - \frac{p}{8}\int \frac{\partial z}{z-1} + \frac{p}{8}\int \frac{\partial z}{z+1} = zx - \frac{p}{8}\, l\,\frac{z-1}{z+1} + C$$

$$= x\sqrt{1+\frac{p}{4x}} - \frac{p}{8}\, l\,\frac{\sqrt{4x+p} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{4x+p} + 2\sqrt{x}} + C,$$

und folglich

$$s = x\sqrt{1+\frac{p}{4x}} - \frac{p}{8}\, l\,\frac{\sqrt{4x+p} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{4x+p} + 2\sqrt{x}}$$

$$= x\sqrt{1+\frac{p}{4x}} + \frac{p}{8}\, l\,\frac{\sqrt{4x+p} + 2\sqrt{x}}{\sqrt{4x+p} - 2\sqrt{x}},$$

oder auch

$$s = x\sqrt{1+\frac{p}{4x}} - \frac{p}{4}\, l\,\frac{\sqrt{4x+p} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{p}}$$

$$= x\sqrt{1+\frac{p}{4x}} + \frac{p}{4}\, l\,\frac{\sqrt{4x+p} + 2\sqrt{x}}{\sqrt{p}}.$$

Für $\frac{1}{4}p = a$, $p = 4a$ wird

$$s = \sqrt{x(a+x)} - al\,\frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{x}}{\sqrt{a}}$$

$$= \sqrt{x(a+x)} + al\,\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{x}}{\sqrt{a}},$$

oder, wenn wir den Radius vector des Punktes xy durch v bezeichnen,

$$s = \sqrt{xv} - al\,\frac{\sqrt{v} - \sqrt{x}}{\sqrt{a}} = \sqrt{xv} + al\,\frac{\sqrt{v} + \sqrt{x}}{\sqrt{a}}.$$

Ist jetzt unter der Voraussetzung, dass $x' > x$ ist, s der zwischen den Punkten xy und $x'y'$, deren Vectoren v und v' seyn mögen, liegende Bogen der Parabel; so ist

$$s = \sqrt{x'v'} - \sqrt{xv} - al\,\frac{\sqrt{v'} - \sqrt{x'}}{\sqrt{v} - \sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x'v'} - \sqrt{xv} + al\,\frac{\sqrt{v'} + \sqrt{x'}}{\sqrt{v} + \sqrt{x}}.$$

2. Die Ellipse. Die Gleichung der Ellipse ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

und folglich

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y};$$

also

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{a^4 y^2} = \frac{a^4 - (a^2 - b^2) x^2}{a^2 (a^2 - x^2)},$$

oder, wenn wir

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2$$

setzen,

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}.$$

Setzen wir nun, was bei der Ellipse offenbar verstattet ist, $\frac{x}{a} = \sin\varphi$, $x = a \sin\varphi$; so ist $\partial x = a \cos\varphi \, \partial\varphi$, und folglich, wie man leicht findet,

$$\partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = a \, \partial\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2}.$$

Unter der Voraussetzung, dass x positiv ist, ist also nach §. 93., wenn man den Bogen s vom Scheitel der kleinen Axe der Ellipse an rechnet,

$$s = \int_0^x \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = a \int_0^\varphi \partial\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2}.$$

Weil nun immer $\varepsilon^2 \sin\varphi^2 < 1$ ist, so kann man die Wurzelgrösse $\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2}$ nach dem Binomischen Lehrsatze in eine convergirende Reihe entwickeln, und dann das in §. 8. bewiesene Theorem anwenden. Dadurch erhält man

$$\frac{s}{a} = \varphi - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \int_0^\varphi \sin\varphi^2 \, \partial\varphi - \frac{1}{2.4} \varepsilon^4 \int_0^\varphi \sin\varphi^4 \, \partial\varphi$$
$$- \frac{1.3}{2.4.6} \varepsilon^6 \int_0^\varphi \sin\varphi^6 \, \partial\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \varepsilon^8 \int_0^\varphi \sin\varphi^8 \, \partial\varphi - \ldots;$$

also nach §. 65. 1.

$$\frac{s}{a} = \varphi$$
$$- \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \left\{\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\sin\varphi \cos\varphi\right\}$$
$$- \frac{1}{2.4}\varepsilon^4 \left\{\frac{1.3}{2.4}\varphi - \left(\frac{3}{2.4}\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin\varphi^3\right)\cos\varphi\right\}$$
$$- \frac{1.3}{2.4.6}\varepsilon^6 \left\{\frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi - \left(\frac{3.5}{2.4.6}\sin\varphi + \frac{5}{4.6}\sin\varphi^3 + \tfrac{1}{6}\sin\varphi^5\right)\cos\varphi\right\}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Für den elliptischen Quadranten Q ist $x = a$, also $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, und folglich

$$Q = \tfrac{1}{2} a\pi \left\{1 - (\tfrac{1}{2})^2 . \frac{\varepsilon^2}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 . \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . \frac{\varepsilon^6}{5} - \ldots\right\}.$$

Ist also P der ganze Umfang der Ellipse, so ist

$$P = 2a\pi\left\{1 - \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}\varepsilon)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2 - \ldots\right\}.$$

3. Die Hyperbel. Die Gleichung der Hyperbel ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

und folglich

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2}.\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b^2 x}{a^2 y};$$

also

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{a^4 y^2} = \frac{a^4 - (a^2 + b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)},$$

oder, wenn wir

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2} = \varepsilon^2$$

setzen,

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}.$$

Setzen wir nun, was bei der Hyperbel offenbar verstattet ist, $\frac{x}{a} = \sec\varphi$, $\frac{a}{x} = \cos\varphi$; so ist $\partial x = \frac{a\sin\varphi}{\cos\varphi^2}\partial\varphi$, und folglich, wie man leicht findet,

$$\partial x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = a\varepsilon\sec\varphi^2\,\partial\varphi\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\cos\varphi^2}.$$

Unter der Voraussetzung, dass x positiv ist, ist also nach §. 93., wenn man den Bogen s vom Scheitel der Hyperbel an rechnet,

$$s = \int_a^x \partial x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = a\varepsilon\int_0^\varphi \sec\varphi^2\,\partial\varphi\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\cos\varphi^2}.$$

Weil nun immer $\frac{1}{\varepsilon^2}\cos\varphi^2 < 1$ ist; so kann man wieder die Wurzelgrösse $\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\cos\varphi^2}$ nach dem Binomischen Lehrsatze in eine convergirende Reihe entwickeln, und dann das in §. 8. bewiesene Theorem anwenden. Dadurch erhält man

$$\frac{s}{a\varepsilon} = \int_0^\varphi \sec\varphi^2\,\partial\varphi - \tfrac{1}{2}.\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varphi \partial\varphi - \frac{1}{2.4}.\frac{1}{\varepsilon^4}\int_0^\varphi \cos\varphi^2\,\partial\varphi$$
$$- \frac{1.3}{2.4.6}.\frac{1}{\varepsilon^6}\int_0^\varphi \cos\varphi^4\,\partial\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\frac{1}{\varepsilon^8}\int_0^\varphi \cos\varphi^6\,\partial\varphi - \ldots;$$

also nach §. 68. 1. und §. 66. 1.

$$\frac{s}{a\varepsilon} = tang\,\varphi - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}\varphi$$

$$-\frac{1}{2.4} \cdot \frac{1}{\varepsilon^4}\left\{\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\cos\varphi \sin\varphi\right\}$$

$$-\frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{1}{\varepsilon^6}\left\{\frac{1.3}{2.4}\varphi + \left(\frac{3}{2.4}\cos\varphi + \tfrac{1}{4}\cos\varphi^3\right)\sin\varphi\right\}$$

$$-\frac{1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{1}{\varepsilon^8}\left\{\frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi + \left(\frac{3.6}{2.4.6}\cos\varphi + \frac{5}{4.6}\cos\varphi^3 + \tfrac{1}{6}\cos\varphi^5\right)\sin\varphi\right\}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. Die Cycloide. Die Gleichungen der Cycloide sind, wenn man in D. *Fig.* 4. AB als Axe, A als Anfang der Abscissen annimmt, nach D. §. 192.

$$AP = x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad PQ = y = r(1 - \cos\varphi);$$

folglich

$$\partial x = r(1 - \cos\varphi)\partial\varphi, \quad \partial y = r\sin\varphi\,\partial\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi};$$

also

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{2}{1 - \cos\varphi},$$

und folglich

$$\partial x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = r\,\partial\varphi\sqrt{2(1 - \cos\varphi)} = 2r\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,\partial\varphi.$$

Rechnet man nun den Bogen s vom Punkte A an; so ist nach §. 93.

$$s = \int_0^x \partial x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 2r\int_0^\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi\,\partial\varphi.$$

Für $\frac{1}{2}\varphi = \psi$ ist $\partial\varphi = 2\partial\psi$, und folglich

$$\int \sin\tfrac{1}{2}\varphi\,\partial\varphi = 2\int \sin\psi\,\partial\psi = -2\cos\psi = -2\cos\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Also ist

$$\int_0^\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi\,\partial\varphi = -2\cos\tfrac{1}{2}\varphi + 2 = 2(1 - \cos\tfrac{1}{2}\varphi) = 4\sin\tfrac{1}{4}\varphi^2,$$

und folglich $s = 8r\sin\frac{1}{4}\varphi^2$.

Für die ganze Cycloide ist $\varphi = 2\pi$, und folglich die Länge der ganzen Cycloide $= 8r$, so dass also die Länge der ganzen Cycloide acht Mal so gross ist wie der Halbmesser des erzeugenden Kreises.

5. Die Neilische Parabel. Diese krumme Linie, deren Gleichung $y'^3 = ax'^2$ ist, ist die erste, welche rectificirt worden ist, von einem englischen Mathematiker Wilhelm Neil, der seine Entdeckung, die viel Aufsehen erregte, im Jahre 1657

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bekannt machte. Verändert man die Coordinaten und setzt $x' = y$, $y' = x$; so wird die Gleichung $y^2 = \frac{1}{a}x^3$, und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}, \quad 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{4a + 9x}{4a}.$$

Also, wenn man den Bogen s vom Anfange der Coordinaten an rechnet, nach §. 93., da x, unter der Voraussetzung, dass a positiv ist, offenbar bloss positiv seyn kann,

$$s = \int_o^x \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_o^x \partial x \sqrt{4a + 9x}.$$

Für $4a + 9x = z$ ist $\partial x = \frac{1}{9}\partial z$, und folglich

$$\int \partial x \sqrt{4a + 9x} = \tfrac{1}{9}\int z^{\frac{1}{2}} \partial z = \frac{2}{27} z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{27}(4a + 9x)^{\frac{3}{2}}.$$

Also ist

$$s = \frac{1}{27\sqrt{a}}\left\{(4a + 9x)^{\frac{3}{2}} - 8a^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{8a}{27}\left\{\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right\}.$$

C. Cubatur der durch Umdrehung ebener Curven um feste Axen entstandenen Körper.

§. 95.

Erklärung. Wir wollen uns jetzt den Körper vorstellen, welcher durch die Umdrehung einer beliebigen Curve um die Abscissenaxe entstanden ist. Sind nun, unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, a und b die Abscissen, a' und b' die entsprechenden Ordinaten zweier Punkte der gegebenen Curve, zwischen denen dieselbe stetig ist; so kann man den cubischen Inhalt des von zwei kreisförmigen Grundflächen begränzten Körpers zu bestimmen verlangen, welcher, vorausgesetzt, dass a kleiner als b ist, durch die Umdrehung der von dem Theile $b - a$ der Abscissenaxe, den beiden Ordinaten a' und b', und dem zwischen den beiden Punkten aa', bb' liegenden Bogen der gegebenen Curve begränzten ebenen Figur um die Abscissenaxe entsteht. Die Auflösung dieser allgemeinen Aufgabe nennt man die Cubatur des durch die Umdrehung der gegebenen Curve um die Abscissenaxe entstandenen Körpers.

§. 96.

Aufgabe. Es seyen x, y die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes einer gegebenen Curve. Man soll den cubischen Inhalt V des von zwei kreisförmigen Grundflächen begränzten Körpers bestimmen, welcher durch die Umdrehung der von der Abscisse x, der dem Anfange der Abscissen

entsprechenden Ordinate, der Ordinate y, und dem zwischen den Endpunkten dieser beiden Ordinaten liegenden Bogen der gegebenen Curve begränzten ebenen Figur um die Abscissenaxe entsteht.

Auflösung. V ist offenbar eine Function von x, und es wird sich also, wenn x sich um Δx verändert, y um Δy, V um ΔV verändern.

Ist nun

1. x positiv;

so nimmt V mit x gleichzeitig zu und ab, d. i. ΔV ist positiv oder negativ, wenn Δx respective positiv oder negativ ist. Also ist mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta V = \tfrac{1}{3}\{y^2 + y(y+\Delta y) + (y+\Delta y)^2\}\pi\Delta x,$$

oder

$$\Delta V = (y^2 + y\Delta y + \tfrac{1}{3}\Delta y^2)\pi\Delta x,$$

oder

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = y^2\pi + \pi y\Delta y + \tfrac{1}{3}\pi\Delta y^2,$$

wie sogleich erhellen wird, wenn man nur überlegt, dass der absolute Werth von ΔV dem körperlichen Inhalte des geraden abgestumpften Kegels, welcher durch die Umdrehung des von Δx, von y und $y+\Delta y$, und der die Endpunkte dieser beiden Ordinaten verbindenden Sehne der gegebenen Curve begränzten Trapeziums um die Abscissenaxe entsteht, offenbar desto näher kommt, je näher Δx der Null kommt.

Ist ferner

2. x negativ;

so nimmt V offenbar ab und zu, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. ΔV ist negativ oder positiv, wenn Δx respective positiv oder negativ ist, und nach einer ganz ähnlichen Betrachtung wie vorher ist folglich mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta V = -\tfrac{1}{3}\{y^2 + y(y+\Delta y) + (y+\Delta y)^2\}\pi\Delta x,$$

oder

$$\Delta V = -(y^2 + y\Delta y + \tfrac{1}{3}\Delta y^2)\pi\Delta x,$$

oder

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = -y^2\pi - \pi y\Delta y - \tfrac{1}{3}\pi\Delta y^2.$$

Ueberhaupt ist also mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \pm y^2\pi \pm \pi y\Delta y \pm \tfrac{1}{3}\pi\Delta y^2,$$

unter der Bedingung, dass man die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist.

Hieraus ergiebt sich nach einer aus dem Obigen hinreichend bekannten Schlussweise

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \pm y^2 \pi, \quad \partial V = \pm \pi y^2 \partial x,$$

und folglich

$$V = \pm \pi \int_0^x y^2 \partial x,$$

immer unter der Bedingung, dass man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist.

§. 97.

Aufgabe. Es seyen a und b die Abscissen zweier beliebigen Punkte A und B einer gegebenen Curve, und a sey kleiner als B. Man soll den cubischen Inhalt V des Körpers bestimmen, welcher durch die Umdrehung der von dem Theile $b - a$ der Abscissenaxe, den Ordinaten der Punkte A und B und dem zwischen diesen beiden Punkten liegenden Bogen der gegebenen Curve begränzten ebenen Figur um die Abscissenaxe entsteht.

Auflösung. Mittelst einer der in §. 89. angestellten ganz ähnlichen Betrachtung ergiebt sich aus §. 96.

$$V = \pi \int_a^b y^2 \partial x.$$

§. 98.

Die allgemeine Formel des vorigen Paragraphen wenden wir nun wieder auf einige Beispiele an.

1. Parabolisches Konoid. Für das Parabolische Konoid ist $y^2 \partial x = px \partial x$, und folglich, wenn wir den Anfang der Coordinaten als Anfangspunkt annehmen,

$$V = p\pi \int_0^x x \partial x = \tfrac{1}{2} p \pi x^2 = \tfrac{1}{2} \pi x y^2.$$

2. Elliptisches und Hyperbolisches Konoid. Nehmen wir den Scheitel der Hauptaxe als Anfang der Coordinaten und als Anfangspunkt des Körpers V an; so ist

$$V = \int_0^x y^2 \partial x = \pi \int_0^x \left(px \mp \frac{px^2}{2a}\right) \partial x,$$

wo das obere Zeichen für das Elliptische, das untere für das Hyperbolische Konoid gilt. Weil nun

$$\int_0^x \left(px \mp \frac{px^2}{2a}\right) \partial x =$$

$$p \int_0^x x \partial x \mp \frac{p}{2a} \int_0^x x^2 \partial x = \tfrac{1}{2} px^2 \mp \frac{px^3}{6a}$$

ist; so ist

$$V = \tfrac{1}{2} p\pi x^2 \left(1 \mp \frac{x}{3a}\right) = \frac{b^2 \pi x^2}{a}\left(1 \mp \frac{x}{3a}\right).$$

Setzt man den cubischen Inhalt des ganzen Elliptischen Konoids $= E$; so ist $E = 2p\,\pi a^2 (1 - \frac{2}{3}) = \frac{2}{3} pa^2 \pi = \frac{4}{3} ab^2 \pi$. Für den körperlichen Inhalt K einer mit dem Halbmesser a beschriebenen Kugel erhält man hieraus $K = \frac{4}{3} a^3 \pi$, ein schon aus den Elementen der Geometrie bekannter Ausdruck.

Der Inhalt eines Segments einer mit dem Halbmesser a beschriebenen Kugel von der Höhe x ergiebt sich aus dem Vorhergehenden $= a\pi x^2 \left(1 - \frac{x}{3a}\right) = \pi x^2 (a - \frac{1}{3} x)$.

Ist P der Inhalt eines zwischen zwei Parallelkreisen, deren Halbmesser ϱ, ϱ' sind, und deren Entfernung von einander e ist, enthaltenen Stücks einer mit dem Halbmesser a beschriebenen Kugel; so ist, wenn $e = x' - x$ ist, nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned} P &= \pi\{x'^2 (a - \tfrac{1}{3} x') - x^2 (a - \tfrac{1}{3} x)\} \\ &= \tfrac{1}{3}\pi\{3a(x'^2 - x^2) - (x'^3 - x^3)\} \\ &= \tfrac{1}{3}\pi (x' - x)\{3a(x' + x) - x'^2 - x'x - x^2\}. \end{aligned}$$

Aber

$$\varrho'^2 = 2ax' - x'^2, \quad \varrho^2 = 2ax - x^2,$$

und folglich

$$\begin{aligned} 3(\varrho^2 + \varrho'^2) + e^2 &= 6a(x' + x) - 3(x'^2 + x^2) + (x' - x)^2 \\ &= 2\{3a(x' + x) - x'^2 - x'x - x^2\}. \end{aligned}$$

Also

$$P = \tfrac{1}{6}\pi e\{3(\varrho^2 + \varrho'^2) + e^2\}.$$

3. Durch Umdrehung einer Cycloide um die Basis erzeugter Körper. Wir nehmen den Punkt A(D. *Fig.* 4.) als Anfang der Coordinaten und als Anfangspunkt des Körpers V an. Dann ist

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi), \quad V = \pi\int_0^x y^2\,\partial x.$$

Weil nun $\partial x = r(1 - \cos\varphi)\,\partial\varphi$ ist; so ist

$$V = r^3 \pi \int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^3\,\partial\varphi.$$

Aber

$$\int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^3\,\partial\varphi =$$

$$\varphi - 3\int_0^\varphi \cos\varphi\,\partial\varphi + 3\int_0^\varphi \cos\varphi^2\,\partial\varphi - \int_0^\varphi \cos\varphi^3\,\partial\varphi,$$

und folglich nach §. 66.

$$V = r^3 \pi (\tfrac{5}{2}\varphi - \tfrac{15}{8}\sin\varphi + \tfrac{3}{2}\sin\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{3}\sin\varphi\cos\varphi^2).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für den durch die Umdrehung der ganzen Cycloide um AB entstandenen Körper ist $\varphi = 2\pi$, und folglich der Inhalt dieses Körpers $= 5r^3\pi^2$.

4. Durch Umdrehung einer Cycloide um ihre Axe erzeugter Körper. Wir nehmen die Axe SC (D. *Fig.* 4.) als Abscissenaxe, den Scheitel S der Cycloide als Anfang der Coordinaten und als Anfangspunkt des Körpers V an. Dann ist $V = \pi\int_o^x y^2\,\partial x$. Nun erhellet aber leicht, dass

$$x = 2r - r(1 - \cos\varphi) = r(1 + \cos\varphi),$$
$$y = r\pi - r(\varphi - \sin\varphi) = r(\pi - \varphi + \sin\varphi),$$

oder, wenn wir $\pi - \varphi = \theta$ setzen,

$$x = r(1 - \cos\theta),\quad y = r(\theta + \sin\theta),$$

und folglich

$$\partial x = r\sin\theta\,\partial\theta,\quad y^2\,\partial x = r^3(\theta + \sin\theta)^2\sin\theta\,\partial\theta$$

ist. Weil nun für $x = 0$ offenbar $\theta = \pi - \pi = 0$ ist; so ist

$$V = r^3\pi\int_o^\theta(\theta + \sin\theta)^2\sin\theta\,\partial\theta.$$

Es ist aber

$$\int_o^\theta(\theta + \sin\theta)^2\sin\theta\,\partial\theta =$$
$$\int_o^\theta\theta^2\sin\theta\,\partial\theta + 2\int_o^\theta\theta\sin\theta^2\,\partial\theta + \int_o^\theta\sin\theta^3\,\partial\theta$$

und nach §. 75. und §. 65.

$$\int_o^\theta\theta^2\sin\theta\,\partial\theta = -\theta^2\cos\theta + 2\theta\sin\theta + 2\cos\theta - 2,$$
$$\int_o^\theta\sin\theta^3\,\partial\theta = -\tfrac{1}{3}\sin\theta^2\cos\theta - \tfrac{2}{3}\cos\theta + \tfrac{2}{3}$$
$$= -\tfrac{1}{6}\sin\theta\sin 2\theta - \tfrac{2}{3}\cos\theta + \tfrac{2}{3}.$$

Weil nun ferner

$$\int\theta\sin\theta^2\,\partial\theta = \tfrac{1}{2}\int\theta(1 - \cos 2\theta)\,\partial\theta = \tfrac{1}{4}\theta^2 - \tfrac{1}{2}\int\theta\cos 2\theta\,\partial\theta$$
$$= \tfrac{1}{4}\theta^2 - \tfrac{1}{2}\theta\int\cos 2\theta\,\partial\theta + \tfrac{1}{2}\int\partial\theta\int\cos 2\theta\,\partial\theta$$
$$= \tfrac{1}{4}\theta^2 - \tfrac{1}{4}\theta\sin 2\theta + \tfrac{1}{4}\int\sin 2\theta\,\partial\theta$$
$$= \tfrac{1}{4}\theta^2 - \tfrac{1}{4}\theta\sin 2\theta - \tfrac{1}{8}\cos 2\theta,$$

und folglich

$$\int_o^\theta\theta\sin\theta^2\,\partial\theta = \tfrac{1}{4}\theta^2 - \tfrac{1}{4}\theta\sin 2\theta - \tfrac{1}{8}\cos 2\theta + \tfrac{1}{8}$$

ist; so ist

$$V = r^3\pi\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}\theta^2(1 - 2\cos\theta) + \tfrac{1}{2}\theta(4\sin\theta - \sin 2\theta)\\ + \tfrac{4}{3}\cos\theta - \tfrac{1}{4}\cos 2\theta - \tfrac{1}{6}\sin\theta\sin 2\theta - \tfrac{13}{12}\end{array}\right\}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um den Inhalt des durch die Umdrehung der ganzen Cycloide um die Axe SC erzeugten Körpers zu finden, kann man sowohl $\varphi = 0$, als auch $\varphi = 2\pi$, d. i. sowohl $\theta = \pi$, als auch $\theta = -\pi$ setzen, und erhält in beiden Fällen den Inhalt des in Rede stehenden Körpers $= r^3 \pi (\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{8}{3})$.

D. Complanation der durch Umdrehung ebener Curven um feste Axen entstandenen Körper.

§. 99.

Erklärung. Unter der Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems seyen a, b die Abscissen und a', b' die Ordinaten zweier beliebigen Punkte A, B einer zwischen diesen beiden Punkten stetigen Curve, und a sey kleiner als b. Denkt man sich nun die von dem Theile $b - a$ der Abscissenaxe, von den Ordinaten a' und b', und von dem Bogen AB der gegebenen Curve begränzte ebene Figur um die Abscissenaxe gedreht; so wird der Bogen AB eine gewisse krumme Fläche beschreiben. Jeder von einem Bogen der gegebenen krummen Linie, dessen Punkte sämmtlich positive Ordinaten haben, beschriebene Theil dieser krummen Fläche soll im Folgenden als positiv; dagegen jeder von einem Bogen der gegebenen krummen Linie, dessen Punkte sämmtlich negative Ordinaten haben, beschriebene Theil als negativ betrachtet werden. Die Summe aller nach dieser Bestimmung mit ihren gehörigen Zeichen genommenen Theile der von AB beschriebenen krummen Fläche heisst der Inhalt oder Flächenraum dieser krummen Fläche, und dessen Bestimmung wird gewöhnlich die Complanation des mit der von AB beschriebenen krummen Fläche zugleich beschriebenen Körpers genannt.

§. 100.

Aufgabe. Es seyen x, y die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes B einer zwischen diesem Punkte und dem Anfange A der Coordinaten stetigen Curve. Man soll den Flächenraum S der krummen Fläche bestimmen, welche von dem Bogen AB beschrieben wird, wenn sich die von der Abscisse x, den Ordinaten der Punkte A und B, und dem Bogen AB begränzte ebene Figur um die Abscissenaxe herum dreht.

Auflösung. Der gesuchte Flächenraum ist offenbar eine Function von x, und es wird sich also, wenn x sich um Δx ändert, y um Δy, S um ΔS ändern.

Sey nun

I. y positiv.

1. x positiv. In diesem Falle nimmt S offenbar zu und ab, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. ΔS ist mit Δx

gleichzeitig positiv und negativ. Also ist mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta S = \pi(2y + \Delta y)\Delta x\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

wie sogleich erhellen wird, wenn man nur überlegt, dass der absolute Werth von ΔS der Seitenfläche des geraden abgestumpften Kegels, welcher entsteht, wenn das von Δx, den Ordinaten y und $y + \Delta y$, und der die Endpunkte dieser Ordinaten verbindenden Sehne der gegebenen Curve begränzte Trapezium sich um die Abscissenaxe herumdreht, offenbar desto näher kommt, je näher Δx der Null kommt.

2. x negativ. In diesem Falle nimmt S offenbar ab und zu, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. ΔS ist negativ oder positiv, wenn Δx respective positiv oder negativ ist, und es ist folglich mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt, nach einer ähnlichen Betrachtung wie vorher,

$$\Delta S = -\pi(2y + \Delta y)\Delta x\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

II. y negativ.

1. x positiv. In diesem Falle nimmt S offenbar ab und zu, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. ΔS ist negativ oder positiv, wenn Δx respective positiv oder negativ ist, und es ist folglich mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta S = \pi(2y + \Delta y)\Delta x\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

2. x negativ. In diesem Falle nimmt S offenbar zu und ab, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. ΔS ist positiv oder negativ, wenn Δx respective positiv oder negativ ist, und es ist folglich mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta S = -\pi(2y + \Delta y)\Delta x\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Im Allgemeinen ist folglich mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta S = \pm\pi(2y + \Delta y)\Delta x\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

oder

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \pm\pi(2y + \Delta y)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

unter der Bedingung, dass man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist. Also ist nach ei-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ner früher schon oft angewandten Schlussweise unter derselben Bedingung wie vorher

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \pm 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

oder

$$\partial S = \pm 2\pi y \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

und folglich

$$S = \pm 2\pi \int_0^x y \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

§. 101.

Aufgabe. Es seyen a und b die Abscissen zweier beliebigen Punkte A und B einer zwischen diesen beiden Punkten stetigen Curve, und a sey kleiner als b. Man soll den Flächenraum S der krummen Fläche bestimmen, welche von dem Bogen AB der gegebenen Curve beschrieben wird, wenn sich die von dem Theile $b - a$ der Abscissenaxe, von den Ordinaten der Punkte A, B, und dem Bogen AB der gegebenen Curve begränzte ebene Figur um die Abscissenaxe herum dreht.

Auflösung. Auf ganz ähnliche Art wie in §. 89. ergiebt sich aus §. 100. ohne Schwierigkeit

$$S = 2\pi \int_a^b y \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

§. 102.

Die im vorigen Paragraphen gefundene allgemeine Formel wollen wir nun wieder auf einige Beispiele anwenden.

1. Ist die gegebene Curve eine durch den Anfang der Coordinaten gehende Gerade, deren Gleichung $y = Ax$ ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{1 + A^2},$$

und folglich

$$S = 2\pi A \sqrt{1 + A^2} . \int_a^b x \partial x = \pi (b^2 - a^2) A \sqrt{1 + A^2}.$$

Für $a = \pm b$ wird $S = 0$, welches nach dem, was in §. 99. bemerkt worden ist, nicht auffallen kann.

2. Parabolisches Konoid. Die Gleichung der Parabel ist $y^2 = px$, und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y},$$

$$y\,\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\partial x\sqrt{p^2+4y^2} = \tfrac{1}{2}\partial x\sqrt{p(p+4x)}.$$

Rechnet man nun S vom Scheitel der erzeugenden Parabel an; so ist

$$S = \pi p^{\frac{1}{2}}\int_0^x \partial x\sqrt{p+4x}.$$

Für $p+4x = u$ ist aber

$$\int\partial x\sqrt{p+4x} = \tfrac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\partial u = \tfrac{1}{6}u^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{6}\sqrt{(p+4x)^3}.$$

Also ist

$$S = \tfrac{1}{6}\pi\{\sqrt{p(p+4x)^3} - p^2\} = \tfrac{4}{3}\pi\{\sqrt{p(x+\tfrac{1}{4}p)^3} - \tfrac{1}{8}p^2\},$$

oder, wenn man den Radius vector des Punktes xy durch v bezeichnet,

$$S = \tfrac{4}{3}\pi\{\sqrt{pv^3} - \tfrac{1}{8}p^2\}.$$

3. Elliptisches Konoid. Nimmt man die kleine Axe der Ellipse als Axe der Abscissen und also auch als Drehungsaxe an; so ist

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 \quad \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

die Gleichung der Ellipse, und folglich

$$\frac{x}{b^2} + \frac{y}{a^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{a^2 x}{b^2 y},$$

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{a^4x^2+b^4y^2}{b^4y^2};$$

$$y\,\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{\partial x}{b^2}\sqrt{a^4x^2+b^4y^2} = \frac{a}{b^2}\partial x\sqrt{b^4+(a^2-b^2)x^2},$$

oder, wenn wir $\frac{b^4}{a^2-b^2} = k^2$ setzen,

$$y\,\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{a}{k}\partial x\sqrt{k^2+x^2}.$$

Also ist nach §. 56. und §. 54. I.

$$\int_0^x y\,\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{a}{2k}\left\{x\sqrt{k^2+x^2} + k^2\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{k^2+x^2}}\right\}$$

$$= \frac{a}{2k}\left\{x\sqrt{k^2+x^2} + k^2 l\frac{x+\sqrt{k^2+x^2}}{k}\right\}.$$

Rechnet man nun die Fläche S vom Scheitel der grossen Axe an; so ist, unter der Voraussetzung, dass x positiv ist,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$S = 2\pi \int_0^{x} y\, \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

und folglich

$$S = \frac{a\pi x}{k}\sqrt{k^2 + x^2} + a\pi k l \frac{x + \sqrt{k^2 + x^2}}{k}.$$

Für $x = b$ erhält man aus dieser Formel, wenn E die halbe Oberfläche des durch die Umdrehung der Ellipse um die kleine Axe erzeugten elliptischen Sphäroids bezeichnet,

$$E = a^2\pi + \frac{ab^2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}\, l\, \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Um die für S gefundene allgemeine Formel zur numerischen Berechnung bequem einzurichten, setze man $tang\,\varphi = \frac{x}{k}$; so ist $\sqrt{k^2 + x^2} = k\, sec\,\varphi$, und

$$\frac{x + \sqrt{k^2 + x^2}}{k} = tang\,\varphi + sec\,\varphi = \frac{1 + sin\,\varphi}{cos\,\varphi} = \frac{1 + cos\,(90^0 - \varphi)}{sin\,(90^0 - \varphi)}$$

$$= \frac{2\, cos\,(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)^2}{2\, sin\,(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)\, cos\,(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)} = cot\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = tang\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Also ist

$$S = ak\pi\,\{tang\,\varphi\, sec\,\varphi + l\, tang\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi)\},$$

oder, wenn M den Modulus der briggischen Logarithmen bezeichnet,

$$S = \frac{ak\pi}{M}\,\{M\, tang\,\varphi\, sec\,\varphi + log\, tang\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi)\}.$$

Diese Formeln sind bei der Berechnung der Oberfläche der Erde von Wichtigkeit, wenn man dieselbe als ein elliptisches Sphäroid betrachtet.

Nimmt man die grosse Axe der Ellipse als Axe der Abscissen, und also auch als Drehungsaxe an; so ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung der Ellipse, und folglich

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^2};$$

$$y\,\partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{\partial x}{a^2}\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2} = \frac{b\,\partial x}{a^2}\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2},$$

oder, wenn wir $\frac{a^4}{a^2 - b^2} = k^2$ setzen,

$$y\,\partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{b\,\partial x}{k}\sqrt{k^2 - x^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Rechnet man nun, unter der Voraussetzung, dass x positiv ist, die Fläche S vom Scheitel der kleinen Axe an; so ist nach §. 56. und §. 54. II.

$$S = \frac{b\pi x}{k}\sqrt{k^2-x^2} + b\pi k\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{k^2-x^2}}$$

$$= \frac{b\pi x}{k}\sqrt{k^2-x^2} + b\pi k\, Arc\,tang\frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}},$$

wo, wie man sich leicht überzeugen wird, für $Arc\,tang\frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}}$ der kleinste Bogen zu nehmen ist, dessen Tangente $\frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}}$ ist.

Da nun

$$Arc\,tang\frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}} = Arc\,sin\frac{\frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x}{k^2-x^2}}} = Arc\,sin\frac{x}{k}$$

ist; so ist

$$S = \frac{b\pi x}{k}\sqrt{k^2-x^2} + b\pi k\, Arc\,sin\frac{x}{k},$$

wo $Arc\,sin\frac{x}{k}$ nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist.

Setzt man $\frac{x}{k} = sin\,\varphi$; so wird

$$S = b\pi k\, sin\,\varphi\, cos\,\varphi + b\pi k\varphi = b\pi k(\varphi + \tfrac{1}{2}sin\,2\varphi).$$

Für $x = a$ erhält man, wenn jetzt E die halbe Oberfläche des durch die Umdrehung der Ellipse um die grosse Axe erzeugten elliptischen Sphäroids bezeichnet,

$$E = b^2\pi + \frac{a^2 b\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}Arc\,sin\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = b^2\pi + \frac{a^2 b\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}Arc\,cos\frac{b}{a}.$$

4. Hyperbolisches Konoid. Nehmen wir die Hauptaxe als Abscissen-, und also auch als Drehungsaxe an; so ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung der Hyperbel, und folglich

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2}.\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b^2 x}{a^2 y},$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^2};$$

$$y\,\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{\partial x}{a^2}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2} = \frac{b\,\partial x}{a^2}\sqrt{(a^2+b^2)x^2 - a^4},$$

oder, wenn wir $\frac{a^4}{a^2+b^2} = k^2$ setzen,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$y\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{b\partial x}{k}\sqrt{x^2-k^2}\,,$$

und folglich, wenn man, unter der Voraussetzung, dass x positiv und natürlich grösser als a ist, die Fläche S vom Scheitel des Zweigs der Hyperbel, in welchem die Abscissen positiv sind, an rechnet:

$$S = 2\pi\int_a^x y\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{2b\pi}{k}\int_a^x \partial x\sqrt{x^2-k^2}\,.$$

Also ist nach §. 56.

$$S = \frac{b\pi}{k}\left\{x\sqrt{x^2-k^2} - a\sqrt{a^2-k^2} - k^2\int_a^x \frac{\partial x}{\sqrt{x^2-k^2}}\right\}$$

$$= \frac{b\pi}{a^2}\left\{x\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4} - a^2b\right\} - b\pi k\int_a^x \frac{\partial x}{\sqrt{x^2-k^2}},$$

und folglich nach §. 54. I.

$$S = \frac{b\pi}{a^2}\left\{x\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4} - a^2b\right\} - b\pi kl\,\frac{x+\sqrt{x^2-k^2}}{a+\sqrt{a^2-k^2}}$$

$$= \frac{b\pi}{a^2}\left\{x\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4} - a^2b\right\}$$

$$-\frac{a^2b\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\,l\,\frac{x\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}}{a(b+\sqrt{a^2+b^2})}\,.$$

5. Durch Umdrehung einer Cycloide um die Basis erzeugter Körper. In diesem Falle ist wie in §. 94. 4.

$$\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 2r\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,\partial\varphi\,,$$

und folglich

$$y\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

$$= 2r^2(\sin\tfrac{1}{2}\varphi - \sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\varphi)\,\partial\varphi = r^2(3\sin\tfrac{1}{2}\varphi - \sin\tfrac{3}{2}\varphi)\,\partial\varphi\,.$$

Rechnet man nun die Fläche S von dem Punkte A (D. *Fig.* 4.) an; so ist

$$S = 2\pi\int_0^x y\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 2r^2\pi\left(3\int_0^\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi\,\partial\varphi - \int_0^\varphi \sin\tfrac{3}{2}\varphi\,\partial\varphi\right).$$

Aber

$$\int_0^\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi\,\partial\varphi = 2(1-\cos\tfrac{1}{2}\varphi),\quad \int_0^\varphi \sin\tfrac{3}{2}\varphi\,\partial\varphi = \tfrac{2}{3}(1-\cos\tfrac{3}{2}\varphi).$$

Also

$$S = 4r^2\pi(\tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{2}\varphi - 3\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{8}{3}).$$

Für die Oberfläche des durch die Umdrehung der ganzen Cycloide um die Basis erzeugten Körpers ist $\varphi = 2\pi$, und diese Oberfläche folglich $= \frac{64}{3}r^2\pi$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6. Durch die Umdrehung einer Cycloide um ihre Axe erzeugter Körper. Wie in §. 98. 4. ist, für $\pi - \varphi = \theta$,

$$x = r(1 - \cos\theta), \quad y = r(\theta + \sin\theta),$$

und folglich, wie man leicht findet,

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{2(1 + \cos\theta)}{\sin\theta^2} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\theta^2};$$

also

$$y\partial x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{r^2(\theta + \sin\theta)\sin\theta\partial\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} = 2r^2(\theta + \sin\theta)\cos\tfrac{1}{2}\theta\partial\theta$$

$$= 2r^2(\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{3}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}\theta)\partial\theta.$$

Rechnet man nun die Fläche S vom Scheitel der Cycloide an; so ist

$$S = 4r^2\pi\left(\int_0^\theta \theta\cos\tfrac{1}{2}\theta\partial\theta + \tfrac{1}{2}\int_0^\theta \sin\tfrac{3}{2}\theta\partial\theta + \tfrac{1}{2}\int_0^\theta \sin\tfrac{1}{2}\theta\partial\theta\right).$$

Aber

$$\int\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta\partial\theta = \theta\int\cos\tfrac{1}{2}\theta\partial\theta - \int\partial\theta\int\cos\tfrac{1}{2}\theta\partial\theta$$

$$= 2\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\int\sin\tfrac{1}{2}6\partial\theta = 2\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta + 4\cos\tfrac{1}{2}\theta.$$

Also

$$S = 4r^2\pi(2\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta + 3\cos\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{2}\theta - \tfrac{8}{3}).$$

Für die Oberfläche des durch die Umdrehung der ganzen Cycloide um ihre Axe erzeugten Körpers ist $\theta = \pi$, und folglich diese Oberfläche $= \frac{4}{3}r^2\pi(6\pi - 8) = \frac{8}{3}r^2\pi(3\pi - 4)$.

Neuntes Kapitel.

Von den bestimmten Integralen.

§. 103.

Lehrsatz. Unter der Voraussetzung, dass die Function X von x zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ stetig ist, denke man sich die Differenz $b - a$ in eine gewisse Anzahl, z. B. n, gleicher Theile getheilt, und bezeichne, für $\frac{b-a}{n} = i$, d. i. $b = a + ni$, die den Werthen

$$a, \quad a + i, \quad a + 2i, \quad a + 3i, \ldots a + ni$$

von x entsprechenden Werthe von X respective durch

$$X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n;$$

so ist

$$\int_a^b X\partial x = X_0 i + X_1 i + X_2 i + X_3 i + \ldots + X_n i$$

oder

$$\int_a^b X\partial x = \{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n\} i,$$

mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist.

Beweis. I. Wir wollen zuerst annehmen, dass die Function X von $x = a$ bis $x = b$ entweder immer zu- oder immer abnimmt, übrigens positiv und negativ seyn kann.

Ist nun zuvörderst $a < b$; so denke man sich

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots.\ X_n$$

als die den Abscissen

$$a,\ a + i,\ a + 2i,\ a + 3i,\ \ldots\ a + ni$$

entsprechenden rechtwinkligen Ordinaten einer stetigen Curve, und bezeichne den Flächenraum der von dieser Curve, den Ordinaten X_0 und X_n, und dem Theile $a + ni - a = b - a$ der Abscissenaxe begränzten ebenen Figur durch v; so ist nach §. 89.

$$v = \int_a^b X\partial x.$$

Nun ziehe man durch die Endpunkte der Ordinaten

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots.\ X_{n-1}$$

bis respective zu den nächst folgenden Ordinaten

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \ldots.\ X_n,$$

und durch die Endpunkte der Ordinaten

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \ldots.\ X_n$$

bis respective zu den nächst vorhergehenden Ordinaten

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots.\ X_{n-1}$$

Parallelen mit der Abscissenaxe, und bezeichne die Summe der auf diese Weise entstehenden Rechtecke im ersten Falle durch Σ, im zweiten durch Σ', indem man, was wohl zu beachten ist, den Flächenraum jedes auf der Seite der positiven Ordinaten liegenden Rechtecks als positiv, dagegen den Flächenraum jedes auf der Seite der negativen Ordinaten liegenden Rechtecks als negativ betrachtet; so ist offenbar

$$\Sigma = \{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_{n-1}\} i$$

und

$$\Sigma' = \{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \ldots + X_n\} i.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist aber, wie leicht erhellen wird, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander immer,

$$\Sigma \gtrless v \lessgtr \Sigma',$$

so dass also v immer zwischen Σ und Σ' liegt.

Da nun

$$\Sigma' - \Sigma = (X_n - X_0)\, i = \frac{(X_n - X_0)(b-a)}{n}$$

ist, und

$$\frac{(X_n - X_0)(b-a)}{n},$$

weil der Zähler dieses Bruchs eine constante Grösse ist, der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so können die Grössen Σ und Σ' einander bis zu jedem beliebigen Grade nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Also kann nach dem Vorhergehenden offenbar auch die Grösse Σ der Grösse $v = \int_a^b X\partial x$ bis zu jedem beliebigen Grade nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt.

Für

$$S = \{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n\}\, i$$

ist

$$S - \Sigma = X_n i = \frac{X_n(b-a)}{n},$$

so dass also offenbar auch die Grössen S und Σ einander beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur n gross genug nimmt.

Daher kann nach dem Vorhergehenden auch die Grösse

$$\{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n\}\, i$$

dem Integral $\int_a^b X\partial x$ beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt, wie bewiesen werden sollte.

Ist ferner $a > b$; so ist nach dem so eben Bewiesenen

$$\int_b^a X\partial x = \left\{X_n + X_{n-1} + X_{n-2} + \ldots + X_1 + X_0\right\}\frac{a-b}{n},$$

mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist.

Weil nun aber

$$\left\{X_n + X_{n-1} + X_{n-2} + \ldots + X_1 + X_0\right\}\frac{a-b}{n}$$

$$= -\left\{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n\right\}\frac{b-a}{n},$$

$$= -\left\{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n\right\} i,$$

und nach §. 3.

$$\int_b^a X\partial x = -\int_a^b X\partial x$$

ist; so ist offenbar auch in diesem Falle

$$\int_a^b X\partial x = \left\{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n\right\} i\,,$$

mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist, wie bewiesen werden sollte.

II. Wenn die Voraussetzung, dass die Function X von $x = a$ bis $x = b$ entweder immer zu-, oder immer abnimmt, nicht erfüllt ist, kann man sich das Intervall $b - a$ offenbar immer in mehrere andere Intervalle $\alpha - a$, $\alpha_1 - \alpha$, $\alpha_2 - \alpha_1$, $\ldots \alpha_k - \alpha_{k-1}$, $b - \alpha_k$ getheilt denken, in deren jedem die Function X entweder immer zu- oder immer abnimmt, woraus, weil nach §. 3.

$$\int_a^b X\partial x =$$

$$\int_a^\alpha X\partial x + \int_\alpha^{\alpha_1} X\partial x + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} X\partial x + \ldots + \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} X\partial x + \int_{\alpha_k}^b X\partial x$$

ist, sich nach I. leicht ergiebt, dass der zu beweisende Satz auch in diesem Falle gilt.

§. 104.

Aufgabe. Den Werth des Integrals

$$\int_o^\infty \frac{x^{m-1}\partial x}{1 + x^n}$$

zu bestimmen, unter der Voraussetzung, dass $m - 1$ kleiner als n ist.

Auflösung. Wenn λ die ungerade Zahl bezeichnet, welche zunächst kleiner als n ist; so ist nach §. 42.

$$\frac{n}{2}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1 + x^n}$$

$$= -\cos\frac{m\pi}{n}\, l\sqrt{1 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + x^2} + \sin\frac{m\pi}{n}\, Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{\pi}{n}}{1 - \cos x\frac{\pi}{n}}$$

$$-\cos\frac{3m\pi}{n}\, l\sqrt{1 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + x^2} + \sin\frac{3m\pi}{n}\, Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{3\pi}{n}}{1 - x\cos\frac{3\pi}{n}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$-\cos\frac{5m\pi}{n}\,l\sqrt{1-2x\cos\frac{5\pi}{n}+x^2}+\sin\frac{5m\pi}{n}\,Arctang\,\frac{x\sin\frac{5\pi}{n}}{1-x\cos\frac{5\pi}{n}}$$

. . . . . .

$$-\cos\frac{\lambda m\pi}{n}\,l\sqrt{1-2x\cos\frac{\lambda\pi}{n}+x^2}+\sin\frac{\lambda m\pi}{n}\,Arctang\,\frac{x\sin\frac{\lambda\pi}{n}}{1-x\cos\frac{\lambda\pi}{n}},$$

wenn man nur in dem Falle eines ungeraden n der Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens noch das Glied

$$(-1)^{m-1}.\tfrac{1}{4}l.(1+x)^2$$

beifügt.

Für $x=0$ verschwinden offenbar, n mag gerade oder ungerade seyn, alle Glieder der Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens.

Weil nun, unter der Voraussetzung, dass x positiv ist,

$$l\sqrt{1-2x\cos\frac{k\pi}{n}+x^2}=lx+l\sqrt{1-\frac{2}{x}\cos\frac{k\pi}{n}+\frac{1}{x^2}},$$

und

$$\tfrac{1}{4}l.(1+x)^2=\tfrac{1}{2}l(1+x)=\tfrac{1}{2}lx+\tfrac{1}{2}l\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

ist; so ist für $x=\infty$ offenbar

$$l\sqrt{1-2x\cos\frac{k\pi}{n}+x^2}=lx,\quad \tfrac{1}{4}l.(1+x)^2=\tfrac{1}{2}lx,$$

und folglich die Summe der logarithmischen Theile in obiger Gleichung für $x=\infty$

$$-\left\{\cos\frac{m\pi}{n}+\cos\frac{3m\pi}{n}+\cos\frac{5m\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{\lambda m\pi}{n}\right\}lx$$

oder

$$-\left\{\cos\frac{m\pi}{n}+\cos\frac{3m\pi}{n}+\cos\frac{5m\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{\lambda m\pi}{n}\right\}lx+(-1)^{m-1}.\tfrac{1}{2}lx,$$

jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Setzen wir aber

$$S=\cos\frac{m\pi}{n}+\cos\frac{3m\pi}{n}+\cos\frac{5m\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{\lambda m\pi}{n};$$

so ist

$$2S\sin\frac{m\pi}{n}$$

$$=\sin\frac{2m\pi}{n}+\sin\frac{4m\pi}{n}+\sin\frac{6m\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(\lambda-1)m\pi}{n}+\sin\frac{(\lambda+1)m\pi}{n}$$

$$-\sin\frac{2m\pi}{n}-\sin\frac{4m\pi}{n}-\sin\frac{6m\pi}{n}-\ldots-\sin\frac{(\lambda-1)m\pi}{n}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist nun n gerade, so ist $\lambda = n - 1$, $\lambda + 1 = n$, also $\sin\frac{(\lambda+1)m\pi}{n} = 0$, und folglich $S = 0$; also

$$-\left\{\cos\frac{m\pi}{n} + \cos\frac{3m\pi}{n} + \cos\frac{5m\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{\lambda m\pi}{n}\right\} lx = 0.$$

Ist dagegen n ungerade, so ist $\lambda = n - 2$, $\lambda + 1 = n - 1$, und folglich

$$2S\sin\frac{m\pi}{n} = \sin\left(m\pi - \frac{m\pi}{n}\right) = -\cos m\pi \sin\frac{m\pi}{n} = (-1)^{m-1}\sin\frac{m\pi}{n},$$

d. i. $S = (-1)^{m-1}.\frac{1}{2}$. Also ist in diesem Falle

$$-\left\{\cos\frac{m\pi}{n} + \cos\frac{3m\pi}{n} + \cos\frac{5m\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{\lambda m\pi}{n}\right\} lx + (-1)^{m-1}.\tfrac{1}{2}lx$$
$$= -(-1)^{m-1}.\tfrac{1}{2}lx + (-1)^{m-1}.\tfrac{1}{2}lx = 0,$$

und man sieht also, dass, n mag gerade oder ungerade seyn, die Summe der logarithmischen Theile in unserer obigen Hauptgleichung für $x = \infty$ verschwindet.

Weil ferner

$$Arc\,tang\frac{x\sin\frac{k\pi}{n}}{1 - x\cos\frac{k\pi}{n}} = Arc\,tang\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\frac{1}{x} - \cos\frac{k\pi}{n}}$$

ist; so ist für $x = \infty$ offenbar

$$Arc\,tang\frac{x\sin\frac{k\pi}{n}}{1 - x\cos\frac{k\pi}{n}} = Arc\,tang\left(-\tan g\frac{k\pi}{n}\right) = \pi - \frac{k\pi}{n},$$

und folglich für $x = \infty$ die Summe der die Kreisbogen enthaltenden Theile in unserer obigen Hauptgleichung, wenn wir von jetzt an der Kürze wegen $\frac{\pi}{n} = \theta$, $\pi = n\theta$ setzen,

$$(\pi - \theta)\sin m\theta + (\pi - 3\theta)\sin 3m\theta + (\pi - 5\theta)\sin 5m\theta + \ldots$$
$$\ldots + (\pi - \lambda\theta)\sin\lambda m\theta$$
$$= \pi\{\sin m\theta + \sin 3m\theta + \sin 5m\theta + \ldots + \sin\lambda m\theta\}$$
$$-\frac{\pi}{n}\{\sin m\theta + 3\sin 3m\theta + 5\sin 5m\theta + \ldots + \lambda\sin\lambda m\theta\}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\cos m\theta + \cos 3m\theta + \cos 5m\theta + \ldots + \cos\lambda m\theta = \frac{\sin(\lambda+1)m\theta}{2\sin m\theta}$$

ist; so ist, wenn man diese Gleichung in Bezug auf θ als veränderliche Grösse differentiirt,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$- m\{\sin m\theta + 3\sin 3m\theta + 5\sin 5m\theta + \ldots + \lambda\sin\lambda m\theta\}$$
$$= \frac{(\lambda+1)m\cos(\lambda+1)m\theta\sin m\theta - m\sin(\lambda+1)m\theta\cos m\theta}{2\sin m\theta^2}$$
$$= \frac{\lambda m\cos(\lambda+1)m\theta}{2\sin m\theta} - \frac{m\sin\lambda m\theta}{2\sin m\theta^2},$$

und folglich

$$\sin m\theta + 3\sin 3m\theta + 5\sin 5m\theta + \ldots + \lambda\sin\lambda m\theta$$
$$= \frac{\sin\lambda m\theta}{2\sin m\theta^2} - \frac{\lambda\cos(\lambda+1)m\theta}{2\sin m\theta}.$$

Für

$$\Sigma = \sin m\theta + \sin 3m\theta + \sin 5m\theta + \ldots + \sin\lambda m\theta$$

ist ferner

$$2\Sigma\sin m\theta$$
$$= 1 - \cos 2m\theta - \cos 4m\theta - \ldots - \cos(\lambda-1)m\theta - \cos(\lambda+1)m\theta$$
$$+ \cos 2m\theta + \cos 4m\theta + \ldots + \cos(\lambda-1)m\theta$$

und folglich

$$\Sigma = \frac{1-\cos(\lambda+1)m\theta}{2\sin m\theta}.$$

Ist nun n eine gerade Zahl, so ist $\lambda = n-1$, und folglich für $x = \infty$ die Summe der die Kreisbogen enthaltenden Theile in unserer obigen Hauptgleichung

$$= \frac{\pi(1-\cos mn\theta)}{2\sin m\theta} - \frac{\pi}{n}\left\{\frac{\sin m(n-1)\theta}{2\sin m\theta^2} - \frac{(n-1)\cos mn\theta}{2\sin m\theta}\right\}$$
$$= \frac{\pi(1-\cos m\pi)}{2\sin m\theta} - \frac{\pi}{n}\left\{\frac{\sin(m\pi - m\theta)}{2\sin m\theta^2} - \frac{(n-1)\cos m\pi}{2\sin m\theta}\right\}$$
$$= \frac{\pi(1-\cos m\pi)}{2\sin m\theta} - \frac{\pi}{n}\left\{-\frac{\cos m\pi}{2\sin m\theta} - \frac{(n-1)\cos m\pi}{2\sin m\theta}\right\}$$
$$= \frac{\pi(1-\cos m\pi)}{2\sin m\theta} + \frac{\pi\cos m\pi}{2\sin m\theta} = \frac{\pi}{2\sin m\theta} = \frac{\pi}{2\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Ist dagegen n eine ungerade Zahl, so ist $\lambda = n-2$, und folglich für $x = \infty$ die Summe der die Kreisbogen enthaltenden Theile in unserer obigen Hauptgleichung

$$= \frac{\pi\{1-\cos m(n-1)\theta\}}{2\sin m\theta} - \frac{\pi}{n}\left\{\frac{\sin m(n-2)\theta}{2\sin m\theta^2} - \frac{(n-2)\cos m(n-1)\theta}{2\sin m\theta}\right\}$$
$$= \frac{\pi(1-\cos m\pi\cos m\theta)}{2\sin m\theta} - \frac{\pi}{n}\left\{\frac{\sin m(n-1)\theta\cos m\theta}{2\sin m\theta^2} - \frac{(n-1)\cos m(n-1)\theta}{2\sin m\theta}\right\}\text{*)}$$
$$= \frac{\pi(1-\cos m\pi\cos m\theta)}{2\sin m\theta} - \frac{\pi}{n}\left\{-\frac{\cos m\pi\cos m\theta}{2\sin m\theta} - \frac{(n-1)\cos m\pi\cos m\theta}{2\sin m\theta}\right\}$$
$$= \frac{\pi(1-\cos m\pi\cos m\theta)}{2\sin m\theta} + \frac{\pi\cos m\pi\cos m\theta}{2\sin m\theta} = \frac{\pi}{2\sin m\theta} = \frac{\pi}{2\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

---

*) Es ist hierbei $\sin m(n-2)\theta = \sin\{m(n-1)-m\}\theta$ gesetzt worden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für $x = \infty$ ist also, n mag gerade oder ungerade seyn, die Summe der die Kreisbogen enthaltenden Theile in unserer obigen Hauptgleichung immer $= \frac{\pi}{2 \sin \frac{m\pi}{n}}$, und folglich, wie sich nun aus dem Vorhergehenden unmittelbar ergiebt,

$$\frac{n}{2} \int_0^\infty \frac{x^{m-1} \partial x}{1 + x^n} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{m\pi}{n}},$$

also

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1} \partial x}{1 + x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}},$$

das gesuchte Integral demnach hierdurch gefunden.

§. 105.

Aufgabe. Das bestimmte Integral

$$\int_0^1 x^{m-1} (1 - x^n)^{\frac{p}{n} - 1} \partial x,$$

wo m, n, p positive ganze Zahlen seyn sollen, und $m > 0$ angenommen wird, durch ein Product mit unendlich vielen Factoren darzustellen.

Auflösung. Für $1 - x^n = X$ ist nach §. 28. III.

$$\int x^{m-1} X^{\frac{p}{n} - 1} \partial x = \frac{x^m X^{\frac{p}{n}}}{m} + \frac{m+p}{m} \int x^{m+n-1} X^{\frac{p}{n} - 1} \partial x,$$

und folglich

$$\int_0^1 x^{m-1} X^{\frac{p}{n} - 1} \partial x = \frac{m+p}{m} \int_0^1 x^{m+n-1} X^{\frac{p}{n} - 1} \partial x.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man

$$\int_0^1 x^{m-1} X^{\frac{p}{n} - 1} \partial x =$$

$$\frac{m+p}{m} \cdot \frac{m+p+n}{m+n} \cdot \frac{m+p+2n}{m+2n} \cdots \frac{m+p+in}{m+in} \int_0^1 x^{m+(i+1)n-1} X^{\frac{p}{n} - 1} \partial x,$$

und ganz eben so, wenn auch k eine positive ganze Zahl bezeichnet, die grösser als Null ist,

$$\int_0^1 x^{k-1} X^{\frac{p}{n} - 1} \partial x$$

$$= \frac{k+p}{k} \cdot \frac{k+p+n}{k+n} \cdot \frac{k+p+2n}{k+2n} \cdots \frac{k+p+in}{k+in} \int_0^1 x^{k+(i+1)n-1} X^{\frac{p}{n} - 1} \partial x.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzen wir nun $(i+1)n = \theta$, $x^{m+\theta} = t$; so ist

$$x^{m+\theta-1}\partial x = \frac{1}{m+\theta}\partial t, \quad x^{k+\theta-1}\partial x = \frac{1}{m+\theta} t^{\frac{k-m}{m+\theta}}\partial t,$$

und folglich, wenn wir

$$(1 - t^{\frac{n}{m+\theta}})^{\frac{p}{n}-1} = T$$

setzen, da für $x = 0$, $x = 1$ respective $t = 0$, $t = 1$ ist,

$$\int_0^1 x^{m+(i+1)n-1} X^{\frac{p}{n}-1}\partial x$$

$$= \int_0^1 x^{m+\theta-1} X^{\frac{p}{n}-1}\partial x = \frac{1}{m+\theta}\int_0^1 T\partial t,$$

$$\int_0^1 x^{k+(i+1)n-1} X^{\frac{p}{n}-1}\partial x$$

$$= \int_0^1 x^{k+\theta-1} X^{\frac{p}{n}-1}\partial x = \frac{1}{m+\theta}\int_0^1 T t^{\frac{k-m}{m+\theta}}\partial t;$$

also

$$\frac{\int_0^1 x^{m+(i+1)n-1} X^{\frac{p}{n}-1}\partial x}{\int_0^1 x^{k+(i+1)n-1} X^{\frac{p}{n}-1}\partial x} = \frac{\int_0^1 T\partial t}{\int_0^1 T t^{\frac{k-m}{m+\theta}}\partial t}.$$

Wenn aber i, und folglich θ wächst; so nähert sich die Potenz $t^{\frac{k-m}{m+\theta}}$ immer mehr und mehr der Einheit, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur i gross genug werden lässt. Also nähert sich, wie sehr leicht aus §. 103. erhellet, wenn i wächst, das Integral $\int_0^1 T t^{\frac{k+m}{m+\theta}}\partial t$ immer mehr und mehr dem Integrale $\int_0^1 T\partial t$, und kann demselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur i gross genug werden lässt. Folglich nähert sich der Bruch

$$\frac{\int_0^1 x^{m+(i+1)n-1} X^{\frac{p}{n}-1}\partial x}{\int_0^1 x^{k+(i+1)n-1} X^{\frac{p}{n}-1}\partial x},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn i wächst, der Einheit, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur i gross genug werden lässt.

Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{\int_0^1 x^{m-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}{\int_0^1 x^{k-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}$$

$$= \frac{\frac{m+p}{m} \cdot \frac{m+p+n}{m+n} \cdot \frac{m+p+2n}{m+2n} \cdots \frac{m+p+in}{m+in}}{\frac{k+p}{k} \cdot \frac{k+p+n}{k+n} \cdot \frac{k+p+2n}{k+2n} \cdots \frac{k+p+in}{k+in}} \cdot \frac{\int_0^1 x^{m+(i+1)n-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}{\int_0^1 x^{k+(i+1)n-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}$$

ist; so ist mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser i ist, und mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, wenn man nur i gross genug nimmt,

$$\frac{\int_0^1 x^{m-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}{\int_0^1 x^{k-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x} = \frac{\frac{m+p}{m} \cdot \frac{m+p+n}{m+n} \cdot \frac{m+p+2n}{m+2n} \cdots \frac{m+p+in}{m+in}}{\frac{k+p}{k} \cdot \frac{k+p+n}{k+n} \cdot \frac{k+p+2n}{k+2n} \cdots \frac{k+p+in}{k+in}}$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{k(m+p)}{m+n} \cdot \frac{(k+n)(m+p+n)}{(k+p)(m+2n)} \cdot \frac{(k+2n)(m+p+2n)}{(k+p+n)(m+3n)} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \frac{(k+(i-1)n)(m+p+(i-1)n)}{(k+p+(i-2)n)(m+in)} \cdot \frac{(k+in)(m+p+in)}{(k+p+(i-1)n)(k+p+in)}$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{k(m+p)}{m+n} \cdot \frac{(k+n)(m+p+n)}{(k+p)(m+2n)} \cdot \frac{(k+2n)(m+p+2n)}{(k+p+n)(m+3n)} \cdots\cdots$$

$$\cdots \frac{(k+in)(m+p+in)}{(k+p+(i-1)n)(m+p+(i+1)n)} \cdot \frac{m+p+(i+1)n}{k+p+in}.$$

Da sich aber der Bruch

$$\frac{m+p+(i+1)n}{k+p+in} = \frac{\frac{m+p+n}{i} + n}{\frac{k+p}{i} + n},$$

wenn i wächst, dem Bruche $\frac{n}{n} = 1$ offenbar immer mehr und mehr nähert, und demselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur i gross genug werden lässt; so ist mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser i ist, und mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, wenn man nur i gross genug nimmt,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{\int_0^1 x^{m-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}{\int_0^1 x^{k-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x} = \frac{1}{m} \cdot \frac{k(m+p)}{m+n} \cdot \frac{(k+n)(m+p+n)}{(k+p)(m+2n)} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \frac{(k+in)(m+p+in)}{(k+p+(i-n)n)(m+p+(i+1)n)},$$

d. h. es ist

$$\frac{\int_0^1 x^{m-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}{\int_0^1 x^{k-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{k(m+p)}{m+n} \cdot \frac{(k+n)(m+p+n)}{(k+p)(m+2n)} \cdot \frac{(k+2n)(m+p+2n)}{(k+p+n)(m+3n)} \cdots\cdots$$

Nach §. 28. IV. ist nun

$$\int x^{n-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x = -\frac{1}{p} X^{\frac{p}{n}}, \quad \int_0^1 x^{n-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x = \frac{1}{p}.$$

Also ist, wenn wir im Vorhergehenden $k = n$ setzen,

$$p \int_0^1 x^{m-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{n(m+p)}{m+n} \cdot \frac{2n(m+p+n)}{(p+n)(m+2n)} \cdot \frac{3n(m+p+2n)}{(p+2n)(m+3n)} \cdots\cdots,$$

$$\int_0^1 x^{m-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{n(m+p)}{p(m+n)} \cdot \frac{2n(m+p+n)}{(p+n)(m+2n)} \cdot \frac{3n(m+p+2n)}{(p+2n)(m+3n)} \cdots\cdots$$

§. 106.

Setzt man in der so eben gefundenen Gleichung $p = n - m$; so erhält man

$$\int_0^1 x^{m-1} X^{-\frac{m}{n}} \partial x$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{n^2}{n^2 - m^2} \cdot \frac{4n^2}{4n^2 - m^2} \cdot \frac{9n^2}{9n^2 - m^2} \cdot \frac{16n^2}{16n^2 - m^2} \cdots\cdots$$

Für $x X^{-\frac{1}{n}} = x(1 - x^n)^{-\frac{1}{n}} = z$ ist aber

$$\frac{x^n}{1 - x^n} = z^n, \quad x^n = \frac{z^n}{1 + z^n}, \quad x^{n-1} \partial x = \frac{z^{n-1} \partial z}{(1 + z^n)^2},$$

und folglich

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial z}{z(1 + z^n)}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Weil nun $x^m X^{-\frac{m}{n}} = z^m$ ist; so ist

$$x^{m-1} X^{-\frac{m}{n}} \partial x = \frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n},$$

und folglich, weil für $x = 0$, $x = 1$ respective $z = 0$, $z = \infty$ ist,

$$\int_0^1 x^{m-1} X^{-\frac{m}{n}} \partial x = \int_0^\infty \frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n}.$$

Nach §. 104. ist aber, unter der Voraussetzung, dass $m-1<n$, d. i. m nicht grösser als n ist,

$$\int_0^\infty \frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden für $m \overline{\overline{<}} n$

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{n^2}{n^2-m^2} \cdot \frac{4n^2}{4n^2-m^2} \cdot \frac{9n^2}{9n^2-m^2} \cdot \frac{16n^2}{16n^2-m^2} \cdots\cdots$$

oder

$$1.\ \sin\frac{m\pi}{n} = \frac{m\pi}{n}\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)\cdots$$

Für $n=2m$ ergiebt sich heraus

$$1 = \tfrac{1}{2}\pi(1-\tfrac{1}{4})(1-\tfrac{1}{16})(1-\tfrac{1}{36})(1-\tfrac{1}{64})(1-\tfrac{1}{100})\cdots\cdots$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{15}{16} \cdot \tfrac{35}{36} \cdot \tfrac{63}{64} \cdot \tfrac{99}{100} \cdots\cdots,$$

und folglich

$$2.\ \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{16}{15} \cdot \tfrac{36}{35} \cdot \tfrac{64}{63} \cdot \tfrac{100}{99} \cdots\cdots$$
$$= \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{6}{5} \cdot \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{8}{7} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{10}{9} \cdot \tfrac{10}{11} \cdots\cdots$$

oder

$$3.\ \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{6}{5} \cdot \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{8}{7} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{10}{9} \cdot \tfrac{10}{11} \cdot \tfrac{12}{11} \cdots\cdots$$

Dieser merkwürdige Ausdruck für $\frac{1}{4}\pi$ ist von dem berühmten brittischen Geometer Johann Wallis gefunden worden, und wird daher jetzt gewöhnlich noch nach demselben benannt.

Wenn m nicht grösser als n, also $2m$ nicht grösser als $2n$ ist; so ist der absolute Werth von $n-2m$ nicht grösser als $2n$. Weil nun die Gleichung 1. offenbar auch für ein negatives m, dessen absoluter Werth nur nicht grösser als n ist, gilt; so kann man in dieser Gleichung $n-2m$ für m, $2n$ für n setzen. Dadurch erhält man

$$\cos\frac{m\pi}{n} = \frac{(n-2m)\pi}{2n} \cdot \frac{n+2m}{2n} \cdot \frac{3n-2m}{2n} \cdot \frac{3n+2m}{4n} \cdot \frac{5n-2m}{4n} \cdot \frac{5-2m}{6n} \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{6} \cdot \tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{9}{8} \cdot \tfrac{9}{10} \cdots\cdots$$
$$\times \left(1-\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{25n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{49n^2}\right)\cdots,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und folglich nach 2.

4. $\cos\frac{m\pi}{n} = \left(1 - \frac{4m^2}{n^2}\right)\left(1 - \frac{4m^2}{9n^2}\right)\left(1 - \frac{4m^2}{25n^2}\right)\left(1 - \frac{4m^2}{47n^2}\right)\cdots$

für $m \gtreqless n$.

Die Formeln 1., 4. und 2. leisten bei der Berechnung der Logarithmen der Sinus und Cosinus und des Logarithmus von π die vortrefflichsten Dienste. Durch Division der Formeln 1. und 4. würde man auch leicht ähnliche Ausdrücke für die Tangenten und Cotangenten entwickeln können.

§. 107.

Ueber die wichtige Function Gamma.

1. Das bestimmte Integral $\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x$ pflegt man, unter der Voraussetzung, dass μ positiv ist, durch $\Gamma(\mu)$ zu bezeichnen, so dass also

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x = \Gamma(\mu)$$

ist.

2. Für $e^{-x} = z$ ist $x = l\frac{1}{z}$, $-e^{-x}\partial x = \partial z$, und folglich

$$x^{\mu-1} e^{-x} \partial x = -\left(l\frac{1}{z}\right)^{\mu-1} \partial z.$$

Weil nun für $x = 0$, $x = \infty$ respective $z = 1$, $z = 0$ ist; so ist

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x = -\int_1^0 \left(l\frac{1}{z}\right)^{\mu-1} \partial z = \int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} \partial x \quad (\S.\ 3.)$$

und folglich

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x = \int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} \partial x.$$

3. Unter der Voraussetzung, dass a eine positive Grösse ist, sey $ax = z$; so ist, weil für $x = 0$, $x = \infty$ respective $z = 0$, $z = \infty$ ist,

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax} \partial x = \frac{1}{a^\mu}\int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-z} \partial z = \frac{1}{a^\mu}\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x,$$

d. i.

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax} \partial x = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}.$$

4. Weil $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \partial x$, und überhaupt $\int e^{-x} \partial x = -e^{-x} + C$ ist; so ist offenbar $\Gamma(1) = 0 - (-1) = 1$.

5. Nach §. 27. ist

$$\int x^{n-1} e^{-x} \partial x = e^{-x} \int x^{n-1} \partial x + \int e^{-x} \partial x \int x^{n-1} \partial x$$
$$= \frac{x^n e^{-x}}{n} + \frac{1}{n}\int x^n e^{-x} \partial x,$$

wobei wir annehmen wollen, dass n eine positive ganze Zahl und nicht $= 0$ ist. Also ist

$$\int x^n e^{-x} \partial x = - x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x} \partial x .$$

Für $x = 0$ verschwindet das Product $x^n e^{-x}$. Um nun ferner den Werth dieses Products für $x = \infty$ zu bestimmen, setze man $x^n = f(x)$, $e^x = \varphi(x)$; so ist

$$f^{(n)}(x) = 1.2.3 \ldots n, \quad \varphi^{(n)}(x) = e^x,$$

und das in Rede stehende Product verschwindet also nach D. §. 149. für $x = \infty$ ebenfalls. Also ist wegen der obigen Gleichung

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} \partial x = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \partial x$$

oder $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, und folglich mittelst wiederholter Anwendung dieser Relation

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \ldots 3.2.1\Gamma(1);$$

also nach 4. für jedes positive ganze n, welches > 0 ist,

$$\Gamma(n+1) = 1.2.3.4 \ldots n .$$

Nach 3. ist folglich für jedes positive ganze n, welches > 0 ist,

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \partial x = \frac{1.2.3.4 \ldots n}{a^{n+1}} .$$

Für $n = 0$ ist, wie leicht erhellet,

$$\int_0^\infty e^{-ax} \partial x = \frac{1}{a} .$$

6. Bevor wir in der Betrachtung der Function Gamma weiter fortschreiten können, müssen wir erst ein Paar allgemeine Sätze vorausschicken, die in der Theorie der bestimmten Integrale überhaupt von Wichtigkeit sind.

Sey nämlich, indem $f(x, y)$ eine beliebige Function der beiden von einander unabhängigen veränderlichen Grössen x und y bezeichnet,

$$\int_a^b f(x, y) \partial x = \varphi(y) ,$$

wo bei der Integration bloss x als veränderlich betrachtet wird; so ist, indem man nun y sich um Δy verändern lässt,

$$\Delta \int_a^b f(x, y) \partial x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y) .$$

Weil aber

$$\Delta f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

ist; so ist

$$\int_a^b \Delta f(x,y).\partial x = \int_a^b f(x,\, y+\Delta y).\partial x - \int_a^b f(x,y)\,\partial x$$
$$= \varphi(y+\Delta y) - \varphi(y),$$

indem nämlich, so wie

$$\int_a^b f(x,y)\,\partial x = \varphi(y)$$

ist, natürlich auch

$$\int_a^b f(x,\, y+\Delta y).\partial x = \varphi(y+\Delta y)$$

ist.

Also ist

$$\Delta \int_a^b f(x,y)\,\partial x = \int_a^b \Delta f(x,y).\partial x,$$

und folglich

$$\frac{\Delta}{\Delta y}\int_a^b f(x,y)\,\partial x = \frac{1}{\Delta y}\int_a^b \Delta f(x,y).\partial x = \int_a^b \frac{\Delta f(x,y)}{\Delta y}\,\partial x.$$

Also ist, indem man zu den Gränzen übergeht, jederzeit

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x,y).\partial x = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\partial x.$$

7. Hieraus lässt sich ohne Schwierigkeit herleiten, dass immer

$$\int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b f(x,y)\,\partial x = \int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x,y)\,\partial y$$

ist.

Sey nämlich überhaupt

$$\int f(x,y)\,\partial x = \varphi(x,y), \quad \int \varphi(x,y)\,\partial y = \psi(x,y);$$

so ist

$$\int_a^b f(x,y)\,\partial x = \varphi(b,y) - \varphi(a,y),$$

und folglich

$$\int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b f(x,y)\,\partial x = \int_\alpha^\beta \varphi(b,y)\,\partial y - \int_\alpha^\beta \varphi(a,y)\,\partial y$$
$$= \psi(b,\beta) - \psi(b,\alpha) - \psi(a,\beta) + \psi(a,\alpha).$$

Nach 6. ist aber

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_\alpha^\beta \varphi(x,y)\,\partial y = \int_\alpha^\beta \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x}\,\partial y = \int_\alpha^\beta f(x,y)\,\partial y,$$

und folglich

$$\partial x \int_\alpha^\beta f(x,y)\,\partial y = \partial \int_\alpha^\beta \varphi(x,y)\,\partial y.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Weil nun

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x,y)\,\partial y = \psi(x,\beta) - \psi(x,\alpha)$$

ist; so ist

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x,y)\,\partial y = \int_a^b \partial\psi(x,\beta) - \int_a^b \partial\psi(x,\alpha)$$
$$= \psi(b,\beta) - \psi(a,\beta) - \psi(b,\alpha) + \psi(a,\alpha).$$

Vergleicht man dies mit dem Obigen; so ergiebt sich auf der Stelle die zu beweisende Gleichung

$$\int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b f(x,y)\,\partial x = \int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x,y)\,\partial y.$$

8. Nach 3. ist nun, unter der Voraussetzung, dass b positiv ist,

$$\int_0^\infty z^{b-1} e^{-(1+x)z}\,\partial z = \frac{\Gamma(b)}{(1+x)^b}.$$

Also ist

$$\frac{x^{a-1}\,\partial x}{(1+x)^b} = \frac{\partial x}{\Gamma(b)} \int_0^\infty x^{a-1} z^{b-1} e^{-(1+x)z}\,\partial z$$

und folglich

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,\partial x}{(1+x)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty \partial x \int_0^\infty x^{a-1} z^{b-1} e^{-(1+x)z}\,\partial z;$$

also nach 7.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,\partial x}{(1+x)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty \partial z \int_0^\infty x^{a-1} z^{b-1} e^{-(1+x)z}\,\partial x.$$

Nehmen wir nun aber a als positiv an; so ist nach 3.

$$\int_0^\infty x^{a-1} z^{b-1} e^{-(1+x)z}\,\partial x = z^{b-1} e^{-z} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-zx}\,\partial x$$
$$= z^{b-a-1} e^{-z}\,\Gamma(a),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden, unter der Voraussetzung, dass auch $b - a$ positiv ist,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,\partial x}{(1+x)^b} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} \int_0^\infty z^{b-a-1} e^{-z}\,\partial z = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}.$$

Für $b = 1$ ist folglich nach 4.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,\partial x}{1+x} = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a),$$

und also für $a = \frac{1}{2}$

$$\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\}^2 = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}\,\partial x}{1+x}.$$

Setzen wir nun $x^{\frac{1}{2}} = u$; so ist

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}}\,\partial x}{1+x} = \frac{2\,\partial u}{1+u^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Also ist, weil für $x = 0$, $x = \infty$ respective $u = 0$, $u = \infty$ ist,

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1+x} = 2\int_0^\infty \frac{\partial u}{1+u^2}.$$

Nach §. 104. ist aber

$$\int_0^\infty \frac{\partial u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}\pi} = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Also ist

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1+x} = \pi,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\}^2 = \pi, \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Nun ist aber

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\partial x.$$

Also ist, wenn wir $x^{\frac{1}{2}} = t$ setzen,

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\partial t,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\partial t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Nach §. 3. ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\partial t = \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\partial t + \int_0^\infty e^{-t^2}\partial t.$$

Setzen wir nun $t = -s$; so ist offenbar

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\partial t = -\int_{\infty}^{0} e^{-s^2}\partial s = -\int_{\infty}^{0} e^{-t^2}\partial t,$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\partial t = \int_0^\infty e^{-t^2}\partial t - \int_{\infty}^{0} e^{-t^2}\partial t$$

$$= \int_0^\infty e^{-t^2}\partial t + \int_0^\infty e^{-t}\partial t = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\partial t.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\partial t = \sqrt{\pi}.$$

Die zuletzt entwickelten bestimmten Integrale kommen bei mehrern wichtigen Anwendungen des höhern Calculs auf die Naturlehre vor.

§. 108.

Aufgabe. Den Werth des bestimmten Integrals $\int_a^b y\partial x$, wo a kleiner oder grösser als b seyn kann,

und y eine zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ stetige Function von x seyn soll, näherungsweise zu berechnen.

Auflösung. Man denke sich, indem wir für's Erste $a < b$ annehmen wollen, die Function y auf bekannte Weise zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ durch eine auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogene Curve dargestellt, und bezeichne den Flächenraum der von dem Theile $b - a$ der Abscissenaxe, von den, den Abscissen $x = a$ und $x = b$ entsprechenden Ordinaten, und dem zwischen den Endpunkten dieser Ordinaten liegenden Bogen der in Rede stehenden Curve begränzten ebenen Figur durch v; so ist nach §. 89.

$$v = \int_a^b y \partial x ,$$

und man wird also den Werth des gegebenen bestimmten Integrals näherungsweise berechnen können, wenn man den Flächenraum v näherungsweise berechnen kann.

Zu dem Ende theile man den Theil $b - a$ der Abscissenaxe in $2n$ gleiche Theile, deren jeder $= i$ ist, und bezeichne die den Werthen

$$a,\ a + i,\ a + 2i,\ \ldots\ a + (2n - 1)i,\ b$$

von x entsprechenden Werthe von y durch

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_{2n-1},\ A_{2n};$$

so ist, wie, wenn man sich nur die Endpunkte der Ordinaten

$$A,\ A_2;\ A_2,\ A_4;\ A_4,\ A_6;\ \ldots;\ A_{2n-2},\ A_{2n}$$

durch gerade Linien verbunden denkt, leicht erhellen wird, näherungsweise, und zwar mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist,

$$v = (A + A_2)i + (A_2 + A_4)i + (A_4 + A_6)i + \ldots + (A_{2n-2} + A_{2n})i.$$

Einen höhern Grad der Annäherung wird man aber offenbar erreichen, wenn man auch noch die über den, die Endpunkte der Ordinaten

$$A,\ A_2;\ A_2,\ A_4;\ A_4,\ A_6;\ \ldots;\ A_{2n-2},\ A_{2n}$$

verbindenden Sehnen der Curve liegenden Segmente derselben berücksichtigt.

Jedes solches Segment wie KK_1K_2 in *Fig.* 3. kann man, wenn nur n ziemlich gross ist, näherungsweise als das Segment einer Parabel betrachten, von welcher KK_2 eine Sehne, K_1L_1 ein Durchmesser ist. Bezeichnen wir nun den Parameter dieses Diameters durch p', die Abscissen in Bezug auf diesen Diameter als Abscissenaxe durch x', die Ordinaten durch y'; so ist nach der Theorie der Kegelschnitte $y'^2 = p'x'$ die Gleichung der Parabel. Ist aber $KK_1K_2 = s$, $K_1M = m$, $K_2M = n$, der Coordinatenwinkel $= \alpha$; so ist nach §. 89.

$$s = 2\sin\alpha\int_0^m y'\partial x' = 2\sin\alpha\sqrt{p'}.\int_0^m \partial x'\sqrt{x'}$$
$$= \tfrac{4}{3}m\sin\alpha\sqrt{p'm} = \tfrac{4}{3}mn\sin\alpha = \tfrac{4}{3}mi.$$

Hieraus wird nun leicht erhellen, dass mit einem höhern Grade der Annäherung wie vorher in völliger Allgemeinheit

$$\begin{aligned} v = {} & (A + A_2)i + \tfrac{4}{3}\{A_1 - \tfrac{1}{2}(A + A_2)\}i \\ & + (A_2 + A_4)i + \tfrac{4}{3}\{A_3 - \tfrac{1}{2}(A_2 + A_4)\}i \\ & + (A_4 + A_6)i + \tfrac{4}{3}\{A_5 - \tfrac{1}{2}(A_4 + A_6)\}i \\ & + (A_6 + A_8)i + \tfrac{4}{3}\{A_7 - \tfrac{1}{2}(A_6 + A_8)\}i \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + (A_{2n-2} + A_{2n})i + \tfrac{4}{3}\{A_{2n-1} - \tfrac{1}{2}(A_{2n-2} + A_{2n})\}i, \end{aligned}$$

$$= \{\tfrac{1}{3}A + \tfrac{4}{3}A_1 + \tfrac{2}{3}A_2 + \tfrac{4}{3}A_3 + \tfrac{2}{3}A_4 + \ldots + \tfrac{2}{3}A_{2n-2} + \tfrac{4}{3}A_{2n-1} + \tfrac{1}{3}A_{2n}\}i$$

oder

$$\int_a^b y\partial x = \left.\begin{aligned} \{\tfrac{1}{3}A + \tfrac{4}{3}A_1 + \tfrac{2}{3}A_2 + \tfrac{4}{3}A_3 + \tfrac{2}{3}A_4 + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \tfrac{2}{3}A_{2n-2} + \tfrac{4}{3}A_{2n-1} + \tfrac{1}{3}A_{2n} \end{aligned}\right\}\frac{b-a}{2n}$$

ist, wo nun, wie leicht erhellen wird, auch $a > b$ seyn kann.

Man kann die vorhergehende Formel auch unter der Form

$$\int_a^b y\partial x = \left.\begin{aligned} \{A + A_{2n} + 2(A_2 + A_4 + A_6 + \ldots + A_{2n-2}) \\ + 4(A_1 + A_3 + A_5 + \ldots + A_{2n-1}) \end{aligned}\right\}\frac{b-a}{6n}$$

schreiben, und diese Formel wird jederzeit eine desto grössere Genauigkeit gewähren, je grösser man n annimmt.

Die Entwickelung anderer Näherungsmethoden würde uns hier zu weit führen.

Zehntes Kapitel.

Integration der höhern Differentiale.

§. 109.

In §. 10. ist schon gezeigt worden, dass für jedes n

$$\overset{n}{\int} X\partial x^n = \int\partial x\int\partial x\int\partial x\int\partial x\ldots\int\partial x\int X\partial x,$$

wo die Anzahl der Integralzeichen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens n ist, gesetzt werden kann. Hier bemerken wir nur noch, dass bei jeder der n Integrationen, welche der Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens vorschreibt, eine willkührliche Constante eingeführt werden muss, und dass also das Integral

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\overset{n}{\int} X \partial x^n$$

jederzeit n willkührliche Constanten enthalten wird.

So ist z. B.

$$\overset{4}{\int} x^2 \partial x^4 = \int \partial x \int \partial x \int \partial x \int x^2 \partial x .$$

Aber

$$\int x^2 \partial x = \frac{x^3}{3} + C ,$$

und folglich

$$\int \partial x \int x^2 \partial x = \frac{x^4}{3.4} + Cx + C' .$$

Also ist ferner

$$\int \partial x \int \partial x \int x^2 \partial x = \frac{x^5}{3.4.5} + \tfrac{1}{2} Cx^2 + C'x + C'' ,$$

und folglich endlich

$$\overset{4}{\int} x^2 \partial x^4 = \frac{x^6}{3.4.5.6} + \frac{1}{2.3} Cx^3 + \tfrac{1}{2} C'x^2 + C'x + C''' ,$$

so dass also das gesuchte Integral vier willkührliche Constanten enthält, wie es seyn muss.

§. 110.

Man kann aber mittelst der in §. 27. bewiesenen allgemeinen Reductionsformel das Integral

$$\overset{n}{\int} X \partial x^n$$

noch auf eine andere merkwürdige Art entwickeln.

1. Nach §. 10. ist

$$\overset{2}{\int} X \partial x^2 = \int \partial x \int X \partial x ,$$

und folglich nach §. 27., wie leicht erhellen wird,

$$\overset{2}{\int} X \partial x^2 = \tfrac{1}{1} \{ x \int X \partial x - \int X x \partial x \} .$$

2. Nach §. 10. und 1. ist

$$\overset{3}{\int} X \partial x^3 = \int \partial x \overset{2}{\int} X \partial x^2$$
$$= \tfrac{1}{1} \{ \int x \partial x \int X \partial x - \int \partial x \int X x \partial x \} .$$

Nach §. 27. ist aber

$$\int x \partial x \int X \partial x = \tfrac{1}{2} x^2 \int X \partial x - \tfrac{1}{2} \int X x^2 \partial x ,$$
$$\int \partial x \int X x \partial x = x \int X x \partial x - \int X x^2 \partial x .$$

Also ist, wie man nach gehöriger Substitution leicht findet,

$$\overset{3}{\int} X \partial x^3 = \frac{1}{1.2} \{ x^2 \int X \partial x - 2x \int X x \partial x + \int X x^2 \partial x \} .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Nach §. 10. und 2. ist

$$\overset{4}{\int} X\partial x^4 = \int \partial x \overset{3}{\int} X\partial x^3$$

$$= \frac{1}{1.2}\{\int x^2\partial x \int X\partial x - 2\int x\partial x \int Xx\partial x + \int \partial x \int Xx^2\partial x\}.$$

Nach §. 27. ist aber

$$\int x^2\partial x \int X\partial x = \tfrac{1}{3}x^3\int X\partial x - \tfrac{1}{3}\int Xx^3\partial x,$$
$$\int x\partial x \int Xx\partial x = \tfrac{1}{2}x^2\int Xx\partial x - \tfrac{1}{2}\int Xx^3\partial x,$$
$$\int \partial x \int Xx^2\partial x = x\int Xx^2\partial x - \int Xx^3\partial x,$$

und folglich, wie man nach gehöriger Substitution leicht findet,

$$\overset{4}{\int} X\partial x^4 = \frac{1}{1.2.3}\{x^3\int X\partial x - 3x^2\int Xx\partial x + 3x\int Xx^2\partial x - \int Xx^3\partial x\}.$$

4. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und auch das allgemeine Gesetz, welchem diese Ausdrücke unterworfen sind, fällt sogleich in die Augen. Es ist nämlich, wenn wir die Binomial-Coefficienten wie gewöhnlich bezeichnen:

$$\overset{n}{\int} X\partial x^n = \frac{1}{1\ldots(n-1)}\left\{\begin{array}{l} x^{n-1}\int X\partial x - (n-1)_1\, x^{n-2}\int Xx\,\partial x \\ \quad + (n-1)_2\, x^{n-3}\int Xx^2\,\partial x \\ \quad - (n-1)_3\, x^{n-4}\int Xx^3\,\partial x \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \quad \pm (n-1)_{n-1}\int Xx^{n-1}\,\partial x \end{array}\right\}.$$

Um dieses Gesetz allgemein zu beweisen, nehmen wir an, dass es für

$$\overset{n}{\int} X\partial x^n$$

richtig ist, und zeigen, dass es unter dieser Voraussetzung auch für

$$\overset{n+1}{\int} X\partial x^{n+1}$$

richtig seyn muss.

Nach §. 10. und der Voraussetzung, von welcher wir ausgehen, ist

$$\overset{n+1}{\int} X\partial x^{n+1} = \int \partial x \overset{n}{\int} X\partial x^n$$

$$= \frac{1}{1\ldots(n-1)}\left\{\begin{array}{l} \int x^{n-1}\partial x \int X\partial x - (n-1)_1 . \int x^{n-2}\partial x \int Xx\partial x \\ \quad + (n-1)_2 . \int x^{n-3}\partial x \int Xx^2\partial x \\ \quad - (n-1)_3 . \int x^{n-4}\partial x \int Xx^3\partial x \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \quad \pm (n-1)_{n-1} . \int \partial x \int Xx^{n-1}\partial x \end{array}\right\}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach §. 27. ist aber, wie leicht erhellet,

$$\int x^{n-1}\partial x \int X\partial x = \frac{1}{n} x^n \int X\partial x - \frac{1}{n}\int Xx^n\,\partial x,$$

$$\int x^{n-2}\partial x \int Xx\,\partial x = \frac{1}{n-1} x^{n-1}\int Xx\,\partial x - \frac{1}{n-1}\int Xx^n\,\partial x,$$

$$\int x^{n-3}\partial x \int Xx^2\partial x = \frac{1}{n-2} x^{n-2}\int Xx^2\partial x - \frac{1}{n-2}\int Xx^n\,\partial x,$$

$$\int x^{n-4}\partial x \int Xx^3\partial x = \frac{1}{n-3} x^{n-3}\int Xx^3\partial x - \frac{1}{n-3}\int Xx^n\,\partial x,$$

u. s. w.

$$\int \partial x \int Xx^{n-1}\partial x = \tfrac{1}{1} x\int Xx^{n-1}\,\partial x - \tfrac{1}{1}\int Xx^n\,\partial x.$$

Ueberlegt man nun, dass

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n},\quad \frac{(n-1)_1}{n-1} = \frac{n_1}{n},\quad \frac{(n-1)_2}{n-2} = \frac{n_2}{n},\quad \frac{(n-1)_3}{n-3} = \frac{n_3}{n},\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ \frac{(n-1)_{n-1}}{1} = \frac{n_{n-1}}{n};$$

und

$$-\frac{1}{n} + \frac{(n-1)_1}{n-1} - \frac{(n-1)_2}{n-2} + \frac{(n-1)_3}{n-3} - \ldots \mp \frac{(n-1)_{n-1}}{1}$$

$$= -\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n} - \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} - \ldots \mp \frac{n_{n-1}}{n}$$

$$= -\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n} - \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} - \ldots \mp \frac{n_{n-1}}{n} \pm \frac{n_n}{n} \mp \frac{n_n}{n}$$

$$= -\frac{1}{n}\{1 - n_1 + n_2 - n_3 + \ldots \pm n_{n-1} \mp n_n\} \mp \frac{n_n}{n}$$

$$= -\frac{1}{n}(1-1)^n \mp \frac{n_n}{n} = \mp \frac{n_n}{n}$$

ist; so wird man sich leicht überzeugen, dass

$$\int^{n+1} X\,\partial x^{n+1} = \frac{1}{1\ldots n}\left\{\begin{array}{l} x^n\int X\,\partial x - n_1 x^{n-1}\int Xx\,\partial x \\ \qquad + n_2 x^{n-2}\int Xx^2\,\partial x \\ \qquad - n_3 x^{n-3}\int Xx^3\,\partial x \\ \qquad \ldots\ldots \\ \qquad \pm n_{n-1}\, x\int Xx^{n-1}\,\partial x \\ \qquad \mp n_n\int Xx^n\,\partial x \end{array}\right\}$$

ist, und dass also das bemerkte Gesetz für

$$\int^{n+1} X\,\partial x^{n+1}$$

gilt, wenn es für

$$\int^{n} X\,\partial x^n$$

richtig ist, woraus nach einer bekannten Schlussweise folgt, dass das in Rede stehende Gesetz allgemein gültig ist.

Mit jedem der in dem für $\overset{n}{\int} X \partial x^n$ gefundenen Ausdrücke enthaltenen n Integrale muss eine willkührliche Constante eingeführt werden.

Eilftes Kapitel.

Integration der vollständigen Differentiale mit mehrern veränderlichen Grössen.

§. 111.

Ein Differential mit zwei veränderlichen Grössen hat im Allgemeinen die Form

$$P \partial x + Q \partial y ,$$

wo P und Q Functionen von x und y sind.

Soll nun dieses Differential wirklich durch Differentiation einer Function u der beiden veränderlichen Grössen x, y entstanden gedacht werden können, so dass

$$\partial u = P \partial x + Q \partial y$$

ist; so muss nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung

$$P = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad Q = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

wenn wir die partiellen Differentialquotienten durch Einschliessung in Parenthesen bezeichnen, und folglich

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

d. i., weil bekanntlich immer

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

ist,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

seyn.

Diese Bedingungsgleichung muss also erfüllt seyn, wenn sich in der That eine endliche völlig bestimmte Function u von x, y angeben lassen soll, die das Integral von

$$P \partial x + Q \partial y$$

ist, und durch deren Differentiation also diese Grösse erhalten wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist die obige Bedingungsgleichung erfüllt; so heisst

$$P\partial x + Q\partial y$$

ein vollständiges Differential zweier veränderlicher Grössen, und unter der Voraussetzung, dass

$$P\partial x + Q\partial y$$

ein vollständiges Differential zweier veränderlicher Grössen ist, wollen wir nun sein Integral u zu finden suchen.

Nach dem Obigen ist

$$P = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \text{ oder } \partial_x u = P\partial x\,,$$

und folglich

$$u = \int P\partial x + Y\,,$$

wo bei der Entwickelung von $\int P\partial x$ bloss x als veränderlich zu betrachten ist, und Y eine willkührliche Function von y bezeichnet, die aber hier durch die Bedingung bestimmt wird, dass

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = Q$$

ist.

Differentiirt man nämlich den Ausdruck

$$u = \int P\partial x + Y$$

nach y, und setzt den erhaltenen partiellen Differentialquotienten der Grösse Q gleich; so ergiebt sich die Gleichung

$$\left(\frac{\partial \int P\partial x}{\partial y}\right) + \frac{\partial Y}{\partial y} = Q\,,$$

aus der dann ferner

$$Y = \int \left\{Q - \left(\frac{\partial \int P\partial x}{\partial y}\right)\right\}\partial y\,,$$

nach dem Obigen also

$$u = \int P\partial x + \int \left\{Q - \left(\frac{\partial \int P\partial x}{\partial y}\right)\right\}\partial y$$

folgt, wodurch nun u vollständig bestimmt ist, weil, was besonders zu bemerken ist,

$$Q - \left(\frac{\partial \int P\partial x}{\partial y}\right)$$

eine blosse Function von y ist, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann.

Setzen wir der Kürze wegen

$$V = Q - \left(\frac{\partial \int P\partial x}{\partial y}\right),$$

und differentiiren diese Grösse nach x; so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 \int P\partial x}{\partial x\,\partial y}\,,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder, weil bekanntlich

$$\frac{\partial^2 \int P \partial x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \int P \partial x}{\partial y \partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

ist,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Weil nun aber die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

als erfüllt vorausgesetzt wird; so ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0,$$

und die Grösse V folglich von x unabhängig, wie behauptet wurde.

Auf der Stelle überzeugt man sich endlich, dass auch

$$u = \int Q \partial y + \int \left\{ P - \left(\frac{\partial \int Q \partial y}{\partial x}\right) \right\} \partial x$$

gesetzt werden kann.

§. 112.

Um das Vorhergehende auf ein Paar Beispiele anzuwenden; so sey zuvörderst das Differential

$$\partial u = \frac{y \partial x - x \partial y}{x^2 + y^2}$$

gegeben, und folglich

$$P = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Weil

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ist; so ist das gegebene Differential ein vollständiges Differential zweier veränderlicher Grössen, und ist also nach dem Vorhergehenden integrirbar.

Weil nun

$$\int P \partial x = \int \frac{y \partial x}{x^2 + y^2} = \int \frac{\partial \left(\frac{x}{y}\right)}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = Arc\,tang \frac{x}{y},$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial \int P \partial x}{\partial y}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Q - \left(\frac{\partial \int P \partial x}{\partial y}\right) = 0$$

ist; so ist nach §. 111.

$$u = Arctang\frac{x}{y} + C,$$

wo C eine ganz willkührliche Constante bezeichnet.

Ist ferner

$$\partial u = \frac{a(x\partial x + y\partial y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y\partial x - x\partial y}{x^2+y^2} + 3by^2\partial y$$

gegeben; so ist

$$P = \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{x^2+y^2},\quad Q = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2} + 3by^2,$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{axy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

das gegebene Differential also ein vollständiges Differential zweier veränderlicher Grössen.

Weil nun

$$\int P\partial x = a\int\frac{x\partial x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \int\frac{y\partial x}{x^2+y^2} = a\sqrt{x^2+y^2} + Arctang\frac{x}{y},$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial\int P\partial x}{\partial y}\right) = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2},\quad Q - \left(\frac{\partial\int P\partial x}{\partial y}\right) = 3by^2,$$

also

$$\int\left\{Q - \left(\frac{\partial\int P\partial x}{\partial y}\right)\right\}\partial y = by^3$$

ist; so ist nach §. 111.

$$u = a\sqrt{x^2+y^2} + Arctang\frac{x}{y} + by^3 + C.$$

Aus diesen Beispielen wird schon deutlich genug erhellen, wie man sich in jedem andern Falle zu verhalten hat.

§. 113.

Die allgemeine Form eines Differentials mit drei veränderlichen Grössen ist

$$P\partial x + Q\partial y + R\partial z,$$

wo P, Q und R Functionen von x, y, z sind. Kann nun diese Grösse durch wirkliche Differentiation einer gewissen Function u entstanden gedacht werden, und ist also ein sogenanntes vollständiges Differential dreier veränderlicher Grössen; so ist bekanntlich

$$P = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad Q = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad R = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

und folglich, weil

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$$

ist,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right), \quad \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right).$$

Diese Bedingungen als erfüllt vorausgesetzt, wollen wir nun das Integral des Differentials

$$\partial u = P \partial x + Q \partial y + R \partial z$$

zu entwickeln suchen.

Weil nach der Voraussetzung

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

ist; so ist

$$P \partial x + Q \partial y$$

das vollständige Differential von u, wenn man bloss x und y als veränderlich betrachtet, und folglich

$$u = \int (P \partial x + Q \partial y) + Z,$$

wo Z eine willkührliche Function von z bezeichnet, und $\int (P \partial x + Q \partial y)$ nach §. 111. gefunden werden kann, indem man bloss x und y als veränderlich betrachtet.

Differentiirt man nun vorstehende Gleichung nach z; so erhält man

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \int (P \partial x + Q \partial y)}{\partial z}\right) + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

d. i., weil

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = R$$

ist,

$$R = \left(\frac{\partial \int (P \partial x + Q \partial y)}{\partial z}\right) + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

und folglich

$$Z = \int \left\{ R - \left(\frac{\partial \int (P \partial x + Q \partial y)}{\partial z}\right) \right\} \partial z,$$

wo man nun vorzüglich zu bemerken hat, dass

$$R - \left(\frac{\partial \int (P \partial x + Q \partial y)}{\partial z}\right)$$

jederzeit eine blosse Function von z ist, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann.

Setzen wir nämlich der Kürze wegen

$$V = R - \left(\frac{\partial \int (P \partial x + Q \partial y)}{\partial z}\right);$$

so ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 \int (P\,\partial x + Q\,\partial y)}{\partial x\,\partial z},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2 \int (P\,\partial x + Q\,\partial y)}{\partial y\,\partial z},$$

oder

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 \int (P\,\partial x + Q\,\partial y)}{\partial z\,\partial x},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2 \int (P\,\partial x + Q\,\partial y)}{\partial z\,\partial y}.$$

Aber

$$\left(\frac{\partial \int (P\,\partial x + Q\,\partial y)}{\partial x}\right) = P, \quad \left(\frac{\partial \int (P\,\partial x + Q\,\partial y)}{\partial y}\right) = Q,$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right), \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right),$$

d. i., weil nach der Voraussetzung

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right), \quad \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)$$

ist,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0,$$

so dass also V von x und y ganz unabhängig, und folglich bloss eine Function von z ist, wie behauptet wurde.

Es kann also u mittelst der aus dem Obigen sich ergebenden Formel

$$u = \int (P\,\partial x + Q\,\partial y) + \int \left\{ R - \left(\frac{\partial \int (P\,\partial x + Q\,\partial y)}{\partial z}\right) \right\} \partial z$$

immer gefunden werden, und aus dem Vorhergehenden wird auch ersichtlich seyn, wie man sich bei der Integration der vollständigen Differentiale mit mehr als drei veränderlichen Grössen zu verhalten hat.

§. 114.

Um das Vorhergehende auf ein Beispiel anzuwenden, sey

$$\partial u = \frac{x\,\partial x + y\,\partial y + z\,\partial z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z\,\partial x - x\,\partial z}{x^2 + z^2} + z\,\partial z$$

das gegebene Differential, und folglich

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z}{x^2 + z^2},$$

$$Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x}{x^2 + z^2} + z.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Weil

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = -\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{x^2-z^2}{(x^2+z^2)^2}$$

ist; so ist das gegebene Differential ein vollständiges Differential dreier veränderlicher Grössen, und kann also nach §. 113. integrirt werden.

Weil, wie leicht erhellet,

$$\int Q\,\partial y = \int \frac{y\,\partial y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial \int Q\,\partial y}{\partial x}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad P - \left(\frac{\partial \int Q\,\partial y}{\partial x}\right) = \frac{z}{x^2+z^2}$$

ist; so ist

$$\int\left\{P - \left(\frac{\partial \int Q\,\partial y}{\partial x}\right)\right\}\partial x = \int \frac{z\,\partial x}{x^2+z^2} = \int \frac{\partial\left(\frac{x}{z}\right)}{1+\left(\frac{x}{z}\right)^2} = Arc\,tang\frac{x}{z},$$

und folglich nach §. 111.

$$\int (P\,\partial x + Q\,\partial y) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + Arc\,tang\frac{x}{z}.$$

Also ist

$$\left(\frac{\partial \int (P\,\partial x + Q\,\partial y)}{\partial z}\right) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x}{x^2+z^2},$$

und folglich

$$R - \left(\frac{\partial \int (P\,\partial x + Q\,\partial y)}{\partial z}\right) = z, \quad \int\left\{R - \left(\frac{\partial \int (P\,\partial x + Q\,\partial y)}{\partial z}\right)\right\}\partial z = \tfrac{1}{2}z^2.$$

Also ist

$$u = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + Arc\,tang\frac{x}{z} + \tfrac{1}{2}z^2 + C.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zwölftes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen.

§. 115.

Erklärung. Eine Differentialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen heisst, wenn P und Q beliebige Functionen von x und y bezeichnen, jede Gleichung von der Form

$$P\partial x + Q\partial y = 0,$$

welche also ausser x und y bloss die ersten Differentiale ∂x und ∂y von x und y, und diese Differentiale bloss in der ersten Potenz, auch nicht das Product $\partial x \partial y$ enthält.

Die Differentialgleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

integriren heisst eine Gleichung zwischen x und y finden, durch deren Differentiation die Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

erhalten wird.

Jede Gleichung zwischen x und y, durch deren Differentiation die Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

erhalten wird, mag ein Integral dieser letztern Gleichung genannt werden.

§. 116.

Wenn X bloss eine Function von x, Y bloss eine Function von y ist; so sagt man, dass in der Differentialgleichung

$$1.\quad X\partial x + Y\partial y = 0$$

die veränderlichen Grössen x, y gesondert seyen.

Da nach bekannten Regeln der Differentialrechnung durch Differentiation der Gleichung

$$2.\quad \int X\partial x + \int Y\partial y = C$$

oder

$$3.\quad \int X\partial x + \int Y\partial y - C = 0,$$

wo C eine willkührliche Constante bezeichnet, die Gleichung 1. erhalten wird; so ist die Gleichung 2. oder 3. das Integral der Gleichung 1., und diese Gleichung lässt sich daher, weil die Integrale $\int X\partial x$ und $\int Y\partial y$ mittelst der aus den obigen Kapiteln bekannten Methoden entwickelt werden können, jederzeit integriren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Folglich wird auch die Gleichung

$$4.\quad P\partial x + Q\partial y = 0,$$

wo P und Q beliebige Functionen von x und y bezeichnen, jederzeit integrirt werden können, wenn sie sich auf irgend eine Art auf die Form der Gleichung 1. bringen lässt, d. h. wenn in ihr auf irgend eine Weise die veränderlichen Grössen x, y gesondert werden können.

Daher wollen wir jetzt einige Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche sich durch Sonderung der veränderlichen Grössen integriren lassen, etwas näher betrachten.

§. 117.

In der Gleichung

$$XY_1\partial x - YX_1\partial y = 0,$$

wo X, X_1 Functionen von x, dagegen Y, Y_1 Functionen von y seyn sollen, lassen sich die veränderlichen Grössen sehr leicht sondern, weil dieselbe, wie man sogleich übersieht, auf die Form

$$\frac{X\partial x}{X_1} - \frac{Y\partial y}{Y_1} = 0$$

gebracht werden kann. Daher ist nach §. 116. die Gleichung

$$\int\frac{X\partial x}{X_1} - \int\frac{Y\partial y}{Y_1} = C$$

das Integral der gegebenen Gleichung.

Aus der Gleichung

$$y\partial x - x\partial y = 0$$

erhält man z. B. durch Sonderung der veränderlichen Grössen

$$\frac{\partial x}{x} - \frac{\partial y}{y} = 0,$$

und hieraus ferner durch Integration

$$\int\frac{\partial x}{x} - \int\frac{\partial y}{y} = C,$$

d. i. nach §. 26.

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 - \tfrac{1}{2}l.y^2 = \tfrac{1}{2}l.\left(\frac{x}{y}\right)^2 = C;$$

also offenbar

$$\frac{x}{y} = c \text{ oder } x = cy,$$

welche Gleichung folglich das Integral der gegebenen Differentialgleichung ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 18.

Unter einer homogenen Function

$$u = f(x, y, z, v, \ldots)$$

der veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \ldots$ versteht man eine Function, welche, wenn man für $x, y, z, v, \ldots$ respective $\theta x, \theta y, \theta z, \theta v, \ldots$, wo θ eine ganz beliebige neue veränderliche Grösse bezeichnet, setzt, auf die Form

$$\theta^a u \quad \theta^a f(x, y, z, v, \ldots),$$

wo a eine gewisse constante Grösse bezeichnet, gebracht werden kann.

Durch die Grösse a wird der Grad der entsprechenden homogenen Function

$$u = f(x, y, z, v, \ldots)$$

bestimmt.

So ist z. B. die Function

$$x^2 + xy + y^2$$

eine homogene Function des zweiten Grades der beiden veränderlichen Grössen x, y, weil diese Function, wenn man für x, y respective $\theta x, \theta y$ setzt, auf die Form

$$\theta^2 (x^2 + xy + y^2)$$

gebracht werden kann.

Die Function $lx - ly$ ist eine homogene Function des nullten Grades, weil dieselbe offenbar ganz ungeändert bleibt, wenn man $\theta x, \theta y$ für x, y setzt, und folglich nach dieser Substitution immer unter der Form

$$\theta^0 (lx - ly)$$

dargestellt werden kann.

Eben so leicht erhellet, dass die Function

$$\frac{x}{x^2 + y^2}$$

eine homogene Functien des -1sten Grades der beiden veränderlichen Grössen x, y ist.

§. 119.

Wenn P und Q homogene Functionen eines und desselben Grades von x und y sind; so können in der Gleichung

$$P \partial x + Q \partial y = 0$$

die Variablen jederzeit durch ein einfaches Verfahren gesondert werden.

Setzen wir nämlich

$$P = f(x, y), \quad Q = \varphi(x, y);$$

so ist nach der Voraussetzung und nach §. 118.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$f(\theta x, \theta y) = \theta^a f(x, y), \quad \varphi(\theta x, \theta y) = \theta^a \varphi(x, y),$$

und folglich, wenn man $y = xz$ setzt,

$$f(\theta x, \theta xz) = \theta^a f(x, xz), \quad \varphi(\theta x, \theta xz) = \theta^a \varphi(x, xz).$$

Setzt man nun $\theta = \frac{1}{x}$; so wird, indem Z und Z_1 gewisse Functionen von z bezeichnen, in welche respective $f(\theta x, \theta xz)$ und $\varphi(\theta x, \theta xz)$ übergehen, wenn man für θ den in Rede stehenden Werth setzt, offenbar

$$Z = \frac{f(x, xz)}{x^a}, \quad Z_1 = \frac{\varphi(x, xz)}{x^a};$$

oder

$$f(x, xz) = x^a Z, \quad \varphi(x, xz) = x^a Z_1.$$

Hieraus sieht man, dass, wenn man $y = xz$ setzt, unter der gemachten Voraussetzung die Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

jederzeit auf die Form

$$x^a Z\partial x + x^a Z_1 \partial . xz = 0$$

oder

$$Z\partial x + Z_1(x\partial z + z\partial x) = 0,$$

oder

$$(Z + zZ_1)\partial x + xZ_1\partial z = 0,$$

oder

$$\frac{\partial x}{x} + \frac{Z_1\partial z}{Z + zZ_1} = 0,$$

eine Gleichung, in welcher, weil Z und Z_1 blosse Functionen von z sind, die Variablen gesondert sind, gebracht werden kann.

Das Integral der letztern Gleichung ist die Gleichung

$$\int\frac{\partial x}{x} + \int\frac{Z_1\partial z}{Z + zZ_1} = C$$

oder

$$\tfrac{1}{2} l . x^2 + \int\frac{Z_1\partial z}{Z + zZ_1} = C,$$

aus der man unmittelbar das Integral der gegebenen Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

erhält, wenn man $z = \frac{y}{x}$ setzt.

§. 120.

Ist z. B.

$$(ax + by)\partial x + (a'x + b'y)\partial y = 0,$$

wo die Coefficienten von ∂x und ∂y offenbar homogene Functionen des ersten Grades von x und y sind, die gegebene Gleichung; so setze man

$$y = xz, \quad \partial y = x\partial z + z\partial x.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch diese Substitution wird die gegebene Gleichung

$$\{a + (a' + b)z + b'z^2\}\partial x + (a' + b'z)x\partial z = 0$$

oder

$$\frac{\partial x}{x} + \frac{(a' + b'z)\partial z}{a + (a' + b)z + b'z^2} = 0,$$

woraus sich ferner

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \int\frac{(a' + b'z)\partial z}{a + (a' + b)z + b'z^2} = C$$

ergiebt.

Entwickelt man nun

$$\int\frac{(a' + b'z)\partial z}{a + (a' + b)z + b'z^2}$$

nach §. 35., und setzt dann $\frac{y}{x}$ für z; so erhält man das Integral der gegebenen Differentialgleichung.

Die Gleichung

$$x\partial y - y\partial x = \partial x\sqrt{x^2 + y^2}$$

oder

$$(y + \sqrt{x^2 + y^2})\partial x - x\partial y = 0,$$

wo die in ∂x und ∂y multiplicirten Factoren wieder homogene Functionen des ersten Grades von x und y sind, geht, wenn man $y = xz$ setzt, in die Gleichung

$$\partial x\sqrt{1 + z^2} - x\partial z = 0$$

oder

$$\frac{\partial x}{x} - \frac{\partial z}{\sqrt{1 + z^2}} = 0$$

über, und aus letzterer Gleichung folgt

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 - \int\frac{\partial z}{\sqrt{1 + z^2}} = C,$$

d. i. nach §. 54.

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 - \tfrac{1}{2}l.(2z + 2\sqrt{1 + z^2})^2 = C,$$

oder

$$l.\left(\frac{x}{z + \sqrt{1 + z^2}}\right)^2 = C.$$

Also ist offenbar auch

$$\frac{x}{z + \sqrt{1 + z^2}} = c,$$

und folglich, wenn man diese Gleichung rational macht,

$$x^2 - 2cxz = c^2.$$

Setzt man nun $z = \frac{y}{x}$; so findet man als Integral der gegebenen Differentialgleichung die Gleichung

$$x^2 - 2cy = c^2.$$

§. 121.

Die Gleichung

$$(a + bx + cy)\partial x + (a' + b'x + c'y)\partial y = 0$$

lässt sich durch eine einfache Substitution in eine andere verwandeln, in welcher die in ∂x und ∂y multiplicirten Functionen homogene Functionen des ersten Grades sind.

Setzt man nämlich

$$x = t + \alpha, \quad y = u + \beta,$$

wo α und β zwei willkührliche constante Grössen seyn sollen; so erhält man die Gleichung

$$(a + b\alpha + c\beta + bt + cu)\partial t + (a' + b'\alpha + c'\beta + b't + c'u)\partial u = 0.$$

Da nun die Grössen α, β ganz willkührliche Constanten sind; so kann man dieselben aus den Gleichungen

$$a + b\alpha + c\beta = 0, \quad a' + b'\alpha + c'\beta = 0$$

bestimmen. Dann geht die obige Gleichung in die Gleichung

$$(bt + cu)\partial t + (b't + c'u)\partial u = 0$$

über, in welcher nun die in ∂t und ∂u multiplicirten Grössen homogene Functionen des ersten Grades von t und u sind, so dass also diese Gleichung nach den obigen Principien integrirt werden kann, wie auch schon in §. 120. gezeigt worden ist.

Aus den obigen Gleichungen, durch welche α und β bestimmt werden, findet man

$$\alpha = \frac{a'c - ac'}{bc' - b'c}, \quad \beta = \frac{ab' - a'b}{bc' - b'c}.$$

Setzt man also in dem Integral der Gleichung

$$(bt + cu)\partial t + (b't + c'u)\partial u = 0$$

für t und u respective die Werthe

$$x - \frac{a'c - ac'}{bc' - b'c}, \quad y - \frac{ab' - a'b}{bc' - b'c};$$

so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche das Integral der gegebenen Differentialgleichung ist.

Diese Auflösung ist, wenn

$$bc' - b'c = 0$$

ist, nicht mehr anwendbar, wie man sogleich übersieht. In diesem Falle ist aber

$$bb'x + bc'y = bb'x + b'cy$$

oder

$$b(b'x + c'y) = b'(bx + cy),$$

und folglich

$$(a + bx + cy)\partial x + \left\{a' + \frac{b'}{b}(bx + cy)\right\}\partial y = 0$$

oder

$$a\partial x + a'\partial y + (bx + cy)\left(\partial x + \frac{b'}{b}\partial y\right) = 0.$$

Setzt man nun

$$bx + cy = z, \quad \partial y = \frac{\partial z - b\partial x}{c};$$

so erhält man die Gleichung

$$\partial x + \frac{(a'b + b'z)\partial z}{b\{ac - a'b + (c - b')z\}} = 0,$$

und folglich

$$x + \frac{1}{b}\int\frac{(a'b + b'z)\partial z}{ac - a'b + (c - b')z} = C.$$

Ist $b' = c$, so wird diese Gleichung

$$x + \frac{(a'b + \frac{1}{2}b'z)z}{(ac - a'b)b} = C,$$

und folglich, wenn man für z seinen Werth $bx + cy$ setzt,

$$(ac - a'b)bx + \{a'b + \tfrac{1}{2}b'(bx + cy)\}(bx + cy) = bC(ac - a'b),$$

oder

$$2(ac - a'b)bx + \{2a'b + b'(bx + cy)\}(bx + cy) = 2bC(ac - a'b),$$

oder

$$2bc(ax + a'y) + b'(bx + cy)^2 = 2bC(ac - a'b),$$

welche Gleichung das Integral der gegebenen Differentialgleichung in dem Falle ist, wenn $bc' = b'c$ und $b' = c$ ist.

§. 122.

Die Gleichung $y + Py\partial x = Q\partial x$, wo P und Q Functionen von x allein seyn sollen, lässt sich auf folgende Art durch Sonderung der veränderlichen Grössen integriren.

Man setze $y = Xz$, wo X eine noch zu bestimmende Function von x bezeichnen soll; so ist

$$\partial y = X\partial z + z\partial X,$$

und folglich

$$X\partial z + z\partial X + PXz\partial x = Q\partial x.$$

Nun bestimme man X so, dass

$$1. \quad X\partial z + PXz\partial x = 0$$

ist; so ist

$$2. \quad z\partial X - Q\partial x = 0.$$

Aus der Gleichung 1. ergiebt sich

$$3. \quad \frac{\partial z}{z} + P\partial x = 0,$$

und folglich

$$4. \quad \tfrac{1}{2}l.z^2 + \int P\partial x = c,$$

oder

$$5. \quad l.z^2 = 2c - 2\int P\partial x;$$

also

$$6. \quad z^2 = e^{2c - 2\int P\partial x} = (e^c.e^{-\int P\partial x})^2;$$

folglich

$$7.\quad z = \pm e^{c} . e^{-\int P \partial x},$$

oder, was offenbar dasselbe ist,

$$8.\quad z = Ce^{-\int P \partial x},$$

wo C eine willkührliche Constante bezeichnet.

Führt man nun diesen Werth von z in die Gleichung 2. ein; so erhält man

$$9.\quad Ce^{-\int P \partial x} \partial X - Q \partial x = 0$$

oder

$$10.\quad \partial X = \frac{1}{C} e^{\int P \partial x} Q \partial x,$$

und folglich

$$11.\quad X = \frac{1}{C} \int e^{\int P \partial x} Q \partial x + C'.$$

Also, weil

$$y = Xz = CXe^{-\int P \partial x}, \quad X = \frac{1}{C} y e^{\int P \partial x}$$

ist,

$$12.\quad y = e^{-\int P \partial x} \left\{ \int e^{\int P \partial x} Q \partial x + CC' \right\},$$

oder, wenn wir für CC' bloss C setzen,

$$13.\quad y = e^{-\int P \partial x} \left\{ \int e^{\int P \partial x} Q \partial x + C \right\}.$$

Für die Gleichung

$$\partial y + y \partial x = x^2 \partial x$$

erhält man hiernach z. B.

$$y = e^{-x} (\int e^{x} x^2 \partial x + C).$$

Weil nun

$$\int e^{x} x^2 \partial x = x^2 \int e^{x} \partial x - 2 \int x \partial x \int e^{x} \partial x$$
$$= e^{x} x^2 - 2 \int e^{x} x \partial x = e^{x} x^2 - 2x \int e^{x} \partial x + 2 \int \partial x \int e^{x} \partial x$$
$$= e^{x} x^2 - 2 e^{x} x + 2 \int e^{x} \partial x = e^{x} (x^2 - 2x + 2)$$

ist; so ist

$$y = e^{-x} \{ e^{x} (x^2 - 2x + 2) + C \} = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}.$$

Die Gleichung

$$\partial y + Py \partial x = Qy^{n+1} \partial x,$$

wo P und Q wieder Functionen von x allein sind, lässt sich auf die Form der vorher betrachteten Gleichung bringen, wenn man $y^n z = 1$ setzt, indem man durch diese Substitution leicht die Gleichung

$$\partial z - nPz \partial x = - nQ \partial x$$

erhält, deren Form von der Form der vorher betrachteten Gleichung nicht verschieden ist.

Die Gleichung

$$y^m \partial y + Py^{m+1} \partial x = Q \partial x$$

wird, wenn man $y^{m+1} = z$ setzt, auf die Form der oben betrachteten Gleichung gebracht, indem man durch diese Substitution die Gleichung

$$\partial z + (m+1) Pz \partial x = (m+1) Q \partial x,$$

deren Form wieder von der Form der oben betrachteten Gleichung nicht wesentlich verschieden ist, erhält.

§. 123.

Die Gleichung

$$\partial y + by^2 \partial x = ax^m \partial x$$

ist eine der wichtigsten und merkwürdigsten Differentialgleichungen, und wird gewöhnlich die Riccati'sche Gleichung genannt, weil der Conte Giacomo Riccati dieselbe im Jahre 1722 den Analysten seiner Zeit zur Integration vorlegte.

I. Der einfachste Fall ist der Fall $m = 0$. In diesem Falle wird die Riccati'sche Gleichung

$$\partial y + by^2 \partial x = a \partial x$$

oder

$$\partial x - \frac{\partial y}{a - by^2} = 0,$$

und folglich

$$x - \int \frac{\partial y}{a - by^2} = C.$$

Da sich nun

$$\int \frac{\partial y}{a - by^2}$$

nach §. 35. leicht entwickeln lässt; so lässt sich auch in dem Falle, wo $m = 0$ ist, die Riccati'sche Gleichung immer integriren.

II. Setzt man $y = z^k$; so wird die Riccati'sche Gleichung

$$kz^{k-1} \partial z + bz^{2k} \partial x = ax^m \partial x,$$

oder

$$(ax^m - bz^{2k}) \partial x - kz^{k-1} \partial z = 0.$$

In dieser Gleichung werden die in ∂x und ∂z multiplicirten Functionen homogene Functionen desselben Grades von x und z, wenn $k - 1 = 2k = m$, d. i. $k = -1$, $m = -2$ ist. Also lässt sich die Riccati'sche Gleichung in dem Falle $m = -2$, d. i. die Gleichung

$$\partial y + by^2 \partial x = \frac{a \partial x}{x^2},$$

wenn man $y = z^{-1}$ setzt, jederzeit nach §. 119. integriren.

III. Setzt man in der Riccati'schen Gleichung

$$y = b^{-1} x^{-1} + zx^{-2};$$

so wird dieselbe

$$1. \quad x^2 \partial z + bz^2 \partial x = ax^{m+4} \partial x.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In dieser Gleichung lassen sich die veränderlichen Grössen sondern, wenn $m = -4$ ist. Denn in diesem Falle wird dieselbe leicht auf die Form

$$\frac{\partial x}{x^2} - \frac{\partial z}{a - bz^2} = 0$$

gebracht.

Setzt man nun, wenn m nicht $= -4$ ist,

$$z = \frac{1}{y'}, \quad x^{m+3} = x';$$

so wird die Gleichung 1.

$$\partial y' + \frac{a}{m+3} y'^2 \partial x' = \frac{b}{m+3} x'^{-\frac{m+4}{m+3}} \partial x',$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$\frac{a}{m+3} = b', \quad \frac{b}{m+3} = a', \quad -\frac{m+4}{m+3} = m'$$

gesetzt wird,

$$\partial y' + b' y'^2 \partial x' = a' x'^{m'} \partial x',$$

welches eine der Riccati'schen Gleichung ganz ähnliche Gleichung ist.

Setzt man nun wieder

$$y' = b'^{-1} x'^{-1} + z' x'^{-2};$$

so wird die obige Gleichung

$$2. \quad x'^2 \partial z' + b' z'^2 \partial x' = a' x'^{m'+4} \partial x',$$

und in dieser Gleichung lassen sich, wenn $m' = -4$ ist, wieder die veränderlichen Grössen sondern, weil dieselbe in diesem Falle leicht auf die Form

$$\frac{\partial x'}{x'^2} - \frac{\partial z'}{a' - b' z'^2} = 0$$

gebracht werden kann.

Setzt man nun, wenn m' nicht $= -4$ ist, wieder

$$z' = \frac{1}{y''}, \quad x'^{m'+3} = x'';$$

so wird die Gleichung 2.

$$\partial y'' + \frac{a'}{m'+3} y''^2 \partial x'' = \frac{b'}{m'+3} x''^{-\frac{m'+4}{m'+3}} \partial x'',$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$\frac{a'}{m'+3} = b'', \quad \frac{b'}{m'+3} = a'', \quad -\frac{m'+4}{m'+3} = m''$$

gesetzt wird,

$$\partial y'' + b'' y''^2 \partial x'' = a'' x''^{m''} \partial x'',$$

welches wieder eine der Riccati'schen Gleichung ganz ähnliche Gleichung ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch die Substitution

$$y'' = b''^{-1}x''^{-1} + z''x''^{-2}$$

wird diese Gleichung auf die Form

$$3.\quad x''^2\partial z'' + b''z''^2\partial x'' = a''x''^{m''+4}\partial x''$$

gebracht, und in dieser Gleichung lassen sich, wenn $m'' = -4$ ist, wieder die veränderlichen Grössen sondern, indem dieselbe in dem in Rede stehenden Falle leicht auf die Form

$$\frac{\partial x''}{x''^2} - \frac{\partial z''}{a'' - b''z''^2} = 0$$

gebracht wird.

Man sieht nun schon, wie man auf die obige Art immer weiter gehen kann, und schliesst aus dem Vorhergehenden leicht, dass die Riccati'sche Gleichung jederzeit durch Sonderung der Variablen integrirt werden kann, wenn in der Reihe der Grössen

$$m,\ m' = -\frac{m+4}{m+3},\ m'' = -\frac{m'+4}{m'+3},\ m''' = -\frac{m''+4}{m''+3}, \ldots$$

eine vorkommt, welche $= -4$ ist, welches jederzeit für

$$m = -4,\ -\tfrac{8}{3},\ -\tfrac{12}{5},\ -\tfrac{16}{7}, \ldots,$$

d. h. überhaupt für

$$m = -\frac{4i}{2i-1},$$

wo i eine jede postive ganze Zahl, die nicht $= 0$ ist, bezeichnet, der Fall ist. Da aber für $i = 0$ und $i = \infty$ respective $m = 0$ und $m = -2$, und in diesen beiden Fällen die Riccati'sche Gleichung nach I. und II. integrabel ist; so sieht man, dass die Riccati'sche Gleichung für

$$m = -\frac{4i}{2i-1}$$

wo i jede positive ganze Zahl, 0 und ∞ mit eingeschlossen, bezeichnet, jederzeit integrabel ist.

IV. Setzt man

$$y = \frac{1}{y'},\quad x^{m+1} = x'$$

und der Kürze wegen

$$\frac{a}{m+1} = b',\quad \frac{b}{m+1} = a',\quad -\frac{m}{m+1} = m';$$

so geht die Riccati'sche Gleichung in

$$\partial y' + b'y'^2\partial x' = a'x'^{m'}\partial x'$$

über. Diese Gleichung hat mit der Riccati'schen Gleichung völlig einerlei Form, und kann also nach III., wenn

$$m' = -\frac{4i}{2i-1}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist, jederzeit integrirt werden. Folglich kann die Riccati'sche Gleichung selbst, wenn

$$-\frac{m}{m+1} = -\frac{4i}{2i-1}, \text{ d. i. } m = -\frac{4i}{2i+1}$$

ist, jederzeit integrirt werden.

Fasst man nun alles Obige zusammen; so zeigt sich, dass die Riccati'sche Gleichung jederzeit integrabel ist, wenn, indem i jede positive ganze Zahl, 0 und ∞ mit eingeschlossen, bezeichnet,

$$m = -\frac{4i}{2i \pm 1}$$

ist.

§. 124.

Eine von der in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten verschiedene Methode, die Differentialgleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

in gewissen Fällen zu integriren, beruhet auf Folgendem.

Wenn nämlich $P\partial x + Q\partial y$ ein vollständiges Differential zweier veränderlicher Grössen ist; so kann man $\int(P\partial x + Q\partial y)$ jederzeit nach den im eilften Kapitel bewiesenen Regeln entwickeln. Ist nun überhaupt

$$\int(P\partial x + Q\partial y) = u;$$

so ist, weil

$$P\partial x + Q\partial y = \partial u = 0$$

ist, $u = C$, und folglich diese Gleichung oder die Gleichung

$$u - C = 0$$

das Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0.$$

Um diese Methode durch ein Beispiel zu erläutern; so sey

$$\frac{\partial x}{x} + \frac{y^2\partial x}{x^3} - \frac{y\partial y}{x^2} + \frac{(y\partial x - x\partial y)\sqrt{x^2+y^2}}{x^3} + \frac{\partial y}{2y} = 0$$

oder

$$\frac{x^2+y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\partial x + \left(\frac{1}{2y} - \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\right)\partial y = 0$$

die gegebene Differentialgleichung, und folglich

$$P = \frac{x^2+y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}, \quad Q = \frac{1}{2y} - \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}.$$

Weil nun

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{x^2+2y^2+2y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3\sqrt{x^2+y^2}}$$

ist; so ist im vorliegenden Falle $P\partial x + Q\partial y$ ein vollständiges

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Differential zweier veränderlicher Grössen, und kann also nach den im eilften Kapitel bewiesenen Regeln integrirt werden.

Entwickelt man zu dem Ende, y als constant betrachtend, zuvörderst $\int P\partial x$; so erhält man

$$\int P\partial x = \int \frac{x^2+y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\partial x$$

$$= \int \frac{\partial x}{x} + y^2\int\frac{\partial x}{x^3} + y\int\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\partial x$$

$$= \tfrac{1}{2}l.x^2 - \frac{y^2}{2x^2} + y\int\frac{x^2+y^2}{x^3\sqrt{x^2+y^2}}\partial x$$

$$= \tfrac{1}{2}l.x^2 - \frac{y^2}{2x^2} + y\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2+y^2}} + y^3\int\frac{\partial x}{x^3\sqrt{x^2+y^2}},$$

und folglich, weil nach §. 58.

$$\int\frac{\partial x}{x^3\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2y^2} - \frac{1}{2y^2}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2+y^2}}$$

ist,

$$\int P\partial x = \tfrac{1}{2}l.x^2 - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}y\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Setzen wir nun $\frac{1}{x} = z$; so ist

$$\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\partial z}{\sqrt{1+y^2z^2}}.$$

Nach §. 54. I. ist aber

$$\int\frac{\partial z}{\sqrt{1+y^2z^2}} = \pm\frac{1}{2y}l.(2y^2z \pm 2y\sqrt{1+y^2z^2})^2,$$

oder, weil y constant ist,

$$\int\frac{\partial z}{\sqrt{1+y^2z^2}} = \pm\frac{1}{2y}l.(yz \pm \sqrt{1+y^2z^2})^2,$$

und folglich, wenn man zugleich für z den Werth $\frac{1}{x}$ wieder einführt,

$$\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2+y^2}} = \mp\frac{1}{2y}l.\left(\frac{y\pm\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right)^2.$$

Also ist

$$\int P\partial x = \tfrac{1}{2}l.x^2 - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} \mp \tfrac{1}{2}l.\left(\frac{y\pm\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right)^2.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man nach y differentiirt,

$$\left(\frac{\partial\int P\partial x}{\partial y}\right) = -\frac{y}{x^2} - \frac{x^2+2y^2}{2x^2\sqrt{x^2+y^2}} \mp \frac{\sqrt{x^2+y^2}\pm y}{2(y\pm\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= -\frac{y}{x^2} - \frac{x^2+2y^2}{2x^2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und folglich

$$Q - \left(\frac{\partial \int P \partial x}{\partial y}\right) = \frac{1}{2y};$$

also

$$\int \left\{ Q - \left(\frac{\partial \int P \partial x}{\partial y}\right) \right\} \partial y = \tfrac{1}{4} l . y^2 .$$

Folglich ist nach §. 111. und dem Obigen

$$\int (P \partial x + Q \partial y)$$

$$= \tfrac{1}{2} l . x^2 + \tfrac{1}{4} l . y^2 - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y \sqrt{x^2 + y^2}}{2x^2} \mp \tfrac{1}{4} l . \left(\frac{y \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{x}\right)^2,$$

und daher die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} l . x^2 + \tfrac{1}{4} l . y^2 - \frac{y(y + \sqrt{x^2 + y^2})}{2x^2} \mp \tfrac{1}{4} l . \left(\frac{y \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{x}\right)^2 - C = 0$$

das Integral der gegebenen Differentialgleichung.

§. 125.

Wenn $P \partial x + Q \partial y$ kein vollständiges Differential zweier veränderlicher Grössen ist; so kann man versuchen, die gegebene Gleichung

$$P \partial x + Q \partial y = 0$$

mit einer gewissen Function z von x und y zu multipliciren, welche so beschaffen ist, dass in der Gleichung

$$Pz \partial x + Qz \partial y = 0$$

die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ein vollständiges Differential der beiden veränderlichen Grössen x und y ist, weil, wenn man eine solche Function, die ein integrirender Factor genannt wird, finden kann, die Integration der gegebenen Differentialgleichung offenbar auf §. 124. zurückgeführt ist.

Soll nun $Pz \partial x + Qz \partial y$ ein vollständiges Differential zweier veränderlicher Grössen seyn; so muss bekanntlich

$$\left(\frac{\partial . Pz}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial . Qz}{\partial x}\right),$$

d. i.

$$P\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + z\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = Q\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

oder

$$P\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - Q\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + z\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\} = 0$$

seyn, und aus dieser Gleichung muss also der integrirende Factor jederzeit bestimmt werden, welches aber meistens schwieriger ist, wie die Integration der gegebenen Differentialgleichung selbst.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daher begnügen wir uns, hier nur auf zwei Fälle aufmerksam zu machen, in denen sich der integrirende Factor z leicht bestimmen lässt.

I. Wenn nämlich z bloss eine Function von x ist; so ist $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$, und die obige Gleichung wird

$$-Q\frac{\partial z}{\partial x} + z\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\} = 0$$

oder

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\},$$

woraus sogleich erhellet, dass auch

$$\frac{1}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\}$$

eine Function von x allein ist.

Da nun

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial x}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\}$$

ist; so erhält man, wenn man integrirt,

$$\tfrac{1}{2}l.z^2 = \int\frac{\partial x}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{1}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\} = X$$

setzen,

$$l.z^2 = 2\int X\partial x,\quad z^2 = e^{2\int X\partial x},\quad z = \pm e^{\int X\partial x},$$

wo aber sogleich in die Augen fällt, dass es völlig hinreichend ist,

$$z = e^{\int X\partial x}$$

zu setzen.

Man kann nun auch leicht beweisen, dass umgekehrt, unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{1}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\} = X$$

eine blosse Function von x ist, jederzeit

$$z = e^{\int X\partial x}$$

ein integrirender Factor der Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

ist, d. h. dass

$$Pe^{\int X\partial x}.\,\partial x + Qe^{\int X\partial x}\,\partial y$$

jederzeit ein vollständiges Differential der beiden veränderlichen Grössen x und y ist.

Weil nämlich

$$\left(\frac{\partial \int X\partial x}{\partial y}\right) = 0$$

ist; so ist

$$\left(\frac{\partial\,.\,Pe^{\int X\partial x}}{\partial y}\right) = e^{\int X\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Ferner ist, wie leicht erhellen wird,

$$\left(\frac{\partial\,.\,Qe^{\int X\partial x}}{\partial x}\right) = e^{\int X\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + e^{\int X\partial x}\,QX.$$

Weil nun

$$\frac{1}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\} = X$$

ist; so ist

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + QX,$$

und folglich auch

$$e^{\int X\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = e^{\int X\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + e^{\int X\partial x}\,QX,$$

d. i.

$$\left(\frac{\partial\,.\,Pe^{\int X\partial x}}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\,.\,Qe^{\int X\partial x}}{\partial x}\right);$$

also

$$Pe^{\int X\partial x}\,\partial x + Qe^{\int X\partial x}\,\partial y$$

ein vollständiges Differential von x und y, wie bewiesen werden sollte.

Um das Vorhergehende auf einen besondern Fall anzuwenden; so sey die Gleichung

$$\partial x + (a\,\partial x + 2by\,\partial y)\sqrt{1+x^2} = 0$$

gegeben, und folglich

$$P = 1 + a\sqrt{1+x^2}, \quad Q = 2by\sqrt{1+x^2}.$$

Weil nun

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2bxy}{\sqrt{1+x^2}},$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{2bxy}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist; so ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{1}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\} = X = -\frac{x}{1+x^2},$$

diese Grösse also eine blosse Function von x.

Leicht findet man nun

$$\int X\partial x = -\int\frac{x\partial x}{1+x^2} = -l\sqrt{1+x^2},$$

und folglich

$$z = e^{-l\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Multiplicirt man die gegebene Gleichung mit diesem integrirenden Factor; so wird dieselbe

$$\frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}} + a\partial x + 2by\partial y = 0,$$

oder

$$\frac{1+a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\partial x + 2by\partial y = 0.$$

Weil in dieser Gleichung die veränderlichen Grössen gesondert sind; so ist

$$\int\frac{1+a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\partial x + 2b\int y\partial y = C.$$

Aber nach §. 54. I.

$$\int\frac{1+a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\partial x = ax + \int\frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}} = ax + \tfrac{1}{2}l.(2x+2\sqrt{1+x^2})^2$$

oder auch

$$\int\frac{1+a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\partial x = ax + \tfrac{1}{2}l.(x+\sqrt{1+x^2})^2,$$

und folglich die Gleichung

$$ax + by^2 + \tfrac{1}{2}l.(x+\sqrt{1+x^2})^2 = C$$

das Integral der gegebenen Differentialgleichung.

II. Ganz auf dieselbe Art wie vorher zeigt man, dass, wenn

$$\frac{1}{P}\left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\} = Y$$

eine blosse Function von y ist, jederzeit

$$z = e^{\int Y\partial y}$$

ein integrirender Factor der Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn P und Q homogene Functionen desselben Grades von x und y sind; so lässt sich zwar immer ein integrirender Factor für die Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

finden. Weil aber dann diese Gleichung bekanntlich immer durch Sonderung der Variablen integrirt werden kann; so wollen wir uns hier bei der Aufsuchung des integrirenden Factors solcher Gleichungen nicht aufhalten.

Dreizehntes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des $n$ten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen.

§. 126.

Die allgemeine Form einer Differentialgleichung der ersten Ordnung und des $n$ten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen ist

$$\partial y^n + P\partial y^{n-1}\partial x + Q\partial y^{n-2}\partial x^2 + \ldots + T\partial y\,\partial x^{n-1} + U\partial x^n = 0$$

oder

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^n + P\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-1} + Q\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-2} + \ldots + T\frac{\partial y}{\partial x} + U = 0\,.$$

Wird diese Gleichung in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ als unbekannte Grösse aufgelöst; so erhält man n Differentialgleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial x} - p_1 = 0,\quad \frac{\partial y}{\partial x} - p_2 = 0,\quad \frac{\partial y}{\partial x} - p_3 = 0,\ \ldots\ \frac{\partial y}{\partial x} - p_n = 0$$

oder

$$\partial y - p_1\partial x = 0,\quad \partial y - p_2\partial x = 0,\quad \partial y - p_3\partial x = 0,\ \ldots\ \partial y - p_n\partial x = 0$$

der ersten Ordnung und des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen, die man nach den im vorigen Kapitel entwickelten Regeln zu integriren suchen muss.

Sind nun die Gleichungen

$$M_1 = 0,\quad M_2 = 0,\quad M_3 = 0,\ \ldots\ M_n = 0$$

die n Integrale, welche man auf diese Weise erhält; so ist nicht nur jede einzelne dieser Gleichungen, sondern offenbar auch das Product einer beliebigen Anzahl derselben, wie man sie auch unter einander verbinden mag, ein Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$\partial y^n + P\partial y^{n-1}\partial x + Q\partial y^{n-2}\partial x^2 + \ldots + T\partial y\,\partial x^{n-1} + U\partial x^n = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Sey z. B. die Gleichung

$$\partial y^2 - a^2 \partial x^2 = 0 \text{ oder } \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - a^2 = 0$$

gegeben. Durch Auflösung dieser Gleichung in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ als unbekannte Grösse erhält man die beiden Gleichungen

$$\partial y - a\partial x = 0, \quad \partial y + a\partial x = 0.$$

Integrirt man nun diese beiden Gleichungen nach §. 116.; so erhält man die Gleichungen

$$y - ax - c = 0, \quad y + ax - c' = 0,$$

und es sind nun nicht bloss diese beiden Gleichungen, sondern auch die Gleichung

$$(y - ax - c)(y + ax - c') = 0,$$

Integrale der gegebenen Differentialgleichung.

Um sich durch eine wirkliche Rechnung zu überzeugen, dass in der That die Gleichung

$$(y - ax - c)(y + ax - c') = 0$$

ein Integral der gegebenen Differentialgleichung ist, differentiire man diese Gleichung. Dadurch erhält man

$$(y - ax - c)(\partial y + a\partial x) + (y + ax - c')(\partial y - a\partial x) = 0$$

oder

$$(y - ax - c)\left(\frac{\partial y}{\partial x} + a\right) + (y + ax - c')\left(\frac{\partial y}{\partial x} - a\right) = 0,$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a(2ax + c - c')}{2y - (c + c')}.$$

Weil nun aber

$$(y - ax - c)(y + ax - c') = 0$$

ist; so muss nothwendig einer der beiden Factoren des Products auf der linken Seite des Gleichheitszeichens $= 0$ seyn.

Ist $y - ax - c = 0$, so ist $ax = y - c$, und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a(2y - c - c')}{2y - c - c'} = + a.$$

Ist dagegen $y + ax - c' = 0$, so ist $ax = c' - y$, und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a(c + c' - 2y)}{2y - c - c'} = - a.$$

Also ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \pm a$ und folglich immer

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = a^2, \quad \partial y^2 - a^2 \partial x^2 = 0,$$

wie es seyn soll.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Durch Auflösung der Gleichung

$$\partial y^2 - ax\,\partial x^2 = 0 \text{ oder } \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - ax = 0$$

erhält man die beiden Gleichungen

$$\partial y - (ax)^{\frac{1}{2}}\partial x = 0, \quad \partial y + (ax)^{\frac{1}{2}}\partial x = 0,$$

und durch Integration dieser Gleichungen ergeben sich nun ferner nach §. 116. die beiden Gleichungen

$$y - \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - c = 0, \quad y + \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - c' = 0.$$

Sowohl diese beiden Gleichungen, als auch die Gleichung

$$(y - \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - c)(y + \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - c') = 0,$$

sind Integrale der gegebenen Differentialgleichung.

3. Durch Auflösung der Gleichung

$$\partial y^3 + \partial x^3 = 0 \text{ oder } \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 + 1 = 0$$

erhält man die drei Gleichungen

$$\partial y + \partial x = 0, \quad \partial y - \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})\partial x = 0, \quad \partial y - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})\partial x = 0;$$

und durch Integration dieser Gleichungen ergeben sich die drei Gleichungen

$$y + x - c = 0, \quad y - \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})x - c' = 0,$$
$$y - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})x - c'' = 0.$$

§. 127.

Wenn auch die vorige Methode ganz allgemein ist; so setzt doch die Auflösung der höhern Gleichungen derselben oft grosse Schwierigkeiten entgegen, und wir wollen daher jetzt noch einige besondere häufiger vorkommende Fälle, die eine andere Behandlung gestatten, betrachten.

Wenn zuvörderst die gegebene Differentialgleichung ausser $\frac{\partial y}{\partial x}$ bloss noch eine der beiden veränderlichen Grössen x und y, etwa x, enthält, und sich in Bezug auf x als unbekannte Grösse leichter als in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ als unbekannte Grösse auflösen lässt; so kann man auf folgende Art verfahren.

Man drücke x durch $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ aus, so dass $x = f(p)$ wird. Da nun $\partial y = p\,\partial x$ ist; so ist nach §. 27.

$$y = px - \int x\,\partial p,$$

d. i.

$$y = pf(p) - \int f(p).\partial p.$$

Eliminirt man nun p aus den beiden Gleichungen

$$x = f(p), \quad y = pf(p) - \int f(p) . \partial p ;$$

so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche das Integral der gegebenen Differentialgleichung seyn wird.

Ist z. B.

$$x \partial x + a \partial y = b \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

oder

$$x + ap = b \sqrt{1 + p^2}$$

die gegebene Differentialgleichung; so ist

$$x = - ap + b \sqrt{1 + p^2},$$

und nach dem Obigen folglich

$$\begin{aligned} y &= - ap^2 + bp \sqrt{1 + p^2} + \int (ap - b \sqrt{1 + p^2}) \partial p \\ &= - \tfrac{1}{2} ap^2 + bp \sqrt{1 + p^2} - b \int \partial p \sqrt{1 + p^2}, \end{aligned}$$

oder nach §. 54. und §. 56.

$$y = \tfrac{1}{2} bp \sqrt{1 + p^2} - \tfrac{1}{2} ap^2 - \tfrac{1}{4} bl . (p + \sqrt{1 + p^2})^2 + C.$$

Aus dieser Gleichung und aus der Gleichung

$$x = - ap + b \sqrt{1 + p^2}$$

müsste man nun noch p eliminiren, um die gesuchte Gleichung zwischen x und y zu erhalten.

Enthält die gegebene Differentialgleichung ausser $\frac{\partial y}{\partial x}$ bloss noch die veränderliche Grösse y und ist in Bezug auf y als unbekannte Grösse leichter auflösbar wie in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ als unbekannte Grösse; so kann man natürlich auf ganz ähnliche Art wie vorher verfahren.

Ist z. B.

$$yp^3 = a(1 + p^2)^2$$

die gegebene Differentialgleichung; so ist

$$y = \frac{a(1 + p^2)^2}{p^3}.$$

Setzen wir nun aber

$$\frac{\partial x}{\partial y} = q, \quad p = \frac{1}{q};$$

so ist

$$y = \frac{a(1 + q^2)^2}{q},$$

und folglich nach dem Obigen

$$x = a(1+q^2)^2 - a\int\frac{(1+q^2)^2}{q}\partial q$$
$$= a(1+q^2)^2 - a\int\left(\frac{\partial q}{q} + 2q\partial q + q^3\partial q\right)$$
$$= a(1+q^2)^2 - \tfrac{1}{2}al.q^2 - aq^2 - \tfrac{1}{4}aq^4 + C$$
$$= a + aq^2 + \tfrac{3}{4}aq^4 - \tfrac{1}{2}al.q^2 + C.$$

Aus dieser Gleichung und aus der Gleichung

$$qy = a(1+q^2)^2$$

müsste man nun q eliminiren, um die gesuchte Gleichung zwischen x und y zu finden.

§. 128.

Wenn die gegebene Differentialgleichung die beiden Variablen x und y, aber die eine derselben, z. B. y, bloss in der ersten Potenz enthält; so kann man y leicht durch x und $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ ausdrücken, und erhält dann durch Differentiation ohne Schwierigkeit

$$\partial y = R\partial x + S\partial p,$$

wo R und S gegebene Functionen von x und p sind. Weil nun $\partial y = p\,\partial x$ ist; so ist

$$p\,\partial x = R\partial x + S\partial p$$

oder

$$(R - p)\partial x + S\partial p = 0.$$

Kann man diese Gleichung integriren; so erhält man eine Gleichung zwischen x und p, und erhält dann die gesuchte Gleichung zwischen x und y, wenn man aus der gefundenen Gleichung zwischen x und p und der gegebenen Differentialgleichung die Grösse p eliminirt.

Aus der Differentialgleichung

$$y\,\partial x - x\,\partial y = a\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

ergiebt sich z. B.

$$y = px + a\sqrt{1+p^2}$$

und folglich

$$\partial y = p\,\partial x + x\,\partial p + \frac{ap\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Aber $\partial y = p\,\partial x$. Also

$$x\,\partial p + \frac{ap\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich in die beiden Gleichungen

$$\partial p = 0,\quad x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

zerlegen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die erste dieser beiden Gleichungen giebt $p = c$, und es ist folglich, wenn man diesen Werth von p in die gegebene Differentialgleichung einführt,

$$y = cx + a\sqrt{1 + c^2}.$$

Aus der zweiten der beiden obigen Gleichungen ergiebt sich

$$p = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und folglich

$$\sqrt{1 + p^2} = -\frac{ap}{x} = \mp \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Also ist, wenn man diese Werthe von p und $\sqrt{1 + p^2}$ in die gegebene Differentialgleichung einführt,

$$y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mp \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mp \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mp \sqrt{a^2 - x^2},$$

oder

$$y^2 = a^2 - x^2, \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Diese Gleichung enthält keine willkührliche Constante, ist nicht unter der Gleichung

$$y = cx + a\sqrt{1 + c^2}$$

enthalten, und wird daher eine besondere oder partikuläre Auflösung der gegebenen Differentialgleichung genannt, ein Gegenstand, von dem sogleich im folgenden Kapitel ausführlicher die Rede seyn wird.

Jede Differentialgleichung, die sich wie die vorige, wenn $f(p)$ eine blosse Function von p bezeichnet, auf die Form

$$y = px + f(p)$$

bringen lässt, kann nach der vorher angewandten Methode integrirt werden. Man erhält nämlich leicht

$$\partial y = p\,\partial x + \left\{x + \frac{\partial f(p)}{\partial p}\right\}\partial p$$

und folglich

$$p\,\partial x = p\,\partial x + \left\{x + \frac{\partial f(p)}{\partial p}\right\}\partial p,$$

d. i.

$$\left\{x + \frac{\partial f(p)}{\partial p}\right\}\partial p = 0,$$

eine Gleichung, die sich in die beiden Gleichungen

$$\partial p = 0, \quad x + \frac{\partial f(p)}{\partial p} = 0$$

zerlegen lässt.

Die erste giebt $p = c$, und folglich

$$y = cx + f(c).$$

Eliminirt man ferner p aus den beiden Gleichungen

$$y = px + f(p), \quad x + \frac{\partial f(p)}{\partial p} = 0;$$

so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche keine willkührliche Constante mehr enthält, und deshalb eine partikuläre Auflösung der gegebenen Differentialgleichung ist.

Ist die Differentialgleichung

$$y\,\partial x - x\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = 0 \quad \text{oder} \quad y - x\sqrt{1+p^2} = 0$$

gegeben; so erhält man

$$y = x\sqrt{1+p^2}, \quad \partial y = \partial x\sqrt{1+p^2} + \frac{xp\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}},$$

d. i.

$$p\,\partial x = \partial x\sqrt{1+p^2} + \frac{xp\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}}$$

oder

$$\frac{\partial x}{x} + \frac{p\,\partial p}{(\sqrt{1+p^2} - p)\sqrt{1+p^2}} = 0,$$

wo nun die veränderlichen Grössen gesondert sind. Multiplicirt man Zähler und Nenner des zweiten Bruchs auf der linken Seite des Gleichheitszeichens mit $\sqrt{1+p^2} + p$; so erhält man

$$\frac{\partial x}{x} + p\,\partial p + \frac{p^2\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

und folglich

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \tfrac{1}{2}p^2 + \int\frac{p^2\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}} = C.$$

Setzt man $p^2 = 1 + p^2 - 1$; so wird

$$\int\frac{p^2\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}} = \int\partial p\sqrt{1+p^2} - \int\frac{\partial p}{\sqrt{1+p^2}},$$

d. i. nach §. 56.

$$\int\frac{p^2\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} - \tfrac{1}{2}\int\frac{\partial p}{\sqrt{1+p^2}},$$

und folglich nach §. 54. I.

$$\int\frac{p^2\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} - \tfrac{1}{4}l.(p + \sqrt{1+p^2})^2.$$

Also ist

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} - \tfrac{1}{4}l.(p + \sqrt{1+p^2})^2 = C.$$

Weil nun vermöge der gegebenen Differentialgleichung

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{y}{x}, \quad p = \pm\frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$$

ist; so ist

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \frac{y^2 - x^2 \pm y\sqrt{y^2 - x^2}}{2x^2} - \tfrac{1}{4}l.\left(\frac{y \pm \sqrt{y^2 - x^2}}{x}\right)^2 = C,$$

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \frac{y^2 - x^2 \pm y\sqrt{y^2 - x^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{4}l.\left(\frac{x}{y \pm \sqrt{y^2 - x^2}}\right)^2 = C,$$

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \frac{y^2 - x^2 \pm y\sqrt{y^2 - x^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{4}l.\left(\frac{y \mp \sqrt{y^2 - x^2}}{x}\right)^2 = C,$$

$$\frac{y^2 - x^2 \pm y\sqrt{y^2 - x^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{4}l.\{x(y \mp \sqrt{y^2 - x^2})\}^2 = C,$$

oder, da wir statt $2C$ offenbar auch C setzen können,

$$\frac{y^2 - x^2 \pm y\sqrt{y^2 - x^2}}{x^2} + \tfrac{1}{2}l.\{x(y \mp \sqrt{y^2 - x^2})\}^2 = C.$$

Ist die Gleichung

$$y\,\partial x - x\,\partial y = x\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

oder

$$y - px = x\sqrt{1 + p^2}$$

gegeben; so ist

$$y = px + x\sqrt{1 + p^2},$$

und folglich

$$\partial y = p\,\partial x + \partial x\sqrt{1 + p^2} + x\,\partial p + \frac{px\,\partial p}{\sqrt{1 + p^2}},$$

oder

$$p\,\partial x = p\,\partial x + \partial x\sqrt{1 + p^2} + x\,\partial p + \frac{px\,\partial p}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$0 = \partial x\sqrt{1 + p^2} + x\,\partial p + \frac{px\,\partial p}{\sqrt{1 + p^2}},$$

oder, wenn man die veränderlichen Grössen sondert,

$$\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial p}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{p\,\partial p}{1 + p^2} = 0.$$

Also ist

$$\int\frac{\partial x}{x} + \int\frac{\partial p}{\sqrt{1 + p^2}} + \int\frac{p\,\partial p}{1 + p^2} = C,$$

d. i.

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \tfrac{1}{2}l.(p + \sqrt{1 + p^2})^2 + \tfrac{1}{2}l(1 + p^2) = C,$$

oder

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \tfrac{1}{2}l.(p + \sqrt{1 + p^2})^2 + \tfrac{1}{2}l(1 + p^2) = \tfrac{1}{2}l.c^2,$$

$$l.\{x(p + \sqrt{1 + p^2})\}^2 = l.\frac{c^2}{1 + p^2},$$

und folglich

$$x(p + \sqrt{1 + p^2}) = \pm\frac{c}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus dieser Gleichung und aus der gegebenen Differentialgleichung muss man p eliminiren. Weil nun zuvörderst

$$p + \sqrt{1 + p^2} = \frac{y}{x}$$

ist; so ist

$$y = \pm \frac{c}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Ferner erhält man leicht

$$p = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \quad 1 + p^2 = \left(\frac{x^2 + y^2}{2xy}\right)^2.$$

Also ist

$$x^2 + y^2 = \pm 2cx,$$

oder auch, weil die willkührliche Constante c positiv und negativ genommen werden kann, bloss

$$x^2 + y^2 = 2cx, \quad x^2 + y^2 - 2cx = 0.$$

Vierzehntes Kapitel.

Partikuläre Auflösungen der Differentialgleichungen.

§. 129.

Im vorigen Paragraphen fanden wir, dass die Differentialgleichung

$$y\partial x - x\partial y = a\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

neben dem vollständigen oder allgemeinen Integrale

$$y = cx + a\sqrt{1 + c^2}$$

auch noch das nicht unter diesem vollständigen oder allgemeinen Integrale enthaltene Integral

$$x^2 + y^2 = a^2$$

hatte, und bemerkten schon damals, dass ein solches nicht unter dem vollständigen oder allgemeinen Integrale einer Differentialgleichung enthaltene Integral dieser Differentialgleichung eine partikuläre oder besondere Auflösung derselben genannt werde. So gestattet auch die Differentialgleichung

$$\partial y^2 - x\partial x\partial y + y\partial x^2 = 0$$

oder

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - x\frac{\partial y}{\partial x} + y = 0,$$

deren vollständiges Integral

$$4y + 2Cx + C^2 = 0$$

ist, noch die partikuläre Auflösung

$$4y - x^2 = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Differentiirt man nämlich diese Gleichung; so erhält man

$$4\frac{\partial y}{\partial x} - 2x = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} - \tfrac{1}{2}x = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \tfrac{1}{2}x,$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - x\frac{\partial y}{\partial x} + y = \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 + y = y - \tfrac{1}{4}x^2.$$

Weil aber $4y - x^2 = 0$ und folglich $y = \frac{1}{4}x^2$ ist; so ist

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - x\frac{\partial y}{\partial x} + y = 0,$$

also in der That

$$4y - x^2 = 0$$

ein Integral der vorstehenden Differentialgleichung.

Dass die Gleichung

$$4y + 2Cx + C^2 = 0$$

das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung ist, ergiebt sich eben so leicht durch Differentiation. Es ist nämlich

$$4\frac{\partial y}{\partial x} + 2C = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} + \tfrac{1}{2}C = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\tfrac{1}{2}C,$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - x\frac{\partial y}{\partial x} + y = \tfrac{1}{4}C^2 + \tfrac{1}{2}Cx + y.$$

Weil nun aber

$$4y + 2Cx + C^2 = 0$$

ist; so ist

$$y = -\tfrac{1}{2}Cx - \tfrac{1}{4}C^2,$$

und folglich offenbar

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - x\frac{\partial y}{\partial x} + y = 0,$$

wie es seyn soll.

Unter einem partikulären Integrale einer Differentialgleichung versteht man jedes Integral derselben, welches erhalten wird, wenn man in ihrem vollständigen oder allgemeinen Integrale der willkührlichen Constante irgend einen bestimmten Werth beilegt, so dass also hiernach partikuläre Auflösungen und partikuläre Integrale der Differentialgleichungen wohl von einander zu unterscheiden sind.

Die Natur der partikulären Auflösungen der Differentialgleichungen soll nun etwas näher erörtert werden.

§. 130.

Wir wollen, indem wir der Kürze wegen $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ setzen,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

annehmen, dass die Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen

$$U = f(x, y, p) = 0$$

gegeben, und dass

$$V = F(x, y, c) = 0,$$

wo c die willkührliche Constante bezeichnet, das vollständige Integral dieser Differentialgleichung sey; so erhält man, wenn man aus den beiden Gleichungen

$$V = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\partial y = 0$$

die willkührliche Constante c eliminirt, jederzeit die Gleichung

$$U = 0.$$

Ich behaupte nun aber, dass, wenn man aus den beiden Gleichungen

$$V = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = 0,$$

wo $\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)$ wie gewöhnlich den partiellen Differentialquotienten der Function V in Bezug auf c als veränderliche Grösse bezeichnet, die Grösse c eliminirt, die dadurch hervorgehende Gleichung jederzeit auch ein Integral der gegebenen Differentialgleichung $U = 0$ ist, wobei sich von selbst versteht, dass die in Rede stehende Gleichung, weil dieselbe offenbar keine willkührliche Constante mehr enthält, eine partikuläre oder besondere Auflösung der Gleichung $U = 0$ ist. Diese Behauptung kann auf folgende Art bewiesen werden.

Um die Grösse c, wie erforderlich ist, aus den beiden Gleichungen

$$V = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = 0$$

zu eliminiren, denke man sich dieselbe aus der zweiten Gleichung bestimmt, und den erhaltenen Werth in die erste eingeführt. Durch Bestimmung von c aus der zweiten der beiden obigen Gleichungen ergiebt sich im Allgemeinen $c = \varphi(x, y)$, und die Gleichung, welche man durch Einführung dieses Werthes von c in die erste der beiden obigen Gleichungen erhält, wollen wir durch

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$$

bezeichnen, so dass man also offenbar die beiden Gleichungen

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \quad \left(\frac{\partial V'}{\partial \varphi(x, y)}\right) = 0$$

hat, wo wie gewöhnlich

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial \varphi(x, y)}\right)$$

den partiellen Differentialquotienten der Function V' in Bezug

auf $\varphi(x, y)$ als unabhängige veränderliche Grösse bezeichnet. Nach der oben ausgesprochenen Behauptung soll nun die Gleichung

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$$

ein Integral der Gleichung $U = 0$ seyn, und dass dies wirklich der Fall ist, kann auf folgende Art bewiesen werden.

Nach bekannten Regeln der Differentialrechnung erhält man durch Differentiation der Gleichung

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0,$$

wenn man bei der Differentiation $\varphi(x, y)$ als eine unabhängige veränderliche Grösse betrachtet, die Gleichung

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial V'}{\partial \varphi(x, y)}\right)\partial \varphi(x, y) = 0,$$

d. i., weil nach dem Obigen

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial \varphi(x, y)}\right) = 0$$

ist, die Gleichung

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\partial y = 0,$$

und die Differentialgleichung, deren Integral die Gleichung

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$$

ist, ist also offenbar die Gleichung, welche durch Elimination von $\varphi(x, y)$ aus den beiden Gleichungen

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \quad \left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\partial y = 0$$

erhalten wird. Nun ist aber klar, dass durch Elimination von $\varphi(x, y)$ aus den beiden Gleichungen

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \quad \left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\partial y = 0,$$

und durch Elimination von c aus den beiden Gleichungen

$$V = F(x, y, c) = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\partial y = 0$$

ganz dieselbe Gleichung erhalten werden muss, und nach dem Obigen liefert die letztere Elimination die Gleichung $U = 0$. Also wird auch durch Elimination von $\varphi(x, y)$ aus den beiden Gleichungen

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \quad \left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\partial y = 0$$

die Gleichung $U = 0$ erhalten, und nach dem Obigen ist folglich die Gleichung

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$$

ein Integral der Gleichung $U = 0$, wie behauptet wurde.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach dem so eben Bewiesenen erhält man also aus dem vollständigen Integral

$$V = F(x, y, c) = 0$$

der Differentialgleichung

$$U = f(x, y, p) = 0$$

jederzeit eine partikuläre Auflösung dieser Differentialgleichung, wenn man aus den beiden Gleichungen

$$V = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = 0,$$

deren letztere erhalten wird, wenn man den partiellen Differentialquotienten von V in Bezug auf c als veränderliche Grösse $= 0$ setzt, die Grösse c eliminirt.

Diese Regel wollen wir nun im folgenden Paragraphen auf einige Beispiele anwenden.

§. 131.

1. Das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$y\,\partial x - x\,\partial y = a\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

ist nach §. 128.

$$y - cx - a\sqrt{1+c^2} = 0,$$

so dass also jetzt

$$V = y - cx - a\sqrt{1+c^2}$$

ist. Entwickeln wir nun den partiellen Differentialquotienten von V in Bezug auf c als unabhängige veränderliche Grösse; so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = -x - \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}},$$

und müssen nun also c aus den beiden Gleichungen

$$y - cx - a\sqrt{1+c^2} = 0, \quad x + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}} = 0$$

eliminiren. Aus der zweiten Gleichung erhält man leicht

$$c = \pm\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \sqrt{1+c^2} = -\frac{ac}{x} = \mp\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

und folglich vermöge der ersten Gleichung

$$y \mp \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = y \pm \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = y \pm \sqrt{a^2-x^2} = 0$$

oder

$$y = \mp\sqrt{a^2-x^2}, \quad y^2 = a^2 - x^2, \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

so dass also

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

eine partikuläre Auflösung der gegebenen Differentialgleichung ist, wie wir auch schon aus §. 128. wissen.

2. Das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$y = px + f(p)$$

ist nach §. 128.

$$y = cx + f(c)$$

oder

$$y - cx - f(c) = 0,$$

und jetzt folglich

$$V = y - cx - f(c);$$

also

$$\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = -x - \frac{\partial f(c)}{\partial c}.$$

Die gesuchte partikuläre Auflösung ergiebt sich durch Elimination von c aus den beiden Gleichungen

$$y = cx + f(c), \quad x + \frac{\partial f(c)}{\partial c} = 0,$$

offenbar ganz übereinstimmend mit §. 128., da dort die partikuläre Auflösung durch Elimination von p aus

$$y = px + f(p), \quad x + \frac{\partial f(p)}{\partial p} = 0$$

gefunden wurde, welches offenbar ganz zu demselben Resultat wie die obige Elimination von c führen muss.

3. Die Differentialgleichung

$$x\partial x + y\partial y = \partial y \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$$

bringt man leicht auf die Form

$$\partial y = \frac{\partial(x^2 + y^2 - a^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}},$$

so dass also offenbar

$$y + c = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2},$$

oder, wenn man diese Gleichung rational macht,

$$x^2 - 2cy - c^2 - a^2 = 0$$

das vollständige Integral der obigen Differentialgleichung ist. Setzt man nun

$$V = x^2 - 2cy - c^2 - a^2;$$

so ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = -2y - 2c,$$

und man muss folglich jetzt c aus den beiden Gleichungen

$$x^2 - 2cy - c^2 - a^2 = 0, \quad y + c = 0,$$

oder, was offenbar dasselbe ist, aus den beiden Gleichungen

$$y + c = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}, \quad y + c = 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

eliminiren. Dadurch erhält man sogleich als partikuläre Auflösung der gegebenen Differentialgleichung die Gleichung

$$\sqrt{x^2+y^2-a^2} = 0 \text{ oder } x^2+y^2-a^2=0.$$

§. 132.

Enthält die Gleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = 0$$

bloss c und constante Grössen; so erhält man, wenn man aus derselben c bestimmt, für diese Grösse einen constanten Werth, und die durch die Elimination von c aus den beiden Gleichungen

$$V = 0, \ \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = 0$$

hervorgehende Gleichung wird folglich offenbar aus der Gleichung $V = 0$ erhalten, wenn man in derselben für c den vorher gefundenen constanten Werth setzt, so dass also in diesem Falle die Gleichung, welche man durch Elimination von c aus den beiden obigen Gleichungen erhält, keine partikuläre Auflösung, sondern bloss ein partikuläres Integral (§. 129.) der gegebenen Differentialgleichung $U = 0$ ist.

Hat die Gleichung $V = 0$ die Form

$$P + cQ = 0,$$

wo P und Q bloss Functionen von x und y seyn, die Grösse c also gar nicht enthalten sollen; so ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = Q,$$

und die Gleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = 0$$

enthält also die Grösse c gar nicht. In diesem Falle ist die Gleichung $Q = 0$ jederzeit selbst ein Integral der Differentialgleichung $U = 0$, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Durch Differentiation der Gleichung

$$P + cQ = 0$$

erhält man die Gleichung

$$\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + c\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\}\partial x + \left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right\}\partial y = 0.$$

Eliminirt man nun aus diesen beiden letzten Gleichungen die Grösse c; so erhält man die Gleichung

$$Q\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\partial y\right\} - P\left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\partial y\right\} = 0,$$

d. i.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$Q\partial P - P\partial Q = 0,$$

und diese Gleichung muss also, weil die Gleichung $P + cQ = 0$ das vollständige Integral der Gleichung $U = 0$ ist, mit dieser letzten Gleichung identisch seyn. Aus $Q = 0$ folgt aber $\partial Q = 0$, und man sieht also, dass, wenn $Q = 0$ ist, jederzeit auch die Gleichung

$$Q\partial P - P\partial Q = 0,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden die Gleichung $U = 0$ erfüllt, die Gleichung $Q = 0$ folglich ein Integral der Gleichung $U = 0$ ist, wie behauptet wurde. Weil aber die Gleichung

$$P + cQ = 0$$

sich unter der Form

$$\frac{P}{c} + Q = 0$$

darstellen lässt, und folglich offenbar für $c = \infty$ in die Gleichung $Q = 0$ übergeht; so ist die Gleichung $Q = 0$ nicht als eine partikuläre Auflösung, sondern bloss als ein partikuläres Integral (§. 129.) der Gleichung $U = 0$ zu betrachten.

Das vollständige Integral der Gleichung

$$y\partial x - x\partial y = x\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

ist nach §. 128.

$$x^2 + y^2 - 2cx = 0.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden $x = 0$ ein partikuläres Integral der vorstehenden Differentialgleichung.

Eine weitere Ausführung der interessanten Lehre von den partikulären Auflösungen der Differentialgleichungen gestattet der Zweck dieses Lehrbuchs nicht.

Funfzehntes Kapitel.

Auflösung einiger geometrischen Aufgaben.

§. 133.

Die Aufgabe: die Curven zu finden, deren Subtangente eine gegebene Function X der Abscisse x ist, führt sogleich auf die Differentialgleichung

$$\frac{y\partial x}{\partial y} = X.$$

Durch Sonderung der veränderlichen Grössen ergiebt sich

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial x}{X},$$

und folglich, wenn man integrirt,

$$\tfrac{1}{2} l.y^2 = \int \frac{\partial x}{X} + c.$$

Soll man z. B. die Curven finden, deren Subtangente a ist; so hat man die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} l.y^2 = \int \frac{\partial x}{a} + c = \frac{x}{a} + c$$

oder

$$l.y^2 = 2\left(\frac{x}{a} + c\right),$$

und folglich

$$y^2 = e^{2\left(\frac{x}{a}+c\right)}, \quad y = \pm e^{\frac{x}{a}+c} = \pm e^c . e^{\frac{x}{a}},$$

oder, wenn man C statt $\pm e^c$ setzt,

$$y = Ce^{\frac{x}{a}}.$$

Dies ist die allgemeine Gleichung der gesuchten Curven, unter denen offenbar die gewöhnliche logarithmische Linie enthalten ist.

Soll man die Curven finden, bei denen die Subtangente der doppelten Abscisse gleich ist; so hat man die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} l.y^2 = \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{x} + c = \tfrac{1}{4} l.x^2 + c$$

oder

$$2\, l.y^2 = l.y^4 = l.x^2 + 4c = l.x^2 + l.e^{4c} = l.e^{4c}x^2,$$

und folglich

$$y^4 = e^{4c}x^2, \quad y^2 = \pm e^{2c}x = Cx,$$

wenn man $\pm e^{2c} = C$ setzt. Hieraus sieht man, dass nur allein die apollonische Parabel die Eigenschaft hat, dass die Subtangente der doppelten Abscisse gleich ist.

§. 134.

Wenn man eine in der Gleichung $\varphi(x', y') = 0$ einer Curve enthaltene constante Grösse, wie z. B. den Parameter in der Gleichung der apollonischen Parabel, sich stetig verändern lässt; so erhält man eine stetige Folge von Gleichungen, denen eine stetige Folge von Curven entspricht, die alle von einerlei Art sind, weil sie sämmtlich durch die allgemeine Gleichung $\varphi(x', y') = 0$ bestimmt werden. Eine alle diese gleichartigen Curven unter ein und demselben Winkel schneidende Curve heisst eine Trajectorie derselben, und zwar eine orthogonale Trajectorie, wenn der gegebene Winkel ein rechter Winkel ist. Das berühmte Problem der Trajectorien sucht die Trajectorie gegebener Curven in jedem Falle zu bestimmen. Die constante Grösse in der Gleichung $\varphi(x', y') = 0$, durch deren Veränderung die stetige Folge von Curven erhalten wird, welche von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Trajectorie sämmtlich unter ein und demselben Winkel geschnitten werden sollen, wollen wir im Folgenden immer durch k bezeichnen.

Bezeichnen wir die trigonometrische Tangente des gegebenen Winkels durch a, die Coordinaten der Trajectorie durch x, y; so ergiebt sich aus den Bedingungen der Aufgabe und bekannten Formeln der Differentialrechnung und der analytischen Geometrie sogleich die Gleichung

$$a = \frac{\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y'}{\partial x'}}{1 + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x'}},$$

oder, wenn wir den Differentialquotienten $\frac{\partial y'}{\partial x'}$, der aus der gegebenen Gleichung $\varphi(x', y') = 0$ immer entwickelt werden kann, durch p' bezeichnen, die Gleichung

$$a\left(1 + p' \frac{\partial y}{\partial x}\right) + p' - \frac{\partial y}{\partial x} = 0 .$$

Ueberlegt man nun aber, dass die gegebenen Curven in den Punkten, in denen sie von der Trajectorie geschnitten werden, dieselben Coordinaten wie die Trajectorie haben, und bezeichnet den Werth, welchen der Differentialquotient p' erhält, wenn man x, y für x', y' setzt, durch p; so wird man sich leicht überzeugen, dass zwischen den Grössen k, x, y jederzeit die zwei Gleichungen

$$\varphi(x, y) = 0, \quad a\left(1 + p \frac{\partial y}{\partial x}\right) + p - \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Statt finden müssen. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich die gesuchte Gleichung der Trajectorie zwischen x und y, wenn man aus denselben die Grösse k eliminirt.

Weil die zweite der beiden obigen Gleichungen auch unter der Form

$$1 + p \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{a}\left(p - \frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0$$

dargestellt werden kann, und für orthogonale Trajectorien $\frac{1}{a} = 0$ ist; so wird man, wenn die gesuchte Trajectorie eine orthogonale seyn soll, die Grösse k aus den beiden Gleichungen

$$\varphi(x, y) = 0, \quad 1 + p \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

eliminiren müssen.

Soll die Trajectorie einer stetigen Folge durch den Anfang der Coordinaten gehender gerader Linien gefunden werden; so ist die gegebene Gleichung $y' = kx'$, und folglich $p' = k$, $p = k$. Also muss man k aus den beiden Gleichungen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$y = kx, \quad a\left(1 + k\frac{\partial y}{\partial x}\right) + k - \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

eliminiren. Dadurch erhält man als Differentialgleichung der gesuchten Trajectorie die Gleichung

$$a(x\,\partial x + y\,\partial y) + y\,\partial x - x\,\partial y = 0\,.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$(ax + y)\,\partial x + (ay - x)\,\partial y = 0;$$

so übersieht man sogleich, dass sich dieselbe nach §. 119. integriren lässt. Setzt man nun $y = xz$; so erhält man nach leichter Rechnung

$$\frac{\partial x}{x} + \frac{(az - 1)\,\partial z}{a(1 + z^2)} = 0,$$

und folglich

$$\tfrac{1}{2}\,l.x^2 + \int\frac{z\,\partial z}{1 + z^2} - \frac{1}{a}\int\frac{\partial z}{1 + z^2} = C,$$

d. i.

$$\tfrac{1}{2}\,l.x^2 + \tfrac{1}{2}\,l(1 + z^2) - \frac{1}{a}\,Arc\,tang\,z = C,$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\,l.x^2 + \tfrac{1}{2}\,l\frac{x^2 + y^2}{x^2} - \frac{1}{a}\,Arc\,tang\,\frac{y}{x} = C,$$

oder

$$al\sqrt{x^2 + y^2} - Arc\,tang\,\frac{y}{x} = aC,$$

oder, wenn man $C = lc$ setzt,

$$al\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c} = Arc\,tang\,\frac{y}{x}\,.$$

Nimmt man den Anfangspunkt der Coordinaten als den Pol eines Systems der polaren Coordinaten φ, z an; so ist

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y = x\,tang\,\varphi, \quad \varphi = Arc\,tang\,\frac{y}{x},$$

und folglich

$$l\frac{z}{c} = \frac{\varphi}{a}\,.$$

Die unter dieser Polargleichung enthaltenen Curven nennt man logarithmische Spiralen.

Soll die gesuchte Trajectorie eine orthogonale seyn; so ist $a = \infty$, $\frac{1}{a} = 0$, und folglich

$$l\frac{z}{c} = 0, \quad \frac{z}{c} = 1, \quad z = c,$$

d. h. die Trajectorie ist ein Kreis, weil der Radius vector z eine constante Grösse ist.

Ist $y'^n = kx'^m$ die gegebene Gleichung; so ist

$$p' = \frac{mkx'^{m-1}}{ny'^{n-1}}, \quad p = \frac{mkx^{m-1}}{ny^{n-1}}.$$

Um nun die Gleichung der orthogonalen Trajectorie zu finden, muss man k aus den beiden Gleichungen

$$y^n = kx^m, \quad 1 + \frac{mkx^{m-1}}{ny^{n-1}} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

eliminiren. Dadurch erhält man die Gleichung

$$nx\partial x + my\partial y = 0,$$

in welcher die veränderlichen Grössen schon gesondert sind. Integrirt man nun; so erhält man

$$nx^2 + my^2 = C,$$

woraus erhellet, dass die gesuchte orthogonale Trajectorie entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel ist. Die unter der gegebenen Gleichung $y'^n = kx'^m$ enthaltenen Curven nennt man überhaupt Parabeln. Die apollonische Parabel erhält man für $m = 1$, $n = 2$.

§. 135.

Wir wollen nun noch die Curve zu bestimmen suchen, welche die Eigenschaft hat, dass alle von einem gegebenen Punkte auf ihre Tangenten gefällten Perpendikel die gegebene Länge a haben.

Man nehme den gegebenen Punkt als Anfang der Coordinaten an. Die Gleichung der durch den Punkt xy der gesuchten Curve gezogenen Tangente ist bekanntlich

$$u - y = \frac{\partial y}{\partial x}(z - x).$$

Die Gleichung des von dem Anfange der Coordinaten, d. i. von dem gegebenen Punkte, auf diese Tangente gefällten Perpendikels ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$u = -\frac{\partial x}{\partial y} z.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir, wenn z, u die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden denselben entsprechenden Linien bezeichnen,

$$z = -\frac{y\partial x - x\partial y}{\partial x^2 + \partial y^2}\partial y, \quad u = \frac{y\partial x - x\partial y}{\partial x^2 + \partial y^2}\partial x.$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe und bekannten Formeln der analytischen Geometrie erhält man nun die Gleichung

$$\frac{(y\partial x - x\partial y)^2}{\partial x^2 + \partial y^2} = a^2, \quad (y\partial x - x\partial y)^2 = a^2(\partial x^2 + \partial y^2);$$

also

$$y\partial x - x\partial y = \pm a\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist nach §. 128.

$$y = cx \pm a\sqrt{1 + c^2},$$

und jede durch diese Gleichung dargestellte gerade Linie hat also die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

Da aber nach §. 131. 1. die obige Differentialgleichung auch noch die partikuläre Auflösung

$$x^2 + y^2 = a^2$$

zulässt; so genügt auch der dieser letztern Gleichung entsprechende Kreis der vorgelegten Aufgabe.

Aus diesem einfachen Beispiele erhellet zugleich, wie wichtig die partikulären Auflösungen der Differentialgleichungen bei auf Differentialgleichungen führenden geometrischen Aufgaben sind.

Sechszehntes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen der zweiten Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen.

§. 136.

Wir müssen uns in diesem Kapitel mit der Integration einiger besonders wichtigen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen, d. i. solcher, welche ausser dem ersten auch noch den zweiten Differentialquotienten, oder letztern allein enthalten, begnügen. Zuerst wollen wir nur einige ganz einfache Fälle betrachten, wobei immer X eine Function von x allein, Y eine Function von y allein bezeichnen soll.

$$1.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + X = 0\,.$$

Stellt man diese Gleichung unter der Form

$$\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + X\partial x = 0$$

dar, und integrirt dann; so ergiebt sich

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \int X\partial x = C,$$

oder

$$\partial y + \partial x \int X\partial x = C\partial x,$$

und folglich, wenn man nun wieder integrirt,

$$y + \int \partial x \int X\partial x = Cx + C',$$

wo C und C' zwei willkührliche Constanten sind.

$$2.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Y = 0\,.$$

Diese Gleichung kann man unter der Form

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$2\frac{\partial y}{\partial x}\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+2Y\partial y=0$$

darstellen. Integrirt man nun, so erhält man

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+2\int Y\partial y=C,$$

und folglich

$$\partial y=\partial x\sqrt{C-2\int Y\partial y},$$

oder

$$\partial x=\frac{\partial y}{\sqrt{C-2\int Y\partial y}}.$$

Also ist

$$x=\int\frac{\partial y}{\sqrt{C-2\int Y\partial y}}+C',$$

wo C und C' wieder zwei willkührliche Constanten sind.

$$3.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+X\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=0.$$

Diese Gleichung kann man auf die Form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}+X=0 \text{ oder } \frac{\partial^2 y\,\partial x}{\partial y^2}+X\partial x=0$$

bringen. Weil nun

$$\partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial x\,\partial^2 y}{\partial y^2},\quad \int\frac{\partial^2 y\,\partial x}{\partial y^2}=-\frac{\partial x}{\partial y}$$

ist; so erhält man durch Integration der obigen Gleichung leicht

$$-\frac{\partial x}{\partial y}+\int X\partial x=C,\quad \partial y=\frac{\partial x}{\int X\partial x-C},$$

und folglich

$$y=\int\frac{\partial x}{\int X\partial x-C}+C'.$$

$$4.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+Y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=0.$$

Diese Gleichung kann man auf die Form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y}+Y\partial y=0 \text{ oder } \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\frac{\partial y}{\partial x}}+Y\partial y=0$$

bringen. Integrirt man nun, so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\int Y\partial y=c,\quad l.\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=2(c-\int Y\partial y),$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = e^{2(c - \int Y \partial y)}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \pm e^c . e^{-\int Y \partial y},$$

oder, wenn man $\pm e^c = C^{-1}$ setzt,

$$\partial x = C \partial y e^{\int Y \partial y},$$

und folglich

$$x = C \int \partial y e^{\int Y \partial y} + C'.$$

$$5. \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + X \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich auf die Form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y} + X \partial x = 0 \text{ oder } \frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\frac{\partial y}{\partial x}} + X \partial x = 0$$

bringen. Integrirt man nun, so erhält man

$$\tfrac{1}{2} l . \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \int X \partial x = c, \quad l . \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 2(c - \int X \partial x),$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = e^{2(c - \int X \partial x)}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \pm e^c . e^{-\int X \partial x}.$$

Also ist, wenn man $\pm e^c = C$ setzt,

$$y = C \int \partial x e^{-\int X \partial x} + C'.$$

$$6. \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Y \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Diese Gleichung kann man auf die Form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x} + Y \partial y = 0 \text{ oder } \partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + Y \partial y = 0$$

bringen, und erhält nun durch Integration

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \int Y \partial y = C, \quad \partial x = \frac{\partial y}{C - \int Y \partial y};$$

also

$$x = \int \frac{\partial y}{C - \int Y \partial y} + C'.$$

Alle hier gefundenen Integrale enthalten zwei willkührliche Constanten, und es wird nun auch leicht im Allgemeinen erhellen, dass überhaupt das Integral jeder Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen zwei willkührliche Constanten enthalten muss.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 137.

Wenn eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung bloss $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ohne x und y enthält; so setze man $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$. Dann wird sich die gegebene Differentialgleichung offenbar immer auf die Form $\frac{\partial p}{\partial x} = P$ oder $\partial x = \frac{\partial p}{P}$, wo P eine Function von p allein ist, bringen lassen. Integrirt man nun, so erhält man

$$1.\quad x = \int \frac{\partial p}{P} + C.$$

Weil aber

$$\partial y = p\,\partial x = \frac{p\,\partial p}{P}$$

ist; so ist

$$2.\quad y = \int \frac{p\,\partial p}{P} + C',$$

und man wird nun durch Elimination der Grösse p aus den Gleichungen 1. und 2. die gesuchte Gleichung zwischen x und y erhalten, wobei zugleich klar ist, dass diese Gleichung wieder zwei willkührliche Constanten enthalten wird.

§. 138.

Wenn eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und x, aber nicht y enthält; so setze man wieder $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$. Dadurch verwandelt sich die gegebene Differentialgleichung in eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen x und p. Kann man diese Differentialgleichung integriren und p durch x ausdrücken; so ist, weil $\partial y = p\,\partial x$ ist, $y = C + \int p\,\partial x$. Sollte sich aber leichter x durch p ausdrücken lassen; so würde nach §. 27. $y = px - \int x\,\partial p$ seyn.

Enthält die gegebene Differentialgleichung $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und y, aber nicht x; so setze man wieder $\frac{\partial y}{\partial x} = p$. Dann ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = p\,\frac{\partial p}{\partial y},$$

und nach gehöriger Substitution erhält man offenbar eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen p und y. Kann man diese Gleichung integriren und p durch y ausdrücken; so ist offenbar $x = C + \int \frac{\partial y}{p}$. Sollte sich aber y leichter durch p ausdrücken lassen; so würde nach §. 27. $x = \frac{y}{p} + \int \frac{y\,\partial p}{p^2}$ seyn.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 139.

Wir wollen uns nun mit der Integration der Gleichung

$$A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} + Cy = 0,$$

wo A, B, C constante Grössen bezeichnen sollen, beschäftigen.

Man setze, um diese Gleichung zu integriren, $y = e^{\int z\partial x}$, wo z eine neue Function von x bezeichnet; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = ze^{\int z\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(z^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) e^{\int z\partial x},$$

und folglich

$$A\left(z^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + Bz + C = 0,$$

welches eine Differentialgleichung der ersten Ornnung ist, durch deren Integration die Function z bestimmt werden muss. Bringt man aber diese Differentialgleichung auf die Form

$$\partial x + \frac{A\partial z}{Az^2 + Bz + C} = 0;$$

so sind die veränderlichen Grössen gesondert, und die Gleichung lässt sich also integriren. Hat man aber auf diese Art z bestimmt; so ist auch $y = e^{\int z\partial x}$ gefunden.

Die gegebene Gleichung lässt sich aber noch auf eine andere merkwürdige Art integriren. Setzt man nämlich $y = ce^{\theta x}$, wo c und θ constante Grössen bezeichnen sollen; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = c\theta e^{\theta x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c\theta^2 e^{\theta x},$$

und folglich

$$A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} + Cy = (A\theta^2 + B\theta + C)ce^{\theta x}.$$

Also wird die Gleichung

$$A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} + Cy = \overline{0}$$

offenbar erfüllt werden, wenn man $y = ce^{\theta x}$ und für θ eine Wurzel der Gleichung

$$A\theta^2 + B\theta + C = 0$$

setzt. c ist eine ganz willkührliche Constante.

Sind nun λ und λ' die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$A\theta^2 + B\theta + C = 0;$$

so genügt sowohl $y = ce^{\lambda x}$, als auch $y = c'e^{\lambda' x}$, wo c und c' willkührliche Constanten sind, der gegebenen Gleichung, und ich behaupte nun, dass auch

$$y = ce^{\lambda x} + c'e^{\lambda' x}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dieser Gleichung genügt, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann.

Man setze $z = ce^{\lambda x}$, $z' = c'e^{\lambda' x}$, und

$$y = z + z' = ce^{\lambda x} + c'e^{\lambda' x};$$

so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z'}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2},$$

und folglich

$$A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} + Cy$$

$$= A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial z}{\partial x} + Cz + A\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + B\frac{\partial z'}{\partial x} + Cz'.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial z}{\partial x} + Cz = 0, \quad A\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + B\frac{\partial z'}{\partial x} + Cz' = 0$$

ist; so ist auch

$$A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} + Cy = 0,$$

wie behauptet wurde.

In Bezug auf die Wurzeln λ und λ' der quadratischen Gleichung

$$A\theta^2 + B\theta + C = 0$$

wollen wir nun die drei folgenden Fälle unterscheiden.

I. Wenn die Wurzeln λ und λ' reell und ungleich sind; so enthält das Integral

$$y = ce^{\lambda x} + c'e^{\lambda' x}$$

unserer Differentialgleichung zwei willkührliche Constanten, und ist daher offenbar als das vollständige Integral dieser Differentialgleichung zu betrachten.

II. Wenn aber die Wurzeln λ und λ' reell und einander gleich sind; so ist

$$y = ce^{\lambda x} + c'e^{\lambda' x} = (c + c')e^{\lambda x},$$

und dieses Integral ist also, weil es offenbar nur die eine willkührliche Constante $c + c'$ enthält, bloss als ein partikuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung zu betrachten. In diesem Falle kann man aber, die zu Anfange dieses Paragraphen gelehrte Methode anwendend, auf folgende Art verfahren.

Nach einem bekannten Satze von den Gleichungen ist

$$Az^2 + Bz + C = A(z - \lambda)^2,$$

und folglich

$$\frac{A\partial z}{Az^2 + Bz + C} = \frac{\partial z}{(z - \lambda)^2};$$

also

$$\int \frac{A\partial z}{Az^2 + Bz + C} = -\frac{1}{z-\lambda} + c.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$x - \frac{1}{z-\lambda} + c = 0$$

und folglich

$$z = \frac{1}{c+x} + \lambda;$$

$$\int z\partial x = \int \frac{\partial x}{c+x} + \int \lambda \partial x = \tfrac{1}{2} l.(c+x)^2 + \lambda x + c'.$$

Also ist nach dem Obigen

$$y = e^{\int z\partial x} = e^{c'} e^{\lambda x} e^{\frac{1}{2} l.(c+x)^2} = \pm e^{c'} e^{\lambda x}(c+x),$$

oder, wenn man jetzt für $\pm ce^{c'}$ und $\pm e^{c'}$ respective c und c' setzt,

$$y = e^{\lambda x}(c + c'x),$$

welches Integral nun zwei willkührliche Constanten enthält, und daher als das vollständige Integral unserer Differentialgleichung zu betrachten seyn wird.

III. Wenn die Wurzeln λ und λ' beide imaginär sind; so sey

$$\lambda = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \lambda' = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Dann ist nach D. §. 126.

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x} e^{\beta x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x.\sqrt{-1}),$$

$$e^{\lambda' x} = e^{\alpha x} e^{-\beta x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - \sin\beta x.\sqrt{-1}).$$

Folglich ist

$$y = e^{\alpha x}\{(c+c')\cos\beta x + (c-c')\sin\beta x.\sqrt{-1}\},$$

oder, wenn man jetzt für $c+c'$ und $(c-c')\sqrt{-1}$ respective c und c' setzt,

$$y = e^{\alpha x}(c\cos\beta x + c'\sin\beta x).$$

§. 140.

Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy = 0,$$

wo P und Q Functionen von x bezeichnen sollen, kann durch die Substitution $y = e^{\int z\partial x}$ immer auf eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zurückgeführt werden, indem man durch diese Substitution auf ganz ähnliche Art wie im vorigen Paragraphen die Gleichung

$$z^2 + \frac{\partial z}{\partial x} + Pz + Q = 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

erhält. Kann man aus dieser Gleichung z bestimmen; so ist auch $y = e^{\int z \partial x}$ als gefunden zu betrachten.

Kennt man zwei partikuläre Integrale unserer Differentialgleichung; so ist, wenn diese beiden partikulären Integrale durch z und z' bezeichnet werden,

$$y = cz + c'z',$$

wo c und c' zwei willkührliche Constanten sind, das vollständige Integral.

Es ist nämlich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = c\frac{\partial z}{\partial x} + c'\frac{\partial z'}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + c'\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2},$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy$$

$$= c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Qz\right) + c'\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + P\frac{\partial z'}{\partial x} + Qz'\right);$$

also, weil nach der Voraussetzung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Qz = 0, \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + P\frac{\partial z'}{\partial x} + Qz' = 0$$

ist,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy = 0,$$

wie erfordert wird.

Kennt man nur ein partikuläres Integral z; so setze man $y = zt$, wo t eine noch unbestimmte Function von x bezeichnet. Dann ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = t\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = t\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x} + z\frac{\partial^2 t}{\partial x^2},$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy$$

$$= t\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Qz\right) + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x} + z\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + Pz\frac{\partial t}{\partial x},$$

d. i., weil nach der Voraussetzung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Qz = 0$$

ist,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy = 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x} + z\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + Pz\frac{\partial t}{\partial x}.$$

Soll nun

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy = 0$$

seyn; so muss t so bestimmt werden, dass

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x} + z\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + Pz\frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

ist. Zu dem Ende setze man $\frac{\partial t}{\partial x} = u$; so wird

$$z\frac{\partial u}{\partial x} + \left(Pz + 2\frac{\partial z}{\partial x}\right)u = 0$$

oder

$$P\partial x + \frac{\partial u}{u} + 2\frac{\partial z}{z} = 0,$$

und folglich

$$\int P\,\partial x + \tfrac{1}{2}l.u^2 + l.z^2 = l.c^2$$

oder

$$-\int P\,\partial x = \tfrac{1}{2}l.u^2 + l.z^2 - l.c^2.$$

Also ist

$$e^{-\int P\partial x} = e^{\frac{1}{2}l.u^2}.e^{l.z^2}.e^{-l.c^2} = \pm\frac{uz^2}{c^2},$$

oder, wenn wir $\pm c^2 = C$ setzen,

$$u = \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{C}{z^2}e^{-\int P\partial x},\quad \partial t = \frac{C\partial x}{z^2}e^{-\int P\partial x};$$

folglich

$$t = C' + C\int\frac{\partial x}{z^2}e^{-\int P\partial x},$$

und daher nach dem Obigen

$$y = C'z + Cz\int\frac{\partial x}{z^2}e^{-\int P\partial x},$$

wodurch also y gefunden ist.

§. 141.

Die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy = R,$$

wo P, Q, R Functionen von x seyn sollen, hängt von der Integration der im vorigen Paragraphen betrachteten Differentialgleichung ab, welches auf folgende Art gezeigt werden kann.

Man setze $y = Vz$, wo V und z noch unbestimmte Functionen von x bezeichnen; so wird die gegebene Gleichung

$$V\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Qz\right) + 2\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + Pz\frac{\partial V}{\partial x} + z\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = R.$$

Nun bestimme man nach §. 140. z aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Qz = 0;$$

so ist ferner V aus der Gleichung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$2\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + Pz\frac{\partial V}{\partial x} + z\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = R$$

zu bestimmen.

Setzt man zu dem Ende $\frac{\partial V}{\partial x} = U$; so wird die vorstehende Gleichung

$$\partial U + \left(P + 2\frac{\partial z}{z\partial x}\right) U\partial x = \frac{R\partial x}{z}.$$

Diese Gleichung lässt sich nach §. 122. integriren, indem man nämlich nach diesem Paragraphen

$$U = e^{-\int(P\partial x + \frac{2\partial z}{z})}\left\{\int e^{\int(P\partial x + \frac{2\partial z}{z})} \cdot \frac{R\partial x}{z} + C\right\},$$

oder, weil

$$e^{-\int\frac{2\partial z}{z}} = \frac{1}{z^2}, \qquad e^{\int\frac{2\partial z}{z}} = z^2$$

ist,

$$U = \frac{e^{-\int P\partial x}}{z^2}\left\{\int e^{\int P\partial x} Rz\partial x + C\right\}$$

erhält.

Ferner ist nun

$$V = \int U\partial x + C', \quad y = z\int U\partial x + C'z,$$

wodurch also, wenn man nur z bestimmt hat, y gefunden ist.

§. 142.

Die Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + A\frac{\partial y}{\partial x} + By = R,$$

wo A und B constante Grössen bezeichnen sollen, hängt nach §. 141. von der Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + A\frac{\partial z}{\partial x} + Bz = 0$$

ab.

Dieser Gleichung wird nach §. 139. Genüge geleistet, wenn man, indem λ eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\theta^2 + A\theta + B = 0$$

ist, $z = e^{\lambda x}$ setzt. Dadurch wird nach §. 141. im vorliegenden Falle

$$U = e^{-(A + 2\lambda)x}\{\int e^{(A+\lambda)x} R\partial x + C\}.$$

Weil aber nach der Theorie der quadratischen Gleichungen, wenn λ' die zweite Wurzel der obigen quadratischen Gleichungen be-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zeichnet, $A = -\lambda - \lambda'$, $A + 2\lambda = \lambda - \lambda'$, $A + \lambda = -\lambda$ ist; so ist

$$U = e^{-(\lambda-\lambda')x}\{\int e^{-\lambda' x} R\partial x + C\};$$

und folglich

$$V = \int e^{-(\lambda-\lambda')x}\partial x \int e^{-\lambda' x} R\partial x + C\int e^{-(\lambda-\lambda')x}\partial x + C',$$

wo wir nun wieder die drei folgenden Fälle unterscheiden wollen.

I. Wenn die Wurzeln λ, λ' beide reell und ungleich sind; so erhält man

$$V = \int e^{-\lambda' x} R\partial x \,.\int e^{-(\lambda-\lambda')x}\partial x - \int e^{-\lambda' x} R\partial x \int e^{-(\lambda-\lambda')x}\partial x$$
$$+ C\int e^{-(\lambda-\lambda')x}\partial x + C'$$
$$= \frac{\int e^{-\lambda x} R\partial x - e^{-(\lambda-\lambda')x}\int e^{-\lambda' x} R\partial x - Ce^{-(\lambda-\lambda')x}}{\lambda-\lambda'} + C',$$

und folglich nach §. 141.

$$y = \frac{e^{\lambda x}\int e^{-\lambda x} R\partial x - e^{\lambda' x}\int e^{-\lambda' x} R\partial x}{\lambda-\lambda'} - \frac{Ce^{\lambda' x}}{\lambda-\lambda'} + C'e^{\lambda x}.$$

II. Wenn die Wurzeln λ, λ' beide reell und einander gleich sind; so ist nach dem Obigen

$$V = \int \partial x \int e^{-\lambda x} R\partial x + Cx + C'$$
$$= x\int e^{-\lambda x} R\partial x - \int e^{-\lambda x} Rx\partial x + Cx + C',$$

und folglich

$$y = e^{\lambda x}\{x\int e^{-\lambda x} R\partial x - \int e^{-\lambda x} Rx\partial x\} + e^{\lambda x}(Cx + C').$$

III. Wenn endlich die Wurzeln λ, λ' beide imaginär sind, und $\lambda = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\lambda' = \alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\lambda - \lambda' = 2\beta\sqrt{-1}$ ist; so ist

$$e^{\pm\lambda x} = e^{\pm\alpha x}.e^{\pm\beta x\sqrt{-1}} = e^{\pm\alpha x}(\cos\beta x \pm \sin\beta x.\sqrt{-1}),$$
$$e^{\pm\lambda' x} = e^{\pm\alpha x}.e^{\mp\beta x\sqrt{-1}} = e^{\pm\alpha x}(\cos\beta x \mp \sin\beta x.\sqrt{-1}),$$

und folglich nach I.

$$y = Ce^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x.\sqrt{-1}) - \frac{Ce}{2\beta\sqrt{-1}}(\cos\beta x - \sin\beta x.\sqrt{-1})$$
$$+ \frac{\left\{\begin{array}{l} e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x.\sqrt{-1})\int e^{-\alpha x}(\cos\beta x - \sin\beta x.\sqrt{-1})R\partial x \\ - e^{\alpha x}(\cos\beta x - \sin\beta x.\sqrt{-1})\int e^{-\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x.\sqrt{-1})R\partial x \end{array}\right\}}{2\beta\sqrt{-1}},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

woraus nach leichter Rechnung

$$y = e^{\alpha x}\left\{\left(C - \frac{C}{2\beta\sqrt{-1}}\right)\cos\beta x + \left(C' + \frac{C}{2\beta\sqrt{-1}}\right)\sin\beta x \,.\, \sqrt{-1}\right\}$$

$$+ \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\left(\sin\beta x \int e^{-\alpha x} R\cos\beta x\,\partial x - \cos\beta x \int e^{-\alpha x} R\sin\beta x\,\partial x\right),$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$C - \frac{C}{2\beta\sqrt{-1}} = c, \quad C'\sqrt{-1} + \frac{C}{2\beta} = c'$$

setzt,

$$y = e^{\alpha x}(c\cos\beta x + c'\sin\beta x)$$

$$+ \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\left(\sin\beta x \int e^{-\alpha x} R\cos\beta x\,\partial x - \cos\beta x \int e^{-\alpha x} R\sin\beta x\,\partial x\right)$$

erhalten wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anhang.

Einiges über Curven von doppelter Krümmung und über krumme Flächen.

I. Tangenten der Curven von doppelter Krümmung.

§. 1.

Die Gleichungen einer Curve von doppelter Krümmung seyen

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, z) = 0,$$

wo bekanntlich die erste die Gleichung der Projection der gegebenen Curve auf der Ebene der xy, die zweite die Gleichung ihrer Projection auf der Ebene der xz ist. Die Projectionen der durch den Punkt xyz der gegebenen Curve gehenden Tangente derselben auf der Ebene der xy und der Ebene der xz sind offenbar die Tangenten der Projectionen der gegebenen Curve auf den in Rede stehenden Ebenen in den Punkten xy und xz dieser Projectionen. Weil nun, wenn wir die veränderlichen Coordinaten durch x', y', z' bezeichnen, bekanntlich die Gleichung der Tangente der Projection der gegebenen Curve auf der Ebene der xy in dem Punkte xy dieser Projection

$$y' - y = \frac{\partial y}{\partial x}(x' - x),$$

dagegen die Gleichung der Tangente der Projection der gegebenen Curve auf der Ebene der xz in dem Punkte xz dieser Projection

$$z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x)$$

ist, wo die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}$ respective aus den gegebenen Gleichungen

$$f(x, y) = 0 \text{ und } \varphi(x, z) = 0$$

entwickelt werden müssen; so sind

$$y' - y = \frac{\partial y}{\partial x}(x' - x), \quad z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die gesuchten Gleichungen der Tangente der gegebenen doppelt gekrümmten Curve in dem Punkte xyz dieser Curve.

Setzt man

$$f(x, y) = s, \quad \varphi(x, z) = S;$$

so ist

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right).\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right).\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Bestimmt man aus diesen beiden Gleichungen $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, und führt die gefundenen Ausdrücke in die obigen Gleichungen der durch den Punkt xyz der gegebenen Curve gezogenen Tangente derselben ein; so werden diese Gleichungen leicht auf die Form

$$(x' - x)\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) + (y' - y)\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) = 0,$$

$$(x' - x)\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) + (z' - z)\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right) = 0$$

gebracht.

§. 2.

Die Gleichung der Normalebene der gegebenen doppelt gekrümmten Curve in dem Punkte xyz, d. h. der Ebene, welche durch diesen Punkt geht, und auf der durch denselben gezogenen Berührenden der gegebenen Curve senkrecht steht, sey

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0.$$

Weil diese Ebene durch den Punkt xyz geht; so ist

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

und folglich, wenn man die letztere Gleichung von der erstern subtrahirt,

$$A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0,$$

wodurch D eliminirt ist. Weil ferner die Normalebene auf der durch den Punkt xyz der gegebenen Curve an dieselbe gezogenen Tangente senkrecht steht; so ist nach Principien der analytischen Geometrie und §. 1.

$$B = A\frac{\partial y}{\partial x}, \quad C = A\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Also ist

$$x' - x + (y' - y)\frac{\partial y}{\partial x} + (z' - z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

die gesuchte Gleichung der Normalebene.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Berührende Ebenen krummer Flächen.

§. 3.

Die Gleichung einer beliebigen krummen Fläche sey

$$f(x, y, x) = 0 .$$

Die Gleichung jeder durch den Punkt xyz dieser Fläche gelegten Ebene hat nach Principien der analytischen Geometrie die Form

$$A(x' - x) + B(y' - y) + z' - z = 0 .$$

Nun lasse man sich x und y um die willkührlichen Grössen Δx und Δy ändern, und bezeichne die dritte Coordinate des den Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ entsprechenden Punktes in der durch die vorstehende Gleichung bestimmten Ebene durch Z; so erhält man, wenn man in dieser Gleichung für x', y', z' respective $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, Z setzt, leicht

$$A\Delta x + B\Delta y + Z - z = 0$$

oder

$$Z = z - A\Delta x - B\Delta y .$$

Bezeichnen wir ferner die dritte Coordinate des den Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ entsprechenden Punktes in der gegebenen krummen Fläche durch $z + \Delta z$; so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze für Functionen mit mehrern veränderlichen Grössen

$$z + \Delta z = z + \partial z + \tfrac{1}{2}F''(\varrho) ,$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet, und $F''(\varrho)$ aus $\partial^2 z$ erhalten wird, wenn man für x, y respective $x + \varrho\partial x$, $y + \varrho\partial y$ oder eigentlich $x + \varrho\Delta x$, $y + \varrho\Delta y$ setzt. Weil aber bekanntlich

$$\partial z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\partial y = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Delta y$$

ist; so ist

$$z + \Delta z = z + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Delta y + \tfrac{1}{2}F''(\varrho).$$

Ueberlegt man nun, dass $\partial^2 z$ die Grössen ∂x, ∂y oder eigentlich Δx, Δy in jedem Gliede in der zweiten Dimension enthält; so erhellet aus Vergleichung der beiden Gleichungen

$$Z = z - A\Delta x - B\Delta y,$$

$$z + \Delta z = z + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Delta y + \tfrac{1}{2}F''(\varrho)$$

leicht, dass unter allen Ebenen, welche sich durch den Punkt xyz in der gegebenen krummen Fläche legen lassen, die sich in

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Nähe des Punktes xyz am Engsten, Innigsten oder Genauesten an die krumme Fläche anschliesst, für welche

$$-A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad -B = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

$$A = -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad B = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ist, und dass folglich

$$-(x'-x)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - (y'-y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + z' - z = 0$$

oder

$$(x'-x)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (y'-y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - (z'-z) = 0,$$

oder

$$z' - z = (x'-x)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (y'-y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

die Gleichung der, die gegebene krumme Fläche in dem Punkte xyz berührenden Ebene ist.

Die partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ müssen immer aus der gegebenen Gleichung $f(x, y, z) = 0$ entwickelt werden.

Setzt man $f(x, y, z) = s$; so ist

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Bestimmt man aus diesen Gleichungen $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, und führt die Werthe in die Gleichung der berührenden Ebene ein; so erhält diese Gleichung die Form

$$(x'-x)\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) + (y'-y)\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) + (z'-z)\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) = 0.$$

Ist z. B.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

oder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1 = 0$$

die Gleichung der gegebenen krummen Fläche; so ist

$$s = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) = \frac{2x}{a^2}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) = \frac{2y}{b^2}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) = \frac{2z}{c^2}.$$

Also ist

$$(x'-x)\frac{x}{a^2}+(y'-y)\frac{y}{b^2}+(z'-z)\frac{z}{c^2}=0$$

oder

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=0,$$

d. i.

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}-1=0,$$

oder

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1$$

die Gleichung der die gegebene krumme Fläche in dem Punkte xyz berührenden Ebene.

§. 4.

Sind jetzt

$$y'=Ax'+B,\quad z'=A'x'+B'$$

die Gleichungen der Normale der durch die Gleichung

$$f(x,y,z)=0$$

characterisirten krummen Fläche in dem Punkte xyz; so ist, weil diese Normale durch den Punkt xyz geht,

$$y=Ax+B,\quad z=A'x+B',$$

und folglich durch Subtraction

$$y'-y=A(x'-x),\quad z'-z=A'(x'-x).$$

Weil aber die Normale ihrem Begriffe nach auf der Berührungsebene der krummen Fläche in dem Punkte xyz senkrecht ist; so ergeben sich als Gleichungen der Normale nach Principien der analytischen Geometrie nun sehr leicht die beiden Gleichungen

$$y'-y=\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)(x'-x),\quad z'-z=-\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)(x'-x)$$

oder auch

$$x'-x=-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)(z'-z),\quad y'-y=-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)(z'-z).$$

III. Rectification der Curven von doppelter Krümmung.

§. 5.

Es seyen wieder

$$f(x,y)=0,\quad \varphi(x,z)=0$$

die Gleichungen einer Curve von doppelter Krümmung, und s bezeichne überhaupt einen bei dem Punkte xyz dieser Curve

sich endigenden Bogen derselben. Aendert nun x sich um Δx; so werden sich y, z, s respective um Δy, Δz, Δs ändern, und nach Principien der analytischen Geometrie ist

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

oder

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2.$$

Also ist, wenn man Δx sich der Null nähern lässt, und zu den Gränzen übergeht,

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

oder auch

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2.$$

Hieraus erhält man, wenn jetzt s den zwischen den beiden, den Werthen a und b von x entsprechenden Punkten der gegebenen Curve liegenden Bogen derselben bezeichnet, unter der Voraussetzung, dass a kleiner als b ist, durch ganz ähnliche Betrachtungen wie in §. 92. und §. 93. der Integralrechnung ohne Schwierigkeit

$$s = \int_a^b \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}.$$

Die Differentialquotienten unter dem Wurzelzeichen sind immer aus den Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, z) = 0$$

der gegebenen Curve zu entwickeln.

IV. Complanation krummer Flächen.

§. 6.

Die Gleichung einer beliebigen krummen Fläche sey

$$f(x, y, z) = 0.$$

Die Gleichung der durch den Punkt xyz dieser krummen Fläche gehenden Berührungsebene derselben ist nach §. 3.

$$(x' - x)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (y' - y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - (z' - z) = 0.$$

Folglich ist, wenn V den Neigungswinkel dieser Berührungsebene gegen die Ebene der xy bezeichnet, nach Principien der analytischen Geometrie

$$\cos V = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lässt man sich jetzt x und y um die positiven Grössen Δx und Δy verändern, und bezeichnet das Stück der gegebenen Fläche, dessen Projection auf der Ebene der xy das durch Δx und Δy bestimmte Rechteck ist, durch F; so ist nach einem bekannten Satze von den Projectionen

$$\Delta x \Delta y = F \cos V,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\Delta x \Delta y = \frac{F}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

oder

$$F = \Delta x \Delta y \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner die Grössen Δx und Δy sind.

§. 7.

Seyen nun a, b, wo a kleiner als b seyn soll, zwei beliebige Werthe von x, und α, β, wo α kleiner als β seyn soll, zwei beliebige Werthe von y. Durch die Endpunkte von a, b lege man zwei mit der Ebene der yz, durch die Endpunkte von α, β zwei mit der Ebene der xz parallele Ebenen, und bezeichne das zwischen diesen vier auf der Ebene der xy senkrechten Ebenen liegende Stück der gegebenen krummen Fläche durch S.

Legt man überhaupt durch die Endpunkte der Coordinaten x und $x + \Delta x$ zwei mit der Ebene der yz parallele Ebenen; so ist das zwischen diesen beiden und den durch die Endpunkte von α, β mit der Ebene der xz parallel gelegten Ebenen enthaltene Stück der gegebenen krummen Fläche nach §. 6. und dem in §. 103. der Integralrechnung bewiesenen Satze offenbar

$$= \Delta x \int_\alpha^\beta \partial y \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δx ist, und folglich wieder nach dem angeführten Satze der Integralrechnung offenbar

$$S = \int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta \partial y \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Dass man in dieser Formel auch x und y gegen einander vertauschen, und folglich auch

$$S = \int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b \partial x \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

setzen kann, geht aus der obigen einfachen Betrachtung sogleich hervor. Auch braucht wohl kaum noch besonders erinnert zu werden, dass bei der ersten Integration in der ersten Formel x, in der zweiten Formel dagegen y als constant zu betrachten ist.

Gewöhnlich schreibt man die beiden obigen Formeln unter der Form

$$S = \int_a^b \int_\alpha^\beta \partial x \partial y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

und

$$S = \int_\alpha^\beta \int_a^b \partial y \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

§. 8.

Wir wollen uns jetzt in der Ebene der xy eine beliebige Curve denken, deren Gleichung $y = \varphi(x)$ seyn mag, und wollen durch diese Curve eine auf der Ebene der xy senkrechte Cylinderfläche legen. Ferner wollen wir durch die Endpunkte der Coordinaten $x = a$, $x = b$, wo a kleiner als b seyn soll, zwei mit der Ebene der yz parallele Ebenen legen, nehmen an, dass der zwischen diesen beiden Ebenen liegende Theil der durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ bestimmten Curve ganz auf der positiven Seite der Ebene der xz liegt, und bezeichnen das zwischen der Ebene der xz, den beiden durch die Endpunkte der Coordinaten $x = a$, $x = b$ mit der Ebene der yz parallel gelegten Ebenen, und der in Rede stehenden Cylinderfläche liegende Stück der gegebenen krummen Fläche durch Σ.

Legt man überhaupt durch die Endpunkte der Coordinaten x und $x + \Delta x$ zwei mit der Ebene der yz parallele Ebenen; so ist das zwischen diesen beiden Ebenen, der in Rede stehenden Cylinderfläche und der Ebene der xz enthaltene Stück der gegebenen krummen Fläche nach §. 6. und dem in §. 103. der Integralrechnung bewiesenen Satze offenbar

$$= \Delta x \int_0^{\varphi(x)} \partial y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

wo bei der Integration x als constant zu betrachten ist, mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δx ist.

Folglich ist nach dem angeführten Satze der Integralrechnung offenbar

$$\Sigma = \int_a^b \partial x \int_0^{\varphi(x)} \partial y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 9.

Ist die gegebene krumme Fläche z. B. eine Kegelfläche, deren Axe in der Axe der z, und die kreisförmige Grundfläche in der Ebene der xy liegt; so ist, wenn a der Halbmesser der Grundfläche, b die Höhe der Spitze über der Ebene der xy ist, für jeden Punkt dieser Kegelfläche offenbar

$$a - \sqrt{x^2+y^2} : z = a : b,$$

oder

$$a(b-z) = b\sqrt{x^2+y^2},$$

oder

$$a^2(b-z)^2 = b^2(x^2+y^2),$$

welches also die Gleichung der in Rede stehenden Kegelfläche ist. Aus dieser Gleichung erhält man leicht

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{bx}{a\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{by}{a\sqrt{x^2+y^2}};$$

folglich

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Ist nun Σ zwischen der Ebene der xz, der Ebene der yz, einer durch den Endpunkt von x mit der Ebene der yz parallel gelegten Ebene, und der über dem Umfange der Grundfläche des Kegels auf der Ebene der xy senkrecht errichteten Cylinderfläche enthalten; so ist nach §. 8.

$$\Sigma = \int_0^x \partial x \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{\partial y}{a}\sqrt{a^2+b^2},$$

d. i.

$$\Sigma = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\int_0^x \partial x\sqrt{a^2-x^2}.$$

Aber

$$\int \partial x\sqrt{a^2-x^2} = \int \frac{(a^2-x^2)\,\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int\frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{\partial\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = Arc\sin\frac{x}{a},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2}a^2\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ (J. §. 57.)}$$

$$= -\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2}a^2\,Arc\sin\frac{x}{a};$$

also

$$\int \partial x\sqrt{a^2-x^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2}a^2\,Arc\sin\frac{x}{a},$$

und folglich

$$\Sigma = \frac{1}{2a}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left\{x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,Arc\sin\frac{x}{a}\right\}.$$

Will man den vierten Theil der ganzen Kegelfläche haben, so muss man $x = a$ setzen. Dadurch erhält man den vierten Theil der ganzen Kegelfläche $= \frac{1}{4}a\pi\sqrt{a^2+b^2}$, und also die ganze Kegelfläche $= a\pi\sqrt{a^2+b^2}$, wie auch schon aus den Elementen der Geometrie bekannt ist.

§. 10.

In *Fig.* 4. sey $ABCF$ der Octant einer mit dem Halbmesser $OA = OB = OC = a$ aus O als Mittelpunkt beschriebenen Kugelfläche. Ueber $OA = a$ als Durchmesser sey in der Ebene der xy auf der positiven Seite der Ebene der xz ein Halbkreis beschrieben, und durch denselben eine auf der Ebene der xy senkrechte Cylinderfläche gelegt. Endlich sey durch den Endpunkt D von $OD = x$ eine mit der Ebene der yz parallele Ebene gelegt, und nun das Flächenstück $CFG = \Sigma$ zu bestimmen.

Die Gleichung der Kugelfläche ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{x}{z} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{y}{z} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}.$$

Also ist nach §. 8., wie leicht erhellen wird,

$$\Sigma = a\int_0^x \partial x\int_0^{\sqrt{x(a-x)}}\frac{\partial y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aber

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \int \frac{\partial . \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2}} = Arc\,sin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und folglich

$$\Sigma = a \int_0^x \partial x\, Arc\,sin \sqrt{\frac{x}{a + x}}\,.$$

Aber

$$\int \partial x\, Arc\,sin \sqrt{\frac{x}{a + x}} = x\, Arc\,sin \sqrt{\frac{x}{a + x}} - \int x\, \partial Arc\,sin \sqrt{\frac{x}{a + x}}\,,$$

d. i., weil

$$\partial\, Arc\,sin \sqrt{\frac{x}{a + x}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \partial x}{2 (a + x) \sqrt{x}}\,,$$

$$\int \frac{\partial x}{(a + x) \sqrt{x}} = 2a^{-\frac{1}{2}}\, Arc\,sin \sqrt{\frac{x}{a + x}}$$

ist,

$$\int \partial x\, Arc\,sin \sqrt{\frac{x}{a + x}} = x\, Arc\,sin \sqrt{\frac{x}{a + x}} - \tfrac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} \int \frac{x^{\frac{1}{2}} \partial x}{a + x}\,.$$

Folglich

$$\Sigma = ax\, Arc\,sin \sqrt{\frac{x}{a + x}} - \tfrac{1}{2} a^{\frac{3}{2}} \int_0^x \frac{x^{\frac{1}{2}} \partial x}{a + x}\,.$$

Aber

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}} \partial x}{a + x} = \int \frac{x\, \partial x}{(a + x) \sqrt{x}} = \int \frac{(a + x - a)\, \partial x}{(a + x) \sqrt{x}}$$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}} \partial x - a \int \frac{\partial x}{(a + x) \sqrt{x}} = 2x^{\frac{1}{2}} - a \int \frac{\partial x}{(a + x) \sqrt{x}}\,,$$

oder nach dem Obigen

$$\int_0^x \frac{x^{\frac{1}{2}} \partial x}{a + x} = 2x^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}\, Arc\,sin \sqrt{\frac{x}{a + x}}\,.$$

Folglich ist

$$\Sigma = a(a + x)\, Arc\,sin \sqrt{\frac{x}{a + x}} - a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}}\,.$$

Bezeichnen wir das Flächenstück $BCEF$ durch Σ; so ist, weil man sich auch über dem Kreisquadranten AB eine auf der

Ebene der xy senkrechte Cylinderfläche errichtet denken kann, nach §. 8. offenbar

$$\Sigma' = a\int_0^x \partial x \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{\partial y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden, wie leicht erhellen wird,

$$\Sigma a \quad \int_0^x \tfrac{1}{2}\pi\,\partial x = \tfrac{1}{2}a\pi x.$$

Ist nun Σ'' das Flächenstück $BCEG$; so ist

$$\Sigma'' = \Sigma' - \Sigma$$

$$= ax\left(\tfrac{1}{2}\pi - Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right) - a^2\,Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}} + a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}$$

$$= a\left(x\,Arc\cos\sqrt{\frac{x}{a+x}} - a\,Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right) + a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}.$$

Will man das Flächenstück $ABCG$ haben; so muss man in dieser Gleichung $x = a$ setzen, und erhält dadurch leicht dieses Flächenstück $= a^2$.

V. Cubirung der durch krumme Flächen begränzten Körper.

§. 11.

Die Gleichung der begränzenden krummen Fläche sey

$$f(x, y, z) = 0;$$

zyz sey ein beliebiger Punkt derselben, wobei wir z als positiv annehmen wollen. Lässt man x und y sich um die positiven Grössen Δx und Δy ändern, legt durch jeden der beiden Punkte xy und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ zwei Ebenen, von denen die eine mit der Ebene der xz, die andere mit der Ebene der yz parallel ist, und bezeichnet das Volumen des von diesen vier auf der Ebene der xy senkrechten Ebenen und der gegebenen krummen Fläche eingeschlossenen, auf der Ebene der xy stehenden prismatischen Körpers durch P; so ist offenbar mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner die Grössen Δx und Δy sind,

$$P = z\,\Delta x\,\Delta y\,.$$

Sind nun wieder a, b, wo a kleiner als b seyn soll, zwei beliebige Werthe von x, dagegen α, β, wo α kleiner als β

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

seyn soll, zwei beliebige Werthe von y; so kann man sich durch die Endpunkte von a, b wie in §. 7. zwei mit der Ebene der yz, durch die Endpunkte von α, β zwei mit der Ebene der xz parallele Ebenen gelegt denken, und erhält dann, wenn man das Volumen des von diesen vier Ebenen, der Ebene der xy und der gegebenen krummen Fläche eingeschlossenen Körpers durch V bezeichnet, auf ganz ähnliche Art wie in §. 7.

$$V = \int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta z \partial y = \int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b z \partial x,$$

oder

$$V = \int_a^b \int_\alpha^\beta z \partial x \partial y = \int_\alpha^\beta \int_a^b z \partial y \partial x.$$

Annehmen wollen wir hierbei übrigens, dass z in der ganzen Ausdehnung des Körpers, dessen Volumen V bestimmt werden soll, positiv sey.

Macht man ferner eine ganz ähnliche Construction wie in §. 8. und bezeichnet das Volumen des von der Ebene der xy, den beiden der Ebene der yz parallel gelegten Ebenen, der Ebene der xz, der Cylinderfläche und der gegebenen krummen Fläche eingeschlossenen Körpers durch W; so ist auf ganz ähnliche Art wie in §. 8.

$$W = \int_a^b \partial x \int_o^{\varphi(x)} z \partial y.$$

§. 12.

In *Fig.* 5. sey ABC der vierte Theil einer Kegelfläche von der Art der in §. 9. betrachteten, deren Gleichung also nach §. 9.

$$a^2 (b - z)^2 = b^2 (x^2 + y^2)$$

oder

$$z = \frac{b}{a} (a - \sqrt{x^2 + y^2})$$

ist. Legen wir nun durch den Endpunkt D von $OD = x$ eine mit der Ebene der yz parallele Ebene DEF und bezeichnen das Volumen des Körpers $ADEF$ durch W; so ist nach §. 11.

$$W = \frac{b}{a} \int_x^a \partial x \int_o^{\sqrt{a^2 - x^2}} (a - \sqrt{x^2 + y^2}) \partial y.$$

Nun ist

$$\int (a - \sqrt{x^2+y^2})\,\partial y = ay - \int \partial y \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= ay - \tfrac{1}{2} y \sqrt{x^2+y^2} - \tfrac{1}{2} x^2 \int \frac{\partial y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ (J. §. 56.)}$$

$$= ay - \tfrac{1}{2} y \sqrt{x^2+y^2} - \tfrac{1}{2} x^2 l(y + \sqrt{x^2+y^2}) \text{ (J. §. 34. I.)},$$

und folglich

$$\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a - \sqrt{x^2+y^2})\,\partial y = \tfrac{1}{2} a \sqrt{a^2-x^2} - \tfrac{1}{2} x^2 l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

Also ist

$$W = \frac{b}{2a}\left(a \int_x^a \partial x \sqrt{a^2-x^2} - \int_x^a x^2\,\partial x\, l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right).$$

Nach §. 9. ist

$$\int_x^a \partial x \sqrt{a^2-x^2} = -\tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \left(\tfrac{1}{2}\pi - Arc\sin\frac{x}{a}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2} a^2\, Arc\cos\frac{x}{a}.$$

Ferner ist

$$\int x^2\,\partial x\, l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

$$= \tfrac{1}{3} x^3 l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \tfrac{1}{3} \int x^3\,\partial l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

$$= \tfrac{1}{3} x^3 l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + \tfrac{1}{3} a \int \frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \tfrac{1}{3} x^3 l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \tfrac{1}{6} ax \sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{6} a^3\, Arc\sin\frac{x}{a}$$

(§. 9.)

und folglich

$$\int_x^a x^2\,\partial x\, l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

$$= -\tfrac{1}{3} x^3 l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + \tfrac{1}{6} ax \sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{6} a^3\, Arc\cos\frac{x}{a}.$$

Also ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$W = \frac{b}{2a}\left\{\tfrac{1}{3}a^3 \, Arc\cos\frac{x}{a} - \tfrac{2}{3}ax\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{3}x^3 \, l\,\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right\},$$

$$2W = \frac{b}{a}\left\{\tfrac{1}{3}a^3 \, Arc\cos\frac{x}{a} - \tfrac{2}{3}ax\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{3}x^3 \, l\,\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right\}.$$

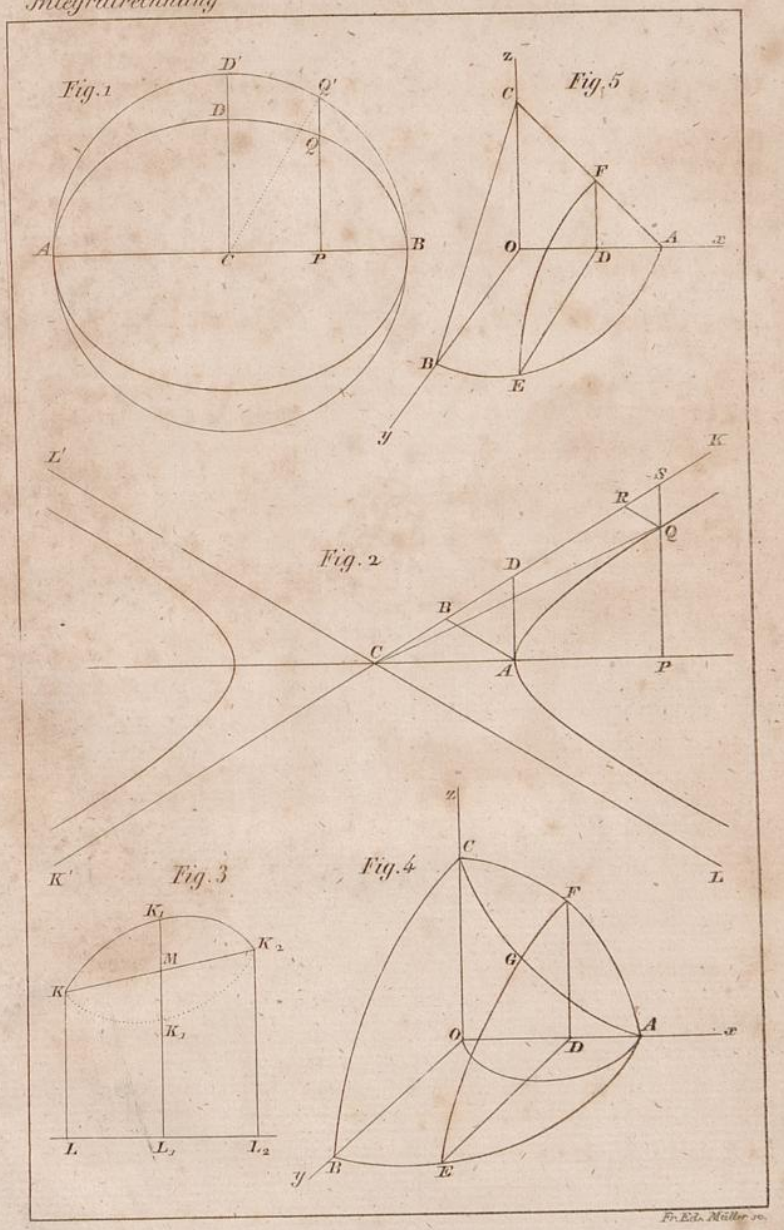
Das Volumen W' des Körpers $BCFDEO$ erhält man, wenn man W von dem vierten Theile des ganzen Kegels, d. i. von $\frac{1}{12}a^2b\pi$ abzieht. Dadurch erhält man

$$W' = \frac{b}{2a}\left\{\tfrac{1}{3}a^3 \, Arc\sin\frac{x}{a} + \tfrac{2}{3}ax\sqrt{a^2-x^2} - \tfrac{1}{3}x^3 \, l\,\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right\},$$

$$2W' = \frac{b}{a}\left\{\tfrac{1}{3}a^3 \, Arc\sin\frac{x}{a} + \tfrac{2}{3}ax\sqrt{a^2-x^2} - \tfrac{1}{3}x^3 \, l\,\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right\}.$$

Druck von C. P. Melzer in Leipzig.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Fr. Ed. Müller sc.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf