Zum Problem der drei Körper.

Die nachstehende Arbeit behandelt das Problem der drei Körper nicht im ganzen, sondern beschäftigt sich speciell mit der Lage und Bewegung einzelner Punkte, Geraden und Ebenen, die mit den drei Körpern in einer engen und wichtigen Verbindung stehn. Die Untersuchungen berühren die astronomische Seite des Problems gar nicht, sie gehen von dem Problem der zwei Körper aus, welches aus mehreren Gründen die natürlichste Vorstufe für das Dreikörperproblem ist. Die Differentialgleichungen und die Kräftefunktion des letzteren gehen in die des ersteren über, sobald die Masse eines Körpers gleich 0 gesetzt wird. In jedem bekannten, einfachen oder zusammengesetzten Integral des weiteren Problems ist auch ein Integral des engeren mit enthalten und zwar so, dafs alle andern Bestandtheile fortfallen, wenn die Masse eines Körpers den Wert 0 erhält. Diese und andere Beziehungen zwischen den Problemen sind die Folge davon, dafs beiden dasselbe Anziehungsgesetz zu grunde liegt. Daher ist auch die Annahme nicht unberechtigt, dafs unter den bis jetzt noch unbekannten Integralen des Dreikörperproblems ebenfalls einzelne oder mehrere zu einer Gruppe zusammengehörigen vorhanden sind, die in der angegebenen Weise aus Integralen des specielleren Problems und natürlich aus solchen gebildet sind, welche nicht bereits in den bekannten Integralen vorkommen. Diese Annahme weist zugleich auf einen Weg zur Auffindung der unbekannten Integrale hin, auf den nämlich, die Integrale des Zweikörperproblems um dieselben Teile, welche zugleich mit der im Integral fehlenden dritten Masse fortgefallen sind, wieder zu ergänzen. Aber man darf die grofsen Schwierigkeiten des Weges nicht verkennen. Denn obgleich mehr Integrale als zur Lösung nöthig für das Problem der zwei Körper vorhanden sind und ihre Zahl durch den Jacobi-Poissonschen Satz noch vermehrt werden kann, so fehlt doch vorläufig jede Andeutung darüber, wie diejenigen unter ihnen ermittelt werden können, welche sich wirklich zu Integralen des allgemeineren Problems ergänzen lassen, auch der Übergang vom besondern zum allgemeinen Integral wird nur durch äufserst umständliche und langwierige Rechnungen zu gewinnen sein. Ohne Zweifel sind, bevor dieser Weg zu einem Erfolg führen kann, besonders nach zwei Richtungen tiefere Vorarbeiten nothwendig. Das Problem der zwei Körper mufs erstens vom rein mathematischen Standpunkte vollständig bis in alle Einzelheiten des Bewegungsvorganges gelöst und untersucht werden, damit seine Beziehungen zum Dreikörperproblem immer deutlicher hervortreten und zweitens die bleibenden, das heifst die auf das letztere Problem entweder unmittelbar oder in erweiterter Form übertragbaren Eigentümlichkeiten gefunden werden können.

In diesem Sinne knüpfen die nachstehenden Untersuchungen an das Problem der zwei Körper an. Ich versuchte bekannte Eigenschaften derselben zu verallgemeinern und auf das

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Problem der drei Körper zu übertragen und teils aus der Form der Differentialgleichungen selbst, teils aus der geometrischen oder kinematischen Bedeutung der Integrale und ihrer Teile ergab sich eine Anzahl von Resultaten über die charakteristische Lage und Bewegung wichtiger Punkte, Geraden und Ebenen des Dreikörperproblems, von welchen im folgenden von § 4 an eine Auswahl veröffentlicht wird. In den ersten drei §§ sind die Bewegungsgleichungen und Integrale, auf welche später Bezug genommen wird, in der für meine Zwecke geeigneten Form und Bezeichnungsweise zusammengestellt.

§ 1. Die Differentialgleichungen der Bewegung.

Drei materielle Punkte P_1 P_2 P_3, d. h. drei Körper, deren Ausdehnung vernachläſsigt und deren Masse im Schwerpunkt befindlich angenommen wird, ziehen sich nach dem Newtonschen Gesetz gegenseitig an. Sie mögen die Massen m_1 m_2 und m_3 und die rechtwinkligen Coordinaten $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ und $x_3 y_3 z_3$ haben. Ich bezeichne ferner zur Abkürzung die Differenz je zweier zu derselben Axe gehörigen Coordinaten, wie etwa $x_1 - x_2$, $y_2 - y_3$ mit x_{12}, y_{23}, die Entfernung je zweier Körper von einander mit r_{12}, r_{23} und r_{31} und das Produkt je zweier Massen mit m_{12}, m_{23} und m_{31}.

Die Kräftefunktion des Problems ist der Ausdruck

$$U = \frac{m_{12}}{r_{12}^3} + \frac{m_{23}}{r_{23}^3} + \frac{m_{31}}{r_{31}^3}. \tag{1.}$$

Die partiellen Differentialquotienten der Kräftefunktion nach den Coordinaten eines Körpers geben die in der Richtung der entsprechenden Coordinatenaxe gemessenen Componenten derjenigen Kraft, mit welcher der Körper von den beiden andern angezogen wird (cf. Vorlesungen über Dynamik von C. G. J. Jacobi S. 10 und 11). Daher sind die neun Differentialgleichungen der Bewegung folgende:

$$\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{m_{12} x_{12}}{r_{12}^3} + \frac{m_{31} x_{31}}{r_{31}^3}, \\
m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y_1} = -\frac{m_{12} y_{12}}{r_{12}^3} + \frac{m_{31} y_{31}}{r_{31}^3}, \\
m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_1} = -\frac{m_{12} z_{12}}{r_{12}^3} + \frac{m_{31} z_{31}}{r_{31}^3}. \\
\hline
m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{m_{23} x_{23}}{r_{23}^3} + \frac{m_{12} x_{12}}{r_{12}^3}, \\
m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y_2} = -\frac{m_{23} y_{23}}{r_{23}^3} + \frac{m_{12} y_{12}}{r_{12}^3}, \\
m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_2} = -\frac{m_{23} z_{23}}{r_{23}^3} + \frac{m_{12} z_{12}}{r_{12}^3}. \\
\hline
m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_3} = -\frac{m_{31} x_{31}}{r_{31}^3} + \frac{m_{23} x_{23}}{r_{23}^3}, \\
m_3 \frac{d^2 y_3}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y_3} = -\frac{m_{31} y_{31}}{r_{31}^3} + \frac{m_{23} y_{23}}{r_{23}^3}, \\
m_3 \frac{d^2 z_3}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_3} = -\frac{m_{31} z_{31}}{r_{31}^3} + \frac{m_{23} z_{23}}{r_{23}^3}.
\end{aligned} \tag{2.}$$

Wir wollen die Differentialquotienten nach der Zeit t, wie es gebräuchlich ist, fernerhin durch rechts oben gesetzte Accente bezeichnen. — Das System der Differentialgleichungen ist auf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

verschiedene Weise transformiert worden. Die Hessesche Umformung, welche die Differenzen zweier Coordinaten als Variable einführt, liegt am nächsten und ist mithin eine der wichtigsten (cf. Über das Problem der drei Körper, Crelle-Borchardts Journal Bd. 74, S. 97 u. ff.). Es ergeben sich nämlich, wenn die drei ersten Gleichungen des Systems (2) mit m_2 multipliciert und darauf die mit m_1 multiplicierten drei folgenden bezüglich subtrahiert werden, die Umformungen

$$\begin{aligned} m_{12}x_{12}'' &= -m_{12}M\frac{x_{12}}{r_{12}^3} + \pi A, \\ m_{12}y_{12}'' &= -m_{12}M\frac{y_{12}}{r_{12}^3} + \pi B, \\ m_{12}z_{12}'' &= -m_{12}M\frac{z_{12}}{r_{12}^3} + \pi C, \end{aligned} \tag{3.}$$

worin M für $m_1 + m_2 + m_3$ und π für $m_1 m_2 m_3$ gesetzt ist. Mit A, B und C hat Hesse die symmetrisch gebildeten Ausdrücke

$$\begin{aligned} A &= \frac{x_{12}}{r_{12}^3} + \frac{x_{23}}{r_{23}^3} + \frac{x_{31}}{r_{31}^3}, \\ B &= \frac{y_{12}}{r_{12}^3} + \frac{y_{23}}{r_{23}^3} + \frac{y_{31}}{r_{31}^3}, \\ C &= \frac{z_{12}}{r_{12}^3} + \frac{z_{23}}{r_{23}^3} + \frac{z_{31}}{r_{31}^3} \end{aligned} \tag{4.}$$

bezeichnet. Die Gruppe (3) enthält die ersten drei Differentialgleichungen in der Hesseschen Form. Durch die cyclische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 können aus denselben die übrigen sechs gefunden werden.

§ 2. Die bekannten zehn Integrale des Problems.

Das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts giebt die ersten sechs Integrale. Es ist aus dem Gleichungssystem (2) § 1 ersichtlich, dafs

$$\begin{aligned} m_1x_1'' + m_2x_2'' + m_3x_3'' &= 0, \\ m_1y_1'' + m_2y_2'' + m_3y_3'' &= 0, \\ m_1z_1'' + m_2z_2'' + m_3z_3'' &= 0 \end{aligned} \tag{1.}$$

ist. Durch die zweimalige Integration dieser Gleichungen entstehen die sechs Integrale:

$$\begin{aligned} m_1x_1' + m_2x_2' + m_3x_3' &= M\lambda = M\xi', \\ m_1y_1' + m_2y_2' + m\ y_3' &= M\mu = M\eta', \\ m_1z_1' + m_2z_2' + m_3z_3' &= M\nu = M\zeta' \end{aligned} \tag{2.}$$

und

$$\begin{aligned} m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 &= M(\lambda t + \lambda_0) = M\xi, \\ m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 &= M(\mu t + \mu_0) = M\eta, \\ m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 &= M(\nu t + \nu_0) = M\zeta. \end{aligned} \tag{3.}$$

Hier bedeuten ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunkts und M wieder die Summe $m_1 + m_2 + m_3$. Die Integrale (3) zeigen, dafs $\xi - \lambda_0 = \lambda t$, $\eta - \mu_0 = \mu t$, $\zeta - \nu_0 = \nu t$ ist und in Verbindung mit (2) folgt hieraus, dafs der Schwerpunkt sich auf einer geraden Linie, deren Gleichung

$$\frac{X - \lambda_0}{\lambda} = \frac{Y - \mu_0}{\mu} = \frac{Z - \nu_0}{\nu} = t \tag{4.}$$

ist, mit constanter Geschwindigkeit bewegt. Die Componenten der letzteren λ μ ν sind zugleich

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

den Richtungscosinus der Schwerpunktsaxe (4) proportional, λ_0 μ_0 ν_0 geben die Coordinaten des Schwerpunkts zur Zeit $t=0$ an.

Das Integral der lebendigen Kraft hat die Form

$$\frac{1}{2}\left\{m_1(x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2)+m_2(x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2)+m_3(x_3'^2+y_3'^2+z_3'^2\right\} \quad (5.)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_1^3{}^i m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)=U+h.$$

Es steht zu den nachfolgenden Untersuchungen in keiner Beziehung, deshalb wenden wir uns bald zu den letzten, den drei Flächenintegralen, welche nach dem Princip der Erhaltung der Flächenräume ihren Namen führen. Aus dem System der Differentialgleichungen (2) § 1 können den Coordinatenebenen entsprechend drei Gruppen von je drei Gleichungen gebildet werden. Die erste Gruppe enthält die Gleichungen:

$$\begin{aligned} m_1(y_1z_1''-z_1y_1'')&=m_{12}\frac{y_1z_2-z_1y_2}{r_{12}^3}-m_{31}\frac{y_3z_1-z_3y_1}{r_{31}^3}.\\ m_2(y_2z_2''-z_2y_2'')&=m_{23}\frac{y_2z_3-z_2y_3}{r_{23}^3}-m_{12}\frac{y_1z_2-z_1y_2}{r_{12}^3}. \qquad (6.)\\ m_3(y_3z_3''-z_3y_3'')&=m_{31}\frac{y_3z_1-z_3y_1}{r_{31}^3}-m_{23}\frac{y_2z_3-z_2y_3}{r_{23}^3}. \end{aligned}$$

Wie hier die Coordinaten yz, so kommen in den andern Gruppen zx und xy vor. Die Summe der Gleichungen jeder Gruppe giebt nun ein vollständiges Differential und zwar:

$$\begin{aligned} m_1(y_1z_1''-z_1y_1'')+m_2(y_2z_2''-z_2y_2'')+m_3(y_3z_3''-z_3y_3'')&=0,\\ m_1(z_1x_1''-x_1z_1'')+m_2(z_2x_2''-x_2z_2'')+m_3(z_3x_3''-x_3z_3'')&=0, \qquad (7.)\\ m_1(x_1y_1''-y_1x_1'')+m_2(z_2y_2''-y_2x_2'')+m_3(x_3y_3''-y_3x_3'')&=0. \end{aligned}$$

Hieraus gehen die gesuchten drei Flächenintegrale hervor:

$$\begin{aligned} m_1(y_1z_1'-z_1y_1')+m_2(y_2z_2'-z_2y_2')+m_3(y_3z_3'-z_3y_3')&=a.\\ m_1(z_1x_1'-x_1z_1')+m_2(z_2x_2'-x_2z_2')+m_3(z_3x_3'-x_3z_3')&=b. \qquad (8.)\\ m_1(x_1y_1'-y_1x_1')+m_2(x_2y_2'-y_2x_2')+m_3(x_3y_3'-y_3x_3')&=c. \end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung der Constanten a, b und c ist in den Vorlesungen Jacobis S. 33—37 auseinander gesetzt.

§ 3. Die zusammengesetzten Integrale für die Hesseschen Differentialgleichungen.

Gehen wir von den Bewegungsgleichungen in derjenigen Form, welche Hesse ihnen gegeben hat, aus, so kommen wir zu vier Integralen, die freilich aus den bekannten Integralen des Problems zusammengesetzt, aber durch ihre charakteristische Form und Verwendung wichtig sind. Über das erste, dem Integral der lebenden Kraft entsprechenden, können wir uns kurz fassen, da wir es zu unsern späteren Untersuchungen nicht gebrauchen; es ist das Integral:

$$\frac{1}{2}\left\{m_{12}(x_{12}'^2+y_{12}'^2+z_{12}'^2)+m_{23}(x_{23}'^2+y_{23}'^2+z_{23}'^2)+m_{31}(x_{31}'^2+y_{31}'^2+z_{31}'^2)\right\}=MU+k \quad (1.)$$

und sein Zusammenhang mit dem Integral der lebendigen Kraft wird durch die von Lagrange aufgestellte Identität deutlich erkennbar (cf. Jacobis Vorlesungen S. 22):

$$\begin{aligned} &m_{12}(x_{12}'^2+y_{12}'^2+z_{12}'^2)+m_{23}(x_{23}'^2+y_{23}'^2+z_{23}'^2)+m_{31}(x_{31}'^2+y_{31}'^2+z_{31}'^2)\\ &=M\sum_1^3{}^i m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)-(\sum_1^3{}^i m_ix_i')^2-(\sum_1^3{}^i m_iy_i')^2-(\sum_1^3{}^i m_iz_i')^2. \qquad (2.) \end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hieraus folgt für die Integrationsconstanten h und k die Beziehung

$$k = Mh - \frac{1}{2}M^2(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2). \tag{3.}$$

Die den Flächenintegralen entsprechenden andern drei sind für unsere Zwecke besonders nützlich; zu ihrer Herleitung stellen wir zunächst aus dem Hesseschen System (3) § 1 neun Gleichungen in drei Gruppen auf:

$$\begin{aligned}
m_{12}(y_{12}z_{12}'' - z_{12}y_{12}'') &= \pi\Delta_1 T_3,\\
m_{23}(y_{23}z_{23}'' - z_{23}y_{23}'') &= \pi\Delta_1 T_1,\\
m_{31}(y_{31}z_{31}'' - z_{31}y_{31}'') &= \pi\Delta_1 T_2.\\
\hline
m_{12}(z_{12}x_{12}'' - x_{12}z_{12}'') &= \pi\Delta_2 T_3,\\
m_{23}(z_{23}x_{23}'' - x_{23}z_{23}'') &= \pi\Delta_2 T_1,\\
m_{31}(z_{31}x_{31}'' - x_{31}z_{31}'') &= \pi\Delta_2 T_2.\\
\hline
m_{12}(x_{12}y_{12}'' - y_{12}x_{12}'') &= \pi\Delta_3 T_3,\\
m_{23}(x_{23}y_{23}'' - y_{23}x_{23}'') &= \pi\Delta_3 T_1,\\
m_{31}(x_{31}y_{31}'' - y_{31}x_{31}'') &= \pi\Delta_3 T_2.
\end{aligned} \tag{4.}$$

in welchen $\pi = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$, $T_1 = -\frac{1}{r_{12}^3} + \frac{1}{r_{31}^3}$, $T_2 = -\frac{1}{r_{23}^3} + \frac{1}{r_{12}^3}$ und $T_3 = -\frac{1}{r_{31}^3} + \frac{1}{r_{23}^3}$ zu setzen ist. Ferner haben Δ_1, Δ_2 und Δ_3 folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= y_1z_2 - z_1y_2 + y_2z_3 - z_2y_3 + y_3z_1 - z_3y_1 = y_{12}z_{23} - z_{12}y_{23} = y_{23}z_{31} - z_{23}y_{31} = y_{31}z_{12} - z_{31}y_{12},\\
\Delta_2 &= z_1x_2 - x_1z_2 + z_2x_3 - x_2z_3 + z_3x_1 - x_3z_1 = z_{12}x_{23} - x_{12}z_{23} = z_{23}x_{31} - x_{23}z_{31} = z_{31}x_{12} - x_{31}z_{12},\\
\Delta_3 &= x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y_3 - y_2x_3 + x_3y_1 - y_3x_1 = x_{12}y_{23} - y_{12}x_{23} = x_{23}y_{31} - y_{23}x_{31} = x_{31}y_{12} - x_{12}y_{31},
\end{aligned} \tag{5.}$$

und es ist hieraus ersichtlich, das dieselben Ausdrücke Δ_1, Δ_2 und Δ_3 in der Gleichung der durch die drei Körper P_1, P_2, P_3 bestimmten Ebene als die Coefficienten der ersten drei Glieder vorkommen.

Nun addieren wir die zu einer Gruppe gehörigen Gleichungen (4) und erhalten aus den Summen, welche vollständige Differentiale sind, die Integrale

$$\begin{aligned}
m_{12}(y_{12}z_{12}' - z_{12}y_{12}') + m_{23}(y_{23}z_{23}' - z_{23}y_{23}') + m_{31}(y_{31}z_{31}' - z_{31}y_{31}') &= \alpha,\\
m_{12}(z_{12}x_{12}' - x_{12}z_{12}') + m_{23}(z_{23}x_{23}' - x_{23}z_{23}') + m_{31}(z_{31}x_{31}' - x_{31}z_{31}') &= \beta,\\
m_{12}(x_{12}y_{12}' - y_{12}x_{12}') + m_{23}(x_{23}y_{33}' - y_{23}x_{23}') + m_{31}(x_{31}y_{31}' - y_{31}x_{31}') &= \gamma.
\end{aligned} \tag{6.}$$

Es soll jetzt ermittelt werden, in welcher Weise die Constanten α, β und γ von denjenigen der Flächenintegrale a, b und c abhängen. Die linke Seite des ersten Integrals läſst sich transformieren, und zwar ist

$$\begin{aligned}
&m_{12}(y_{12}z_{12}' - z_{12}y_{12}') + m_{23}(y_{23}z_{23}' - z_{23}y_{23}') + m_{31}(y_{31}z_{31}' - z_{31}y_{31}')\\
&= M\Big[m_1(y_1z_1' - z_1y_1') + m_2(y_2z_2' - z_2y_2') + m_3(y_3z_3' - z_3y_3')\Big]\\
&-\Big[(m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3)(m_1z_1' + m_2z_2' + m_3z_3') - (m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3)(m_1y_1' + m_2y_2' + m_3y_3')\Big],
\end{aligned} \tag{7.}$$

hieraus folgt mit Berücksichtigung von (8) § 2, daſs

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\alpha = Ma - M^2(\eta\zeta' - \zeta\eta') \tag{8a.}$$

ist, oder wenn für η, ζ, η' und ζ' die Werte aus (2) und (3) § 2 eingesetzt werden

$$\alpha = Ma - M^2(\mu_0\nu - \nu_0\mu).$$

In entsprechender Weise wird gezeigt, dafs

$$\begin{aligned} \beta &= Mb - M^2(\nu_0\lambda - \lambda_0\nu) \\ \gamma &= Mc - M^2(\lambda_0\mu - \mu_0\lambda) \end{aligned} \tag{8b.}$$

ist. Wir werden auf die in den Integralen (6) vorkommenden Klammergröfsen, welche eine für uns wichtige geometrische Bedeutung haben, noch oft zurückkommen, weshalb wir abkürzende Bezeichnungen einführen und für

$$\begin{aligned} A_{12} &= y_{12}z_{12}' - z_{12}y_{12}' & A_{23} &= y_{23}z_{23}' - z_{23}y_{23}' & A_{31} &= y_{31}z_{31}' - z_{31}y_{31}' \\ B_{12} &= z_{12}x_{12}' - x_{12}z_{12}' & B_{23} &= z_{23}x_{23}' - x_{23}z_{23}' & B_{31} &= z_{31}x_{31}' - x_{31}z_{31}' \\ C_{12} &= x_{12}y_{12}' - y_{12}x_{12}' & C_{23} &= x_{23}y_{23}' - y_{23}x_{23}' & C_{31} &= x_{31}y_{31}' - y_{31}x_{31}' \end{aligned} \tag{9.}$$

setzen, so dafs die Integrale (6) jetzt die Gestalt haben:

$$\begin{aligned} m_{12}A_{12} + m_{23}A_{23} + m_{31}A_{31} &= \alpha, \\ m_{12}B_{12} + m_{23}B_{23} + m_{31}B_{31} &= \beta, \\ m_{12}C_{12} + m_{23}C_{23} + m_{31}C_{31} &= \gamma. \end{aligned} \tag{10.}$$

§ 4. Die Geraden, in welchen die Ebene der drei Körper durch die Schmiegungsebenen geschnitten wird.

Wir beginnen mit der Aufstellung der Gleichungen für die Schmiegungsebenen der drei Körper:

$$\begin{aligned} (X - x_1)a_1 + (Y - y_1)b_1 + (Z - z_1)c_1 &= 0, \\ (X - x_2)a_2 + (Y - y_2)b_2 + (Z - z_2)c_2 &= 0, \\ (X - x_3)a_3 + (Y - y_3)b_3 + (Z - z_3)c_3 &= 0, \end{aligned} \tag{1.}$$

worin zur Abkürzung eingesetzt ist

$$\begin{aligned} y_1'z_1'' - z_1'y_1'' &= a_1 & y_2'z_2'' - z_2'y_2'' &= a_2 & y_3'z_3'' - z_3'y_3'' &= a_3, \\ z_1'x_1'' - x_1'z_1'' &= b_1 & z_2'x_2'' - x_2'z_2'' &= b_2 & z_3'x_3'' - x_3'z_3'' &= b_3, \\ x_1'y_1'' - y_1'x_1'' &= c_1 & x_2'y_2'' - y_2'x_2'' &= c_2 & x_3'y_3'' - y_3'x_3'' &= c_3. \end{aligned} \tag{2.}$$

Die durch die drei Körper P_1, P_2, P_3 bestimmte Ebene nennen wir, um lästige Wiederholungen zu vermeiden, von jetzt ab die „gemeinschaftliche“ Ebene; wir können für ihre Gleichung die 3 Formen gebrauchen:

$$\begin{aligned} (X - x_1)\Delta_1 + (Y - y_1)\Delta_2 + (Z - z_1)\Delta_3 &= 0, \\ (X - x_2)\Delta_1 + (Y - y_2)\Delta_2 + (Z - z_2)\Delta_3 &= 0, \\ (X - x_3)\Delta_1 + (Y - y_3)\Delta_2 + (Z - z_3)\Delta_3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.}$$

Hier sind Δ_1, Δ_2, Δ_3, wie schon früher bemerkt wurde, dieselben Gröfsen, wie in (5) § 3. Die gemeinschaftliche Ebene wird nun von den Schmiegungsebenen in drei Geraden G_1, G_2, G_3 geschnitten, deren Gleichungen die Combination von (1) und (3) ergiebt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{X-x_1}{b_1\Delta_3-c_1\Delta_2}=\frac{Y-y_1}{c_1\Delta_1-a_1\Delta_3}=\frac{Z-z_1}{a_1\Delta_2-b_1\Delta_1}\quad(G_1),$$
$$\frac{X-x_2}{b_2\Delta_3-c_2\Delta_2}=\frac{Y-y_2}{c_2\Delta_1-a_2\Delta_3}=\frac{Z-z_2}{a_2\Delta_2-b_2\Delta_1}\quad(G_2),\qquad(4.)$$
$$\frac{X-x_3}{b_3\Delta_3-c_3\Delta_2}=\frac{Y-y_3}{c_3\Delta_1-a_3\Delta_3}=\frac{Z-z_3}{a_3\Delta_2-b_3\Delta_1}\quad(G_3).$$

Aber die Nenner sind noch zu transformieren. Hierzu entnehmen wir den Gleichungen (3) die Identitäten:

$$\begin{aligned}x_{12}\Delta_1+y_{12}\Delta_2+z_{12}\Delta_3&=0,\\ x_{23}\Delta_1+y_{23}\Delta_2+z_{23}\Delta_3&=0,\\ x_{31}\Delta_1+y_{31}\Delta_2+z_{31}\Delta_3&=0\end{aligned}\qquad(5.)$$

und beweisen darauf mit deren Hilfe aus dem System der Differentialgleichungen (2) § 1 die Relationen:

$$\begin{aligned}x_1''\Delta_1+y_1''\Delta_2+z_1''\Delta_3&=0,\\ x_2''\Delta_1+y_2''\Delta_2+z_2''\Delta_3&=0,\\ x_3''\Delta_1+y_3''\Delta_2+z_3''\Delta_3&=0.\end{aligned}\qquad(6.)$$

Andererseits ist, wie aus (2) ersichtlich,

$$\begin{aligned}x_1''a_1+y_1''b_1+z_1''c_1&=0,\\ x_2''a_2+y_2''b_2+z_2''c_2&=0,\\ x_3''a_3+y_3''b_3+z_3''c_3&=0,\end{aligned}\qquad(7.)$$

und die Verbindung von (6) und (7) führt zu der gesuchten Umformung der Nenner in (4)

$$\begin{aligned}x_1'':y_1'':z_1''&=b_1\Delta_3-c_1\Delta_2:c_1\Delta_1-a_1\Delta_3:a_1\Delta_2-b_1\Delta_1,\\ x_2'':y_2'':z_2''&=b_2\Delta_3-c_2\Delta_2:c_2\Delta_1-a_2\Delta_3:a_2\Delta_2-b_2\Delta_1,\\ x_3'':y_3'':z_3''&=b_3\Delta_3-c_3\Delta_2:c_3\Delta_1-a_3\Delta_3:a_3\Delta_2-b_3\Delta_1.\end{aligned}\qquad(8.)$$

G_1, G_2, G_3 mögen mit den Coordinatenaxen die Winkel $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ und $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ bilden; ferner sei $\varrho_1=\sqrt{x_1''^2+y_1''^2+z_1''^2}$, $\varrho_2=\sqrt{x_2''^2+y_2''^2+z_2''^2}$, $\varrho_3=\sqrt{x_3''^2+y_3''^2+z_3''^2}$. Also ist zufolge (8) und (4)

$$\begin{aligned}\varrho_1\cos\alpha_1&=x_1'' & \varrho_2\cos\alpha_2&=x_2'' & \varrho_3\cos\alpha_3&=x_3'',\\ \varrho_1\cos\beta_1&=y_1'' & \varrho_2\cos\beta_2&=y_2'' & \varrho_3\cos\beta_3&=y_3'',\\ \varrho_1\cos\gamma_1&=z_1'' & \varrho_2\cos\gamma_2&=z_2'' & \varrho_3\cos\gamma_3&=z_3'',\end{aligned}\qquad(9.)$$

das heifst: Die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten eines Körpers nach der Zeit sind proportional den Cosinus derjenigen Winkel, welche die in der gemeinschaftlichen Ebene enthaltene Spurgerade der Schmiegungsebene desselben Körpers mit den gleichlautenden Coordinatenaxen bildet.

Allein die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten eines Körpers nach t drücken auch die den Axen parallelen Componenten der Beschleunigung desselben Körpers zur Zeit t aus und sind daher proportional den Richtungscosinus derjenigen Linie, welche die Beschleunigung der Bewegung des Körpers zur Zeit t in der Gröfse und Richtung darstellt. Folglich müssen diese Richtungslinien der Beschleunigung mit den Geraden G_1, G_2, G_3 zusammenfallen und wir können mithin den Satz aussprechen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Linie, in welcher die Schmiegungsebene eines Körpers die gemeinschaftliche Ebene schneidet, giebt die Richtung der Beschleunigung desselben Körpers zur Zeit t an.

Wie aus den Bewegungsgleichungen des Problems der zwei Körper unmittelbar hervorgeht, sind hier die zweiten Ableitungen der Coordinaten beider Körper nach der Zeit proportional den Richtungscosinus der Verbindungslinie P_1P_2; folglich giebt letztere die Richtung der beiden Beschleunigungen zur Zeit t an, und weil sie zugleich auch die Schnittlinie beider Schmiegungsebenen ist, so kann sie in analoger Weise als die Spurgerade derselben in der durch die beiden Körper und den Coordinatenanfangspunkt bestimmten Ebene aufgefafst werden.

§ 5. Der Schnittpunkt der drei Schmiegungsebenen.

Die Schmiegungsebene des ersten Körpers P_1 hat die Gleichung:

$$(X-x_1)a_1+(Y-y_1)b_1+(Z-z_1)c_1=0.$$

Wenn hier die Coordinaten der beiden andern Körper P_2 und P_3 nach einander eingesetzt werden, so giebt zufolge eines bekannten Satzes der analytischen Geometrie der Quotient der beiden Substitutionen

$$-\frac{x_{12}a_1+y_{12}b_1+z_{12}c_1}{x_{31}a_1+y_{31}b_1+z_{31}c_1}$$

das Verhältnis an, in welchem die Verbindungslinie der Körper P_2, P_3 durch die Schmiegungsebene des ersten P_1 geschnitten wird. Wir transformieren zuerst beide Teile des Quotienten mit Hilfe der Werte für a_1, b_1, c_1 (2) § 4 in

$$-\frac{x_1'(y_1''z_{12}-z_1''y_{12})+y_1'(z_1''x_{12}-x_1''z_{12})+z_1'(x_1''y_{12}-y_1''x_{12})}{x_1'(y_1''z_{31}-z_1''y_{31})+y_1'(z_1''x_{31}-y_1''z_{31})+z_1'(x_1''y_{31}-y_1''x_{31})},$$

benutzen darauf zur Elimination von x_1'', y_1'', z_1'' die Differentialgleichungen (2) § 1 und erhalten nach Beseitigung eines gemeinschaftlichen Factors schliefslich den Wert des Verhältnisses

$$=-\frac{m_{31}}{r_{31}^3}:\frac{m_{12}}{r_{12}^3}. \qquad (1.)$$

Das negative Vorzeichen zeigt an, dafs der Teilungspunkt Q_1 zwischen P_2 und P_3 liegt.

Aber die Gerade G_1, in welcher die Schmiegungsebene des Punktes P_1 die gemeinschaftliche Ebene schneidet, geht auch durch den Punkt Q_1, deswegen kann das eben gefundene Teilungsverhältnis auch als dasjenige gedeutet werden, in welchem die Seite P_2P_3 des Dreiecks $P_1P_2P_3$ durch die von der gegenüberliegenden Ecke P_1 kommende Transversale G_1 geteilt wird. Auf demselben Wege der Entwicklung werden die Verhältnisse gefunden, in welchen die Seiten P_3P_1 und P_1P_2 durch die Geraden G_2 bezüglich G_3 in den Punkten Q_2 und Q_3 geteilt werden, und zwar

$$\begin{aligned}\frac{P_3Q_2}{P_1Q_2}&=-\frac{m_{12}}{r_{12}^3}:\frac{m_{23}}{r_{23}^3}\\ \frac{P_1Q_3}{P_2Q_3}&=-\frac{m_{23}}{r_{23}^3}:\frac{m_{31}}{r_{31}^3}.\end{aligned} \qquad (2.)$$

Das Produkt der Verhältnisse ist:

$$\frac{P_2Q_1}{P_3Q_1}\cdot\frac{P_3Q_2}{P_1Q_2}\cdot\frac{P_1Q_3}{P_2Q_3}=-\frac{m_{31}}{r_{31}^3}\cdot\frac{m_{12}}{r_{12}^3}\cdot\frac{m_{23}}{r_{23}^3}:\frac{m_{12}}{r_{12}^3}\cdot\frac{m_{23}}{r_{23}^3}\cdot\frac{m_{31}}{r_{31}^3}, \qquad (3.)$$

mithin $=-1$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diesen Wert kann jedoch das Produkt nur in dem Falle erhalten, wenn die drei Ecktransversalen durch denselben Punkt hindurchgehen. Folglich ist bewiesen, dafs die drei Geraden G_1, G_2, G_3 in einem Punkte zusammentreffen, welchen wir in Zukunft den Punkt O nennen wollen, und der, weil alle drei Verhältnisse negativ sind, innerhalb der Fläche des Dreiecks $P_1P_2P_3$ liegt. Haben nun die Geraden G_1, G_2, G_3 einen gemeinschaftlichen Punkt, so schneiden sich auch die durch sie hindurchgehenden Schmiegungsebenen in demselben Punkte O. Sie schneiden sich nicht noch aufserdem in einer durch O gehenden gemeinschaftlichen Schnittkante, sondern nur in dem einen Punkte, doch lasse ich die umständlichen Rechnungen, durch welche dies nachgewiesen wird, hier fort. Also können wir jetzt die zwei Sätze aussprechen:

Der Schnittpunkt der drei Schmiegungsebenen liegt stets mit den drei Körpern in einer und derselben Ebene.

Die drei Geraden, welche die Richtungen für die gleichzeitigen Beschleunigungen der einzelnen Körper zur Zeit t angeben, treffen in einem Punkte zusammen.

Ich teile für die Sätze, von welchen der erste an einen ähnlichen Satz aus der Theorie der cubischen Raumcurven erinnert, noch einen zweiten später gefundenen und kürzeren Beweis mit.

Den Geraden G_1, G_2, G_3 entsprechen mit Berücksichtigung von (8) § 4 die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{X-x_1}{x_1''} &= \frac{Y-y_1}{y_1''} = \frac{Z-z_1}{z_1''} = l_1, \\ \frac{X-x_2}{x_2''} &= \frac{Y-y_2}{y_2''} = \frac{Z-z_2}{z_2''} = l_2, \\ \frac{X-x_3}{x_3''} &= \frac{Y-y_3}{y_3''} = \frac{Z-z_3}{z_3''} = l_3. \end{aligned} \tag{4.}$$

Durch jede der drei Geraden und durch den Anfangspunkt der Coordinaten denke man eine Ebene hindurchgelegt, die zugehörigen Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} X(y_1z_1'' - z_1y_1'') + Y(z_1x_1'' - x_1z_1'') + Z(x_1y_1'' - y_1x_1'') &= 0, \\ X(y_2z_2'' - z_2y_2'') + Y(z_2x_2'' - x_2z_2'') + Z(x_2y_2'' - y_2x_2'') &= 0, \\ X(y_3z_3'' - z_3y_3'') + Y(z_3x_3'' - x_3z_3'') + Z(x_3y_3'' - y_3x_3'') &= 0, \end{aligned} \tag{5.}$$

welche bezüglich mit den Faktoren m_1, m_2, m_3 versehen und addiert werden.

$$\begin{aligned} & X\left[m_1(y_1z_1'' - z_1y_1'') + m_2(y_2z_2'' - z_2y_2'') + m_3(y_3z_3'' - z_3y_3'')\right] \\ + & Y\left[m_1(z_1x_1'' - x_1z_1'') + m_2(z_2x_2'' - x_2z_2'') + m_3(z_3x_3'' - x_3z_3'')\right] \\ + & Z\left[m_1(x_1y_1'' - y_1x_1'') + m_2(x_2y_2'' - y_2x_2'') + m_3(x_3y_3'' - y_3x_3'')\right] = 0. \end{aligned} \tag{6.}$$

Nun sind die drei Klammerngröfsen in dieser Summe $= 0$, denn sie sind dieselben Ausdrücke wie in (7) § 2, nämlich die Differentiale der Flächenintegrale, mithin wird die ganze Summe identisch 0. Das beweist aber, dafs die drei mit den Gleichungen (5) bezeichneten Ebenen durch eine und dieselbe Schnittkante hindurchgehen. Folglich müssen ihre Spurlinien in der gemeinschaftlichen Ebene oder die Geraden G_1, G_2, G_3 nach einem und demselben Punkte

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gerichtet sein, nach demjenigen, in welchem diese Ebene von der Schnittkante jener drei Ebenen getroffen wird.

Beim Zweikörperproblem lassen sich nur zwei den Gleichungen (5) entsprechende aufstellen und sie bezeichnen beide eine und dieselbe, nämlich die durch den Coordinatenanfangspunkt und die zwei Körper bestimmte Ebene. In ihr liegt natürlich auch die Schnittlinie der beiden Schmiegungsebenen, welche zugleich die Verbindungslinie der beiden Körper ist.

Es sollen nun die Coordinaten des Punktes O ermittelt werden. Deswegen geben wir den Gleichungen der Geraden G_1, G_2, G_3 (4) lineare Form und bilden durch Subtraction die Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} x_1''l_1 - x_2''l_2 + x_{12} &= 0, & x_2''l_2 - x_3''l_3 + x_{23} &= 0, \\ y_1''l_1 - y_2''l_2 + y_{12} &= 0, & y_2''l_2 - y_3''l_3 + y_{23} &= 0, \\ z_1''l_1 - z_2''l_2 + z_{12} &= 0. & z_2''l_2 - z_3''l_3 + z_{23} &= 0, \end{aligned}$$

welche zur Bestimmung der Werte der Parameter l_1, l_2, l_3 für den gemeinschaftlichen Punkt O ausreichen. Wir finden:

$$\begin{aligned} l_1 : l_2 : 1 &= x_2''y_{12} - y_2''x_{12} : x_1''y_{12} - y_1''x_{12} : x_1''y_2'' - y_1''x_2'', \\ l_2 : l_3 : 1 &= x_3''y_{23} - y_3''x_{23} : x_2''y_{23} - y_2''x_{23} : x_2''y_3'' - y_2''x_3'', \end{aligned}$$

und hieraus mit Berücksichtigung von (2) § 1

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{m_{23}}{r_{23}^3} \cdot \frac{m_1}{N}; \quad l_2 = \frac{m_{31}}{r_{31}^3} \cdot \frac{m_2}{N}; \quad l_3 = \frac{m_{12}}{r_{12}^3} \cdot \frac{m_3}{N}, \\ N &= \frac{m_{12}}{r_{12}^3} \cdot \frac{m_{23}}{r_{23}^3} + \frac{m_{23}}{r_{23}^3} \cdot \frac{m_{31}}{r_{31}^3} + \frac{m_{31}}{r_{31}^3} \cdot \frac{m_{12}}{r_{12}^3}. \end{aligned} \tag{7.}$$

Die Coordinaten des Punktes O mögen mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet werden; aus (4) und (7) ergiebt sich

$$\begin{aligned} N(x_0 - x_1) &= \frac{m_{23}}{r_{23}^3} \cdot m_1 x_1'' & N(x_0 - x_2) &= \frac{m_{31}}{r_{31}^3} \cdot m_2 x_2'' & N(x_0 - x_3) &= \frac{m_{12}}{r_{12}^3} \cdot m_3 x_3'', \\ N(y_0 - y_1) &= \frac{m_{23}}{r_{23}^3} \cdot m_1 y_1'' & N(y_0 - y_2) &= \frac{m_{31}}{r_{31}^3} \cdot m_2 y_2'' & N(y_0 - y_3) &= \frac{m_{12}}{r_{12}^3} \cdot m_3 y_3'', \\ N(z_0 - z_1) &= \frac{m_{23}}{r_{23}^3} \cdot m_1 z_1'' & N(z_0 - z_2) &= \frac{m_{31}}{r_{31}^3} \cdot m_2 z_2'' & N(z_0 - z_3) &= \frac{m_{12}}{r_{12}^3} \cdot m_3 z_3'', \end{aligned} \tag{8.}$$

und schliefslich:

$$\begin{aligned} Nx_0 &= \frac{m_{12}}{r_{12}^3} \cdot \frac{m_{31}}{r_{31}^3} \cdot x_1 + \frac{m_{23}}{r_{23}^3} \cdot \frac{m_{12}}{r_{12}^3} \cdot x_2 + \frac{m_{31}}{r_{31}^3} \cdot \frac{m_{23}}{r_{23}^3} \cdot x_3, \\ Ny_0 &= \frac{m_{12}}{r_{12}^3} \cdot \frac{m_{31}}{r_{31}^3} \cdot y_1 + \frac{m_{23}}{r_{23}^3} \cdot \frac{m_{12}}{r_{12}^3} \cdot y_2 + \frac{m_{31}}{r_{31}^3} \cdot \frac{m_{23}}{r_{23}^3} \cdot y_3, \\ Nz_0 &= \frac{m_{12}}{r_{12}^3} \cdot \frac{m_{31}}{r_{31}^3} \cdot z_1 + \frac{m_{23}}{r_{23}^3} \cdot \frac{m_{12}}{r_{12}^3} \cdot z_2 + \frac{m_{31}}{r_{31}^3} \cdot \frac{m_{23}}{r_{23}^3} \cdot z_3, \end{aligned} \tag{9.}$$

welche Ausdrücke aber auf folgende kürzere Form gebracht werden können:

$$\begin{aligned} Lx_0 &= m_1 r_{23}^3 x_1 + m_2 r_{31}^3 x_2 + m_3 r_{12}^3 x_3, \\ Ly_0 &= m_1 r_{23}^3 y_1 + m_2 r_{31}^3 y_2 + m_3 r_{12}^3 y_3, \\ Lz_0 &= m_1 r_{23}^3 z_1 + m_2 r_{31}^3 z_2 + m_3 r_{12}^3 z_3, \\ L &= m_1 r_{23}^3 + m_2 r_{31}^3 + m_3 r_{12}^3, \end{aligned} \tag{10.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 6. Die Gerade, welche den Schnittpunkt der drei Richtungsebenen E_1, E_2, E_3 mit dem Schwerpunkte verbindet.

Ich nenne diejenige Ebene, welche zu zwei aufeinanderfolgenden Stellungen oder Richtungen einer beweglichen Geraden parallel ist, die Richtungsebene der Geraden, weil der Übergang aus der ersten Stellung zur Zeit t in die nächstfolgende zur Zeit $t+dt$ in zwei zu dieser Ebene parallele unendlich kleine Bewegungen der Geraden zerfällt, in eine Rotation um die zu der Ebene senkrechte Momentanaxe und in eine Translation entlang der letzteren. Die Richtungsebenen der drei Verbindungsgeraden je zweier Körper verdienen besondere Beachtung. Wir denken uns durch jede Seite des Dreiecks $P_1P_2P_3$ die zugehörige Richtungsebene hindurchgelegt und bezeichnen sie in dieser Lage entsprechend mit E_1, E_2, E_3.

Den zwei aufeinanderfolgenden Stellungen der Geraden P_1P_2 zur Zeit t und $t+dt$ entsprechen die Gleichungen:

$$\frac{X-x_1}{x_{12}}=\frac{Y-y_1}{y_{12}}=\frac{Z-z_1}{z_{12}}=\varrho_{12}$$

und

$$\frac{X-x_1-dx_1}{x_{12}+dx_{12}}=\frac{Y-y_1-dy_1}{y_{12}+dy_{12}}=\frac{Z-z_1-dz_1}{z_{12}+dz_{12}}=\varrho_{12}+d\varrho_{12},$$

aus welchen die Gleichung der Richtungsebene E_3

$$(X-x_1)(y_{12}z_{12}'-z_{12}y_{12}')+(Y-y_1)(z_{12}x_{12}'-x_{12}z_{12}')+(Z-z_1)(x_{12}y_{12}'-y_{12}x_{12}')=0$$

abgeleitet wird. In analoger Weise sind die Gleichungen der Richtungsebenen E_1 und E_2 zu bilden:

$$(X-x_2)(y_{23}z_{23}'-z_{23}y_{23}')+(Y-y_2)(z_{23}x_{23}'-x_{23}z_{23}')+(Z-z_2)(x_{23}y_{23}'-y_{23}x_{23}')=0,$$
$$(X-x_3)(y_{31}z_{31}'-z_{31}y_{31}')+(Y-y_3)(z_{31}x_{31}'-x_{31}z_{31}')+(Z-z_3)(x_{31}y_{31}'-y_{31}x_{31}')=0.$$

Aber die Coefficienten dieser drei Ebenen sind den Teilen, aus welchen die Integrale (6) § 2 zusammengesetzt sind, identisch, und so ist die geometrische Bedeutung jener neun Gröfsen, für die wir in (9) § 2 die abgekürzten Bezeichnungen eingeführt haben, jetzt klar geworden. Mit Berücksichtigung von (9) § 2 erhalten die Gleichungen der drei Richtungsebenen die Form:

$$\begin{aligned}(X-x_1)A_{12}+(Y-y_1)B_{12}+(Z-z_1)C_{12}&=0,\\(X-x_2)A_{23}+(Y-y_2)B_{23}+(Z-z_2)C_{23}&=0,\\(X-x_3)A_{31}+(Y-y_3)B_{31}+(Z-z_3)C_{31}&=0,\end{aligned}\qquad(1.)$$

oder mit Einführung des vierten Coefficienten, dessen Nutzen später ersichtlich wird,

$$\begin{aligned}XA_{12}+YB_{12}+ZC_{12}+D_{12}&=0,\\XA_{23}+YB_{23}+ZC_{23}+D_{23}&=0,\\XA_{13}+YB_{31}+ZC_{31}+D_{31}&=0,\end{aligned}\qquad(2.)$$

wenn wir nämlich setzen:

$$\begin{aligned}D_{12}&=-(x_1A_{12}+y_1B_{12}+z_1C_{12}),\\D_{23}&=-(x_2A_{23}+y_2B_{23}+z_2C_{23}),\\D_{31}&=-(x_3A_{31}+y_3B_{31}+z_3C_{31}).\end{aligned}\qquad(3.)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Summe der bezüglich mit m_{12}, m_{23} und m_{31} multiplicierten Gleichungen (2) gehört einer vierten Ebene

$$\begin{aligned} &X(m_{12}A_{12} + m_{23}A_{23} + m_{31}A_{31}) + Y(m_{12}B_{12} + m_{23}B_{23} + m_{31}B_{31}) \\ &+ Z(m_{12}C_{12} + m_{23}C_{23} + m_{31}C_{31}) + (m_{12}D_{12} + m_{23}D_{23} + m_{31}D_{31}) = 0 \end{aligned} \tag{4a.}$$

an, welche durch den Schnittpunkt der drei Richtungsebenen (2) hindurchgehen mufs. Die drei ersten Coefficienten sind die Integrale α, β und γ (6) § 2. Bezeichnen wir den vierten Coefficienten $m_{12}D_{12} + m_{23}D_{23} + m_{31}D_{31}$ vorläufig mit δ, so steht bereits fest, dafs der Schnittpunkt der drei Richtungsebenen E_1, E_2, E_3, den wir in Zukunft den Punkt R nennen wollen, in der Ebene

$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma + \delta = 0 \tag{4b.}$$

liegt. Es ist aufserdem ersichtlich, dafs diese Ebene (4b) zu einer durch den Anfangspunkt gelegten unveränderlichen Ebene

$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma = 0, \tag{E_0}$$

die wir fernerhin als die invariable Ebene des Systems oder bisweilen auch als die Ebene E_0 bezeichnen werden, parallel geht. Der senkrechte Abstand der beiden Ebenen kann sowohl durch das vom Punkte R, dessen Coordinaten X_0, Y_0, Z_0 sein mögen, auf die zweite Ebene E_0 gefällte Lot

$$p = (X_0\alpha + Y_0\beta + Z_0\gamma) : \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}, \tag{5a.}$$

oder durch die vom Anfangspunkt der Coordinaten auf die erste Ebene in entgegengesetzter Richtung gezogene Normale

$$p = -\delta : \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \tag{5b.}$$

gemessen werden.

Es soll nun gezeigt werden, dafs der vierte Coefficient δ der obigen Gleichung (4b) auch ein Integral und zwar ein aus α, β, γ und den Coordinaten des Schwerpunkts zusammengesetztes ist. Wir führen deshalb drei im weiteren Verlaufe noch oft gebrauchte Gröfsen ein:

$$\begin{aligned} U_{12} &= x_{12}'\Delta_1 + y_{12}'\Delta_2 + z_{12}'\Delta_3, \\ U_{23} &= x_{23}'\Delta_1 + y_{23}'\Delta_2 + z_{23}'\Delta_3, \\ U_{31} &= x_{31}'\Delta_1 + y_{31}'\Delta_2 + z_{31}'\Delta_3, \end{aligned} \tag{6.}$$

welche sich für folgende Formeln nützlich erweisen:

$$\begin{aligned} x_{12}A_{12} + y_{12}B_{12} + z_{12}C_{12} &= 0 & x_{12}A_{23} + y_{12}B_{23} + z_{12}C_{23} &= U_{23}, \\ x_{23}A_{12} + y_{23}B_{12} + z_{23}C_{12} &= -U_{12} & x_{23}A_{23} + y_{23}B_{23} + z_{23}C_{23} &= 0, \\ x_{31}A_{12} + y_{31}B_{12} + z_{31}C_{12} &= U_{12} & x_{31}A_{23} + y_{31}B_{23} + z_{31}C_{23} &= -U_{23}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{12}A_{31} + y_{12}B_{31} + z_{12}C_{31} &= -U_{31}, \\ x_{23}A_{31} + y_{23}B_{31} + z_{23}C_{31} &= U_{31}, \\ x_{31}A_{31} + y_{31}B_{31} + z_{31}C_{31} &= 0 \end{aligned} \tag{7.}$$

und stellen schliefslich für die Schwerpunktscoordinaten ξ, η, ζ die Beziehungen auf:

$$\begin{aligned} m_1M(x_1 - \xi) &= m_{12}x_{12} - m_{31}x_{31} & m_1M(y_1 - \eta) &= m_{12}y_{12} - m_{31}y_{31}, \\ m_2M(x_2 - \xi) &= m_{23}x_{23} - m_{12}x_{12} & m_2M(y_2 - \eta) &= m_{23}y_{23} - m_{12}y_{12}, \\ m_3M(x_3 - \xi) &= m_{31}x_{31} - m_{23}x_{23} & m_3M(y_3 - \eta) &= m_{31}y_{31} - m_{23}y_{23}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1M(z_1 - \zeta) &= m_{12}z_{12} - m_{31}z_{31}, \\ m_2M(z_2 - \zeta) &= m_{23}z_{23} - m_{12}z_{12}, \\ m_3M(z_3 - \zeta) &= m_{31}z_{31} - m_{23}z_{23}, \end{aligned} \tag{8.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Jetzt erhalten wir mit Berücksichtigung von (7) und (8)

$$\begin{aligned} M\left[(x_1-\xi)A_{12}+(y_1-\eta)B_{12}+(z_1-\zeta)C_{12}\right] &= -m_3U_{12}, \\ M\left[(x_2-\xi)A_{23}+(y_2-\eta)B_{23}+(z_2-\zeta)C_{23}\right] &= -m_1U_{23}, \\ M\left[(x_3-\xi)A_{31}+(y_3-\eta)B_{31}+(z_3-\zeta)C_{31}\right] &= -m_2U_{31}. \end{aligned} \tag{9.}$$

Wenn diese Gleichungen bezüglich mit m_{12}, m_{23} und m_{31} multipliciert und addiert werden, so nimmt die Summe auf der rechten Seite den Wert o an, denn aus (6) ist ersichtlich, dafs

$$-m_1m_2m_3(U_{12}+U_{23}+U_{31})=0$$

ist. Die linke Seite kann in die zwei Teile getrennt werden:

$$\left[m_{12}(x_1A_{12}+y_1B_{12}+z_1C_{12})+m_{23}(x_2A_{23}+y_2B_{23}+z_2C_{23})+m_{31}(x_3A_{31}+y_3B_{31}+z_3C_{31})\right]$$
$$-\left[\xi(m_{12}A_{12}+m_{23}A_{23}+m_{31}A_{31})+\eta(m_{12}B_{12}+m_{23}B_{23}+m_{31}B_{31})+\zeta(m_{12}C_{12}+m_{23}C_{23}+m_{31}C_{31}\right]=0,$$

wovon der erste mit Benutzung von $(3)=-(m_{12}D_{12}+m_{23}D_{23}+m_{31}D_{31})=-\delta$ wird, während der zweite, wie aus (10) § 3 hervorgeht, die Form $\xi\alpha+\eta\beta+\zeta\gamma$ bekommt. Folglich ist

$$-\delta=\xi\alpha+\eta\beta+\zeta\gamma. \tag{10.}$$

Substituieren wir diesen für δ gefundenen Wert in die Gleichung (4b), so verändert sich ihre Gestalt in folgende:

$$(X-\xi)\,\alpha+(Y-\eta)\,\beta+(Z-\zeta)\,\gamma=0. \tag{11.}$$

Hieraus zeigt sich nun, dafs diese der invariabeln Ebene des Systems parallele und durch den Punkt R hindurchgelegte Ebene (4b) auch durch den Schwerpunkt, den wir in gleichfalls abgekürzter Weise den Punkt S nennen wollen, hindurchgeht. Mithin ist die Verbindungslinie der Punkte R und S selbst der invariabeln Ebene parallel. — Setzen wir ferner in (5) an die Stelle von δ den gefundenen Wert (10) ein, so drückt die veränderte Formel

$$p=\frac{X_0\alpha+Y_0\beta+Z_0\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}=\frac{\xi\alpha+\eta\beta+\zeta\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} \tag{12.}$$

zuvörderst nur aus, dafs die von den Punkten X_0, Y_0, Z_0 und ξ, η, ζ auf die Ebene E_0 gefällten Lote in der Richtung und Länge gleich sind, wodurch wiederum bestätigt wird, dafs die Verbindungslinie SR der Ebene E_0 parallel ist, aber wir gelangen durch Differentiation zu einem neuen Resultat. Es ergiebt sich nämlich, dafs der Differentialquotient

$$p_1=\frac{X_0'\alpha+Y_0'\beta+Z_0'\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}=\frac{\xi'\alpha+\eta'\beta+\zeta'\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}, \tag{13.}$$

weil ξ', η', ζ' constante Gröfsen sind, ebenfalls constant ist. p' bezeichnet die Schnelligkeit, mit welcher der senkrechte Abstand der Ebene (4b) von der Ebene E_0 sich ändert, das heifst die Translationsgeschwindigkeit der Ebene (4b) parallel zu E_0. Aber p' bedeutet auch: 1) für die Punkte R und S die Geschwindigkeit, mit der sie sich innerhalb ihrer Bahn senkrecht über die Ebene E_0 erheben, oder mit andern Worten die zur E_0 normale Componente der Geschwindigkeit der Punkte; 2) für die an der Axe des Schwerpunkts gleitende Gerade RS die Geschwindigkeit ihrer Translation parallel zur Ebene E_0. Weil nun zufolge (13) p' constant ist, so haben wir die zwei Sätze gefunden:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Schnittpunkt der drei Richtungsebenen E_1, E_2, E_3 und der Schwerpunkt des Systems bewegen sich senkrecht über der invariabeln Ebene E_0 mit derselben constanten Steigungsgeschwindigkeit.

Die Verbindungsgerade des Schwerpunkts S mit dem Schnittpunkte R der drei Richtungsebenen bleibt stets der invariabeln Ebene E_0 parallel, während sie an der Schwerpunktsaxe mit constanter Geschwindigkeit gleitet.

Beim Problem der zwei Körper giebt es nur eine Richtungsebene E_1 für die eine Verbindungsgerade P_1P_2. Folglich fällt die Ebene (4b) mit E_1 zusammen, und alle Eigenschaften der ersteren übertragen sich nun auf die letztere. Also bewegt sich E_1 parallel zu E_0 mit constanter Translationsgeschwindigkeit, die in E_1 liegenden Körper P_1, P_2 und der Schwerpunkt S haben dieselbe zu E_0 normale constante Geschwindigkeitscomponente und die in E_1 liegende Gerade P_1P_2 ist stets zu E_0 parallel und gleitet mit gleichbleibender Geschwindigkeit an der Axe des Schwerpunkts.

§ 7. Andere zur invariabeln Ebene parallele Geraden.

Wir wenden uns jetzt zu den Richtungsebenen für die Verbindungslinien des Schwerpunkts S mit den drei Körpern, welche nächst den drei Ebenen E_1, E_2, E_3 die meiste Beachtung verdienen. Die Geraden SP_1, SP_2 und SP_3 nennen wir die Transversalen des Schwerpunkts und wollen mit E_{01}, E_{02}, E_{03} die entsprechenden Richtungsebenen bezeichnen. Sie werden durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}(X-\xi)A_1+(Y-\eta)B_1+(Z-\zeta)C_1&=0,\\(X-\xi)A_2+(Y-\eta)B_2+(Z-\zeta)C_2&=0,\\(X-\xi)A_3+(Y-\eta)B_3+(Z-\zeta)C_3&=0,\end{aligned}\qquad(1.)$$

ausgedrückt, worin zur Abkürzung

$$\begin{aligned}(y_1-\eta)(z_1'-\zeta')-(z_1-\zeta)(y_1'-\eta')&=A_1 & (y_2-\eta)(z_2'-\zeta')-(z_2-\zeta)(y_2'-\eta')&=A_2,\\(z_1-\zeta)(x_1'-\xi')-(x_1-\xi)(z_1'-\zeta')&=B_1 & (z_2-\zeta)(x_2'-\xi')-(x_2-\xi)(z_2'-\zeta')&=B_2,\\(x_1-\xi)(y_1'-\eta')-(y_1-\eta)(x_1'-\xi')&=C_1 & (x_2-\xi)(y_2'-\eta')-(y_2-\eta)(x_2'-\xi')&=C_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(y_3-\eta)(z_3'-\zeta')-(z_3-\zeta)(y_3'-\eta')&=A_3,\\(z_3-\zeta)(x_3'-\xi')-(x_3-\xi)(z_3'-\zeta')&=B_3,\\(x_3-\xi)(y_3'-\eta')-(y_3-\eta)(x_3'-\xi')&=C_3\end{aligned}\qquad(2.)$$

eingesetzt ist. Die Coefficienten sollen nun so transformiert werden, dafs ihr Zusammenhang mit denen der Ebenen E_1, E_2, E_3 zu erkennen ist. Wir benutzen dazu die im § 6 (8) aufgestellten Formeln und finden zunächst für A_1

$$\begin{aligned}M^2m_1{}^2A_1&=(m_{12}y_{12}-m_{31}y_{31})(m_{12}z_{12}'-m_{31}z_{31}')-(m_{12}z_{12}-m_{31}z_{31})(m_{12}y_{12}'-m_{31}y_{31}')\\&=m_{12}{}^2A_{12}+m_{31}{}^2A_{31}-m_{12}m_{31}(y_{31}z_{12}'+y_{12}z_{31}'-z_{31}y_{12}'-z_{12}y_{31}').\end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Klammergröſse der rechten Seite kann in den Ausdruck $A_{23} - A_{12} - A_{31}$ umgeformt werden, wozu die Identitäten

$$y_{12} + y_{23} + y_{31} = 0 \qquad y_{12}' + y_{23}' + y_{31}' = 0,$$
$$z_{12} + z_{23} + z_{31} = 0 \qquad z_{12}' + z_{23}' + z_{31}' = 0,$$

dienen, mithin ist:

$$M^2 m_1{}^2 A_1 = m_{12}{}^2 A_{12} + m_{31}{}^2 A_{31} - m_{12} m_{31}(A_{23} - A_{12} - A_{31}),$$

woraus schlieſslich hervorgeht

$$M m_1 A_1 = M_1 \alpha - m_{23} A_{23}.$$

Durch ähnliche Rechnungen erhält man die Beziehungen für die übrigen Coefficienten der Ebenen E_{01}, E_{02}, E_{03}. Wir stellen sie zur Übersicht zusammen und gebrauchen dabei die Abkürzungen:

$$M_1 = \frac{m_2 + m_3}{M}, \; M_2 = \frac{m_3 + m_1}{M}, \; M_3 = \frac{m_1 + m_2}{M}.$$

$$\begin{aligned} M m_1 A_1 &= M_1 \alpha - m_{23} A_{23}, & M m_2 A_2 &= M_2 \alpha - m_{31} A_{31}, \\ M m_1 B_1 &= M_1 \beta - m_{23} B_{23}, & M m_2 B_2 &= M_2 \beta - m_{31} B_{31}, \\ M m_1 C_1 &= M_1 \gamma - m_{23} C_{23}, & M m_2 C_2 &= M_2 \gamma - m_{31} C_{31}, \\ & & M m_3 A_3 &= M_3 \alpha - m_{12} A_{12}, \\ & & M m_3 B_3 &= M_3 \beta - m_{12} B_{12}, \\ & & M m_3 C_3 &= M_3 \gamma - m_{12} C_{12}. \end{aligned} \tag{3.}$$

Jetzt combinieren wir die Richtungsebene der Schwerpunktstransversale SP_1 mit der Richtungsebene der gegenüberliegenden Verbindungslinie P_2P_3, oder E_{01} mit E_1. Beide gehen durch denselben Punkt Q hindurch, in welchem die verlängerte SP_1 die P_2P_3 schneidet, dessen Coordinaten

$$\xi_{23} = \frac{m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_2 + m_3}, \; \eta_{23} = \frac{m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_2 + m_3}, \; \zeta_{23} = \frac{m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_2 + m_3}$$

sind. Mit Rücksicht darauf können die Gleichungen der Ebenen E_{01} und E_1 in die Form:

$$(X - \xi_{23}) A_1 + (Y - \eta_{23}) B_1 + (Z - \zeta_{23}) C_1 = 0,$$
$$(X - \xi_{23}) A_{23} + (Y - \eta_{23}) B_{23} + (Z - \zeta_{23}) C_{23} = 0$$

gebracht werden. Nun wird die erste mit Mm_1 und die zweite mit m_{23} multipliciert und die Summe

$$(X - \xi_{23})(m_1 M A_1 + m_{23} A_{23}) + (Y - \eta_{23})(m_1 M B_1 + m_{23} B_{23}) + (Z - \zeta_{23})(m_1 M C_1 + m_{23} C_{23}) = 0$$

gebildet. Sie bezeichnet eine dritte Ebene, welche durch die gemeinschaftliche Schnittlinie von E_{01} und E_1 hindurchgeht, und die auſserdem, weil ihre Coefficienten, wie aus den Formeln (3) ersichtlich ist, mit den Integralen α, β, γ, abgesehen von dem Factor M_1, identisch sind, der invariabeln Ebene des Systems (E_0) § 6 parallel geht. Folglich ist die Schnittlinie der beiden Ebenen E_{01} und E_1 selbst der invariabeln Ebene E_0 parallel. Da die Combination von E_{02} mit E_2 und von E_{03} mit E_3 zu demselben Resultate führt, so sind drei neue Geraden ermittelt, welche stets der Ebene E_0 parallel liegen. Wir sprechen deshalb den Satz aus:

> Die Richtungsebene der Verbindungsgeraden zweier Körper wird durch die Richtungsebene der Schwerpunktstransversalen des dritten Körpers stets in einer zu der invariabeln Ebene E_0 parallelen Geraden geschnitten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 8. Formeln über das Tetraeder $P_1 P_2 P_3 R$.

Das aus den drei Körpern P_1, P_2, P_3 und dem Punkte R gebildete und von der gemeinschaftlichen Ebene und den drei Richtungsebenen E_1, E_2, E_3 eingeschlossene Tetraeder erscheint für das Dreikörperproblem von besonderer Bedeutung. Ich will deshalb die analytischen Entwicklungsformeln für die hauptsächlichen Bestandteile desselben zum Schlufs zusammenstellen.

Die Seitenkanten RP_1, RP_2 und RP_3, in welchen je zwei Richtungsebenen sich schneiden, mögen durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{X-x_1}{u_1} &= \frac{Y-y_1}{v_1} = \frac{Z-z_1}{w_1} = \varrho_1 \\ \frac{X-x_2}{u_2} &= \frac{Y-y_2}{v_2} = \frac{Z-z_2}{w_2} = \varrho_2 \\ \frac{X-x_3}{u_3} &= \frac{Y-y_3}{v_3} = \frac{Z-z_3}{w_3} = \varrho_3 \end{aligned} \tag{1.}$$

ausgedrückt werden, in welchen

$$\begin{aligned} u_1 &= B_{31}C_{12} - C_{31}B_{12} & u_2 &= B_{12}C_{23} - C_{12}B_{23} & u_3 &= B_{23}C_{31} - C_{23}B_{31}, \\ v_1 &= C_{31}A_{12} - A_{31}C_{12} & v_2 &= C_{12}A_{23} - A_{12}C_{23} & v_3 &= C_{23}A_{31} - A_{23}C_{31}, \\ w_1 &= A_{31}B_{12} - B_{31}A_{12} & w_2 &= A_{12}B_{23} - B_{12}A_{23} & w_3 &= A_{23}B_{31} - B_{23}A_{31}, \end{aligned} \tag{2.}$$

zu setzen sind. Wir finden den Wert der Parameter ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 für den gemeinsamen Punkt R am einfachsten dadurch, dafs wir die laufenden Coordinaten z. B. der ersten Geraden RP_1 in die Gleichung der gegenüberliegenden Richtungsebene E_1 substituieren. Dann ergiebt sich

$$x_{12}A_{23} + y_{12}B_{23} + z_{12}C_{23} + \varrho_1(A_{23}u_1 + B_{23}v_1 + C_{23}w_1) = 0,$$

oder

$$U_{23} + \varrho_1\Delta = 0,$$

folglich

$$\varrho_1 = -\frac{U_{23}}{\Delta}.$$

Die mit Δ bezeichnete Klammergröfse ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{12} & B_{12} & C_{12} \\ A_{23} & B_{23} & C_{23} \\ A_{31} & B_{31} & C_{31} \end{vmatrix} \tag{3.}$$

Auf ähnliche Weise kann man die Werte

$$\varrho_2 = -\frac{U_{31}}{\Delta}, \qquad \varrho_3 = -\frac{U_{12}}{\Delta}$$

ermitteln. Also sind die Coordinaten des Punktes R durch die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \Delta(X_0 - x_1) &= -U_{23}u_1 & \Delta(X_0 - x_2) &= -U_{31}u_2 & \Delta(X_0 - x_3) &= -U_{12}u_3, \\ \Delta(Y_0 - y_1) &= -U_{23}v_1 & \Delta(Y_0 - y_2) &= -U_{31}v_2 & \Delta(Y_0 - y_3) &= -U_{12}v_3, \\ \Delta(Z_0 - z_1) &= -U_{23}w_1 & \Delta(Z_0 - z_2) &= -U_{31}w_2 & \Delta(Z_0 - z_3) &= -U_{12}w_3 \end{aligned} \tag{4.}$$

bestimmt. Wenn die einzelnen Zeilen bezüglich mit den Factoren m_1, m_2, m_3 versehen und dann addiert werden, so stellen sich folgende Beziehungen heraus

$$\begin{aligned} M\Delta(X_0 - \xi) &= -\left[m_1U_{23}u_1 + m_2U_{31}u_2 + m_3U_{12}u_3\right] = p_1, \\ M\Delta(Y_0 - \eta) &= -\left[m_1U_{23}v_1 + m_2U_{31}v_2 + m_3U_{12}v_3\right] = p_2, \\ M\Delta(Z_0 - \zeta) &= -\left[m_1U_{23}w_1 + m_2U_{31}w_2 + m_3U_{12}w_3\right] = p_3. \end{aligned} \tag{5.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daher ist die Entfernung der beiden Punkte

$$RS = \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}{M\Delta}, \tag{6.}$$

und ihre Verbindungslinie besitzt die Gleichung

$$\frac{X-\xi}{p_1} = \frac{Y-\eta}{p_2} = \frac{Z-\zeta}{p_3}. \tag{7.}$$

Den Ebenen P_1RO, P_2RO und P_3RO mögen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} (X-x_1)r_1 + (Y-y_1)s_1 + (Z-z_1)t_1 &= 0, \\ (X-x_2)r_2 + (Y-y_2)s_2 + (Z-z_2)t_2 &= 0, \\ (X-x_3)r_3 + (Y-y_3)s_3 + (Z-z_3)t_3 &= 0, \end{aligned} \tag{8.}$$

entsprechen. Jede dieser Ebenen wird durch zwei bereits bekannte Geraden bestimmt, so z. B. enthält P_1RO die beiden Linien P_1O oder G_1 und P_1R, deren Gleichungen (4) § 5 und (1) § 8 angegeben sind. Mithin ist r_1, s_1, t_1 zu finden; zuerst ergiebt sich

$$r_1 : s_1 : t_1 = y_1''w_1 - z_1''v_1 : z_1''u_1 - x_1''w_1 : x_1''v_1 - y_1''u_1$$

und schliefslich mit Benutzung von (2) § 1

$$\begin{aligned} r_1 &= -m_{12}\frac{A_{12}U_{23}U_{31}}{r_{12}^3} + m_{31}\frac{A_{31}U_{12}U_{23}}{r_{31}^3}, \\ s_1 &= -m_{12}\frac{B_{12}U_{23}U_{31}}{r_{12}^3} + m_{31}\frac{B_{31}U_{12}U_{23}}{r_{31}^3}, \\ t_1 &= -m_{12}\frac{C_{12}U_{23}U_{31}}{r_{12}^3} + m_{31}\frac{C_{31}U_{12}U_{23}}{r_{31}^3}. \end{aligned} \tag{9.}$$

Wir erhalten r_2, s_2, t_2 und r_3, s_3, t_3 durch cyclische Vertauschung der Indices 1, 2 und 3 in den vorstehenden Formeln.

Die Gleichung

$$\frac{X-x_0}{q_1} = \frac{Y-y_0}{q_2} = \frac{Z-z_0}{q_1} = \tau \tag{10.}$$

stelle die Gerade RO dar, in welcher die drei Ebenen (8) sich schneiden, die wir zur Berechnung von q_1, q_2, q_3 paarweise combinieren. Es verhält sich:

$$q_1 : q_2 : q_3 = s_1t_2 - t_1s_2 : t_1r_2 - r_1t_2 : r_1s_2 - s_1r_2.$$

Einige Umformungen führen uns zu dem Resultat

$$\begin{aligned} q_1 &= m_1U_{23}r_{23}^3u_1 + m_2U_{31}r_{31}^3u_2 + m_3U_{12}r_{12}^3u_3, \\ q_2 &= m_1U_{23}r_{23}^3v_1 + m_2U_{31}r_{31}^3v_2 + m_3U_{12}r_{12}^3v_3, \\ q_3 &= m_1U_{23}r_{23}^3w_1 + m_2U_{31}r_{31}^3w_2 + m_3U_{12}r_{12}^3w_3. \end{aligned} \tag{11.}$$

Der Wert des Parameters τ (10) für den Punkt R ergiebt sich am einfachsten aus den Gleichungen (4), deren einzelne Zeilen wir deshalb der Reihe nach mit $m_1r_{23}^3$, $m_2r_{31}^3$ und $m_3r_{12}^3$ multiplicieren und addieren.

$$L\Delta(X_0 - x_0) = -q_1,\ L\Delta(Y_0 - y_0) = -q_2,\ L\Delta(Z_0 - z_0) = -q_3,\ \tau = -\frac{1}{L\Delta}, \tag{12.}$$

worin L dieselbe Gröfse wie in (10) § 5 bedeutet; folglich ist die Entfernung

$$RO = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{L\Delta}. \tag{13.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Einführung der ersten Differentialquotienten der Ausdrücke U_{12}, U_{23} und U_{31} (6) § 6 macht es uns möglich die Gröfsen u_1, u_2, u_3 u. s. w. in zweckmäfsiger Weise zu transformieren. Es ist nämlich

$$U_{12}' = x_{12}''\Delta_1 + y_{12}''\Delta_2 + z_{12}''\Delta_3 + x_{12}'\Delta_1' + y_{12}'\Delta_2' + z_{12}'\Delta_3'.$$

Der erste Teil ist identisch 0 zufolge (6) § 4, und der zweite nimmt schliefslich die Gestalt an:

$$-(x_{12}\nabla_1 + y_{12}\nabla_2 + z_{12}\nabla_3).$$

∇_1, ∇_2 und ∇_3 sind aus den ersten Differentialquotienten der Coordinaten ebenso zusammengesetzt wie Δ_1, Δ_2, Δ_3 aus den Coordinaten selbst, z. B.

$$\begin{aligned}\nabla_1 &= y_1'z_2' - z_1'y_2' + y_2'z_3' - z_2'y_3' + z_3'y_1' - y_3'z_1' = y_{12}'z_{23}' - z_{12}'y_{23}' \\ &= y_{23}'z_{31}' - z_{23}'y_{31}' = y_{12}'z_{23}' - z_{12}'y_{23}'.\end{aligned}$$

Die Differentialquotienten von U_{23} und U_{31} sind in entsprechender Weise gebildet, mithin ist

$$\begin{aligned}-U_{12}' &= x_{12}\nabla_1 + y_{12}\nabla_2 + z_{12}\nabla_3, \\ -U_{23}' &= x_{23}\nabla_1 + y_{23}\nabla_2 + z_{23}\nabla_3, \\ -U_{31}' &= x_{31}\nabla_1 + y_{31}\nabla_2 + z_{31}\nabla_2.\end{aligned} \tag{14.}$$

Diese Ausdrücke erlauben uns jetzt die Gröfsen u_1, u_2, u_3 etc. (2) in der Form:

$$\begin{aligned}u_1 &= x_{31}'U_{12} - x_{31}U_{12}' = x_{12}'U_{31} - x_{12}U_{31}' & u_2 &= x_{12}'U_{23} - x_{12}U_{23}' = x_{23}'U_{12} - x_{23}U_{12}', \\ v_1 &= y_{31}'U_{12} - y_{31}U_{12}' = y_{12}'U_{31} - y_{12}U_{31}' & v_2 &= y_{12}'U_{23} - y_{12}U_{23}' = y_{23}'U_{12} - y_{23}U_{12}', \\ w_1 &= z_{31}'U_{12} - z_{31}U_{12}' = z_{12}'U_{31} - z_{12}U_{31}' & w_2 &= z_{12}'U_{23} - z_{12}U_{23}' = z_{23}'U_{12} - z_{23}U_{12}',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_3 &= x_{23}'U_{31} - x_{23}U_{31}' = x_{31}'U_{23} - x_{31}U_{23}', \\ v_3 &= y_{23}'U_{31} - y_{23}U_{31}' = y_{31}'U_{23} - y_{31}U_{23}', \\ w_3 &= z_{23}'U_{31} - z_{23}U_{31}' = z_{31}'U_{23} - z_{31}U_{23}',\end{aligned} \tag{15.}$$

zu schreiben, und nachstehende Beziehungen

$$\begin{aligned}u_1\Delta_1 + v_1\Delta_2 + w_1\Delta_3 &= U_{31}U_{12}, \\ u_2\Delta_1 + v_2\Delta_2 + w_2\Delta_3 &= U_{12}U_{23}, \\ u_3\Delta_1 + v_3\Delta_2 + w_3\Delta_3 &= U_{23}U_{31},\end{aligned} \tag{16.}$$

sowie die Umformung von Δ, nämlich

$$-\Delta = U_{12}U_{23}' - U_{23}U_{12}' = U_{23}U_{31}' - U_{31}U_{23}' = U_{31}U_{12}' - U_{12}U_{31}', \tag{17.}$$

gehen unmittelbar daraus hervor.

Mit Hilfe von (16) läfst sich noch folgende Beziehung

$$p_1\Delta_1 + p_2\Delta_2 + p_3\Delta_3 = -MU_{12}U_{23}U_{31}$$

nachweisen, aus welcher das Volumen des Tetraeders $P_1P_2P_3R$

$$V = -\frac{U_{12}U_{23}U_{31}}{3\Delta} \tag{18.}$$

gefunden wird.

Victor Schemmel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf