Vorbemerkung.

Muss zugegeben werden, dass der mathematische Unterricht den ganzen Nutzen, dessen er fähig ist, nur bringen kann, wenn dem Schüler die Möglichkeit geboten wird, selbstthätig den im Unterricht erworbenen Stoff zur Anwendung zu bringen, so ergiebt sich andererseits, soll der Nutzen dieser selbstständigen Uebungen nicht illusorisch werden, die Nothwendigkeit, den Schüler mit den Grundzügen der geometrischen Analysis bekannt zu machen. Ohne diese ist die Auflösung einer Aufgabe dem Zufall überlassen, der Schüler muss herumsuchen im Dunkeln, und selbst wenn ein glücklicher Gedanke die Auflösung errathen lässt, ist ein bleibender Gewinn damit nicht erzielt, indem jede neue Aufgabe neue Schwierigkeiten in den Weg wirft, jede neue Auflösung wieder einen neuen glücklichen Griff voraussetzt. Lagen nun dem Verfasser freilich höchst schätzbare Lehrbücher der geometrischen Analysis vor, so liess doch insbesondere die Ansicht, dass ein Leitfaden für den Schüler auch hier nur das Nothwendigste enthalten dürfe, es ihm nicht rathsam erscheinen, eines jener Lehrbücher selbst seinem Unterricht zu Grunde zu legen, und er glaubte daher, dem Beispiele Anderer folgend, die hier gebotene Gelegenheit ergreifen zu dürfen, selbst seinen Schülern mit nachfolgenden Blättern die Elemente der geometrischen Analysis in kurzem Entwurfe in die Hände zu geben. Uebungsmaterial, an dem die Methode zur Anwendung kommen könnte, ist in dem Nachfolgenden nicht zusammengestellt, da solches in zweckmässigster Anordnung an mehreren Orten geboten wird, und weil der Verfasser so besser in der Auswahl desselben wechseln zu können glaubte; allerdings aber ist er überzeugt, dass gerade durch die Auswahl des Uebungsstoffes die Resultate des Unterrichts zumeist bedingt sind. Es wird der Sorge des Lehrers anheimfallen, die Aufgaben und Lehrsätze, welche dem Schüler zur eigenen Bearbeitung übergeben werden, so zu wählen, dass dieselben, wie die Lehrsätze im System der Geometrie, im natürlichen Zusammenhange mit der bis dahin erlangten Erkenntniss desselben stehen, dass sie ihre Auflösung und ihren Nachweis in der richtigen Auffassung und Anwendung des Vorangehenden finden. Nur wenn die Auswahl derartig getroffen ist, wird der Schüler seinen Bemühungen auch den Erfolg gesichert finden, er wird nicht durch wiederholtes Misslingen derselben von dem Stoffe selbst zurückgeschreckt werden, der traurigen Ansicht sich anschliessend, dass besondere Anlagen erforderlich seien, irgendwie selbstthätig den mathematischen Lehrstoff zur Anwendung zu bringen.

Die Methode selbst dagegen hat der Verfasser sich bemüht, dem Schüler klar und, so weit dies für den besonderen Zweck der nachfolgenden Blätter zulässig war, streng der Sache entsprechend darzustellen, dabei der Definition der Aufgabe sich anschliessend, welche

Drobisch in seiner neuen Darstellung der Logik giebt und welche die Analysis als wesentlichen Bestandtheil der Aufgabe hinstellt. Indem diese nothwendige Zugehörigkeit der Analysis besonders hervorgehoben werden sollte, erschien die Behandlung der Aufgabe in ihren einzelneu Theilen, ohne die Analysis sofort hinzuzuziehen, nicht zulässig, und dies um so weniger, da so die Beziehung derselben zur Construction und zum Beweise von vornherein klarer hervorgehoben werden konnte. Was die Hülfsmittel der Analysis betrifft, so können dieselben entweder an die gegebenen Bedingungen anknüpfen, oder an die gesuchte Grösse, oder endlich an die zwischen denselben statthabenden Beziehungen. Es sind denselben daher beigezählt die Data, durch welche statt der gegebenen Grössen neue eingeführt werden, die Reduction, bei welcher statt der gesuchten Grösse eine neue Grösse als gesucht hingestellt wird, endlich Lehrsätze, welche dem System der Geometrie gewöhnlich nicht eingereiht sind, durch welche demnach neue Beziehungen zwischen den in Rede stehenden Grössen ausgesprochen werden. Während der Analysis durch Analogie ein gleiches Gewicht nicht beigelegt wurde, hat dagegen die Analysis mit Anwendung geometrischer Oerter, allerdings in Abweichung von der sonst üblichen Anordnung, eine abgesonderte Stellung erhalten, theils in Rücksicht auf deren besondere Wichtigkeit, theils weil der äussere Gang der Analysis eine wesentliche Aenderung erleidet, sobald dieselbe streng mit Anwendung geometrischer Oerter durchgeführt wird. Wie hier, glaubt der Verfasser auch an anderer Stelle vielleicht ganz eigenen Weg gegangen zu sein; andererseits aber hofft er, es möchte aus Nachfolgendem der Beweis zu entnehmen sein, dass er mit frühern Arbeiten auf diesem Gebiete vertraut war, und gern gesteht er den wesentlichen Nutzen zu, der ihm aus dem Studium derselben, mag hier die geometrische Analysis von Holleben und Gerwien besondere Erwähnung finden, für seine Arbeit erwachsen ist. Ist dies aber der Fall, dann glaubt er auch, von den nachfolgenden Blättern für den Unterricht eine wesentliche Hülfe erwarten zu dürfen, und damit den besondern Zweck zu erreichen, den er sich bei der Bearbeitung derselben vorgesteckt hatte.

Elemente der geometrischen Analysis.

§. 1.

Eintheilung des geometrischen Stoffes. Die Lehren und Untersuchungen der Geometrie finden im Allgemeinen in dreifacher Form ihren Ausdruck, und zwar in Erklärungen, Lehrsätzen und Aufgaben. Die Erklärung (Definition) führt den Begriff einer Raumgrösse auf vorangehende, im System schon aufgestellte, Begriffe zurück, denen schliesslich die Grundbegriffe, welche ohne Erklärung als gegeben vorausgesetzt werden, zu Grunde liegen. Der Lehrsatz (Theorem) giebt Beziehungen und Eigenschaften dieser Begriffe an, welche aus ursprünglich in denselben enthaltenen Beziehungen abgeleitet werden. Die Aufgabe (Problem) enthält endlich die Forderung, aus gegebenen räumlichen Grössen eine andere Raumgrösse, bestimmten, in der Aufgabe selbst angegebenen Eigenschaften entsprechend, darzustellen oder zu construiren.

Erscheint es zunächst selbstverständlich, dass die Darstellung der in der Aufgabe geforderten Raumgrösse nur demjenigen möglich ist, der mit der Definition derselben vertraut dem also vollkommen klar ist, was er überhaupt construiren soll, so wird, wie darauf ausführlich die spätere Betrachtung der Aufgabe eingehen wird, ebenso nothwendig die Kenntniss der weiteren Eigenschaften sein, die der gesuchten Grösse zugehören, und insbesondere die Kenntniss derjenigen Beziehungen, welche zwischen letzterer und den in der Aufgabe gegebenen Grössen stattfinden. Da nun die geometrischen Lehrsätze diese weiteren Eigenschaften und Beziehungen der Raumgrössen aussprechen, so werden eben diese für die Behandlung von Aufgaben die wichtigsten Hülfsmittel bieten, und im Nachfolgenden mag daher zunächst der Lehrsatz, sowohl nach seinen verschiedenen Theilen, als auch nach den verschiedenen Formen, in denen die in ihm enthaltene Wahrheit ihren Ausdruck finden kann, einer Besprechung unterzogen werden.

I. Von den Lehrsätzen.

§. 2.

Eintheilung der Lehrsätze und deren Bestandtheile. Der Lehrsatz wird ein *Grundsatz* (Axiom) sein, wenn er der in Rede stehenden Grösse eine Eigenschaft beilegt, welche sich sofort aus dem Begriffe dieser Grösse als ihr zugehörig erkennen lässt, wenn er Behauptungen aufstellt, welche der natürliche Verstand zugesteht, ohne dass es weiterer Mittelglieder bedürfte, sie dem Verständniss näher zu führen. Es wird daher eines Nachweises für die Richtigkeit der im Grundsatze aufgestellten Behauptung nicht bedürfen, vielmehr werden die Grundsätze selbst zur Begründung anderer Eigenschaften der betreffenden Grössen dienen müssen. Der *Lehrsatz* im engeren Sinne stellt dagegen unter der *Voraussetzung* (Hypothesis) bestimmter Bedingungen, welche in demselben ausgesprochen, oder,

wenn nicht besonders hervorgehoben, doch in der Definition der zu betrachtenden Grösse enthalten sein werden, eine *Behauptung* (Thesis) auf, deren Richtigkeit in einem dritten Theile, dem *Beweise* (Demonstratio), durch Zurückführung auf schon erkannte Wahrheiten, oder, wollte man von diesen aus weiter zurückgehen, durch schliessliche Bezugnahme auf Axiome dargethan wird.

Anmerkung. Dem Beweise des Lehrsatzes, welcher die Mittelglieder zwischen Voraussetzung und Behauptung zu suchen hat, entspricht bei der Aufgabe die Auflösung, indem dieselbe die ähnliche Forderung zu erfüllen hat, den Uebergang von den gegebenen zu den gesuchten Grössen anzugeben. Wie es späterer Betrachtung vorbehalten bleibt, den Weg zu bestimmen, welcher zur Auflösung einer Aufgabe führt, so wird es auch hier an der Stelle sein, darzuthun, wie der Beweis, auf den wir deshalb näher eingehen wollen, für gegebene Lehrsätze sich auffinden lässt.

§. 3.

Beweis, directer und indirecter. Der Beweis kann entweder, als *directer* Beweis, die Behauptung auf früher erkannte Wahrheiten unmittelbar zurückführen, indem er zeigt, dass mit Anwendung derselben die Behauptung sich als nothwendige Folgerung aus der Voraussetzung ergiebt; oder derselbe kann, als *indirecter* oder *apagogischer* Beweis, die Wahrheit der aufgestellten Behauptung aus der Unmöglichkeit des Gegentheils derselben ableiten, indem er die Folgerung, welche mit Anwendung erwiesener Sätze aus der Annahme des Gegentheils sich ergiebt, als unvereinbar mit den Voraussetzungen des Lehrsatzes nachweist. Der indirecte Beweis wird insbesondere bei Umkehrungen im System schon enthaltener Sätze Anwendung finden. Da der indirecte Beweis nehmlich das Gegentheil der Behauptung als statthabend annimmt, und so derjenigen Grösse, welcher der Lehrsatz eine neue Eigenschaft beilegt, die behauptete Eigenschaft abspricht, so wird derselbe eine andere Grösse derartig voraussetzen können, dass in Bezug auf diese der Behauptung genügt wird. Diese Behauptung wird dadurch selbst zur Voraussetzung gemacht, und soll aus dieser eine weitere Folgerung gezogen werden können, so muss ein Lehrsatz bekannt sein, in welchem die Behauptung des zu erweisenden Lehrsatzes der Voraussetzung zugehört. Die sich durch Anwendung desselben ergebende Folgerung soll aber mit den Voraussetzungen des Lehrsatzes in Widerspruch treten, und dies wird der Fall sein, wenn der herbeigezogene Satz in Bezug auf die geänderte Grösse dieselbe Behauptung aufstellt, welche als Voraussetzung in Bezug auf die dem ursprünglichen Lehrsatze zu Grunde liegende Grösse statthatte. Der indirecte Beweis wird daher zulässig sein, wenn dem zu beweisenden Lehrsatze ein anderer Lehrsatz vorangeht, dessen Voraussetzung und Behauptung umgekehrt der Behauptung und Voraussetzung des ersteren Satzes entsprechen, wenn dieser mit anderen Worten als Umkehrung eines dem System schon zugehörigen Satzes sich ergiebt.

§. 4.

Beweis, synthetischer und analytischer. Die Anordnung der Beweisgründe bei dem directen Beweise kann wiederum verschieden sein. Der Beweis ist ein *synthetischer*, wenn er aus den gegebenen Voraussetzungen heraus durch Anwendung schon erwiesener Lehrsätze oder Axiome Folgerungen zieht, aus diesen, wenn es nöthig ist, zu weiteren Schlüssen übergeht, als deren letzter Schlusssatz die Behauptung selbst hervorgeht. In

entgegengesetzter Anordnung wird der *analytische* Beweis von der Behauptung selbst ausgehen; er wird untersuchen, welche Bedingungen eben diese Behauptung voraussetzt, welche weitere Voraussetzung wieder die Richtigkeit der erhaltenen Folgerung bedingt, bis endlich die Voraussetzung des Lehrsatzes die Bedingung für die Gültigkeit der letzten Folgerung und damit für die Gültigkeit der Behauptung selbst hervortreten lässt.

Mag der Beweis auf dem einen oder anderen Wege die Mittelglieder zwischen Voraussetzung und Behauptung aufstellen, so lassen sich für jeden Fall doch Ausgangspunkt und Endpunkt des Beweises bestimmen. Wie daher der Weg von einem genau bekannten Punkte zu einem anderen in seiner Lage gleichfalls bestimmten Punkte der Erdoberfläche, auch wo Weg und Strasse nicht abgesteckt sind, doch mit Sicherheit ermittelt werden kann, so werden auch hier die gegebenen Beziehungen genügen, den Weg der Beweisgründe aufzufinden, welche zum Endziele, der Behauptung, überführen. Beim synthetischen Beweise schliessen sich die Fäden der Beweisführung an jeden einzelnen Theil der Voraussetzung an, werden zusammengeführt, bis alle endlich sich in einen Knoten zusammenknüpfen, den jeder einzelne Faden durchzieht, wie auch in der Behauptung die gesammten Glieder der Voraussetzung sich zusammenfassen. Der Lehrsatz würde fehlerhaft ausgesprochen, es würden überflüssige Bedingungen hinzugezogen sein, wenn nur ein Theil der Voraussetzung sich der Beweisführung als unnöthig entziehen könnte. Muss an anderer Stelle für die Auflösung von Aufgaben besonders hervorgehoben werden, dass alle Bedingungen der Aufgabe zur Auflösung herbeizuziehen sind, so wird es ebenso nothwendig sein, bei dem Aufsuchen des Beweises die gesammte Voraussetzung der Betrachtung zu Grunde zu legen, indem bei einem richtig aufgestellten Lehrsatze nur mit dem Zusammentreffen aller dieser Voraussetzungen auch die Behauptung statthaben soll. Da für die Lehrsätze im Systeme der Geometrie gewöhnlich synthetische Beweise gegeben werden, so lassen sich leicht durchgeführte Beweise finden, an denen das synthetische Verfahren klar hervortritt; es mag indessen an einem Beispiele gezeigt werden, wie wichtig es für das Auffinden eines Beweises ist, die Voraussetzung in ihren einzelnen Theilen, zugleich aber auch in ihrer Beziehung zur Behauptung, scharf und bestimmt heraus zu stellen.

Lehrsatz: Verbindet man die Endpunkte einer zur Grundlinie eines Dreiecks gezogenen Parallele mit den Endpunkten der Grundlinie, und zieht durch den Durchschnittspunkt dieser Verbindungslinien und die Spitze des Dreiecks eine gerade Linie, so halbirt diese die Grundlinie, wie auch die zu derselben gezogene Parallele.

Vorausgesetzt wird hier zuerst, dass (Fig. 1,) DE parallel BC ist, ferner dass F der Durchschnittspunkt der beiden Linien BE und CD, endlich dass H und G die Punkte einer Graden sind, die durch F, zugleich aber auch durch die Spitze des Dreiecks A, gezogen ist.

Zum Beweise werden wir durch die Voraussetzung, dass DE parallel zur Grundlinie BC die beiden andern Seiten des Dreiecks durchschneidet, unter Berücksichtigung, dass die Grundlinie und Parallele zur Behauptung in besonderer Beziehung stehen, auf die Proportion geführt

$$1)\quad BC : DE = AB : AD.$$

Um sodann den Punkt F als Durchschnittspunkt der Verbindungslinien, und um zugleich seine Lage auf der Graden BE zu bestimmen, werden wir, ohne zunächst die Linie AG zu berücksichtigen, auf die Aehnlichkeit der Dreiecke BCF und DEF geführt, aus welcher sich ergiebt

2) BC : DE = BF : FE.

Durch die Grade HG, welche der weiteren Voraussetzung zufolge durch den Punkt F geht, werden die anderen ähnlichen Dreiecke BGF und EHF gebildet, und in diesen verhält sich

3) BF : EF = BG : EH.

Endlich führt die noch übrige Voraussetzung, dass dieselbe Grade auch durch die Spitze des Dreiecks gehen soll, auf die weitere Folgerung

4) BG : DH = AB : AD.

Betrachten wir nun die Beziehungen, zu denen allein die Voraussetzung uns geführt hat, so ergeben die drei ersten Proportionen sofort die andere

BG : EH = AB : AD,

und vergleichen wir hiermit die vierte Proportion, so ergiebt sich die Gleichung DH = EH, aus welcher mit Anwendung eines bekannten Lehrsatzes der andere Theil der Behauptung BG = GC folgt.

Wir würden zu diesem Resultate nicht gekommen sein, hätten wir einen Theil der Voraussetzung ausser Acht gelassen, hätten wir etwa die Linie HG nur in Rücksicht darauf betrachtet, dass sie durch den Punkt F geht, die Parallele DE durchschneidet und so die ähnlichen Dreiecke BGF und EHF entstehen lässt. Die Behauptung wird eben nur unter der Bedingung aufgestellt, dass die Linie GH zugleich auch durch die Spitze A gezogen ist, dass also die Punkte H und G zugleich mit A in einer geraden Linie liegen, eine Beziehung, die ja bekanntlich in der vierten Proportion ihren Ausdruck findet.

Mit grösserer Sicherheit wird in den meisten Fällen der analytische Beweis sich auffinden lassen, da er klarer die Nothwendigkeit der eingeschobenen Mittelglieder hervortreten lässt und zugleich die für den Beweis selbst nöthigen Hülfsconstructionen an die Hand giebt. Um das Wesen des analytischen Beweises daher besser erkennen zu lassen, mag ein Lehrsatz dieser Beweisführung entsprechend durchgeführt werden.

Lehrsatz: In jedem Dreieck ist das Rechteck zweier Seiten gleich dem Rechteck aus der der dritten Seite zugehörigen Höhe und dem Durchmesser des umgeschriebenen Kreises. (Fig. 2.)

Behauptung: AB . AC = AD . AE.

Beweis. Es sei AD die Höhe des Dreiecks ABC, M der Mittelpunkt des demselben umgeschriebenen Kreises, AE der Durchmesser des letzteren, welcher am besten von A aus gezogen wird, da derselbe so von vornherein mit den Seiten und der Höhe, zu denen er in Beziehung gesetzt werden soll, in Verbindung steht. Die Forderung des Lehrsatzes, dass AB . AC = AD . AE, wird nun erfüllt sein, wenn AB : AD = AE : AC, welche Proportion wiederum statthaben wird, wenn $\triangle$ ABD $\sim$ $\triangle$ ACE, welche Betrachtung nothwendig die Construction der Linie CE, als Hülfsconstruction, voraussetzt. Diese Ähnlichkeit lässt sich nun aber aus den Voraussetzungen des Lehrsatzes ableiten, denn da AE Durchmesser des umgeschriebenen Kreises und AD die Höhe des Dreiecks ist, so ergiebt sich zunächst $\sphericalangle$ ADB = $\sphericalangle$ ACE = R. Da ferner A, C, B, E Punkte der Peripherie eines Kreises sind, so folgt, dass $\sphericalangle$ ABC = $\sphericalangle$ AEC, und sonach die Ähnlichlichkeit der beiden Dreiecke. Die letzte Folgerung ist also erwiesen und damit die Behauptung selbst, deren Bedingungen zugleich in den Bedingungen der letztern Folgerung enthalten sind.

Da die für den Beweis nöthigen Beweismittel selbst wieder Lehrsätze sind, die schon

früher erkannte Beziehungen der im Lehrsatz berührten Grössen angeben, so wird natürlich eine Kenntniss der vorangehenden Lehrsätze nothwendig sein, wenn dem Auffinden der Beweise sich besonders für den weniger Geübten nicht bedeutendere Schwierigkeiten in den Weg stellen sollen. Aber auch wo diese vorbereitenden Sätze bekannt sind, können solche Schwierigkeiten hervortreten, wenn, wie dies durch Einreihung verschiedener Mittelglieder bewerkstelligt sein kann, Grössen in dem Lehrsatze zu einander in Beziehung gesetzt werden, deren Abhängigkeit von einander eben nur durch Herbeiziehung jener vielleicht nicht nahe liegenden Mittelglieder erkannt werden kann. Mag auch für eine solche weniger einfache analytische Betrachtung ein Beispiel folgen.

Lehrsatz: Halbirt man in einem beliebigen Dreiecke einen Winkel, so ist das Quadrat der bis zur Gegenseite verlängerten Halbirungslinie gleich dem Rechteck aus den den halbirten Winkel einschliessenden Seiten vermindert um das Rechteck aus den beiden Abschnitten der Grundlinie. (Fig. 3.)

Behauptung: $AD^2 = AB \,.\, AC - BD \,.\, CD$.

1. Beweis. Ist hier die Beziehung der Halbirungslinie zu dem Producte der den halbirten Winkel einschliessenden Seiten nicht so klar ersichtlich, so möchte zunächst der Versuch an der Stelle sein, für dies Product einen andern Werth einzuführen, und hierzu könnte der vorher behandelte Lehrsatz die Mittel an die Hand geben. Danach wäre die Behauptung $AD^2 = AB \,.\, AC - BD \,.\, CD$ erwiesen, wenn sich zeigen liesse, dass $AD^2 = AF \,.\, AE - BD \,.\, CD$, wo AE die Höhe, AF den Durchmesser des umgeschriebenen Kreises bezeichnet; letzterer wäre sonach zu construiren, um die weiteren hier statthabenden Beziehungen ermitteln zu können. Da nun AD den Winkel FAE halbirt, ($\sphericalangle ABF = \sphericalangle AEC$, $\sphericalangle BFA = \sphericalangle ECA$, daher auch $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$, woraus, da $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle FAD = \sphericalangle EAD$ folgt), also $\sphericalangle FAD = \sphericalangle DAE$ ist, so würde, wenn AD bis zur Peripherie verlängert und der Durchschnittspunkt G mit dem Endpunkte des Durchmessers F verbunden wird, $\triangle AFG \sim \triangle ADE$ sein. Daraus würde folgen $AF : AG = AD : AE$. oder $AF \,.\, AE = AG \,.\, AD$: es würde demnach die Bedingung, dass $AD^2 = AF \,.\, AE - BD \,.\, CD$ erfüllt sein, wenn die andere Gleichung richtig wäre $AD^2 = AG \,.\, AD - BD \,.\, CD$. Da nun $BD \,.\, DC = AD \,.\, DG$, so würde letztere Gleichung voraussetzen, dass $AD^2 = AG \,.\, AD - AD \,.\, DG$, oder dass $AD = AG - DG$. Nun ist aber die letzte Bedingung in der That erfüllt, damit also zugleich die Behauptung als richtig erwiesen, wie andererseits daraus sich leicht der synthetische Beweis mit seiner Hülfsconstruction ableiten liesse.

2. Beweis. Ein anderer Weg, hier zum Ziele zu gelangen, würde durch die Verbindung der Behauptung mit der aus der Eigenschaft der Halbirungslinie folgenden Beziehung $AB : AC = BD : DC$ (Fig. 4.) sich ergeben. Danach wäre $AB \,.\, DC = AC \,.\, BD$ oder $0 = AC \,.\, BD - AB \,.\, DC$, und addiren wir hierzu die Behauptung $AD^2 = AB \,.\, AC - BD \,.\, DC$, so würde folgen $AD^2 = AB\,(AC - DC) + BD\,(AC - DC)$ oder $AD^2 = (AB + BD)\,(AC - DC)$. Die Bedingungen für die Behauptung wären hiernach unter Hinzuziehung der Voraussetzung, dass AD Halbirungslinie des Winkels BAC ist, erfüllt, wenn die letztere Gleichung richtig wäre, und diese würde wiederum gültig sein, wenn sich verhielte $(AB + BD) : AD = AD : (AC - DC)$. Construiren wir nun die in der letzten Proportion enthaltenen Grössen, indem wir AB über B hinaus um $BF = BD$ verlängern, von AC dagegen $EC = CD$ abschneiden, so würde die letztere Proportion durch die andere erfüllt sein $AF : AD = AD : AE$. Nun ist aber, wie hier nicht weiter ausgeführt werden mag, $\triangle ADF \sim \triangle ADE$, folglich sind die Bedingungen für die letzte Proportion, und damit auch diejenigen für die Gültigkeit der Behauptung selbst gegeben.

§. 5.

Geometrische Oerter. Unter den Lehrsätzen werden, wie sich später herausstellen wird, für die Auflösung von Aufgaben diejenigen von besonderer Wichtigkeit sein, welche sämmtlichen auf einer Graden oder Kreislinie liegenden Punkten eine besondere Eigenschaft beilegen, während zugleich die Behauptung erweisbar ist, dass gerade nur Punkte dieser Linie, und nicht andere, den erwähnten Bedingungen genügen. Insofern man eine solche Grade oder Kreislinie den *geometrischen Ort* des Punktes nennt, dem die in Rede stehende Eigenschaft zukommt, bezeichnet man auch diese Lehrsätze selbst als geometrische Örter und spricht dieselben in besonderer Form aus, die sie auch äusserlich von den übrigen Lehrsätzen unterscheidet. Ist die Kreislinie als diejenige krumme Linie erklärt, deren Punkte alle von einem Punkte, dem Mittelpunkte, gleichweit, und zwar um den Radius, entfernt sind, und ist nachgewiesen worden, dass jeder Punkt innerhalb des Kreises vom Mittelpunkte eine Entfernung kleiner als der Radius, jeder Punkt ausserhalb desselben eine Entfernung grösser als der Radius hat, so lassen sich diese Beziehungen in der Form aussprechen: der geometrische Ort für alle Punkte, welche gleichweit von einem bestimmten Punkte entfernt sind, ist die Kreislinie, welche sich um diesen Punkt, als Mittelpunkt, mit der gegebenen Entfernung als Radius construiren lässt. So führt der Satz: „Liegt die Spitze eines Dreiecks auf der Senkrechten, welche auf der Grundlinie in deren Halbirungspunkt sich errichten lässt, so ist das Dreieck gleichschenklig," verbunden mit dem Nachweise, dass die Verbindungslinien jedes anderen Punktes mit den Endpunkten der Grundlinie ungleich sind, zu dem geometrischen Orte: der geometrische Ort für die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, welche auf derselben Grundlinie stehen, ist die Senkrechte, im Halbirungspunkte der Grundlinie auf derselben errichtet. —

Es mögen hier einige der geometrischen Oerter folgen, deren entsprechende Lehrsätze im System der Geometrie gewöhnlich ihre Stelle finden.

1) Der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei der Lage nach gegebenen, gegen einander geneigten, Linien gleich weit abstehen, ist die Halbirungslinie des durch dieselbe gebildeten Winkels.

2) Der geometrische Ort der Endpunkte aller graden Linien von gegebener Länge, die unter einem bestimmten Winkel gegen eine gegebene Grade geneigt sind und deren anderer Endpunkt in letzterer liegt, ist eine Parallele zu der gegebenen Linie, durch den Endpunkt einer solchen Graden gelegt.

3) Zieht man von einem gegebenen Punkte nach einer Graden verschiedene Linien, verlängert dieselben nach der einen oder andern Seite um sich selbst, so ist der Ort der Endpunkte eine grade Linie, welche der gegebenen parallel ist.

4) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller gleichen Sehnen, die sich in einen gegebenen Kreis legen lassen, ist ein diesem concentrischer Kreis, dessen Radius der Abstand dieser Sehne vom Mittelpunkte ist.

5) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche eine gegebene grade Linie in einem gegebenen Punkte berühren, ist die Senkrechte in diesem Punkte, auf der Graden errichtet.

6) Der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche auf derselben Grundlinie nach einer Seite hin stehen und denselben Winkel an der Spitze haben, ist der Kreisbogen, welcher, des gegebenen Winkels fähig, über der Grundlinie construirt werden kann.

7) Der geometrische Ort für die Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke, welche über derselben Hypotenuse nach derselben Seite hin construirt werden können, ist der Halbkreis, der mit der halben Hypotenuse aus deren Mitte construirt wird.

8) Der geometrische Ort für die Halbirungspunkte aller Sehnen, die in einem Kreise durch einen gegebenen Punkt gezogen werden können, ist der Kreis, welcher sich über der Verbindungslinie des Mittelpunkts mit dem gegebenen Punkte, als Durchmesser, construiren lässt.

9) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche mit gegebenem Radius so construirt werden können, dass sie einen gegebenen Kreis berühren, ist ein dem letzteren concentrischer Kreis, dessen Radius gleich der Summe oder Differenz der gegebenen Radien ist, je nachdem die Berührung von aussen oder von innen erfolgen soll.

10) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berühren, ist die Grade, welche diesen Punkt mit dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises verbindet.

11) Der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche auf derselben Grundlinie nach derselben Seite hin stehen und gleichen Flächeninhalt haben, ist die durch die Spitze eines solchen Dreiecks zur Grundlinie gezogene Parallele.

12) Der geometrische Ort für die Theilungspunkte, welche man erhält, wenn man von einem gegebenen Punkte nach einer Graden Linien zieht und diese nach einem gegebenen Verhältniss theilt, ist eine der gegebenen Graden parallele Linie.

13) Der geometrische Ort der Punkte, für welche die Summe der Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten dieselbe Grösse hat, ist ein Kreis.

14) Der geometrische Ort der Punkte, für welche die Differenz der Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten dieselbe Grösse hat, ist eine Grade, welche senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Punkte steht.

15) Der geometrische Ort der Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten ein gegebenes Verhältniss haben, ist ein Kreis.

16) Der geometrische Ort für die Theilungspunkte, welche man erhält, wenn man von einem gegebenen Punkte nach der Peripherie eines Kreises grade Linien zieht, und diese nach einem gegebenen Verhältniss theilt, ist ein Kreis, und zwar werden sich deren zwei ergeben, je nachdem die Theilung durch einen inneren oder einen äusseren Theilungspunkt geschehen ist.

Wie die zuletzt angeführten geometrischen Oerter, für welche ein besonderer Nachweis erforderlich ist, erkennen lassen, sind dieselben nicht auf die unter die Elemente gewöhnlich aufgenommenen Lehrsätze beschränkt; jedoch muss eine ausführlichere Angabe derselben an dieser Stelle unterbleiben, da eine solche den hier gebotenen Raum überschreiten würde.

§. 6.

Data. Hervorzuheben werden unter den geometrischen Lehrsätzen noch diejenigen sein, welche die Abhängigkeit einer Grösse von anderen behaupten, und zwar in der Art, dass erstere genau bestimmt ist, selbst als eine bekannte Grösse betrachtet werden kann, sobald die übrigen zugehörigen Grössen bekannt sind. Man nennt solche mit anderen Grössen zugleich als gegeben zu betrachtende Grössen, die sich daher aus den ihnen zugehö-

rigen Grössen darstellen lassen müssen, *Data*, und hat denselben Namen auch den besonderen Lehrsätzen beigelegt, welche solche Data aufstellen, ohne jedoch dabei genauer den Zusammenhang anzugeben, welcher zwischen den zugehörigen Grössen selbst stattfindet. Solche Data werden zunächst die einer Grösse zugehörigen Stücke sein, deren Construction in den Elementen der Geometrie als ausführbar nachgewiesen ist, dann aber werden auch Lehrsätze im allgemeineren Sinne auf Data führen, wenn durch die in denselben ausgedrückten Beziehungen zugleich eine Abhängigkeit der betreffenden Grössen bedingt ist. Letztere Beziehungen werden jedoch unberücksichtigt bleiben müssen, wenn man aus solchen Lehrsätzen die Data in ihrer besonderen Form erhalten will. Gewöhnlich wird die vorhandene Abhängigkeit in der Behauptung des Lehrsatzes durch eine Gleichung zwischen den betreffenden Grössen ausgedrückt werden, durch welche eine derselben aus den übrigen ebenso bestimmt wird, wie dies bei algebraischen Gleichungen in Bezug auf die Unbekannte der Fall ist. Es mögen hier einige Data folgen, welche bekannten, in den Elementen der Geometrie gewöhnlich ausgeführten Constructionen oder gleichfalls in denselben enthaltenen Lehrsätzen entsprechen.

1) Durch eine Grade und einen Punkt ausserhalb derselben ist auch die durch diesen Punkt der ersteren parallel gezogene grade Linie gegeben.

2) Durch eine Grade und einen Punkt ausserhalb derselben ist auch der Abstand des letzteren von der Graden gegeben.

3) Durch eine der Grösse nach gegebene Grade ist zugleich die Hälfte und ebenso ein beliebiger Theil derselben gegeben.

4) Durch einen Winkel ist zugleich die Hälfte desselben gegeben.

5) Durch die Summe und Differenz zweier Linien oder Winkel sind auch die einzelnen Linien oder Winkel selbst gegeben.

6) Durch die Summe zweier Linien und das Verhältniss derselben sind auch die einzelnen Linien selbst gegeben.

7) Durch zwei Winkel eines Dreiecks ist auch der dritte gegeben.

8) Durch einen Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind auch die übrigen gegeben.

9) Durch einen Winkel eines Parallelogramms sind auch die übrigen gegeben.

10) Durch drei Punkte, welche nicht in einer graden Linie liegen, ist der durch dieselben gehende Kreis, also auch der Mittelpunkt und Radius desselben, gegeben.

11) Durch die Sehne eines gegebenen Kreises ist zugleich der zugehörige Bogen und die Hälfte desselben gegeben.

12) Durch die Sehne eines gegebenen Kreises ist auch die Entfernung derselben vom Mittelpunkte gegeben.

13) Durch den Peripheriewinkel eines gegebenen Kreises ist zugleich auch der zugehörige Centriwinkel und die demselben entsprechende Sehne gegeben.

14) Durch die Grundlinie eines Dreiecks und den Winkel an der Spitze ist auch der Radius des umgeschriebenen Kreises gegeben, und bestimmen überhaupt zwei dieser Stücke das dritte; nur ergeben sich zwei Winkel, den beiden anderen Stücken zugleich entsprechend.

15) Der Inhalt, die Grundlinie und die Höhe eines Dreiecks stehen in solcher Beziehung, dass durch zwei dieser Stücke auch das dritte gegeben ist.

16) Die Summe der beiden Grundlinien, die Höhe und der Flächeninhalt eines Tra-

pezes sind derartig durch einander bestimmt, dass durch zwei dieser Stücke auch das dritte gegeben ist.

17) Durch den Flächeninhalt einer beliebigen gradlinigen Figur ist zugleich auch die Seite des ihr gleichen Quadrates gegeben.

18) Von dem Produkt zweier Seiten eines Dreiecks, der zur dritten Seite gehörigen Höhe und dem Radius des umgeschriebenen Kreises bestimmen zwei Stücke stets das dritte. (Vergl. §. 4. Lehrsatz 2.)

19) Durch das Produkt zweier Seiten eines Dreiecks und den eingeschlossenen Winkel ist auch der Flächeninhalt desselben gegeben.

20) Durch das Verhältniss zweier Seiten eines Dreiecks ist auch das Verhältniss der denselben zugehörigen Höhen gegeben, und umgekehrt.

21) Je drei Stücke, deren Gleichheit die Congruenz zweier Dreiecke bedingt, bestimmen das Dreieck, also auch die übrigen Stücke desselben, vollständig.

22) In jedem Dreiecke stehen die zu einer Seite gehörige Höhe, eine zweite Seite und der zwischen beiden Seiten liegende Winkel in solcher Beziehung, dass durch zwei dieser Stücke auch das dritte gegeben ist.

23) In jedem Dreiecke stehen die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze, die zur Grundlinie gehörige Höhe und der durch beide Linien gebildete Winkel, welcher der halben Differenz der Winkel an der Grundlinie gleich ist, in solcher Beziehung, dass durch zwei dieser Stücke auch das dritte gegeben ist.

24) Sind zwei Winkel eines Dreiecks gegeben, so ist dadurch das Dreieck seiner Gestalt nach, und daher auch das Verhältniss seiner Seiten gegeben.

25) Durch die Gestalt und eine Seite des Dreiecks ist dasselbe zugleich auch seiner Grösse nach gegeben.

II. Von den Aufgaben.

§. 7.

Aufgaben, Postulate. Die Aufgabe enthält, wie schon angegeben ist, die Forderung, aus gegebenen räumlichen Grössen eine andere Raumgrösse, bestimmten, in der Aufgabe angeführten Eigenschaften entsprechend, zu construiren. Da nun die Grössen, mit denen die elementare Geometrie zu thun hat, Punkte, grade Linien oder Kreislinien, Winkel und Figuren sind, letztere von Graden oder Kreislinien oder beiden zugleich begrenzt, so ist also in der Aufgabe, soweit dieselbe dem Gebiet der elementaren Geometrie angehört, die Forderung enthalten, eine der genannten Grössen aus anderen gegebenen Grössen in der Ebene zu construiren. Die geforderte Construction wird sich nun entweder auf frühere, schon ausgeführte Constructionen zurückführen lassen, und wir haben in diesem Falle mit den *Aufgaben* im *engern* Sinne zu thun, oder es ist eine Zurückführung auf einfachere Constructionen nicht möglich, in welchem Falle wir die Aufgabe ein *Postulat* nennen. Die Postulate stehen daher zu den Aufgaben in derselben Beziehung, in welcher Axiome und Lehrsätze zu einander stehen. Die wesentlichen Forderungen, auf welche alle andern elementaren Aufgaben sich zurückführen lassen, sind die Constructionen einer graden Linie und eines Kreises, und verlangen wir deshalb von der Construction elementar-

geometrischer Aufgaben, dass sie sich allein vermittelst des Lineals und des Zirkels ausführen lasse.

§. 8.

Von den Bedingungen der Aufgabe. Die Aufgabe wird einerseits die Angabe derjenigen Raumgrösse enthalten, welche construirt werden, andererseits die Bedingungen, welchen jene Grösse entsprechen soll. Diese Bedingungen werden nun entweder hinreichen, die gesuchte Grösse genau zu bestimmen, oder sie werden nur bestimmte Beziehungen derselben fordern, in der Art, dass eine beliebige Anzahl in anderer Beziehung durchaus von einander verschiedener Grössen sich aufstellen lässt, welche dennoch, bei ihrer Verschiedenheit, sämmtlich den in der Aufgabe geforderten Bedingungen entsprechen. Aufgaben der erstern Art, deren Bedingungen also nur eine, der Gestalt und Grösse nach bestimmte, Raumgrösse entspricht, oder für welche doch die Anzahl der möglichen Grössen eine beschränkte und für einzelne Fälle genau zu bestimmende ist, heissen *bestimmte*, während die Aufgaben der andern Art *unbestimmte Aufgaben* genannt werden. In dieser Hinsicht werden also die Aufgaben, welche die Festlegung eines Punktes fordern, unbestimmte sein, sobald eine unbeschränkte Anzahl von Punkten den Bedingungen genügt, und liegen diese Punkte alle auf einer bestimmten Linie, so wird hiernach eine solche unbestimmte Aufgabe auf den geometrischen Ort eines Punktes führen. Unbestimmte Aufgaben werden also zur Ermittelung geometrischer Örter dienen können, und inwieweit dieser Zusammenhang für die Auflösung der Aufgaben von Wichtigkeit ist, wird an einer andern Stelle zu erörtern sein. Ob nun eine Aufgabe eine bestimmte ist, wird von der Anzahl der Bedingungen abhängen, welche für die gesuchte Grösse in der Aufgabe gegeben sind, und es wird daher im Nachfolgenden die Frage zu beantworten sein, welche Anzahl der Bedingungen sich als nothwendig ergiebt, um einen Punkt, eine grade Linie, eine gradlinige Figur und einen Kreis zu bestimmen, da die übrigen möglichen Constructionen sich auf die genannten zurückführen lassen werden.

Den Bedingungen der Aufgabe werden wir aber bei der Bestimmung der Anzahl derselben nicht diejenigen beirechnen dürfen, welche von anderen schon vorhandenen Bedingungen abhängig sind, also durch letztere ohnehin schon als gegeben zu betrachten sein würden. Sind derartige *abhängige Bedingungen* vorhanden, so würden dieselben überflüssig, also desshalb nicht zu berücksichtigen sein, wenn die abhängige Bedingung die Grösse eines Stückes zufällig in derselben Art bestimmte, in welcher dieselbe auch aus den übrigen Bedingungen sich ableiten liesse. Würde aber die abhängige Bedingung die durch die übrigen gegebenen Grössen schon vollständig bestimmte Grösse willkürlich und abweichend bestimmen, so würde damit ein Widerspruch vorhanden und die Auflösung der Aufgabe den gegebenen Bedingungen entsprechend nicht möglich sein. Da durch die Anzahl der Bedingungen, welche wir im Folgenden als zur Bestimmung einer Grösse nothwendig erkennen werden, mit letzterer selbst natürlich auch alle dieser zugehörigen Stücke gegeben sind, so wird ein solcher Widerspruch insbesondere sich ergeben, wenn eine Aufgabe eine zu grosse Anzahl von Bedingungen enthält. Man nennt eine solche Aufgabe eine *überbestimmte*, und im Allgemeinen wird dieselbe daher zugleich eine unmögliche sein, ausgenommen den einen Fall, in welchem die durch die übrigen zugleich bestimmte Bedingung in der That auch ihrer Abhängigkeit entsprechend gegeben ist. Die Frage, ob abhängige Bedingungen unter den Bedingungen einer Aufgabe vorhanden sind, wird sich stets

mit Anwendung der Data entscheiden lassen, und daher ist deren Kenntniss von besonderer Wichtigkeit, wollen wir die Bedingungen einer Aufgabe in Bezug auf die Möglichkeit der geforderten Construction einer Prüfung unterwerfen.

§. 9.

Anzahl der Bedingungen für bestimmte Aufgaben. Punkt-Bestimmungen. Ein Punkt wird seiner Lage nach in Bezug auf andere ihrer Lage nach gegebene Grössen bestimmt sein, wenn zwei Bedingungen gegeben sind, durch deren jede eine Linie, auf welcher der Punkt liegen muss, d. h. ein geometrischer Ort des Punktes, festgelegt wird. Der Durchschnittspunkt dieser beiden Linien ist der verlangte Punkt. Sind beide Örter grade Linien, so wird durch den Durchschnitt derselben ein einziger Punkt bestimmt, wohingegen eine grade Linie und eine Kreislinie oder zwei Kreislinien allgemein zwei Punkte, den Bedingungen entsprechend, festlegen, insofern die genannten Linien allgemein sich in zwei Punkten durchschneiden. Ist eine Linie selbst gegeben, auf welcher der Punkt liegen soll, so bedarf es nur noch *einer* weiteren Bedingung zur Bestimmung eines zweiten Ortes des Punktes.

Linien-Bestimmungen. Soll eine grade Linie zunächst der Richtung nach bestimmt werden, so kann dies überhaupt nur geschehen, wenn eine feste Richtung in der Ebene bereits gegeben ist, und wird diesenfalls zur Bestimmung einer andern Graden *eine* Bedingung nothwendig sein, durch welche der Richtungsunterschied der letzteren gegen erstere gegeben ist.

Eine grade Linie wird der Lage nach durch zwei Bedingungen bestimmt sein, so durch zwei Punkte, welche beliebig in derselben liegen, oder auch durch einen beliebigen Punkt und eine Bedingung, durch welche die Richtung derselben gegeben wird.

Eine grade Linie wird der Lage und Grösse nach bestimmt sein, wenn zu den zwei für die Lage derselben gegebenen Bedingungen noch zwei andere Bedingungen hinzutreten, durch welche die beiden Endpunkte der Graden bestimmt werden, da es nach dem Vorhergehenden zur Festlegung jedes Punktes, welcher auf einer ihrer Lage nach gegebenen Linie liegt, nur noch einer weitern Bedingung bedarf. Diese Bedingungen können auch die beiden Bestimmungen sein, dass jeder von zwei beliebigen Punkten, durch welche die grade Linie gehen soll, zugleich Endpunkt der ihrer Grösse nach zu bestimmenden Linie ist. Eine grade Linie ist demnach durch vier Bedingungen ihrer Lage und Grösse nach bestimmt, wie dies auch daraus hervorgeht, dass dieselbe Anzahl von Bedingungen nothwendig ist, um die beiden Endpunkte der Graden ihrer Lage nach festzulegen. Die Zahl der Bedingungen wird scheinbar erhöht werden, wenn zur Bestimmung der Lage einer Linie die Festlegung eines ihrer Punkte durch zwei Bedingungen nothwendig wird; es ist hierbei jedoch zu bemerken, dass durch diese beiden Bedingungen nicht ein beliebiger Punkt der Graden, sondern ein in derselben seiner Lage nach genau bestimmter Punkt, und damit also zugleich der eine Endpunkt für eine Grössenbestimmung der Linie gegeben ist.

Bestimmung von Dreiecken. Genügten bei den vorerwähnten Constructionen die Bedingungen, die Lage des gesuchten Punktes wie der Graden in der Ebene zu bestimmen, so wird diese Forderung meist fortfallen bei den Figuren-Aufgeben, für welche nur eine Bestimmung nach Grösse und Gestalt statthat, während die Figur übrigens an jeder beliebigen Stelle der Ebene verzeichnet werden darf. Die Anzahl der Bedingungen wird sich demnach verringern, indem wir zunächst dem ersten Eckpunkt der zu construirenden Figur eine beliebige Lage in der Ebene geben können, und ferner die Richtung, in welcher ein

zweiter Eckpunkt der Figur festzulegen ist, durchaus willkürlich angenommen werden darf. Um daher einen zweiten Punkt der Figur zu bestimmen, wird nur die Angabe der Entfernung desselben vom ersten Punkte nothwendig sein, und da zur Bestimmung der Lage eines dritten Punktes gegen die bereits festgelegten Punkte zwei Bedingungen nothwendig sind, so würde die Bestimmung eines Dreiecks im Ganzen, also eine Anzahl von drei Bedingungen, erfordern. Diese Bedingungen werden nun, soll die Lage des dritten Punktes unmittelbar in Bezug auf die Lage der beiden andern Punkte festgestellt werden, ohne dass die Bestimmung eines anderen Punktes dazu vorher nöthig ist, die Verbindungslinien der Punkte, also Seiten des Dreiecks, und die Winkel desselben sein; nachher werden wir indessen sehen, dass ein Gleiches auch für alle übrigen Linien und Winkel gilt, welche zum Dreieck überhaupt in bestimmter Beziehung stehen. Da nun eine gegebene Richtung auf eine Grade, die Entfernung von einem gegebenen Punkte auf eine Kreislinie, als Ort für den dritten Punkt, führt, so werden wir, wenn der letztere Ort zur Anwendung kommt, für den dritten Punkt eine doppelte Lage aus dem Durchschnitt der entsprechenden Linien erhalten. Einer zweiten Lage für den dritten Eckpunkt wird diesenfalls auch eine zweite Figur entsprechen, und beide Figuren können entweder, wie dies besonders der Fall sein wird, wenn beide Punkte eine entgegengesetzte Lage haben, congruent sein, oder sie sind der Gestalt und Grösse nach von einander verschieden. Im letztern Falle werden also nicht alle Dreiecke, welche denselben Bedingungen entsprechen, congruent sein; wohl aber werden alle zu der einen oder der anderen Gruppe von Dreiecken gehören, welche alle unter sich und zugleich dem einen aus der Construction hervorgegangenen Dreiecke congruent sind. Zu erwähnen ist noch, dass eine der gegebenen Bedingungen, wie dies aus der angestellten Betrachtung hervorgeht, die Entfernung zweier Punkte bestimmen, d. h. dass unter den Bedingungen eine Seite enthalten sein muss, was auch daraus hervorgeht, dass die drei Winkel eines Dreiecks, als Bedingungen desselben hingestellt, eine abhängige Bedingung in sich schliessen würden. Bestimmt wird hiernach eine Dreiecksaufgabe sein, wenn drei Stücke desselben, und darunter eine Seite, gegeben sind; ein Resultat, welches sich auch aus den Congruenzsätzen als Folgerung ergiebt, indem dieselben Stücke, deren Gleichheit die Congruenz bedingt, auch genügen, das Dreieck seiner Gestalt und Grösse nach genau zu bestimmen.

Sind für die Construction gewisser Dreiecke von vornherein und ein für alle Mal bestimmte Bedingungen gegeben, so wird eine geringere Anzahl weiterer Bedingungen zur Bestimmung derselben genügen. So erfordert das rechtwinklige und das gleichschenklige Dreieck nur noch zwei, das rechtwinklig gleichschenklige und das gleichseitige Dreieck nur noch eine einzige Bedingung, die selbstverständlich eine Winkelbestimmung nicht sein darf.

Bestimmung von Vierecken. Um ein Viereck zu construiren, wird zu den drei zunächst festgelegten Punkten die Lage eines vierten Punktes zu bestimmen sein. Hierzu werden sich zwei weitere Bedingungen als nothwendig ergeben, und zwar werden diese Bedingungen, wenn wir die Lage der Punkte unmittelbar gegen einander bestimmen wollen, wiederum nur die Verbindungslinien zweier Punkte und die Richtungen derselben gegen einander, hier also Seiten, Diagonalen und die Winkel sein, welche durch diese Linien gebildet werden. Ein Viereck ist hiernach bestimmt, sobald fünf seiner Stücke gegeben sind, unter denen jedoch eine Seite oder Diagonale enthalten sein muss. Wie aber die Lage eines dritten Punktes auch bei gegebenen drei Bedingungen eine doppelte sein kann, so wird eine weitere Unbestimmtheit in Bezug auf die Lage eines vierten Punktes eintreten. Hier

wird sich zugleich eine Verschiedenheit der Figur ergeben, je nachdem der vierte Punkt auf der einen oder anderen Seite einer durch zwei andere Eckpunkte bestimmten Graden liegt, und werden also, wenn der vierte Punkt durch den Durchschnitt einer Graden und einer Kreislinie festgelegt wird, im Ganzen vier verschiedene Lagen sich für denselben ergeben können. Als Anzahl der verschiedenen Constructionen wäre höchstens aber die Zahl acht möglich, und wäre die Aufgabe also jedenfalls unter den gestellten Voraussetzungen eine bestimmte. Es wird hier wiederum zu erwähnen sein, dass für Vierecke, welchen besondere Eigenschaften zukommen, die Anzahl der Bedingungen eine geringere sein wird; so sind für ein Kreisviereck, Tangentenviereck und Trapez nur vier Bedingungen nothwendig; die Construction von Parallelogrammen verlangt drei Bedingungen, und unter diesen werden das Rechteck und der Rhombus nur zwei, das Quadrat endlich nur *eine* Bedingung erfordern.

Bestimmung von Vielecken. Sollen die n Eckpunkte eines Vielecks von n Seiten unmittelbar in ihrer Lage gegen einander festgelegt werden, so werden für die drei ersten Punkte sich drei Bedingungen, für jeden der folgenden $n - 3$ Punkte aber zwei weitere Bedingungen als nothwendig herausstellen. Die Anzahl der zu fordernden Bedingungen wird also $3 + 2\,(n - 3) = 2\,n - 3$ sein, und ist unter denselben eine Linie vorhanden, so ist die Vielecksaufgabe eine bestimmte. Mit jedem folgenden festzulegenden Punkt wird auch hier die Anzahl der möglichen Constructionen wachsen; indessen ist leicht einzusehen, dass die Anzahl derselben stets eine beschränkte bleiben muss.

Von den Bestimmungsstücken der Figuren. Haben wir im Vorstehenden die Anzahl der nothwendigen Bedingungen nur für den Fall aufgestellt, dass diese Bedingungen Verbindungslinien, also Seiten oder Diagonalen, und von diesen gebildete Winkel sind, so werden wir noch die Frage zu erörtern haben, ob diesen Bedingungen andere, zu den Figuren in bestimmter Beziehung stehende Linien oder Winkel völlig gleich zu stellen sind. Zu diesen Linien zählen wir die Höhen, Halbirungslinien von Seiten oder Winkeln, Radien von umgeschriebenen oder eingeschriebenen Kreisen, Summen oder Differenzen von Seiten, und andere bei Dreiecksaufgaben häufig vorkommende Bestimmungsstücke. Sobald irgend eine dieser Linien gegeben ist, handelt es sich nicht mehr um die Festlegung von drei, sondern eigentlich von vier Punkten, von denen der vierte Punkt gewöhnlich Eckpunkt eines Hülfsdreiecks ist, nach dessen Construction das geforderte Dreieck dann leicht sich darstellen lässt. Wir werden daher nachgewiesen haben, dass diese Linien jedesmal *eine* Bedingung für das Dreieck vertreten, sobald wir gezeigt haben, dass mit einer solchen Linie auch zugleich die zur Bestimmung eines vierten Punktes nöthigen beiden anderen Bedingungen gegeben sind, welche überdies entweder Verbindungslinien jener vier Punkte oder durch dieselben gebildete Winkel bestimmen. Es wird eine solche Linie im Ganzen also drei Bedingungen entsprechen müssen, so dass zur Festlegung der vier Punkte nur noch zwei Bedingungen gegeben sein dürfen, oder, mit andern Worten, dass zur Bestimmung des Dreiecks auch in diesem Falle, sobald eine dieser Bedingungen gegeben ist, nur noch zwei weitere Bedingungen nöthig sind.

Ist die Höhe eines Dreiecks gegeben, so sind zugleich die beiden Winkel gegeben, welche dieselbe mit der ihr zugehörigen Seite bildet.

Ist die Halbirungslinie einer Seite gegeben, so ist damit erstens die Gleichheit der beiden Abschnitte der letzteren und dann die Summe der Winkel gegeben, welche die Halbirungslinie mit jener Seite bildet. Ähnliches gilt für die Halbirungslinie eines Winkels.

Durch den Radius des umgeschriebenen Kreises sind die drei Verbindungslinien des Mittelpunktes mit den drei Eckpunkten des Dreiecks gegeben.

Auch die gegebene Summe zweier Seiten verlangt die Festlegung eines vierten Punktes, welchen man erhält, wenn man die eine dieser Seiten um die andere verlängert, doch ist auch hier mit der gegebenen Summe zugleich die Gleichheit der Verlängerung mit der entsprechenden Seite und die Summe der Winkel gegeben, welche letztere mit der verlängerten Seite und der Verlängerung selbst bildet.

Dasselbe könnten wir nachweisen von dem Radius des eingeschriebenen Kreises, durch den zugleich aber die weitere Festlegung der drei Berührungspunkte gefordert, und dem entsprechend auch die grössere Anzahl der Bedingungen gegeben ist, ebenso in Bezug auf die Differenz zweier Seiten und die Summe und Differenz der Winkel eines Dreiecks.

Auch die Bestimmung über den Inhalt, und gilt dies allgemein für jede Figur, ist nur als eine Bedingung zu betrachten, da durch dieselbe die Seite des der Figur an Flächeninhalt gleichen Quadrates gegeben ist. Für das Dreieck ergiebt sich dies auch aus den Daten, nach welchen (§. 6. 15), sobald eine Seite gegeben ist, statt des Inhaltes die derselben zugehörige Höhe als gegeben betrachtet werden kann. Ist das Verhältniss zweier Linien gegeben, und dies war, die Gleichheit zweier Linien betreffend, im Vorhergehenden schon der Fall, so ist damit gleichfalls nur ein Stück gegeben, da es (§. 6. 6) einer weiteren Bedingung bedarf, um beide Linien selbst als gegeben betrachten zu können. Fassen wir die erhaltenen Resultate zusammen, so können wir daher den allgemeinen Satz aufstellen:

Eine Dreiecksaufgabe ist eine bestimmte, wenn in derselben drei Bedingungen und darunter eine Linie gegeben sind, mögen die gegebenen Stücke Seiten oder Winkel des Dreiecks oder andere zu demselben in bestimmter Beziehung stehende Linien oder Winkel sein.

Bestimmung von Kreisen. Ein Kreis ist der Grösse nach durch den Radius, also durch *eine* Bedingung, bestimmt; um dieselbe auch der Lage nach zu bestimmen, wird der Mittelpunkt festzulegen sein, wozu zwei weitere Bedingungen nöthig sind. Im Ganzen sind also für diesen Fall drei Bedingungen erforderlich, wie dies auch daraus hervorgeht, dass drei Punkte, durch welche der Kreis gehen soll, denselben der Lage und Grösse nach vollständig bestimmen.

§. 10.

Geometrische Analysis. Haben die vorhergehenden Betrachtungen festgestellt, unter welchen Bedingungen die in der Aufgabe geforderte Grösse bestimmt ist, so werden wir im Folgenden nun darzuthun haben, wie auf methodischem Wege die geforderte Grösse ihren Bedingungen entsprechend gefunden werden kann. Dass ein methodischer Weg hierbei möglich ist, erhellt sofort aus der Bemerkung, dass das Ziel des Suchens nicht ein völlig unbestimmtes, die gesuchte Grösse nicht eine schlechthin unbekannte ist; sie ist vielmehr bei einer bestimmten Aufgabe mit den Bedingungen so verknüpft, dass denselben eben nur bestimmte Grössen entsprechen, und dass derjenige, welchem die Beziehungen zwischen den gegebenen und der gesuchten Grösse klar erkannt vorliegen, aus den Bedingungen heraus sofort zu der gesuchten Grösse selbst überzugehen im Stande ist. Diese Beziehungen sind aber in der Aufgabe nicht sämmtlich gegeben, und soll daher eine Aufgabe aufgelöst werden, so wird die erste Forderung, welche zu erfüllen ist, diejenige sein, die Beziehungen zwischen den gegebenen und der gesuchten Grösse in so weit zu ergän-

zen, dass daraus der Übergang von ersteren zu der gesuchten Grösse klar hervorgeht. Diese Erörterung gehört nun der *geometrischen Analysis* zu, und da ohne eine solche eine Auflösung auf methodischem Wege nicht möglich, da jeder andere Versuch, eine Aufgabe aufzulösen, den Begriff der Aufgabe verkennend und dem Zufall vertrauend, die Auflösung selbst als sicheres Ziel nicht erkennen lassen wird, so ist dieselbe ein wesentlicher Bestandtheil der Auflösung. Soll die Analysis die nöthigen Beziehungen zwischen den in der Aufgabe enthaltenen Grössen ermitteln, so wird sich für dieselbe die Nothwendigkeit herausstellen, eine Grösse oder bei Figuren-Aufgaben bestimmter eine Figur, wie sie in der Aufgabe gefordert wird, mit den gegebenen Bedingungen in Verbindung zu setzen. Es wird hierbei darüber hinweg zu sehen sein, ob die Figur, an welcher wir jene Bezieziehungen untersuchen, auch den gegebenen Stücken entspricht, da es nur darauf ankommt, die Abhängigkeit der Figur von den einzelnen Stücken derselben zu ermitteln, und diese ungeändert bleibt, wie auch die einzelnen Stücke selbst ihrer Grösse nach bestimmt seien.

Wir werden also eine Figur der verlangten Art construiren, die Stücke, welche in der Aufgabe gegeben sind, etwa Höhen oder Transversalen, hineintragen, und auch diejenigen Stücke, etwa Summen oder Differenzen von Linien oder Winkeln, an der Figur zur Darstellung bringen, welche gegeben sind, der Figur jedoch unmittelbar nicht zugehören. Um die gegebenen Stücke dabei klarer übersehen zu können, wird es vortheilhaft sein, dieselben auch äusserlich hervorzuheben, und am besten möchte dieser Zweck durch beigefügte Klammern erreicht werden, wie solche auch in den nachfolgenden Figuren angebracht sind.

Hat die Analysis so die gesuchte Figur als eine gegebene vorausgesetzt und somit die Forderung der Aufgabe selbst zur Voraussetzung gemacht, so wird dieselbe nun mit Anwendung bekannter Lehrsätze aus dieser Voraussetzung Folgerungen zu ziehen und aus diesen Folgerungen zu weiteren Schlüssen überzugehen suchen. Die Analysis wird so fortfahren, bis sich endlich die Bedingungen ergeben, aus denen, mit Hinzuziehung der gegebenen Bedingungen und mit Anwendung schon gelöster Aufgaben, entweder die gesuchte Figur selbst sofort abzuleiten ist, oder durch welche eine andere Grösse bestimmt wird, deren Zusammenhang mit der gesuchten Figur letztere endlich selbst zu construiren gestattet. Es wird diese Untersuchung jedoch voraussetzen, dass die gesuchte Figur mit den gegebenen, eingezeichneten, Stücken in engere Verbindung gesetzt ist, und dass zugleich diejenigen Linien gezogen sind, welche die Anwendung eines Lehrsatzes und somit die nothwendige Erkenntniss der vorhandenen Beziehungen möglich machen. Welche Linien als solche *Hülfslinien* zu ziehen sind, wird unbestimmt sein, insofern verschiedene Lehrsätze, zu gleichem Ziele führend, für die Analysis herbeigezogen werden können; grade aber die richtige Wahl dieser Hülfslinien wird für die Auflösung einer Aufgabe von grösster Bedeutung sein. Sie wird bedingt durch die Kenntniss aller derjenigen Lehrsätze, welche in Bezug auf die gegebenen Voraussetzungen Anwendung finden können, und besonders wichtig ist es, Hülfslinien, welche die nöthigen Beziehungen nicht hervortreten lassen, für die weitere Betrachtung auszuschliessen und andere an deren Stelle zu setzen. Es mag nun an einem Beispiele dargethan werden, wie die Analysis diesen Forderungen zu genügen hat.

Aufgabe: Ein Dreieck zu construiren, wenn eine seiner Seiten, a, die Summe s der beiden anderen Seiten und der von letzteren eingeschlossene Winkel α gegeben ist.

Analysis: Es sei ABC (Figur 5) ein Dreieck, welches den gegebenen Bedingungen entsprechen möge; BC sei in demselben die gegebene Seite a, und Winkel BAC der

gegebene Winkel α. Um nun zunächst auch die gegebene Summe der beiden anderen Seiten zur Darstellung zu bringen, werden wir am einfachsten eine dieser Seiten, etwa AB, um die andere AC über den gemeinschaftlichen Endpunkt A hinaus verlängern, so dass also BD die Summe s der beiden anderen Seiten darstellt. Dann werden wir die in der Aufgabe gegebenen Bedingungen mit der in derselben geforderten Figur in Verbindung setzen, hier also den Endpunkt D der Graden BD mit dem dritten Eckpunkt des Dreiecks C verbinden, und sodann zu der Frage übergehen, welche Lehrsätze hier Anwendung finden dürften, wenn wir von der Voraussetzung ausgehen, dass das Dreieck ABC den in der Aufgabe gestellten Bedingungen entspreche. Vorausgesetzt wurde nun, dass AD = AC, oder dass das Dreieck ACD ein gleichschenkliges ist, und da der gegebene Winkel α Aussenwinkel an der Spitze dieses Dreiecks ist, so möchte hier der Satz anzuwenden sein, nach welchem der Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks halb so gross ist als der Aussenwinkel an der Spitze. Nach diesem Satze wäre $\sphericalangle$ ADC $= \frac{\alpha}{2}$, und könnte sonach auch der Winkel BDC als gegeben betrachtet werden. Berücksichtigen wir nun die anderen Bedingungen, durch welche die Seiten BC und BD gegeben sind, so erkennen wir, dass das Dreieck BDC durch die Seite a die Summe s, und den der ersteren gegenüberliegenden Winkel $\frac{\alpha}{2}$ bestimmt und construirbar ist. Aus diesem Dreieck lässt sich endlich das gesuchte Dreieck ABC selbst ableiten, da der dritte Eckpunkt A einmal auf der Graden BD liegt, und da ferner Winkel ACD und ADC, als Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks, gleich sind.

§. 11.

Construction. Die gesuchte Figur nun in der That, den gegebenen Bedingungen entsprechend, zu verzeichnen, fällt der *Construction* zu, und diese wird von den ihrer Grösse nach gegebenen Stücken ausgehen, während die Analysis letztere zunächst unberücksichtigt liess. Die Construction wird dabei den umgekehrten Gang verfolgen, welchen die Analysis genommen hat, indem sie, von den Resultaten der letzteren, als den mit der Aufgabe zugleich gegebenen Bedingungen, ausgehend, schliesslich zu der gesuchten Grösse gelangt, welche die Analysis für ihre Untersuchung unmittelbar voraussetzte. Einer bestimmten Analysis wird daher, wenngleich eine Aufgabe im Allgemeinen verschiedene Auflösungen zulassen wird, eine ihren Grundzügen nach bestimmte Construction entsprechen, und gerade diese anzugeben, wird bei einer zusammenhängenden Behandlung der Aufgabe nothwendig sein. Es wird daraus ferner klar, dass die Construction im Allgemeinen auf dieselbe Figur führen wird, welche die Analysis ergab, und wichtig ist es, soll die Construction eine elegante sein, diejenigen Stücke, welche ihrer Grösse oder ihrem Verhältniss nach durch die Hülfslinien der Analysis bestimmt wurden, in derselben Art auch durch die Construction entstehen zu lassen, da so die Construction in *eine* Figur und in den von der Analysis vorgeschriebenen Zusammenhang gebracht wird. Werden also durch die Analysis Winkel ihrer Grösse nach aus den gegebenen Winkeln abgeleitet, so wird eine ähnliche Figur mit den entsprechenden Hülfslinien den verlangten Winkel auch für die Construction ergeben; es bedarf dann nur der nöthigen Parallelen, um auch die den gegebenen Linien entsprechende Figur zu erhalten. Es würde den Anforderungen, welche an eine elegante Construction gestellt werden, nicht entsprechen, wenn jene Winkel durch eine Nebenconstruction, besonders wenn dieselbe umständlich ist, bei Seite der Figur aus den gegebenen Winkeln

abgeleitet würden. Die für die Construction nöthigen Hülfsmittel sind, wie schon an früherer Stelle erwähnt wurde, Lineal und Zirkel, denen sich, zur leichteren Verzeichnung senkrechter und paralleler Linien, das rechtwinklige Dreieck anschliesst. Es folgt hier die Construction der Aufgabe, deren Analysis §. 10 gegeben wurde.

Construction: Es sei (Fig. 6) a die gegebene Seite, s die Summe der beiden anderen Seiten, und α der gegebene Winkel, welcher von letzteren eingeschlossen werden soll. Um das durch die gegebenen Stücke, wie die Analysis nachwies, zunächst bestimmte Dreieck zu erhalten, machen wir die Linie BD gleich s, tragen, nachdem wir den Winkel α halbirt haben, an den einen Endpunkt derselben D den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ gleich Winkel BDX an, und construiren um den anderen Endpunkt B als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius a, welcher den Schenkel DX im Punkte C treffen mag. Verbinden wir B mit C, so erhalten wir das den gegebenen Stücken a, s und $\frac{\alpha}{2}$ entsprechende Dreieck, aus dem sich nun leicht das gesuchte Dreieck ableiten lässt, wenn wir an CD im Punkte C den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ antragen und den zweiten Schenkel desselben bis zum Durchschnittspunkte A mit der Linie BD verlängern. Dreieck ABC entspricht dann den gegebenen Bedingungen.

Die vorstehende Construction hat die Halbirung des Winkels α an dem gegebenen Winkel selbst ausgeführt; da indessen die Analysis die Grösse des Winkels BDC (Fig. 5) aus seiner Lage an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks ACD bestimmt hat, so würde die Construction den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ besser in gleicher Art entstehen lassen. Tragen wir zu dem Zwecke an die Linie BD gleich s (Fig. 7) in einem beliebigen Punkte F derselben den gegebenen Winkel α an, machen den Schenkel FG desselben gleich FD, und verbinden D mit G, so ist Winkel BDG gleich $\frac{\alpha}{2}$. Construiren wir dann um B wieder einen Kreis mit dem Radius a, der den Schenkel DG im Punkte C schneiden mag, ziehen durch C die Linie CA parallel mit FG, so ist ABC wiederum das verlangte Dreieck.

§. 12.

Beweis. Der Beweis der Aufgabe hat zu zeigen, dass die Figur, welche die Construction ergeben hat, den in der Aufgabe gestellten Bedingungen entspricht, dass sie in der That die in derselben gegebenen Stücke enthält. Wenngleich aus der Analysis selbst schon, sobald dieselbe streng und richtig geführt ist, hervorgehen wird, dass die Construction die geforderte Figur ergiebt, so wird der Beweis dennoch nicht unnöthig sein, indem einerseits die Analysis nur so weit fortgeführt wird, bis die aufgefundenen Beziehungen den Gang der Construction erkennen lassen, andrerseits der Beweis selbst wieder dazu dient, die Richtigkeit der Analysis zu prüfen, und dieser also zugleich für die ganze Auflösung den Nachweis der Gültigkeit führt. Wie die Construction, so wird auch der Beweis den umgekehrten Gang der Analysis nehmen, und da sich für den Beweis grade die Voraussetzung der Analysis zur Behauptung, die Behauptung der Analysis zur Voraussetzung umgestaltet, so wird die Nothwendigkeit hervortreten, dass zu dem Beweise grade die Umkehrungen, wenn diese statthaft sind, derjenigen Lehrsätze herbeigezogen werden müssen, welche in der Analysis zur Anwendung kamen. Wäre also, wie dies in der durchgeführten Aufgabe der Fall war, in der Analysis aus der Gleichheit zweier Seiten eines Dreiecks auf die Gleichheit der gegenüberliegenden Winkel geschlossen, so wird der Beweis umgekehrt aus der Gleichheit der Winkel die Gleichheit der Seiten folgern; würde in der Analysis die

Congruenz zweier Dreiecke mit Hinzuziehung der Gleichheit zweier Seiten nachgewiesen sein, um daraus die Gleichheit der gegenüberliegenden Winkel, als homologer Stücke, zu folgern, so wird der Beweis, wenn dies anders möglich ist, dieselbe Congruenz beweisen mit Hinzuziehung der Gleichheit der Winkel, um mit Hülfe derselben zu zeigen, dass als homologe Stücke die gegenüberliegenden Seiten gleich sind. Gestattet der in der Analysis zur Anwendung gebrachte Satz eine Umkehrung nicht, so werden andere Hülfsmittel für den Beweis herbeizuziehen sein, durch welche dargethan wird, dass die der Umkehrung entsprechende Behauptung für den besonderen Fall der vorhandenen Bedingungen dennoch ihre Gültigkeit behält. Auch da, wo der Beweis sich aus den Voraussetzungen der Construction durch Anwendung anderer Sätze auf einfacherem Wege führen lässt, wird der durch eine strenge Umkehrung der Analysis sich ergebende Beweisgang verlassen werden dürfen, und würde die Forderung der Eleganz des Beweises, welche mit der Kürze desselben gewinnt, eine solche Abweichung diesenfalls rechtfertigen. Geben wir nun den Beweis der vorher durchgeführten Construction.

Beweis (Fig. 6). Zunächst ist der Construction zufolge Seite BC gleich der gegebenen Linie a. Dann folgt aus der Gleichheit der Winkel ACD und ADC die Gleichheit der gegenüberliegenden Seiten, also $AC = AD$, und daraus wieder, weil $BD = s$, dass $BA + AC = BA + AD = s$. Da endlich Winkel BAC Aussenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks ACD ist, dessen Winkel an der Grundlinie gleich $\frac{\alpha}{2}$ gemacht sind, so ergiebt sich $\sphericalangle BAC = \alpha$. Das Dreieck ABC enthält also die gegebenen Stücke, und ist demnach das in der Aufgabe geforderte Dreieck.

Wir sehen auch hier, dass der Beweis aus der Grösse der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grösse des Aussenwinkels schliesst, während umgekehrt die Analysis von dem Aussenwinkel zu den Winkeln an der Grundlinie übergegangen war. Die zweite Construction unterscheidet sich von der ersteren nur dadurch, dass die Halbirung des Winkels α durch Construction eines gleichschenkligen Dreiecks ausgeführt und zugleich der Winkel ACD (Fig. 7), dem Winkel ADC gleich, an CD durch eine Parallele zu FG angetragen ist. Der Beweis wird also derselbe sein; nur wird er die Gleichheit der Winkel mit Hinzuziehung der Sätze über die Winkel bei parallelen Linien nachzuweisen haben.

§. 13.

Determination. Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die Construction sich ausführen lasse, wie auch die Bedingungen der Aufgabe ihrer Grösse nach bestimmt seien; indessen giebt es Aufgaben, welche eine Auflösung nur gestatten, wenn diese Bedingungen in Bezug auf ihre Lage oder Grösse besonderen Beziehungen oder Verhältnissen entsprechen, welche die *Determination* der Aufgabe zu ermitteln und anzugeben haben. So darf die der Grundlinie zugehörige Höhe eines Dreiecks nicht grösser sein als eine der beiden anderen Seiten, und wäre in einer Aufgabe also die Höhe und eine dieser Seiten gegeben, so liesse das geforderte Dreieck sich nicht construiren, sobald Seite und Höhe im Verhältniss zu einander dieser Bedingung nicht entsprächen. Die Determination wird sich entweder aus bekannten Lehrsätzen ergeben, wie der Satz, nach welchem die Hypotenuse die grösste Seite im rechtwinkligen Dreieck ist, die Determination in dem so eben erwähnten Falle erkennen lässt; oder sie wird aus der Construction abgeleitet, indem wir letzterer Schritt für Schritt folgen und untersuchen, ob den Forderungen derselben stets und unter allen Bedin-

gungen genügt werden kann. Das letztere Verfahren wird zugleich am sichersten in jedem Falle die Determination der Aufgabe erkennen lassen. Sind unter den gegebenen Bedingungen zugleich Linien und Winkel enthalten, so wird die Geometrie im engern Sinne die Verhältnisse derselben nicht angeben können, da erst die Trigonometrie ein gemeinsames Mass für beide Grössen, und damit zugleich die Abhängigkeit der Linien und Winkel von einander kennen lehrt. Es lassen sich diesenfalls jedoch die zwischen den gegebenen Grössen selbst zu fordernden Beziehungen durch die Verhältnisse derselben zu anderen, den gegebenen Bedingungen nicht zugehörigen, Grössen ersetzen, wenngleich dadurch den strengen Anforderungen, welche an eine Determination zu stellen sind, nicht genügt wird. Gehen wir hiernach auf die Determination der in ihren einzelnen Theilen bis dahin genau durchgeführten Aufgabe näher ein.

Determination (Fig. 6). Dem Gange der Construction entsprechend, werden wir zunächst an die gegebene Summe in dem einen Endpunkte stets den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ antragen, werden stets aus dem anderen Endpunkte einen Kreis mit der gegebenen Seite a construiren können. Es wird dieser Kreis jedoch nicht nothwendig den anderen Schenkel des Winkels BDX treffen müssen; dies wird vielmehr nur der Fall sein, wenn der Radius a desselben nicht kleiner ist als die von B auf DX gefällte Senkrechte BE, und wird die Aufgabe sich also nicht lösen lassen, wenn 1) $a < \mathrm{BE}$. Ferner wird der Schenkel CA des Winkels ACD die Linie BD nur schneiden, wenn die Summe der von AC und BD mit CD gebildeten Winkel, also Winkel α, kleiner ist als zwei Rechte, und wenn zweitens BC kleiner als BD oder $a < s$ ist. Wäre letzteres nicht der Fall, so wäre $\sphericalangle\, \mathrm{BCD} < \frac{\alpha}{2}$, und der Schenkel CA des Winkels ACD gleich $\frac{\alpha}{2}$ würde also nicht BD selbst, sondern die Verlängerung von BD über B hinaus treffen, so dass der Punkt A auf der Linie BD selbst sich nicht ergeben würde. Die Aufgabe lässt sich daher gleichfalls nicht lösen, wenn 2) $\alpha > 2\,\mathrm{R}$, 3) $a > s$ wäre.

Beide zuletzt aufgestellten Bedingungen ergeben sich übrigens sofort und einfacher aus den Lehrsätzen, dass jeder Winkel im Dreieck kleiner als zwei Rechte, und die Summe zweier Seiten stets grösser sein muss als die dritte Seite eines Dreiecks; es ist mit Absicht hier der umständlichere Weg eingeschlagen worden, um die Ableitung der Determination aus der Construction selbst an einem Beispiele zu zeigen.

Es liegt hier zugleich ein Fall vor, in welchem es nöthig wurde, die den gegebenen Stücken nicht zugehörige Senkrechte BE in die Determination hineinzuziehen. Die trigonometrischen Lehren lassen jedoch erkennen, dass $\mathrm{BE} = \mathrm{BD}.\ \mathfrak{sin}\,\frac{\alpha}{2}$, und würde die Determination in strenger Form also die Bedingung hinstellen müssen, dass a nicht kleiner sein darf als $s.\ \mathfrak{sin}\,\frac{\alpha}{2}$.

§. 14.

Discussion. Die Discussion endlich wird die Aufgabe in Bezug auf etwa verschiedene mögliche Resultate zu untersuchen haben, sei es dass aus der Construction selbst verschiedene, den Bedingungen genügende Figuren hervorgehen, sei es dass sich verschiedene oder irgend wie besonders bestimmte Resultate ergeben, sobald die Bedingungen der Aufgabe eine besondere, von der in der Construction vorausgesetzten abweichende, Lage oder

Grösse haben. Die Discussion wird also, indem sie die Aufgabe nach allen möglichen Seiten hin untersucht, dieselbe in ihrer grössten Allgemeinheit lösen, und somit endlich die Auflösung der gestellten Aufgabe vollständig abschliessen. Die in ihren übrigen Theilen bereits behandelte Aufgabe führt zu folgender Discussion.

Discussion. Die Aufgabe ist, die Möglichkeit der Auflösung vorausgesetzt, eine bestimmte, und zwar in der Art, dass nur ein Dreieck den in derselben gestellten Bedingungen entspricht. Wenngleich nehmlich der um B (Fig. 6) mit dem Radius a beschriebene Kreis den Schenkel DX ausser in C allgemein noch in einem zweiten Punkte C′ schneiden wird, und hieraus die in der That verschiedenen Dreiecke BCD und BC′D entstehen, so sind die aus denselben abgeleiteten Dreiecke ABC und A′BC′ dennoch einander congruent. Es ergiebt sich dies, wenn wir berücksichtigen, dass $BC = BC'$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BA'C'$, und auch $\sphericalangle BCA = \sphericalangle A'BC'$ ist, insofern beide den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und die gleichen Winkel BCC′ und BC′C zu zwei Rechten ergänzen. Wenn die Seite a der von B auf DX gefällten Senkrechten gleich ist, berührt der um B mit a construirte Kreis den Schenkel DX im Punkte C, das Dreieck BCD wird rechtwinklig, und das verlangte Dreieck ABC gleichschenklig, indem $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = R - \frac{\alpha}{2}$ ist.

§. 15.

Nachfolgend mag eine Aufgabe diesen an eine vollständige Auflösung zu stellenden Anforderungen gemäss behandelt, und hierbei zugleich gezeigt werden, wie für die Auflösung einer Aufgabe verschiedene Wege und verschiedene Hülfsmittel benutzt werden können.

Aufgabe: Ein Dreieck zu construiren aus zwei Seiten und der die dritte Seite halbirenden Transversale.

1. Auflösung.

Analysis. Es sei (Fig. 8) ABC das verlangte Dreieck, in welchem die Seiten AB, AC und die Transversale AD, vorausgesetzt also, dass $BD = CD$ ist, die gegebenen Stücke seien. Um die Beziehungen zu ermitteln, welche unter dieser Voraussetzung zwischen den genannten Stücken und dem Dreiecke selbst stattfinden, könnte Anwendung gemacht werden von dem Lehrsatze, nach welchem eine Parallele, zur einen Seite durch den Halbirungspunkt der anderen Seite gezogen, auch die dritte Seite halbirt. Ziehen wir zu diesem Zwecke die Linie DE parallel zu AC, so ergiebt sich nach diesem Satze $AE = EB$, und ferner $DE = \frac{1}{2} AC$, da die Parallele unter derselben Voraussetzung der halben ihr parallelen Seite gleich ist. In dem Dreiecke AED wären also durch die gegebenen Stücke sämmtliche Seiten bestimmt; dasselbe liesse sich demnach construiren, woraus wieder die Lage des Punktes B, die Richtung der Grundlinie BD und endlich, da AC parallel DE ist, die Lage des dritten Eckpunktes C abgeleitet werden könnte.

Construction. Es seien b und c die gegebenen Seiten, t die gegebene Transversale. Wir halbiren $AB = c$ in dem Punkte E, construiren mit der gegebenen Transversale t, als Radius, einen Kreis um A, einen zweiten mit dem Radius $\frac{b}{2}$ um E, welche beide im Punkte D sich schneiden mögen. Den Punkt D verbinden wir mit B und verlängern BD über D, bis die Verlängerung eine durch A zu DE gezogene Parallele im Punkte C schneidet. Dreieck ABC ist dann das verlangte Dreieck.

Beweis. Der Construction zufolge ist $AB = c$ und $AD = t$; da ferner $AE = EB$ und $DE \parallel AC$, so ist auch $BD = DC$; die Transversale AD halbirt also in der That die gegenüberliegende Seite BC. Endlich ergiebt sich $AC = b$, weil $AC = 2\,DE$ und $DE = \frac{b}{2}$ ist.

Determination. Die Construction des Dreiecks ADE setzt als nothwendige Bedingung voraus, dass $AD + DE > AE$ und $AD - DE < AE$, oder dass $AE - DE < AD$ und $AE + DE > AD$ ist; soll die Aufgabe sich auflösen lassen, so muss daher $\frac{c+b}{2} > t$ und $\frac{c-b}{2} < t$ sein.

Discussion. Die um A und E mit t und $\frac{b}{2}$ construirten Kreise werden sich, sobald die in der Determination aufgestellte Bedingung erfüllt ist, ausser in D noch in einem zweiten Punkte D′ schneiden, dem ein zweites Dreieck AD′E entsprechen würde. Aus diesem liesse sich in derselben Art ein den Bedingungen der Aufgabe genügendes Dreieck ABC′ ableiten, welches jedoch, wie leicht nachzuweisen, dem Dreieck ABC congruent wäre.

2. Auflösung.

Analysis. Eine andere Auflösung wird sich mit Anwendung des Satzes ergeben, nach welchem ein Viereck, dessen Diagonalen sich gegenseitig halbiren, ein Parallelogramm ist; es entsteht ein solches nehmlich, wenn wir die gegebene Transversale um sich selbst verlängern, und, wie hier, wird der herbeigezogene Satz überall Anwendung finden, wo ausser der Transversale auch die übrigen Bestimmungsstücke des Parallelogramms gegeben sind. Verlängern wir hier also (Figur 8ª) AD über D hinaus um sich selbst, so dass $AD = DE$, verbinden E mit B und C, so folgt nach dem angeführten Satze, dass $BE = AC = b$ ist. Das Dreieck ABE lässt sich also aus den gegebenen Stücken c, b und $2t$ construiren, und daraus ist Dreieck ABC selbst leicht abzuleiten.

Construction. Aus den Endpunkten A und B der Graden $AB = c$ construiren wir zwei Kreise mit den Radien $2t$ und c, welche sich im Punkte E schneiden mögen. Ziehen wir AE und BE, durch A eine Parallele zu BE, durch E eine Parallele zu AB, und verbinden den Durchschnittspunkt beider Parallelen C mit B, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist ABEC ein Parallelogramm; da in demselben die Diagonalen sich gegenseitig halbiren, so ist $AD = \frac{1}{2}AE = t$ und $BD = DC$. Ferner sind in einem Parallelogramm die gegenüberliegenden Seiten gleich, folglich ist $AC = BE = b$, und endlich der Construction zufolge auch $AB = c$.

Determination. Es ergiebt sich auch für diese Construction die Beschränkung, dass $b + c > 2t$ und $c - b < 2t$, oder der früheren Determination entsprechend $\frac{b+c}{2} > t$, $\frac{c-b}{2} < t$ sein muss.

Discussion. Die um A und B beschriebenen Kreise werden sich auch hier, sobald die Bedingungen der Determination erfüllt sind, ausser in E noch in einem zweiten Punkte E′ schneiden, und würde sich demnach wiederum ein zweites Dreieck ABC′ verzeichnen lassen, welches jedoch, wie bei der ersten Auflösung, dem Dreieck ABC congruent sein würde.

§. 16.

Hülfsmittel der geometrischen Analysis. Nach den bisherigen Betrachtungen über die geometrische Analysis finden die Beziehungen, welche zwischen den gegebenen und der gesuchten Grösse statthaben, im Allgemeinen in Lehrsätzen ihren Ausdruck. Es ist hiernach klar, dass die Analysis neue Hülfsmittel gewinnt,

1) wenn neue Lehrsätze die Beziehungen zwischen den der Betrachtung vorliegenden Grössen vervollständigen;
2) wenn statt der gegebenen Bedingungen mit Hülfe der Data andere eingeführt werden, deren Beziehungen schon genauer erkannt oder leichter zu erkennen sind;
3) wenn statt der gesuchten Grösse als Forderung zunächst eine andere Grösse hingestellt werden kann, welche sich mit Hülfe schon gelöster Aufgaben construiren lässt und durch welche zugleich dann auch die in der Aufgabe geforderte Grösse bestimmt ist.

I. Werden sich zwar Aufgaben der Art, wie sie hier überhaupt nur Berücksichtigung finden, auf mehr oder minder einfachem Wege mit Anwendung derjenigen Lehrsätze lösen lassen, welche im System der Geometrie selbst ihre Stelle haben, so gestattet doch häufig die Kenntniss anderer, dem System gewöhnlich nicht zugetheilter Lehrsätze eine bei weitem einfachere Auflösung, die sich oft aus dem herbeigezogenen Lehrsatze unmittelbar ergiebt. Betrachten wir so die Aufgabe, ein Dreieck zu construiren, wenn zwei Seiten desselben und die Differenz der diesen gegenüberliegenden Winkel gegeben sind. Die Analysis dieser Aufgabe wird dem weniger Geübten Schwierigkeiten darbieten, wenn er nicht mit dem Lehrsatze bekannt ist, nach welchem die von einem Eckpunkt B (Fig. 6) eines Dreiecks BDC′ ausgehende, der kleineren Seite BC′ gleiche, Transversale BC mit der grösseren Seite BD einen Winkel CBD bildet, welcher der Differenz der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel C′ und D gleich ist. Es folgt dieser Satz, welcher auch zum Beweise der Congruenz der Dreiecke ABC und A′BC′ (§. 14) herbeigezogen werden konnte, einfach aus den Beziehungen des Aussenwinkels eines Dreiecks zu den beiden inneren ihm gegenüberliegenden Winkeln, nach welchen $\sphericalangle C' = \sphericalangle BCC' = \sphericalangle DBC + \sphericalangle D$, also $\sphericalangle DBC = \sphericalangle C' - \sphericalangle D$ ist. Mit Hülfe dieses Lehrsatzes erkennt die Analysis sofort, dass Dreieck BCD, somit auch Dreieck BDC′, durch die gegebenen Bedingungen bestimmt und letzteres aus denselben auf sehr einfachem Wege zu construiren ist. Eine Analysis, welche mit Anwendung eines solchen Lehrsatzes die Auflösung unmittelbar folgert, wird insbesondere eine *Analysis durch Lehrsätze* genannt; für dieselbe wird aber die Kenntniss der nöthigen Lehrsätze vorausgesetzt werden müssen, besonders wenn die gestellten Aufgaben ohne Kenntniss derselben nur auf umständlichem und schwer zugänglichem Wege eine Auflösung zulassen.

II. Als zweites Hülfsmittel steht der Analysis die Anwendung der §. 6 näher betrachteten *Data* zu Gebote. War die Kenntniss derselben einerseits nöthig, um zu erkennen, ob nicht von einander abhängige Bedingungen unter den Bedingungen der Aufgabe enthalten sind, so werden wir sie hier benutzen, statt einer gegebenen Bedingung eine andere einzuführen, welche durch erstere und die übrigen in der Aufgabe gegebenen Bedingungen zugleich als gegeben betrachtet werden kann. Es wird dies besonders geschehen, wenn die vorhandenen Bedingungen eine engere Verbindung unter einander und mit der geforderten Grösse nicht gestatten, wenn die zwischen denselben statthabenden Beziehungen nicht klar

hervortreten, während die mit Hülfe der Data geänderten Bedingungen auf vorliegende, leicht erkennbare Beziehungen hinweisen. So konnte die Analysis der Aufgabe, welche die Construction eines Dreiecks fordert, wenn eine seiner Seiten die Summe der beiden anderen und der von letzteren eingeschlossene Winkel gegeben ist, statt des gegebenen Winkels α (Fig. 5) die Hälfte desselben, den Winkel BDC, als gegeben betrachten. Die Bedingungen treten dann als Stücke des Dreiecks BCD zusammen, welches durch dieselben bestimmt ist, während bei der ursprünglichen Bedingung eine unmittelbare Beziehung der gegebenen Summe s zum Winkel α selbst nicht vorhanden war.

Für die Auflösung der Aufgabe, ein Dreieck zu construiren, von welchem die Summe zweier Seiten, die zur dritten Seite gehörige Höhe und einer der letzterer anliegenden Winkel gegeben ist, erscheint es vortheilhaft, die durch die Höhe und den gegebenen Winkel nach §. 6, 22, zugleich gegebenen Seite als Bedingung einzuführen. Aus der Summe der beiden Seiten und der einen derselben ergiebt sich auch die andere Seite, und die Analysis durch Data führt die Aufgabe also auf die Forderung zurück, ein Dreieck aus zwei Seiten und dem der einen von beiden gegenüberliegenden Winkel zu construiren. Betrachten wir noch die Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die Höhe, der Winkel an der Spitze und das Product der denselben einschliessenden Seiten gegeben ist. Die Analysis wird hier eine Beziehung zwischen dem Product der Seiten, der Höhe und dem Winkel schwer erkennen, während die Unterstellung der Inhaltbestimmung, welche nach §. 6, 19, mit diesen Stücken zugleich gegeben ist, sofort eine weitere Beziehung der gegebenen Grössen hervortreten lässt. Durch den Inhalt und die Höhe (§. 6, 15) ist auch die Grundlinie gegeben und dadurch die Aufgabe auf die einfache Construction eines Dreiecks zurückgeführt, von welchem die Grundlinie, die Höhe und der Winkel an der Spitze gegeben ist. Einen anderen Gang würde die Analysis derselben Aufgabe nehmen, wenn wir berücksichtigen, dass nach §. 6, 18, mit dem Product zweier Seiten und der zur dritten Seite gehörigen Höhe auch der Radius des umgeschriebenen Kreises gegeben ist. Durch letzteren und den Winkel an der Spitze ist nach §. 6, 14, wiederum die Grundlinie gegeben, und wären daher die letzten Bedingungen, wie bei der ersten Analysis, die Grundlinie, Höhe und der Winkel an der Spitze.

III. Betrachten wir die zweite Analysis (§. 15) genauer, so erkennen wir, dass dieselbe die Aufgabe, ein Dreieck aus zwei Seiten und der die dritte Seite halbirenden Transversale zu construiren, eigentlich auf die andere Aufgabe zurückführt, ein Parallelogramm zu zeichnen, von welchem zwei Seiten und eine Diagonale gegeben sind. Ist die Construction dieses Parallelogramms ausgeführt, so bedarf es nur der Verzeichnung der entsprechenden Diagonale, um auch das geforderte Dreieck, und zwar gebildet durch zwei Seiten und eine Diagonale des Parallelogramms, zu erhalten. Die Analysis hätte daher, wenn jene Hülfsaufgabe schon vorher gelöst worden wäre, nur die gestellte Aufgabe auf dieselbe überführen, und die Construction die Art und Weise, wie jenes Parallelogramm erhalten wird, nicht erst angeben, vielmehr als bekannt voraussetzen dürfen. Man nennt diese Zurückführung einer Aufgabe auf eine andere eine *Reduction*, sei es nun dass durch dieselbe die ursprünglich gestellte Aufgabe selbst schon vollständig gelöst ist, sei es dass jene Aufgabe nur als Hülfsaufgabe für die weitere Auflösung herangezogen wird. Ersteres wird vorzüglich der Fall sein bei verschiedenen Einkleidungen derselben Aufgabe, und wenn ferner mit Hülfe der Data die Bedingungen der einen Aufgabe auf die der anderen zurückgeführt werden können; auf vorangehende Aufgaben wird aber dem Wesen der Auflösung

entsprechend im Grunde jede Aufgabe zurückgeführt werden müssen, und spricht man daher von einer besonderen *Analysis durch Reduction* nur dann, wenn die herbeigezogene Hülfsaufgabe nicht zu denjenigen Aufgaben gehört, welche im System der Geometrie selbst nothwendiger Weise ihre Stelle haben. Oft lassen sich so Aufgaben, welche die Construction von Vierecken fordern, auf Dreiecksaufgaben, und, wie im vorerwähnten Falle, umgekehrt zurückführen; bemerkt muss aber werden, dass die vollständige Reduction einer Aufgabe auf eine andere voraussetzt, dass für die Construction beider in den Aufgaben geforderten Figuren sich eine gleiche Anzahl von Bedingungen als nothwendig herausstellt, wie dies z. B. in der That für ein Parallelogramm und ein Dreieck der Fall ist.

Anmerkung. Ein nicht unwichtiges Hülfsmittel für die Auflösung geometrischer Aufgabe liegt auch in der Vergleichung derselben mit ähnlichen schon gelösten Aufgaben, insofern ähnliche Forderungen und ähnliche Bedingungen einen ähnlichen Gang sowohl für die Analysis als für die Auflösung selbst voraussetzen lassen. Man nennt eine Analysis, welche sich durch die Ähnlichkeit der vorliegenden mit einer schon gelösten Aufgabe leiten lässt, eine *Analysis durch Analogie,* und von ihr wird insbesondere Anwendung zu machen sein, wenn eine Aufgabe allgemeinere Bedingungen oder eine allgemeinere Forderung enthält, als solche in einer anderen bereits behandelten Aufgabe vorliegen. Wollen wir derartig von einer besonderen Auflösung durch Analogie zu einer allgemeineren übergehen, so wird indessen die erstere Auflösung nicht von Beziehungen der besonderen Grössen Anwendung machen dürfen, denen ähnliche Beziehungen für die Grössen allgemeinerer Art nicht entsprechen. Wir heben hier hervor die Unterordnung des Punktes und der graden Linie unter den allgemeineren Begriff des Kreises, insofern Punkt und grade Linie sich als Kreise betrachten lassen, deren Radius für erstern gleich Null, für letztern unendlich gross ist; für die Lösung der Berührungsaufgaben wird in Folge dieser Unterordnung die Anwendung analoger Schlussfolgerungen sich als besonders fruchtbringend herausstellen. Zu erwähnen ist noch die Analogie, welche statthat, wenn die gegebenen Bedingungen oder die geforderte Grösse einmal auf der einen, dann auf der anderen Seite einer gegebenen Graden oder Kreislinie liegen sollen, wenn also ein Gegensatz in der Lage statthat, wie auch wenn statt der Summen zweier Linien oder Winkel die Differenz derselben gegeben ist, dieser Gegensatz also dem Gegensatz arithmetischer Operationen entspricht.

§. 17.

Auflösung geometrischer Aufgaben mit Anwendung geometrischer Oerter. Hatte die bisher betrachtete geometrische Analysis, indem sie streng analytisch zu Werke ging, die Forderung der Aufgabe vorausgesetzt, war sie von dieser Voraussetzung aus zu Folgerungen gekommen, als deren letzte die Bedingungen der Aufgabe selbst sich ergaben, so wird nun der Weg, den die Anwendung geometrischer Oerter vorschreiben wird, die streng analytische Methode in Bezug auf den äussern Gang der Betrachtung verlassend, an die gegebenen Bedingungen selbst anknüpfen. Sehen wir die Aufgabe als die Forderung an, in Bezug auf unmittelbar festgelegte oder gegebene Punkte die Lage anderer Punkte in der Ebene zu bestimmen, so werden wir behufs Anwendung geometrischer Örter, von diesen ursprünglich festgelegten Punkten ausgehend, mit Hinzuziehung der in der Aufgabe enthaltenen Bedingungen, zu einem folgenden Punkte u. s. w. überzugehen suchen, bis endlich nach Anwendung aller Bedingungen sämmtliche Punkte in der Abhängigkeit ihrer Lage von einander bestimmt sind, und dadurch der Construction der Weg klar vorgezeichnet ist.

Ist der äussere Gang der Betrachtung in dieser Hinsicht ein synthetischer, so wird die Betrachtung selbst wieder streng analytisch zu Werke gehen, um die Bedingungen zu ermitteln, welche die Lage der auf einander folgenden Punkte bestimmen, und sind wir insofern berechtigt, auch hier von einer *Analysis durch Oerter* zu reden. Die Eigenthümlichkeit derselben ist indessen nicht zu verkennen, und insbesondere tritt dieselbe in der Beziehung der Construction zur Analysis hervor; während die Construction, indem sie synthetisch zu Werke geht, grade den entgegengesetzten Gang der Analysis, wie dies stets hervorgehoben wird, einschlagen soll, muss die Construction der Analysis durch Örter streng Schritt für Schritt folgen, die Punkte genau in derselben Reihenfolge nach einander festlegen, in welcher die Analysis die Bedingungen für die Lage derselben hingestellt hat. Um auf die Analysis durch Örter, welche von der grössten Wichtigkeit ist und wohl die ausgedehnteste Anwendung gestattet, weiter einzugehen, müssen wir auf die im §. 9 erhaltenen Resultate zurückkommen. Nach denselben stellen sich für die Bestimmung eines Punktes in Bezug auf andere schon festliegende Punkte zwei Bedingungen als nothwendig heraus; wir würden daher, von zwei ursprünglich festgelegten Punkten ausgehend, die beiden Bedingungen zu ermitteln haben, durch welche ein folgender Punkt, und zwar in der Art festgelegt wird, dass je einer dieser Bedingungen ein geometrischer Ort des Punktes entspricht und der Durchschnitt beider Örter den geforderten Punkt ergiebt. Hiernach würden die weiteren Bedingungen und diesen entsprechend die Örter zu ermitteln sein, durch welche die Lage eines nächstfolgenden Punktes bestimmt wird, und so weiter, bis sämmtliche Punkte der Figur festgelegt sind.

Betrachten wir so die an früherer Stelle durchgeführte *Aufgabe:* Ein Dreieck zu construiren, wenn eine seiner Seiten a die Summe s der beiden anderen Seiten und der von letzteren eingeschlossene Winkel gegeben ist.

Analysis. Es sei wiederum ABC (Fig. 9) das verlangte Dreieck und BC, $BA + AC = BD$, $\sphericalangle$ BAC seien die gegebenen Stücke. Denken wir zunächst die Grundlinie BC in die Ebene gelegt, so würde damit die Lage der Punkte B und C bestimmt und in Bezug auf diese ein folgender Punkt festzulegen sein. Da als zweite Bedingung die Summe s gegeben ist, so lässt sich leicht erkennen, dass der Punkt D auf der Peripherie des Kreises liegen muss, der sich um B mit dem Radius s beschreiben lässt, und da aus $AC = AD$ folgt, dass $\sphericalangle BDC = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC = \frac{\alpha}{2}$ ist, so ergiebt sich als zweiter Ort für D der Kreis, welcher über BC, des Winkels $\frac{\alpha}{2}$ fähig, beschrieben werden kann. Durch beide Kreise ist der Punkt D bestimmt, und für den Punkt A ist einmal die Linie BD, dann, da $AC = AD$ sein muss, die im Halbirungspunkt auf CD errichtete Senkrechte als geometrischer Ort gegeben. Würde von vornherein versucht worden sein, den Punkt A unmittelbar gegen B und C festzulegen, so würde der gegebene Winkel α auf den des Winkels α fähigen, über BC construirten Kreis als Ort für den Punkt A hingewiesen haben; die Bestimmung eines zweiten Ortes würde indessen die vorhergehende Bestimmung des Punktes D als nothwendig voraussetzen, und die Analysis war daher gezwungen, zuerst die den Punkt D bestimmenden Bedingungen in Erwägung zu ziehen.

Construction. Ziehe $BC = a$, beschreibe um B mit dem Radius s einen Kreis und construire über BC einen Kreisbogen, welcher des Winkels $\frac{\alpha}{2}$ fähig ist. Beide Kreise mögen sich im Punkte D schneiden. Den Punkt D verbinde mit B und C, halbire CD im

Punkte G, errichte auf CD die Senkrechte GA, verbinde endlich A mit C, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Es ist $BC = a$, ferner folgt aus $CG = GD$ und $\sphericalangle CGA = R$, dass $AC = AD$, also auch $AB + AC = AB + AD = s$ ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\sphericalangle BAC = \alpha$, was sich einfach ergiebt unter Berücksichtigung, dass $\sphericalangle BAC = 2 \sphericalangle BDC$ und $\sphericalangle BDC = \frac{\alpha}{2}$ als Peripheriewinkel über BC in einem Kreise, welcher, des Winkels $\frac{\alpha}{2}$ fähig, über BC construirt ist.

Determination. Der um B mit dem Radius s beschriebene Kreis wird den über BC construirten Kreis nicht schneiden, sobald $s > BF$, wo BF der von B aus durch den Mittelpunkt M gezogene Durchmesser des letzteren Kreises ist. Wir können diese Beziehung leicht auf die der früheren Determination (§. 13) zurückführen. Verbinden wir F mit C, so erhalten wir ein Dreieck BFC, welches dem Dreiecke BDE, dem gleichbenannten Dreiecke in Fig. 6 entsprechend, ähnlich ist. Es verhält sich daher $BF : BC = BD : BE$, oder $BF : BD = BC : BE$, wonach aus $BD > BF$ auch $BE > BC$ folgen würde; die Bedingung also, dass s nicht grösser sein darf als BF, soll die Construction des geforderten Dreiecks möglich sein, fällt mit der früheren Bedingung, nach welcher a nicht kleiner sein darf als BE, zusammen.

Lassen die Örter, welche bei der Construction zur Anwendung kommen, sich nicht so einfach wie in dem vorliegenden Falle erkennen, so wird die Analysis selbst diese Örter ermitteln können. Dieselbe wird zu diesem Zwecke eine der Bedingungen, welche die Lage eines dritten Punktes gegen zwei zunächst festgelegte Punkte bestimmen, unbeachtet lassen, die Aufgabe dadurch zu einer unbestimmten machen und nun untersuchen, ob der dritte Punkt auf einer bestimmbaren Graden oder Kreislinie liegt, insofern andere Linien bei der elementaren Auflösung geometrischer Aufgaben nicht herbeigezogen werden dürfen. Dass die Punkte, welche dieser derartig unbestimmten Aufgabe genügen, nicht ganz willkürlich in der Ebene, sondern, falls die ursprünglich gestellte Aufgabe übrigens eine bestimmte ist, auf einem geometrischen Orte liegen müssen, ist besonders für den Fall klar, dass den ausser Acht gelassenen Bedingungen ein bekannter Ort entspricht. Sobald nehmlich jene Bedingung hinzutritt, wird die Lage des Punktes eine bestimmte sein; es muss daher auch der ersten Bedingung ein Ort entsprechen, da nur durch zwei Linien, auf denen ein Punkt liegen soll, derselbe vollständig bestimmt ist. Diesen Ort selbst nun zu finden, werden wir, falls ein bekannter Satz nicht auf denselben führt, verschiedene Punkte derselben Bedingung entsprechend verzeichnen und aus den damit gegebenen Beziehungen die Linie, auf welcher jene Punkte liegen, zu bestimmen suchen. Ist dies möglich, so wird man mit Hinzuziehung der fortgelassenen Bedingung, während die zuerst benutzte Bedingung nun ausser Acht gelassen wird, einen zweiten Ort für den dritten Punkt aufzufinden suchen. Gelingt auch dies, so ist der dritte Punkt als Durchschnittspunkt beider Örter seiner Lage nach bestimmt, die Analysis selbst also beendet, sobald in gleicher Art auch die übrigen in der Aufgabe geforderten Punkte durch Örter ihrer Lage nach bestimmt sind. Betrachten wir so die folgende, schon wiederholt behandelte Aufgabe.

Aufgabe: Ein Dreieck zu construiren, von welchem gegeben sind zwei Seiten und die die dritte Seite halbirende Transversale.

Analysis. Es sei ABC (Fig. 10) das verlangte Dreieck, b und c seine gegebenen Seiten und t die gegebene Transversale. Betrachten wir die Endpunkte der Seite c, also

die Punkte A und B, als zunächst festliegend, so werden wir zwei geometrische Oerter für den dritten Punkt C des Dreiecks zu suchen haben. Lassen wir zu dem Zweck zuerst die Bedingung fort, dass das Dreieck die verlangte Transversale habe, so ergiebt sich sofort als Ort für den Punkt C ein Kreis, der mit dem Radius b um A beschrieben werden kann. Um nun einen zweiten Ort für denselben Punkt zu erhalten, berücksichtigen wir allein die Bedingung, dass das Dreieck ausser der Seite c noch die gegebene Transversale t enthalte. Die Fusspunkte der Transversalen für sämmtliche Dreiecke, für welche dieselbe von der Länge t ist, liegen sodann auf einem Kreise, der mit dem Radius t um den Punkt A beschrieben werden kann, und für irgend eines dieser Dreiecke werden wir den dritten Eckpunkt C′ erhalten, wenn wir die Sekante BD′ um sich selbst bis C′ verlängern. Der Ort aller dieser Endpunkte C′ ist nun aber nach §. 5, 16, ein Kreis, dessen Radius $2t$ ist, und dessen Mittelpunkt M wir erhalten, wenn wir BA über A hinaus um sich selbst bis M verlängern. Somit ist ein zweiter Ort gefunden, und der Durchschnitt desselben mit ersterem giebt den verlangten Punkt C.

Construction. Wir machen $AB = c$, verlängern BA über A hinaus um sich selbst bis M, construiren aus M mit dem Radius $2t$ einen Kreis und einen zweiten Kreis um A mit dem Radius b. Der Durchschnittspunkt beider Kreise ist der dritte Eckpunkt C, also ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Der Construction zufolge ist $AB = c$, $AC = b$. Ist D der Halbirungspunkt der Seite BC, so folgt, da auch $BA = AM$, dass die Verbindungslinie AD parallel MC, und also halb so gross als letztere ist; da aber $MC = 2t$, so ergiebt sich endlich $AD = t$.

Determination. Die zur Festlegung des Punktes C construirten Kreise werden sich nur schneiden, wenn die Centrale derselben kleiner als die Summe und grösser als die Differenz der Radien ist. Es muss daher $c < 2t + b$ und $c > 2t - b$ oder $t > \frac{c-b}{2}$ und $t < \frac{c+b}{2}$ sein.

Aufgabe: Ein Viereck zu construiren, von welchem zwei gegenüberliegende Seiten gegeben sind, ebenso beide Diagonalen und der Winkel, den letztere mit einander bilden.

Analysis. Es sei ABCD (Fig. 11) das verlangte Viereck, AB und CD die gegebenen Seiten a und c, AC und BD die gegebenen Diagonalen e und e', endlich Winkel AEB der gegebene Winkel α. Entsteht hier zunächst die Frage, welche von den gegebenen Linien zuerst festzulegen ist, so würde der Umstand, dass eine der Diagonalen zugleich auch die Richtung der zweiten Diagonale bestimmt, die Wahl einer Diagonale rechtfertigen; sei dies die Diagonale AC, so wären in Bezug auf deren Endpunkte die Punkte B und D ihrer Lage nach zu bestimmen. Für den Punkt B ergiebt sich als erster Ort der Kreis, welcher sich mit dem Radius a um A als Mittelpunkt beschreiben lässt, und einen zweiten Ort würden wir für denselben Ort zu suchen haben, indem wir die soeben benutzte Bedingung, die Seite a, ausser Acht lassen. Wir würden, abgesehen von dieser und entsprechend den übrigen Bedingungen der Aufgabe, den Eckpunkt B des Vierecks erhalten, wenn wir von einem Punkte der Peripherie des um C mit c als Radius beschriebenen Kreises eine grade Linie zögen, welche, der gegebenen Diagonale e' gleich, AC unter dem gegebenen Winkel α schneidet. Es wäre also zu bestimmen, welcher Ort den Punkten B,B′,B″ zugehört, die wir durch diese Construction, von den Punkten D,D′,D″ des um C construirten Kreises ausgehend, erhalten würden. Ziehen wir eine Parallele zu diesen Linien durch den Mittelpunkt C, die Linie CX, ferner durch B′ die Linie B′M parallel D′C, so ist zunächst $CM = e'$

und $MB' = CD' = c$; ebenso wird aber auch die durch B'' zu CD'' gezogene Parallele durch M gehen, auch MB'' wird gleich c sein, und erkennen wir also, dass die Punkte B, B', B'' in der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Mittelpunkt M durch Winkel α und die Diagonale e' bestimmt, dessen Radius aber gleich c ist. Durch diesen Kreis ist ein zweiter Ort für den Punkt B gefunden, und lässt sich dann auch der vierte Eckpunkt D leicht in seiner Lage bestimmen.

Construction. Man mache $AC = e$, construire um A einen Kreis mit dem Radius a und einen zweiten Kreis um C mit dem Radius c. An AC lege man sodann den Winkel $ACX = \alpha$, mache $CM = e'$, und construire aus M mit dem Radius c einen dritten Kreis. Den Durchschnittspunkt B des ersten und letzten Kreises verbinde man mit M, ziehe durch C die Linie CD parallel MB, verbinde die Punkte B und D, endlich die Punkte B und C, A und D, so ist ABCD das verlangte Viereck.

Beweis. Der Construction zufolge ist $AC = e$, $AB = a$, $CD = c$; ferner ist BM gleich und parallel CD, daher auch BD gleich und parallel CM, woraus erstens $BD = e'$ folgt und sodann, dass $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ACX = \sphericalangle \alpha$ ist.

Determination. Die Auflösung der Aufgabe wird unmöglich sein, wenn beide Kreise, welche als geometrische Örter für den Punkt B construirt wurden, einen gemeinschaftlichen Punkt B nicht ergeben. Die Centrale beider Kreise ist aber die dritte Seite eines Dreiecks, dessen andere Seiten die gegebenen Diagonalen sind, und für welches der von letzteren eingeschlossene Winkel gleich α ist; es darf daher $a + c$ nicht kleiner und $a - c$ nicht grösser sein als diese aus den gegebenen Stücken leicht zu construirende Seite. Soll die Determination streng die zwischen den gegebenen Grössen selbst vorauszusetzende Beziehung ausdrücken, so wird dies wieder mit Hülfe der Trigonometrie geschehen können, welche für jene Seite den Werth $\sqrt{e^2 + e'^2 - 2\,ee'\cos\alpha}$ ergiebt.

Discussion. Im Allgemeinen wird der zweite Durchschnittspunkt beider um A und M construirten Kreise ein zweites den Bedingungen der Aufgabe entsprechendes Viereck ergeben; berühren beide Kreise einander, wie dies nahe in der Figur der Fall ist, so findet sich nur ein Viereck, und zwar ein Trapez, da die gegenüberliegenden gegebenen Seiten dann parallel sind.

Für diese Aufgabe konnte an früherer Stelle eine einfache geometrische Analysis gegeben werden mit Hülfe derjenigen Beziehungen, welche leicht gefunden werden, wenn man durch die Endpunkte der einen Diagonale eines Vierecks Linien parallel und gleich der anderen Diagonale zieht.

§. 18.

Anwendung der Algebra zur Auflösung geometrischer Aufgaben. Als letztes Hülfsmittel für die elementare Behandlung geometrischer Aufgaben bleibt zu erwähnen die Anwendung der Algebra, welche zur *algebraischen Analysis* führt, und mag auch das Wesen dieser Analysis, wennschon die Betrachtung damit über die derselben gesteckten engeren Grenzen hinausgeht, hier kurz Erörterung finden. Auch die algebraische Analysis setzt eine den Bedingungen der Aufgabe entsprechende Figur voraus, benutzt dieselbe aber nur, die zwischen gegebenen und gesuchten Grössen zunächst sich ergebenden Beziehungen durch Gleichungen auszudrücken, um durch deren Auflösung die Abhängigkeit der gesuchten Grössen von den übrigen hervortreten zu lassen. Man denkt zu diesem Zwecke die

gegebenen Grössen durch ein gemeinsames Mass gemessen, bezeichnet dieselben als allgemeine Zahlengrössen durch Buchstaben, betrachtet als eben solche aber unbekannte Zahlengrössen die unbekannten Stücke der Figur und führt letztere, dem Gebrauch der Algebra entsprechend, mit den letzten Buchstaben des Alphabets als Unbekannte in die Gleichungen ein. Es müssen auch hier die sämmtlichen gegebenen Bedingungen in Gleichungen übergeführt werden, so dass, wenn übrigens die Aufgabe eine bestimmte ist, die Zahl der vorhandenen, von einander jedoch unabhängigen, Gleichungen genügt, um durch dieselben die sämmtlichen unbekannten Grössen zu bestimmen. Ist das gemeinsame Mass die Längeneinheit, so müssen die verschiedenen den Bedingungen zugehörigen Grössen sich durch dasselbe messen lassen. Dies wird möglich sein, wenn wir die Lage eines Punktes gegen eine Grade durch den Abstand desselben von letzterer bestimmen; um aber auch Winkel derartig messen zu können, müssen wir die Lehren der Trigonometrie herbeiziehen, und erst durch diese gewinnt die algebraische Analysis die für ihre allgemeine Anwendung nöthigen Hülfsmittel. Aus den aufgestellten Gleichungen werden die unbekannten Grössen sodann nach den strengen Gesetzen der Algebra entwickelt, und hier geht die algebraische Analysis einen sicher vorgeschriebenen Weg, während dem entsprechenden Theil der geometrischen Analysis, in welchem letztere neue Beziehungen zwischen gegebenen und gesuchten Grössen ermittelt, eine gleiche Sicherheit nicht zukommt. Die Construction endlich hat die gesuchte Grösse dem aus den Gleichungen entwickelten Ausdrucke entsprechend darzustellen, wobei das Verfahren zur Anwendung kommt, welches die Geometrie zur Construction algebraischer Ausdrücke an die Hand giebt. Letzteres setzen wir als bekannt voraus und geben als Beispiel einer algebraischen Analysis die Behandlung der Aufgabe, welche unter dem Namen des goldenen Schnittes bekannt ist.

Aufgabe: Eine grade Linie AB so zu theilen, dass der grössere Abschnitt die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem kleinern Abschnitte derselben ist.

Analysis. Angenommen AB (Fig. 12) sei im Punkte C so getheilt, dass AB : BC = BC : AC, so würde für AB $= a$, BC $= x$, also AC $= a - x$ die Proportion statthaben $a : x = x : a - x$, aus welcher sich ableiten liesse $a^2 - ax = x^2$. Diese Gleichung nach x aufgelöst ergiebt die Werthe $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$, von welchen, wenn wir allein den positiven Werth für x zulassen wollen, der erstere $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ den besonderen Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Construction. Errichte auf AB $= a$ im Punkte A eine Senkrechte AD $= \frac{a}{2}$ und verbinde B mit D. Construire sodann um D mit dem Radius $\frac{a}{2}$ einen Kreis, welcher BD im Punkte E schneidet, trage endlich BC = BE auf AB ab, so ist AB im Punkte C der Forderung gemäss getheilt.

Beweis. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze ergiebt sich BD $= \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$, also DE $= \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$. Letzterer Werth ist aber dem für x gefundenen Werthe gleich, welcher der Proportion $a : x = x : a - x$ entspricht, und genügt daher auch BC = BE der gestellten Forderung.

Discussion. Wir haben im Vorstehenden allein den Werth $-\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ berücksichtigt; dieser Werth ist, wie leicht nachzuweisen, immer positiv, zugleich aber auch

kleiner als a, so dass BE, diesem Werthe entsprechend, sich stets auf AB abtragen lässt. Betrachten wir nun den zweiten Werth $x = -\frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = -(\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}})$, so erkennen wir zunächst leicht, dass der Construction zufolge $BF = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$, so dass also $x = -BF$ ebenfalls der Forderung $a : x = x : a - x$ genügt. Setzen wir diesen Werth für x in die Proportion ein, so erhalten wir $a : -BF = -BF : a + BF$ oder auch $a : BF = BF : a + BF$. — Tragen wir daher den Werth BF nicht auf AB selbst, sondern auf der Verlängerung von AB nach der entgegengesetzten Seite bis C′ an, und diesem Gegensatz der Richtung entspricht das entgegengesetzte Zeichen im zweiten Werthe von x, so ist BC′ wiederum die mittlere Proportionale zwischen AB und AC′. Das Resultat der algebraischen Analysis genügt also zugleich der allgemeineren Aufgabe: „Auf einer Graden AB oder deren Verlängerung vom Punkte B aus ein Stück BC so abzutragen, dass dasselbe die mittlere Proportionale zwischen der Linie AB selbst und dem Stücke AC ist.“

Auch die §. 15 behandelte Aufgabe gestattet eine leichte algebraische Behandlung, wenn der Satz zur Anwendung gebracht wird, nach welchem die Summe der Quadrate zweier Seiten eines Dreiecks gleich dem halben Quadrat der dritten Seite ist, vermehrt um das doppelte Quadrat der diese Seite halbirenden Transversale. Die algebraische Auflösung würde hier aber zu umständlicheren Constructionen führen, als solche die geometrische Behandlung fordert, und ist dies häufig ein Nachtheil der algebraischen Auflösung. Hervorzuheben ist indessen, dass letztere bei genauer Deutung des in der Analysis erlangten Resultates gewöhnlich eine allgemeinere Auflösung giebt als die geometrische Analysis; es finden hier die verschiedenen Fälle zugleich Berücksichtigung, und insbesondere lässt sich der Gegensatz der Lage aus dem Gegensatz der Vorzeichen im Resultate erkennen, wie hierzu ja auch die vorher behandelte Aufgabe ein Beispiel bot.

Fig. 1.

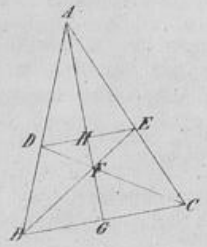


Fig. 2.

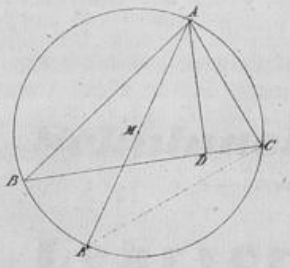


Fig. 3.

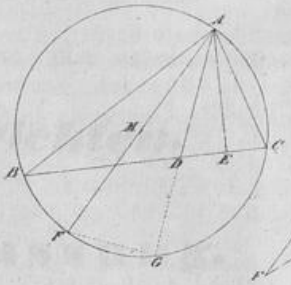


Fig. 4.

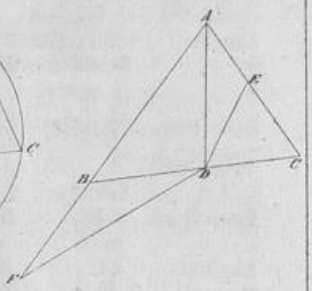


Fig. 5.

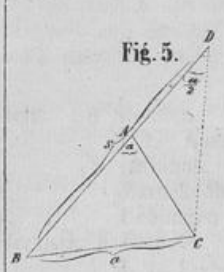


Fig. 6.

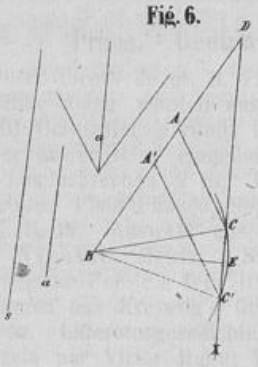


Fig. 7.

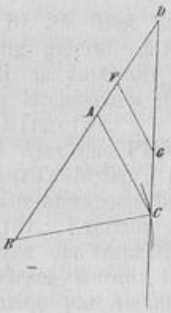


Fig. 8

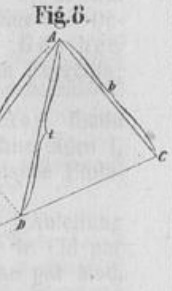


Fig. 8a.

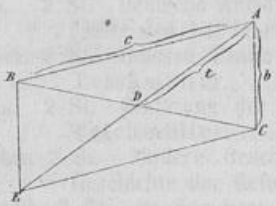


Fig. 9.

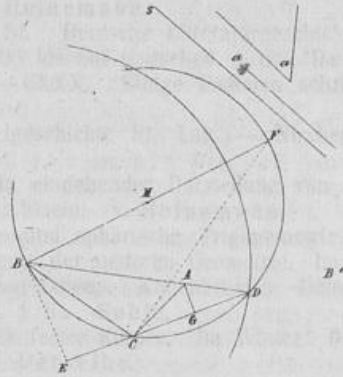


Fig 10.

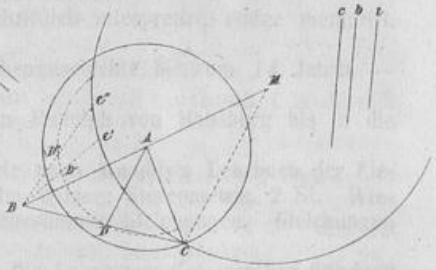
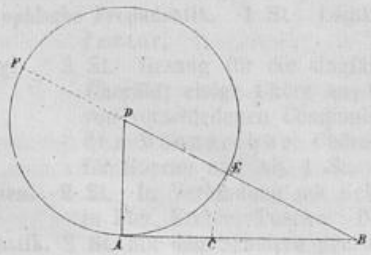


Fig. 12.



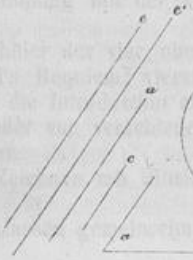
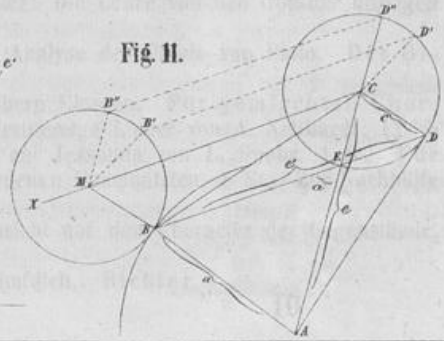
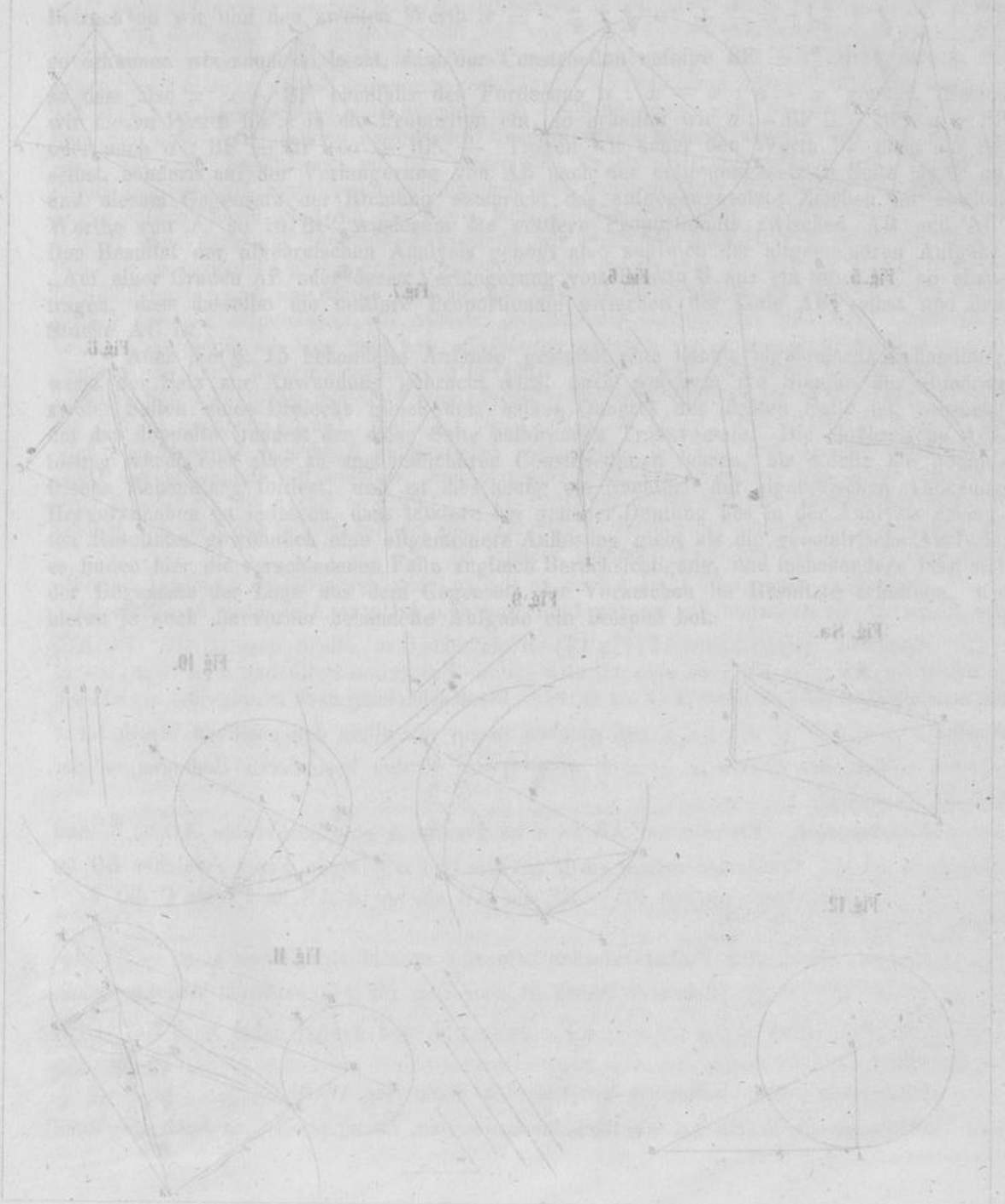



Fig. 11.