III.

Bestimmung der Konstanten der sphärischen Kettenlinie

von

Max Schlegel.

Die Aufgabe, die Gestalt und die Eigenschaften der Kettenlinie auf der Kugel zu bestimmen, ist meines Wissens zuerst in die Form bestimmter Gleichungen gekleidet durch Minding*). Eine Diskussion dieser Gleichungen, sowie den Ausdruck der dabei auftretenden Integrale durch die elliptischen Funktionen findet man bei Gudermann**), der dabei die von ihm eingeführten sphärischen Koordinaten und die ihm eigentümliche Bezeichnung der elliptischen Functionen anwendet. Biermann***) erweitert die Aufgabe auf beliebige Rotationsflächen und giebt für die sphärische Kettenlinie die Reduction auf die Weierstrass'schen σ und die Jacobi'schen ϑ Funktionen an. Clebsch†) endlich bringt die Lösung der auftretenden biquadratischen Gleichung in bequeme Form. Es erübrigt nun noch die Bestimmung der Konstanten des Problems. Es soll also im folgenden eine Methode angegeben werden, die Werte der Konstanten zu bestimmen, wenn Anfangs- und Endpunkt und die Länge des dazwischen liegenden Bogens gegeben sind.

1.

Ist der Radius der Kugel $= 1$, ihr Mittelpunkt der Anfangspunkt der Koordinaten und die Richtung der z Axe der Schwere entgegengesetzt, so folgt aus den bekannten Gleichgewichtsbedingungen***) sofort $dT = g dz$, wo T die Spannung, g die Konstante der Schwere ist. Die Integration liefert $T = g(z + h)$, wo h die Konstante bezeichnet. Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt ferner

$$d \,.\, T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = 0.$$

Dabei ist s wie gewöhnlich der Bogen der Kurve. Die Integration liefert

$$T(x\,dy - y\,dx) = a g ds,$$

wo unter a die Konstante zu verstehen ist, die bei passender Wahl der x und y Axe stets positiv angenommen werden kann. Durch Division folgt dann

$$x\,dy - y\,dx = \frac{a\,ds}{z + h}.$$

Die Gleichung der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ erfordert, dass $x\,dx + y\,dy = -z\,dz$ ist, die Definition von s, dass $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ist. Eliminiert man nun auf bekannte Art dx, dy, x, y, so ist

$$ds = \pm \frac{(z + h)\,dz}{\sqrt{(1 - z^2)(z + h)^2 - a^2}}$$

*) Crelle's Journal, Band 12. Beantwortung der Frage 4 aus Band 11.

**) Crelle's Journal, Band 33. De curvis catenariis sphaericis dissertatio.

***) Problemata quaedam mechanica functionum ellipticarum ope soluta. Inaug.-Dissert. Berol. 1865. Betreffs der σ Funktionen siehe H. A. Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen. Göttingen 1881.

†) Crelle's Journal, Band 57. Ueber die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wird in dem Integrationsintervall $z^0 \ldots . z' \; (z' > z^0)$ das Zeichen der Wurzel positiv gewählt, so ist

$$s = \int \frac{(z+h)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(z+h)^2 - a^2}} \qquad 1.$$

Bezeichnet φ den Winkel zwischen dem positiven Teil der x Axe und der Projektion eines beliebigen Radius auf die xy Ebene, so ist

$$(1-z^2)\,d\varphi = x\,dy - y\,dx = \frac{a\,ds}{z+h}, \text{ also}$$

$$\varphi = a \int \frac{dz}{(1-z^2)\sqrt{(1-z^2)(z+h)^2 - a^2}} \qquad 2.$$

h kann nun stets positiv gewählt werden; denn der Fall eines negativen h kann durch Umkehrung der Richtung der z Axe auf den entgegengesetzten zurückgeführt werden.

2.

In der Folge werde stets vorausgesetzt, dass es sich nur um einen zwischen den Ebenen $z = z^0$ und $z = z'$ aufsteigenden Kurvenzweig handelt; auch sollen die Integrationsgrenzen $z^0\, z'$ nie besonders angeführt werden. Setzt man nun

$$Z = (1-z^2)(z+h)^2 - a^2 \text{ und } Z_1 = (1-\zeta^2)(z+h)^2 - a^2,$$

wo ζ ein vorläufig noch unbestimmter konstanter Wert sein möge, dessen absoluter Betrag < 1 sei, so war:

$$s = \int \frac{(z+h)\,dz}{\sqrt{Z}} \qquad \varphi = a \int \frac{dz}{(1-z^2)\sqrt{Z}}. \qquad 3.$$

Die Integrale

$$\int \frac{(z+h)\,dz}{\sqrt{Z_1}} \qquad \text{und } a \int \frac{dz}{(1-\zeta^2)\sqrt{Z_1}}$$

werden sich von den Integralen in 3. um bestimmte Grössen $\triangle s$ und $\triangle \varphi$ unterscheiden, so dass man also setzen kann

$$s - \Delta s = \int \frac{(z+h)\,dz}{\sqrt{Z_1}} \quad \text{und} \quad \varphi - \Delta\varphi = a \int \frac{dz}{(1-\zeta^2)\sqrt{Z_1}}. \qquad 4.$$

Führt man in 4. die Integrationen aus, so folgt:

$$s - \Delta s = \frac{\sqrt{(1-\zeta^2)(z'+h)^2 - a^2} - \sqrt{(1-\zeta^2)(z^0+h)^2 - a^2}}{1-\zeta^2}; \qquad 5.$$

$$\varphi - \Delta\varphi = \frac{a}{(1-\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \log \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\,(z'+h) + \sqrt{(1-\zeta^2)(z'+h)^2 - a^2}}{\sqrt{1-\zeta^2}\,(z^0+h) + \sqrt{(1-\zeta^2)(z^0+h)^2 - a^2}} \qquad 6.$$

Zur Abkürzung setze man

$$\sqrt{1-\zeta^2}\,(z'+h) = \zeta', \qquad \sqrt{1-\zeta^2}\,(z^0+h) = \zeta^0,$$
$$\zeta'^2 - a^2 = Z', \qquad \zeta^{0\,2} - a^2 = Z^0. \qquad 7.$$

Es ist dann

$$a^2 = \zeta^{0\,2} - Z^0 = \zeta'^2 - Z'.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man ferner

8. $$(1-\zeta^2)^{\frac{3}{2}}(\varphi-\Delta\varphi)=a\lambda,$$

wo λ positiv ist, wenn $\varphi-\Delta\varphi$ positiv, so ist

9. $$(s-\Delta s)(1-\zeta^2)=\sqrt{Z'}-\sqrt{Z^0}$$

10. $$e^{\lambda}=\frac{\zeta'+\sqrt{Z'}}{\zeta^0+\sqrt{Z^0}}=\frac{\zeta^0-\sqrt{Z^0}}{\zeta'-\sqrt{Z'}}$$

$$\frac{e^{\lambda}-1}{e^{\lambda}+1} \text{ ist aber gleich } \frac{1}{i}\operatorname{tang}\frac{\lambda i}{2}=\frac{\zeta'-\zeta^0+\sqrt{Z'}-\sqrt{Z^0}}{\zeta'+\zeta^0+\sqrt{Z'}+\sqrt{Z^0}}$$

und da, wegen $Z'-Z^0=\zeta'^2-\zeta^{0\,2}$,

$$\frac{\zeta'-\zeta^0}{\sqrt{Z'}+\sqrt{Z^0}}=\frac{\sqrt{Z'}-\sqrt{Z^0}}{\zeta'+\zeta^0} \text{ ist,}$$

$$\frac{1}{i}\operatorname{tang}\frac{\lambda i}{2}=\frac{\zeta'-\zeta^0}{\sqrt{Z'}+\sqrt{Z^0}}=\frac{\sqrt{Z'}-\sqrt{Z^0}}{\zeta'+\zeta^0}.$$

$$\zeta'+\zeta^0 \text{ ist}=2\sqrt{1-\zeta^2}\left(h+\frac{z'+z^0}{2}\right)=\frac{i(\sqrt{Z'}-\sqrt{Z^0})}{\operatorname{tang}\frac{\lambda i}{2}}$$

folglich

11. $$h=-\frac{z'+z^0}{2}+\frac{i}{2\operatorname{tang}\frac{\lambda i}{2}}\sqrt{1-\zeta^2}\,(s-\Delta s).$$

Es ist ferner

$$\frac{(e^{\lambda}-1)^2}{e^{\lambda}}=\left(e^{\frac{\lambda}{2}}-e^{-\frac{\lambda}{2}}\right)^2=\left(\frac{2}{i}\sin\frac{\lambda i}{2}\right)^2=\frac{(\zeta'+\sqrt{Z'}-\zeta^0-\sqrt{Z^0})^2}{(\zeta'+\sqrt{Z'})(\zeta'+\sqrt{Z^0})}$$

folglich, wie eine kurze Rechnung ergiebt,

$$\left(\frac{2}{i}\sin\frac{\lambda i}{2}\right)^2=\frac{2\zeta^0\zeta'-2a^2-2\sqrt{Z'Z^0}}{a^2}.$$

Ersetzt man $2\sqrt{Z'Z^0}$ mit Hilfe des Quadrats von 9, so folgt

$$\left(\frac{2}{i}\sin\frac{\lambda i}{2}\right)^2=(1-\zeta^2)\frac{(1-\zeta^2)(s-\Delta s)^2-(z'-z^0)^2}{a^2},$$

und dividiert man durch das Quadrat von 8, so ist

$$\left(\frac{\sin\frac{\lambda i}{2}}{\frac{\lambda i}{2}}\right)^2=\frac{(1-\zeta^2)(s-\Delta s)^2-(z'-z^0)^2}{(1-\zeta^2)^2(\varphi-\Delta\varphi)^2}.$$

Beschränkt man Δs durch die Bedingung, dass der Zähler dieses Bruches einen reellen positiven Wert haben soll, so folgt endlich

12. $$\frac{\sin\frac{\lambda i}{2}}{\frac{\lambda i}{2}}=\frac{\sqrt{(1-\zeta^2)(s-\Delta s)^2-(z'-z^0)^2}}{(1-\zeta^2)(\varphi-\Delta\varphi)},$$

wo der Wurzel im Zähler nur der positive Wert beizulegen ist, wenn λ positiv ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sind nun $s\ \varphi\ z'\ z^0$ gegeben, ζ beliebig gewählt und $\triangle s$, $\triangle\varphi$ angemessen bestimmt, so liefert jede Tafel der Sinus imaginärer Argumente in der Gleichung 12 nur einen positiven Wert von λ. Aus Gleichung 8 und 11 erhält man dann die entsprechenden Werte von a und h.

3.

Um an bestimmte Vorstellungen anzuknüpfen, wollen wir z^0 und z' positiv annehmen. Wählen wir dann $\zeta = z^0$, so bleibt $1 - \zeta^2 > 1 - z^2$ und $Z_1 > Z$ im ganzen Integrationsintervall, also sind die Elemente der Integrale (resp. diese selbst) in 4 kleiner als die entsprechenden Elemente der Integrale in 3 (resp. die ganzen Integrale). Also sind $\triangle s$ und $\triangle\varphi$ in diesem Falle positive Grössen.

Es ist ferner

$$Z \cdot \frac{1-\zeta^2}{1-z^2} = Z_1 - a^2 \frac{z^2-\zeta^2}{1-z^2}, \text{ also}$$

$$Z_1 > Z \frac{1-\zeta^2}{1-z^2} \text{ oder } \sqrt{1-z^2}\sqrt{Z_1} > \sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{Z} \qquad 13.$$

Aus 3 und 4 ergiebt sich

$$\frac{s}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \int \frac{(z+h)\,dz}{\sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{Z}} \text{ und}$$

$$\frac{s-\triangle s}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} = \int \frac{(z+h)\,dz}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}\sqrt{Z_1}}.$$

$\mathfrak{z}$ ist ein Mittelwert zwischen z^0 und z'. Statt nämlich jedes Element des Integrales in 4 mit dem variabeln $\sqrt{1-z^2}$ zu dividieren, kann man offenbar die nahe bei z^0 liegenden Elemente mit einem zu kleinen, die nach z' zu liegenden Elemente mit einem zu grossen konstanten Faktor dividieren, wenn der letztere gehörig bestimmt wird.

Wegen der Gleichung 13 schliesst man nun, dass

$$\frac{s}{\sqrt{1-\zeta^2}} > \frac{s-\triangle s}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} \text{ oder}$$

$$s - \triangle s < \frac{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, s \text{ ist.}$$

Andrerseits folgt aus 12, dass

$$(1-\zeta^2)(s-\triangle s)^2 > (z'-z^0)^2 \text{ oder dass}$$

$$s - \triangle s > \frac{z'-z^0}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{ ist.}$$

Man wird nun keinen zu grossen Fehler begehen, wenn man für $\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}$ wählt:

$$\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1-z'^2} + \sqrt{1-z^{0\,2}}\right)$$

und somit werden für $\triangle s$ zwei Grenzen durch die Ungleichung bestimmt:

$$\frac{z'-z^0}{\sqrt{1-z^{0\,2}}} < s - \triangle s < \frac{s}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-z'^2} + \sqrt{1-z^{0\,2}}}{\sqrt{1-z^{0\,2}}}. \qquad 14.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch eine ähnliche Betrachtung erhält man

$$(1-z^2)\sqrt{Z}\,(1-\zeta^2)^{\frac{3}{2}} < (1-\zeta^2)\sqrt{Z_1}\,(1-z^2)^{\frac{3}{2}},$$

folglich

$$\frac{\varphi}{(1-\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} > \frac{\varphi-\Delta\varphi_3}{(1-\zeta'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wo ζ' wieder einen Mittelwert zwischen z^0 und z' bedeutet. Ohne bedeutenden Fehler kann man für

$$(1-\zeta'^2)^{\frac{3}{2}} \text{ wählen: } \tfrac{1}{2}\left\{(1-z'^2)^{\frac{3}{2}}+(1-z^{0\,2})^{\frac{3}{2}}\right\}$$

und erhält damit, da $\varphi-\triangle\varphi$ unter den gemachten Voraussetzungen positiv ist, für $\triangle\varphi$ zwei Grenzen durch die Ungleichung

15. $$0 < \varphi-\Delta\varphi < \frac{\varphi}{2}\cdot\frac{(1-z'^2)^{\frac{3}{2}}+(1-z^{0\,2})^{\frac{3}{2}}}{(1-z^{0\,2})^{\frac{3}{2}}}.$$

Diese Grenzbestimmungen reichen aber noch nicht aus, weil die Grenzen für λ noch 0 und $+\infty$ bleiben. Da wir indes h als positiv vorausgesetzt haben, so ergiebt sich aus 11, dass

$$\frac{1}{i}\operatorname{tang}\frac{\lambda i}{2} < \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\,(s-\Delta s)}{z'+z^0}.$$

Wegen 14 ist daher sicher

16. $$\frac{1}{i}\operatorname{tang}\frac{\lambda i}{2} < \frac{s}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-z'^2}+\sqrt{1-z^{0\,2}}}{z'+z^0}.$$

Ist λ_0 der Wert von λ, für den $\frac{1}{i}\operatorname{tang}\frac{\lambda i}{2}$ der rechten Seite in 16 gleich ist, so ist für λ damit λ_0 als obere Grenze bestimmt. Setzt man

$$\mu = \frac{\sin\frac{\lambda_0 i}{2}}{\frac{\lambda_0 i}{2}},$$

so ist μ, wie bekannt, > 1 und es muss nun

$$1 < \frac{\sin\frac{\lambda i}{2}}{\frac{\lambda i}{2}} < \mu \text{ sein.}$$

Aus 12 schliesst man nun

17. $$\frac{\sqrt{(1-z^0)^2(s-\Delta s)^2-(z'-z^0)^2}}{1-z^{0\,2}} > \varphi-\Delta\varphi > \frac{1}{\mu}\,\frac{\sqrt{(1-z^0)^2(s-\Delta s)^2-(z'-z^0)^2}}{1-z^{0\,2}}.$$

Wie man sich leicht überzeugt, lassen sich nun, wenn s nicht zu gross, stets Grössen $\triangle s$ und $\triangle\varphi$ so wählen, dafs alle 4 Ungleichungen erfüllt sind. Sind diese Grössen einmal gewählt, so bestimmt sich durch 12 $\lambda = \lambda_1$, durch 8 $a = a_1$, durch 11 $h = h_1$.

Berechnet man mit diesen Werten auf bekannte Art die elliptischen Integrale in 3 und aus 5 und 6 $\triangle s$ und $\triangle\varphi$, so werden von den erhaltenen Werten s_1 φ_1 $\triangle s_1$ $\triangle\varphi_1$ die beiden ersten im allgemeinen von den gegebenen Werten s und φ abweichen. Sicher ist nun bei genügender Einschränkung die Annahme nicht unberechtigt, dass einerseits s_1 $\triangle s_1$ s und $\triangle s$, andererseits φ_1 $\triangle\varphi_1$ φ und $\triangle\varphi$ sehr nahe einander proportional sein werden. Korrigiert man unter dieser Annahme die gewählten Werte von $\triangle s$ und $\triangle\varphi$, so wird sich mit diesen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

verbesserten Werten eine grössere Annäherung an die gegebenen Werte von s und φ erzielen lassen. Durch mehrfache Wiederholung desselben Verfahrens kann man den wahren Werten von a und h allmählich so nahe kommen, als man will.

Zur Berechnung der elliptischen Integrale selbst können die von Biermann (l. c.) angegebenen Formeln benutzt werden; ich erwähne nur noch, dafs sich auf Seite 17 der Biermann'schen Arbeit ein Druckfehler eingeschlichen hat. In den unteren Grenzen der dort definierten Integrale u_3 u_4 u_5 müssen stets z_1 und z_2 vertauscht werden.

Mit geringen Modifikationen läfst sich das vorstehende Verfahren auch auf den Fall übertragen, wo z^0 negativ wird; doch bin ich durch die gebotene Beschränkung genötigt, diese Ausdehnung hier zu übergehen. Bemerkt sei noch, dafs es nicht von Vorteil ist, bei der Lösung der vorstehenden Aufgabe die Differentiale ds und $d\varphi$ heranzuziehen, weil bei deren numerischer Berechnung eine gröfsere Zahl elliptischer Integrale auszuwerten ist, als hier.

4.

Die speciellen Fälle erledigen sich kurz. Ist $a = o$, so wird h beliebig und die Kurve ein gröfster Kreis, dessen Ebene senkrecht zur xy Ebene steht. φ mufs dann verschwinden und s der entsprechende Kreisbogen sein.

Ist $h = o$, so ergiebt sich

$$s = \frac{1}{2}\left[\text{arc. cos}\,\frac{\frac{1}{2} - z'^2}{\sqrt{\frac{1}{4} - a^2}} - \text{arc. cos.}\,\frac{\frac{1}{2} - z^{0^2}}{\sqrt{\frac{1}{4} - a^2}}\right]$$

oder nach einigen Umformungen

$$\frac{1}{4} - a^2 = \frac{(z'^2 - z^{0^2})^2 \cos^2 s + (1 - z'^2 - z^{0^2})^2 \sin^2 s}{\sin^2 2\,s}.$$

Durch diese Gleichung läfst sich für a nur ein positiver Wert bestimmen, der kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Für diesen Wert von a mufs dann von selbst

$$\varphi = a \int_{z^0}^{z'} \frac{dz}{(1 - z^2)\sqrt{(1 - z^2)\,z^2 - a^2}}$$

werden, wenn nicht die letzte Gleichung der früheren widerspricht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf