Die von den Herren Prym und Krazer über Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus rationalen Zahlen gebildet sind, angestellten Untersuchungen*) haben die Mittel geliefert, Probleme, welche sich auf solche Funktionen beziehen, mit Erfolg zu behandeln. Als besonders wichtig in dieser Hinsicht erscheint die von den beiden Autoren aufgestellte Formel (Θ_2), insoferne aus ihr ohne Mühe die Additionstheoreme für Thetaquotienten, deren Charakteristiken sich aus r^{teln} ganzer Zahlen zusammensetzen, gewonnen werden können.

Für spezielle Untersuchungen wird man zuerst die Thetafunktionen einer Variable in Betracht ziehen, und es kommt dann, nachdem für solche Funktionen der Fall $r = 2$ schon früher durch Jacobi**) auf Grund der nach ihm benannten Fundamentalformel — die selbst nur als spezieller Fall der eben erwähnten Formel (Θ_2) erscheint, insoferne sie, von Unwesentlichem abgesehen, für $r = 2$ aus dieser hervorgeht — seine vollständige Erledigung gefunden hat, zunächst der Fall $r = 3$ in Frage.

Auf diesen Fall, der also die Thetafunktionen einer Variable, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind,

---

*) F. Prym, Ableitung einer allgemeinen Thetaformel. Acta mathematica, Bd. 3, pag. 216. — A. Krazer und F. Prym, Über die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel. Acta mathematica, Bd. 3, pag. 240.

**) Jacobi, Theorie der elliptischen Funktionen, aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet. Gesammelte Werke, Bd. I, pag. 497. Berlin 1881, Reimer.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

umfasst, beziehen sich die Untersuchungen, welche Herr Krazer in seiner Habilitationsschrift*) angestellt hat. Es gelang ihm dort auf Grund einer Formel, die den dem Werte $r = 3$ entsprechenden speziellen Fall der oben erwähnten, erst später gewonnenen Formel (Θ_2) bildet, die zwischen den genannten Thetafunktionen bestehenden Beziehungen aufzudecken und speziell die dahin gehörigen Thetaquotienten durch eine Hilfsvariable und einen konstanten Parameter auszudrücken. Für weitere den Fall $r = 3$ betreffende Untersuchungen empfiehlt es sich aber, nach dem Vorschlage des Herrn Prym statt der von Herrn Krazer benutzten einen Variable Z zwei durch eine Gleichung dritten Grades — welche zugleich als eine Normalgleichung für die ebenen Kurven dritter Ordnung ohne Doppelpunkte anzusehen ist — verknüpfte Variablen z und s einzuführen. Nicht nur drücken sich dann die in diesem Falle vorkommenden acht Thetaquotienten in ebenso einfacher, wie übersichtlicher Weise durch z und s aus, sondern es gelingt auch leicht, mit Hilfe dieser Ausdrücke das Umkehrproblem für diese Thetaquotienten in ähnlicher Weise, wie es für den Fall $r = 2$ durch Jacobi in der oben citierten Arbeit geschehen, zu lösen.

Die genannten Untersuchungen habe ich nun in der vorliegenden Arbeit vollständig durchgeführt. Den Ausgangspunkt bilden die schon von Herrn Krazer in der erwähnten Arbeit aufgestellten Thetarelationen, die, soweit sie hier in Betracht kommen, in Art. 1 und Art. 2 kurz zusammengestellt sind. Auf Grund derselben werden dann in Art. 3 die in diesem Falle auftretenden acht fundamentalen Thetaquotienten als Funktionen der ebendort eingeführten Grössen z und s dargestellt und im Anschlusse daran in Art. 4 gewisse für das Folgende nötige Beziehungen, welche bei dem Argumentwerte Null zwischen diesen Funktionen und ihren Derivierten bestehen, abgeleitet. Nachdem dann in Art. 5

*) A. Krazer, Über Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. Math. Annalen, Bd. XXII, pag. 416.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Additionstheoreme für die acht Thetaquotienten aufgestellt und auf Grund derselben in Art. 6 die Derivierten der genannten Quotienten als Funktionen dieser Quotienten selbst dargestellt worden sind, wird schliesslich in Art. 7 das Umkehrproblem für diese Thetaquotienten gelöst.

Die vorliegende Arbeit verdankt ihre Entstehung den Anregungen, die ich als Mitglied des von Herrn Prof. Prym geleiteten mathematischen Oberseminars der Universität Würzburg empfangen habe, und für welche ich an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer den wärmsten Dank ausspreche.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1.

Unter einer einfach unendlichen Thetareihe versteht man eine Reihe von der Gestalt:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{a(m+g)^2+2(m+g)(v+h\pi i)} ,$$

bei der a, g, h, v von m unabhängige Grössen bezeichnen. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer solchen Reihe ist die, dass der reelle Teil der Grösse a wesentlich negativ sei. Ist diese Bedingung, wie für das Folgende vorausgesetzt werden soll, erfüllt, so stellt die angeschriebene Reihe, wenn man unter a, g, h Konstanten, unter v eine unabhängige komplexe Veränderliche versteht, eine für alle endlichen Werte von v einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen v dar. Die so definierte Funktion wird eine Thetafunktion genannt und soll mit $\vartheta\left\{\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right\}(v)$ bezeichnet werden, so dass also:

$$\vartheta\left\{\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right\}(v) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{a(m+g)^2+2(m+g)(v+h\pi i)}$$

ist. Das Symbol $\left\{\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right\}$ wird die Charakteristik der Funktion $\vartheta\left\{\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right\}(v)$ genannt.

Im Folgenden sollen ausschliesslich solche Funktionen $\vartheta\left\{\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right\}(v)$ betrachtet werden, bei denen g, h Drittel ganzer Zahlen sind. Zu dem Ende setze man, indem man unter $\varepsilon, \varepsilon'$ irgend welche ganze Zahlen versteht:

$$g = \frac{\varepsilon}{3}, \quad h = \frac{\varepsilon'}{3}$$

und ersetze das Symbol, welches hierdurch aus $\left\{\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right\}$ entsteht, mit Unterdrückung des Nenners 3 und unter Einführung einer neuen Klammer, zur Abkürzung durch $\left[\begin{smallmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{smallmatrix}\right]$. Es entsteht dann aus $\vartheta\left\{\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right\}(v)$ die Funktion $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{smallmatrix}\right](v)$, definiert durch die Gleichung:

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{smallmatrix}\right](v) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{a\left(m+\frac{\varepsilon}{3}\right)^2+2\left(m+\frac{\varepsilon}{3}\right)\left(v+\frac{\varepsilon'}{3}\pi i\right)} .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die in der Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right]$ vorkommenden ganzen Zahlen ε, ε' sollen die Elemente der Charakteristik genannt werden.

Die verschiedenen in der Form $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](v)$ enthaltenen Funktionen sind schon von Herrn Krazer*) einer eingehenden Untersuchung unterzogen worden. Die dabei gewonnenen Resultate sollen, soweit sie im Folgenden zur Verwendung kommen, hier kurz zusammengestellt werden.

Zunächst erhält man aus der oben aufgestellten, die Funktion $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](v)$ definierenden Gleichung ohne Mühe die Relationen:

$$(1)\qquad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](v+\pi i) = \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](v)\, e^{\frac{2}{3}\varepsilon\pi i},$$

$$(2)\qquad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](v+a) = \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](v)\, e^{-\frac{2}{3}\varepsilon'\pi i - 2v - a},$$

$$(3)\qquad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\pm 3\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](v) = \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](v),$$

$$(4)\qquad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\pm 3\end{smallmatrix}\right](v) = \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](v)\, e^{\pm\frac{2}{3}\varepsilon\pi i},$$

$$(5)\qquad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](-v) = \vartheta\left[\begin{smallmatrix}-\varepsilon\\ -\varepsilon'\end{smallmatrix}\right](v).$$

Die Gleichungen (3), (4) zeigen, dass zwei Thetafunktionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](v)$, $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta\\ \eta'\end{smallmatrix}\right](v)$, bei denen $\varepsilon \equiv \eta \pmod 3$, $\varepsilon' \equiv \eta' \pmod 3$ ist, sich nur um einen konstanten Faktor, nämlich um eine dritte Einheitswurzel, unterscheiden — die Kuben zweier solcher Funktionen also einander gleich sind — und dass daher jede Funktion $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](v)$ unter Ausscheidung eines Faktors, der immer eine dritte Einheitswurzel ist, auf eine der neun sogenannten Normalfunktionen:

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right](v),\quad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right](v),\quad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}-1\\ 0\end{smallmatrix}\right](v),$$
$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right](v),\quad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}1\\ 1\end{smallmatrix}\right](v),\quad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}-1\\ 1\end{smallmatrix}\right](v),$$
$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\\ -1\end{smallmatrix}\right](v),\quad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}1\\ -1\end{smallmatrix}\right](v),\quad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}-1\\ -1\end{smallmatrix}\right](v),$$

deren Charakteristiken nur aus den Zahlen 0, 1, —1 als Elementen gebildet sind, reduziert werden kann. Die neun bei den Normalfunktionen auftretenden Charakteristiken werden Normalcharakteristiken genannt.

Zwei Charakteristiken $\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix}\eta\\ \eta'\end{smallmatrix}\right]$ sollen kongruent genannt werden, wenn $\varepsilon \equiv \eta \pmod 3$, $\varepsilon' \equiv \eta' \pmod 3$ ist; im anderen Falle mögen sie inkongruent heissen. Bezeichnet man dann mit $\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}\right]$ eine der $\left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right]$ nicht kongruente Charakteristik, mit $\left[\begin{smallmatrix}\beta\\ \beta'\end{smallmatrix}\right]$ eine zweite Charakteristik, welche keiner der drei Charakteristiken $\left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix}-\alpha\\ -\alpha'\end{smallmatrix}\right]$ kongruent ist, so bilden die Charakteristiken:

*) A. Krazer, Über Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. Math. Annalen, Bd. XXII, pag. 416.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\alpha\\\alpha'\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-\alpha\\-\alpha'\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\beta\\\beta'\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\beta+\alpha\\\beta'+\alpha'\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\beta-\alpha\\\beta'-\alpha'\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}-\beta\\-\beta'\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-\beta+\alpha\\-\beta'+\alpha'\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-\beta-\alpha\\-\beta'-\alpha'\end{bmatrix},$$

ein System von neun inkongruenten Charakteristiken und sind daher bei passend gewählter Reihenfolge den aufgestellten neun Normalcharakteristiken beziehungsweise kongruent.

Im Folgenden soll eine Charakteristik $\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}$, wenn dadurch kein Missverständnis zu befürchten ist, abgekürzt mit $[\varepsilon]$ und entsprechend eine Charakteristik $\begin{bmatrix}-\varepsilon\\-\varepsilon'\end{bmatrix}$ abgekürzt mit $[-\varepsilon]$ bezeichnet werden; auch soll, indem man unter ε, ε' und η, η' die Elemente zweier beliebiger Charakteristiken versteht, zur Abkürzung:

$$e^{\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i} = \tau^{[\varepsilon]}, \quad e^{\frac{2}{3}(\varepsilon\eta'-\varepsilon'\eta)\pi i} = \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$$

gesetzt werden. Für die so eingeführten Symbole $\tau^{[\varepsilon]}$ und $\tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$, die immer dritte Einheitswurzeln sind, gelten die Relationen:

$$\tau^{[0]} = 1, \quad \tau^{[\varepsilon]} = \tau^{[-\varepsilon]}, \quad \tau^{[\varepsilon]\,|\,[0]} = 1, \quad \tau^{[0]\,|\,[\varepsilon]} = 1, \quad \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\varepsilon]} = 1,$$

$$\tau^{[\varepsilon]\,|\,[-\eta]} = \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} \,.\, \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}, \quad \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} = \tau^{[\eta]\,|\,[-\varepsilon]} = \tau^{[-\eta]\,|\,[\varepsilon]} = \tau^{[-\varepsilon]\,|\,[-\eta]},$$

$$\tau^{[\varepsilon+\zeta]\,|\,[\eta+\vartheta]} = \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} \,.\, \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\vartheta]} \,.\, \tau^{[\zeta]\,|\,[\eta]} \,.\, \tau^{[\zeta]\,|\,[\vartheta]}.$$

Auch ist für jede der [0] nicht kongruente Charakteristik $[\varepsilon]$:

$$1 + \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} + \tau^{[\eta]\,|\,[\varepsilon]} = 0,$$

wenn die Charakteristik $[\eta]$ keiner der drei Charakteristiken [0], $[\varepsilon]$, $[-\varepsilon]$ kongruent ist. Der Wert der Ausdrücke $\tau^{[\varepsilon]}$ und $\tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$ bleibt ungeändert, wenn man an Stelle der Charakteristiken, auf die sie sich beziehen, irgend welche denselben kongruente setzt. Im Folgenden soll, wenn dadurch kein Missverständnis zu befürchten ist, das Symbol $\tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$ durch das einfachere Symbol $\tau^{\varepsilon|\eta}$ ersetzt werden.

2.

Das Problem, das Herr Krazer sich in seiner Arbeit gestellt hat, besteht darin, die wesentlichen Relationen, welche zwischen den neun Normalfunktionen existieren, herzustellen und hinsichtlich ihrer gegenseitigen Beziehungen zu untersuchen. Zu dem Ende wird von ihm zunächst die Formel:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(\Theta)\qquad 3\left\{\begin{matrix}\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta+\varkappa\\ \eta'+\varkappa'\end{smallmatrix}\right](3u'_1)\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta\\ \eta'\end{smallmatrix}\right](3u'_4)\\ \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta+\varkappa-\varrho\\ \eta'+\varkappa-\varrho'\end{smallmatrix}\right](3u'_2)\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta-\sigma\\ \eta'-\sigma'\end{smallmatrix}\right](3u'_5)\\ \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta+\varkappa+\varrho\\ \eta'+\varkappa'+\varrho'\end{smallmatrix}\right](3u'_3)\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\eta+\sigma\\ \eta'+\sigma'\end{smallmatrix}\right](3u'_6)\end{matrix}\right\}\tau^{[\eta]}\,\tau^{[\eta+\varkappa]}\,\tau^{\varkappa\,|\,\eta}$$

$$=\sum_{\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right]}\tau^{\varepsilon\,|\,\eta}\left\{\begin{matrix}\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](3u_1)\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon+\varkappa\\ \varepsilon'+\varkappa'\end{smallmatrix}\right](3u_4)\\ \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon+\varrho\\ \varepsilon'+\varrho'\end{smallmatrix}\right](3u_2)\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon+\varkappa+\sigma\\ \varepsilon'+\varkappa'+\sigma'\end{smallmatrix}\right](3u_5)\\ \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon-\varrho\\ \varepsilon'-\varrho'\end{smallmatrix}\right](3u_3)\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon+\varkappa-\sigma\\ \varepsilon'+\varkappa'-\sigma'\end{smallmatrix}\right](3u_6)\end{matrix}\right\}\tau^{[\varepsilon]}\,\tau^{[\varepsilon+\varkappa]}\,\tau^{\varkappa\,|\,\varepsilon}\qquad{}^{*)}$$

abgeleitet. Dabei bezeichnen $u_1, u_2, \ldots, u_6$ unabhängige Veränderliche, $u'_1, u'_2, \ldots, u'_6$ die durch das Gleichungensystem:

$$(J)\qquad\begin{aligned}
3u'_1 &= -2u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6,\\
3u'_2 &= u_1 - 2u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6,\\
3u'_3 &= u_1 + u_2 - 2u_3 + u_4 + u_5 + u_6,\\
3u'_4 &= u_1 + u_2 + u_3 - 2u_4 + u_5 + u_6,\\
3u'_5 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 2u_5 + u_6,\\
3u'_6 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 - 2u_6,
\end{aligned}$$

definierten linearen Funktionen derselben; weiter bezeichnen η, η', $\varkappa$, $\varkappa'$, ϱ, ϱ', σ, σ' beliebige ganze Zahlen, und endlich deutet das auf der rechten Seite der Gleichung (Θ) stehende Zeichen Σ an, dass die Summe der Ausdrücke zu bilden ist, welche aus dem hinter ihm stehenden Ausdrucke hervorgehen, wenn man darin an Stelle von $\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right]$ der Reihe nach die neun Normalcharakteristiken oder auch — da das allgemeine Glied der Summe seinen Wert nicht ändert, wenn man darin die Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right]$ durch eine ihr kongruente ersetzt — neun ihnen beziehungsweise kongruente Charakteristiken treten lässt.

Im Folgenden soll zur Abkürzung, indem man unter $[\varepsilon]$, $[\eta]$ zwei inkongruente Charakteristiken versteht:

$\vartheta[\varepsilon](0)\,\vartheta[\varepsilon+\eta](0)\,\vartheta[\varepsilon-\eta](0)\,\tau^{[\varepsilon]} = (\varepsilon\,|\,\varepsilon+\eta\,|\,\varepsilon-\eta)$, $\vartheta^3[\varepsilon](0)\,\tau^{[\varepsilon]} = (\varepsilon)^3$ gesetzt werden. Da den Gleichungen (3), (4) zufolge $(\varepsilon\pm 3\eta)^3 = (\varepsilon)^3$ und der Gleichung (5) zufolge $(-\varepsilon)^3 = (\varepsilon)^3$ ist, so ist jede Grösse $(\varepsilon)^3$ einer der fünf Grössen:

$$(0)^3,\quad (\alpha)^3,\quad (\beta)^3,\quad (\beta+\alpha)^3,\quad (\beta-\alpha)^3$$

gleich.

Aus der Fülle der speziellen Formeln, die Herr Krazer aus der Hauptformel (Θ) erhalten hat, sind als für das Folgende wichtig zunächst zu erwähnen die Formeln:

---

*) Krazer, a. a. O. pag. 426, Formel (Θ).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(I) $$(0)^3 = (\alpha)^3 + (\beta)^3 + (\beta + \alpha)^3 + (\beta - \alpha)^3 \qquad ^{*)}$$

(II) $$[(0)^3 + 2\,(\alpha)^3]\,(\beta\,|\,\beta + \alpha\,|\,\beta - \alpha)$$
$$= (0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha)\,[(\beta)^3 + \tau^{\beta|\alpha}(\beta + \alpha)^3 + \tau^{\alpha|\beta}(\beta - \alpha)^3] \qquad ^{**)}$$

(III) $$[(0)^3 - (\alpha)^3]\,(0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha)$$
$$= (\beta\,|\,\beta + \alpha\,|\,\beta - \alpha)\,[(\beta)^3 + \tau^{\alpha|\beta}(\beta + \alpha)^3 + \tau^{\beta|\alpha}(\beta - \alpha)^3] \qquad ^{**)}$$

und die Formel:

(IV) $$\frac{(\alpha)^3}{(0)^3} = \frac{1 - n^3}{1 + 8n^3}, \qquad ^{***)}$$

wobei n den durch die Gleichung:

$$n = \frac{(\beta\,|\,\beta + \alpha\,|\,\beta - \alpha)}{(0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha)}$$

bestimmten Ausdruck bezeichnet.

Die im Folgenden anzustellenden Rechnungen gewinnen an Einfachheit, wenn man ausser der Grösse n noch eine zweite Hilfsgrösse m durch die Gleichung:

$$m = \frac{(0)^3 - (\alpha)^3}{(\beta)^3 + \tau^{\beta\,|\,\alpha}\,(\beta + \alpha)^3 + \tau^{\alpha\,|\,\beta}\,(\beta - \alpha)^3}$$

einführt. Die so definierte Grösse m lässt sich rational durch die Grösse n ausdrücken. Um den betreffenden Ausdruck zu gewinnen, leite man zunächst durch Verbindung der Gleichung (II) mit den die Grössen m und n definierenden Gleichungen die Relation:

$$mn\,[(0)^3 + 2\,(\alpha)^3] = (0)^3 - (\alpha)^3$$

ab und kombiniere hierauf die aus dieser letzteren sich unmittelbar ergebende Relation:

$$\frac{(\alpha)^3}{(0)^3} = \frac{1 - mn}{1 + 2mn}$$

mit der Relation (IV). Man erhält dann die Gleichung:

$$m = \frac{3n^2}{1 + 2n^3},$$

welche den gewünschten Ausdruck liefert.

Weiter sind dann noch die im Folgenden ebenfalls zur Verwendung kommenden Krazer'schen Formeln:

---

*) Krazer, a. a. O. pag. 436, Formel (D_0).
**) Krazer, a. a. O. pag. 435, unter (C_0).
***) Krazer, a. a. O. pag. 437, unter (R_0).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{(V)}\quad \vartheta^3[\eta](v)\tau^{[\eta]} + \tau^{\eta|\alpha}\,\vartheta^3[\eta+\alpha](v)\tau^{[\eta+\alpha]} + \tau^{\alpha|\eta}\,\vartheta^3[\eta-\alpha](v)\tau^{[\eta-\alpha[}$$
$$= \frac{(\eta)^3 + \tau^{\eta|\alpha}(\eta+\alpha)^3 + \tau^{\alpha|\eta}(\eta-\alpha)^3}{(\eta\,|\,\eta+\alpha\,|\,\eta-\alpha)} \begin{Bmatrix} \vartheta[\quad\eta\quad](v) \\ \vartheta[\eta+\alpha](v) \\ \vartheta[\eta-\alpha](v) \end{Bmatrix} \tau^{[\eta]}, \qquad {}^{*)}$$

$$\text{(VI)}\quad 3\tau^{\zeta|\eta}\vartheta^3[\zeta](v)\tau^{[\zeta]} = (c_1 + c_2 + c_3)\vartheta^3[\quad\eta\quad](v)\tau^{[\eta]}$$
$$+\tau^{\eta|\alpha}(c_1+\tau^{\zeta|\alpha}c_2+\tau^{\alpha|\zeta}c_3)\vartheta^3[\eta+\alpha](v)\tau^{[\eta+\alpha]}$$
$$+\tau^{\alpha|\eta}(c_1+\tau^{\alpha|\zeta}c_2+\tau^{\zeta|\alpha}c_3)\vartheta^3[\eta-\alpha](v)\tau^{[\eta-\alpha]} \quad {}^{**)}$$

zu erwähnen, bei denen $[\eta]$, $[\alpha]$ beliebige Charakteristiken vertreten, $[\zeta]$ eine Charakteristik bezeichnet, welche keiner der Charakteristiken $[\eta]$, $[\eta+\alpha]$, $[\eta-\alpha]$ kongruent ist, v eine unabhängige Veränderliche bedeutet, endlich unter c_1, c_2, c_3 die durch die Gleichungen:

$$c_1 = \frac{(\eta)^3 + \tau^{\alpha|\eta+\zeta}(\eta+\alpha)^3 + \tau^{\eta+\zeta|\alpha}(\eta-\alpha)^3}{(\zeta)^3 + \tau^{\zeta|\alpha}(\zeta+\alpha)^3 + \tau^{\alpha|\zeta}(\zeta-\alpha)^3},$$
$$c_2 = \frac{(\eta)^3 + \tau^{\alpha|\eta-\zeta}(\eta+\alpha)^3 + \tau^{\eta-\zeta|\alpha}(\eta-\alpha)^3}{(\zeta)^3 + (\zeta+\alpha)^3 + (\zeta-\alpha)^3},$$
$$c_3 = \frac{(\eta)^3 + \tau^{\alpha|\eta}(\eta+\alpha)^3 + \tau^{\eta|\alpha}(\eta-\alpha)^3}{(\zeta)^3 + \tau^{\alpha|\zeta}(\zeta+\alpha)^3 + \tau^{\zeta|\alpha}(\zeta-\alpha)^3}$$

definierten Ausdrücke zu verstehen sind.

3.

Aus den zuletzt aufgestellten Formeln (V) und (VI) sollen jetzt weitere Schlüsse gezogen werden. Zu dem Ende lasse man in der Formel (V) sowohl an Stelle von η wie an Stelle von η' die Null treten und setze alsdann darin, nachdem man zuvor noch linke und rechte Seite derselben durch $\vartheta^3[0](v)$ dividiert hat:

$$\frac{\vartheta^3[\alpha](v)}{\vartheta^3[0](v)}\tau^{[\alpha]} = z, \qquad \frac{\vartheta^3[-\alpha](v)}{\vartheta^3[0](v)}\tau^{[-\alpha]} = s.$$

Man erhält dann aus der Formel (V) zunächst die Gleichung:

$$1 + z + s = \frac{(0)^3 + 2(\alpha)^3}{(0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha)}\sqrt[3]{\frac{z\,s}{\tau^{[\alpha]}\,\tau^{[-\alpha]}}},$$

und weiter aus dieser, indem man linke und rechte Seite derselben in die dritte Potenz erhebt und beachtet, dass auf Grund

*) Krazer, a. a. O. pag. 443, Formel (III'_0).
**) Krazer, a. a. O. pag. 442, Formel (I').

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Gleichung (IV) und der zwischen m und n bestehenden Beziehung:

$$\left[\frac{(0)^3+2(\alpha)^3}{(0\,|\,\alpha\,|-\alpha)}\right]^3\cdot\frac{1}{\tau^{[\alpha]}\tau^{[-\alpha]}}=\frac{\left[1+2\frac{(\alpha)^3}{(0)^3}\right]^3}{\frac{(\alpha)^3}{(0)^3}\cdot\frac{(\alpha)^3}{(0)^3}}=\frac{27\,(1+2n^3)^3}{(1+2n^3)^3-27n^6}=\frac{27}{1-m^3}$$

ist, die Gleichung:

$$\text{(G)}\qquad (1+z+s)^3+\frac{27}{m^3-1}\,z\,s=0\,.$$

Die Gleichung (G) bildet die Grundlage für die in dieser Arbeit durchzuführenden Untersuchungen. Wie nämlich die Formel (VI) zeigt, kann man jeden der noch übrigen sechs Quotienten von Thetakuben linear durch z und s ausdrücken. Die betreffenden Ausdrücke sollen jetzt gebildet werden.

Man setze in der Formel (VI) und entsprechend auch in den die Grössen c_1, c_2, c_3 definierenden Gleichungen $\eta=\eta'=0$ und beachte, dass die so entstehende spezielle Formel für jede Charakteristik $[\zeta]$, welche keiner der Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ kongruent ist, gilt. Dividiert man dann linke und rechte Seite der entstandenen Formel durch $\vartheta^3[0](v)$ und drückt die auf der rechten Seite auftretenden Thetaquotienten durch z und s aus, so erhält man, wenn man noch beachtet, dass für jede der aufgestellten Bedingung genügende Charakteristik $[\zeta]$ die Gleichung $\tau^{\alpha\,|\,\zeta}+\tau^{\zeta\,|\,\alpha}=-1$ gilt, und dass $\tau^{\alpha\,|\,0}=\tau^{0\,|\,\alpha}=1$ ist, die spezielle Formel:

$$\text{(VI')}\qquad 3\,\frac{\vartheta^3[\zeta](v)}{\vartheta^3[0](v)}\,\tau^{[\zeta]}=\begin{aligned}&(c_1+\quad c_2+\quad c_3)\\&+(c_1+\tau^{\zeta|\alpha}c_2+\tau^{\alpha|\zeta}c_3)\,z\\&+(c_1+\tau^{\alpha|\zeta}c_2+\tau^{\zeta|\alpha}c_3)\,s\;,\end{aligned}$$

bei der dann:

$$c_1=\frac{(0)^3-\quad(\alpha)^3}{(\zeta)^3+\tau^{\zeta\,|\,\alpha}(\zeta+\alpha)^3+\tau^{\alpha\,|\,\zeta}(\zeta-\alpha)^3}\,,$$

$$c_2=\frac{(0)^3-\quad(\alpha)^3}{(\zeta)^3+(\zeta+\alpha)^3+(\zeta-\alpha)^3}\,,$$

$$c_3=\frac{(0)^3+2\,(\alpha)^3}{(\zeta)^3+\tau^{\alpha\,|\,\zeta}(\zeta+\alpha)^3+\tau^{\zeta\,|\,\alpha}(\zeta-\alpha)^3}$$

ist. In diese Formel sind jetzt, um die gewünschten Ausdrücke zu erhalten, an Stelle von $[\zeta]$ der Reihe nach die sechs Charakteristiken:

$$[\beta],\quad[-\beta],\quad[\beta+\alpha],\quad[-\beta-\alpha],\quad[\beta-\alpha],\quad[-\beta+\alpha]$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

einzuführen. Zuvor soll aber noch das Verhalten der Grössen c_1, c_2, c_3 für eine beliebige, der aufgestellten Bedingung genügende Charakteristik $[\zeta]$ untersucht werden.

Was zunächst die Grösse c_2 betrifft, so hat dieselbe immer den Wert 1. Um dies einzusehen, gehe man auf die Gleichung (I) zurück, ersetze die darin vorkommende Charakteristik $[\beta]$, die nur der Bedingung unterworfen ist, keiner der Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ kongruent zu sein, durch die derselben Bedingung unterworfene Charakteristik $[\zeta]$ und bringe hierauf die so aus (I) entstandene Gleichung in die Gestalt:

$$\frac{(0)^3 - (\alpha)^3}{(\zeta)^3 + (\zeta + \alpha)^3 + (\zeta - \alpha)^3} = 1 .$$

Da die linke Seite der letzten Gleichung die Grösse c_2 darstellt, so ist damit der Beweis für die aufgestellte Behauptung erbracht.

Die Grössen c_1, c_3 dagegen sind immer durch die Relation $c_1 \cdot c_3 = 1$ verknüpft. Um diese Relation zu erhalten, gehe man auf die Gleichungen (II), (III) zurück, ersetze die darin vorkommende Charakteristik $[\beta]$, die nur der Bedingung unterworfen ist, keiner der Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ kongruent zu sein, durch die derselben Bedingung unterworfene Charakteristik $[\zeta]$ und bringe hierauf die so aus (II), (III) beziehungsweise entstandenen Gleichungen in die Gestalt:

$$\frac{(0)^3 + 2\,(\alpha)^3}{(\zeta)^3 + \tau^{\zeta\,|\,\alpha}(\zeta + \alpha)^3 + \tau^{\alpha\,|\,\zeta}(\zeta - \alpha)^3} = \frac{(0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha)}{(\zeta\,|\,\zeta + \alpha\,|\,\zeta - \alpha)} ,$$

$$\frac{(0)^3 - (\alpha)^3}{(\zeta)^3 + \tau^{\alpha\,|\,\zeta}(\zeta + \alpha)^3 + \tau^{\zeta\,|\,\alpha}(\zeta - \alpha)^3} = \frac{(\zeta\,|\,\zeta + \alpha\,|\,\zeta - \alpha)}{(0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha)} .$$

Aus diesen letzten Gleichungen folgt aber, da das Produkt ihrer linken Seiten den Wert $c_1 \cdot c_3$, das Produkt ihrer rechten Seiten den Wert 1 besitzt, unmittelbar die Relation $c_1 \cdot c_3 = 1$.

Unter Zuhilfenahme der Relation $c_1 \cdot c_3 = 1$, vermittelst welcher c_3 unmittelbar gefunden werden kann, wenn c_1 bestimmt ist, sollen jetzt die Werte berechnet werden, welche c_1 und c_3 annehmen, wenn man an Stelle von $[\zeta]$ der Reihe nach die sechs oben angeschriebenen Charakteristiken treten lässt. Unter Benutzung der in Art. 1 für die Symbole von der Form $\tau^{\varepsilon\,|\,\eta}$ aufgestellten Rechnungsregeln und unter Beachtung der Gleichungen:

$$(\varepsilon)^3 = (-\varepsilon)^3, \qquad (\varepsilon \pm 3\eta)^3 = (\varepsilon)^3$$

findet man:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

für $[\zeta]=[\beta]$: $\quad c_1=\dfrac{(0)^3-(\alpha)^3}{(\beta)^3+\tau^{\beta\,|\,\alpha}(\beta+\alpha)^3+\tau^{\alpha\,|\,\beta}(\beta-\alpha)^3}=m \quad , \; c_3=\dfrac{1}{m}$,

für $[\zeta]=[-\beta]$: $\quad c_1=\dfrac{(0)^3-(\alpha)^3}{(\beta)^3+\tau^{\alpha\,|\,\beta}(\beta-\alpha)^3+\tau^{\beta\,|\,\alpha}(\beta+\alpha)^3}=m \quad , \; c_3=\dfrac{1}{m}$,

für $[\zeta]=[\beta+\alpha]$: $\quad c_1=\dfrac{(0)^3-(\alpha)^3}{(\beta+\alpha)^3+\tau^{\beta\,|\,\alpha}(\beta-\alpha)^3+\tau^{\alpha\,|\,\beta}(\beta)^3}=m\tau^{\beta|\alpha}, \; c_3=\dfrac{\tau^{\alpha|\beta}}{m}$,

für $[\zeta]=[-\beta-\alpha]$: $\quad c_1=\dfrac{(0)^3-(\alpha)^3}{(\beta+\alpha)^3+\tau^{\alpha\,|\,\beta}(\beta)^3+\tau^{\beta\,|\,\alpha}(\beta-\alpha)^3}=m\tau^{\beta|\alpha}, \; c_3=\dfrac{\tau^{\alpha|\beta}}{m}$,

für $[\zeta]=[\beta-\alpha]$: $\quad c_1=\dfrac{(0)^3-(\alpha)^3}{(\beta-\alpha)^3+\tau^{\beta\,|\,\alpha}(\beta)^3+\tau^{\alpha\,|\,\beta}(\beta+\alpha)^3}=m\tau^{\alpha|\beta}, \; c_3=\dfrac{\tau^{\beta|\alpha}}{m}$,

für $[\zeta]=[-\beta+\alpha]$: $\quad c_1=\dfrac{(0)^3-(\alpha)^3}{(\beta-\alpha)^3+\tau^{\alpha\,|\,\beta}(\beta+\alpha)^3+\tau^{\beta\,|\,\alpha}(\beta)^3}=m\tau^{\alpha|\beta}, \; c_3=\dfrac{\tau^{\beta|\alpha}}{m}$,

und man erhält daher, wenn man in jedem Falle die für c_1, c_2, c_3 gefundenen Werte zugleich mit der entsprechenden Charakteristik $[\zeta]$ in die Formel (VI') einführt und noch die Gleichungen, welche z und s definieren, hinzunimmt, die Gleichungen:

$$(1)\qquad \frac{\vartheta^3[\alpha](v)}{\vartheta^3[0](v)}\tau^{[\alpha]}=z\,, \qquad (2)\qquad \frac{\vartheta^3[-\alpha](v)}{\vartheta^3[0](v)}\tau^{[-\alpha]}=s\,,$$

$$(3)\qquad 3\frac{\vartheta^3[\beta](v)}{\vartheta^3[0](v)}\tau^{[\beta]} = \left(m + 1 + \frac{1}{m}\right) + \left(m + \tau^{\beta\,|\,\alpha} + \frac{\tau^{\alpha\,|\,\beta}}{m}\right)z + \left(m + \tau^{\alpha\,|\,\beta} + \frac{\tau^{\beta\,|\,\alpha}}{m}\right)s\,,$$

$$(4)\qquad 3\frac{\vartheta^3[-\beta](v)}{\vartheta^3[0](v)}\tau^{[-\beta]} = \left(m + 1 + \frac{1}{m}\right) + \left(m + \tau^{\alpha\,|\,\beta} + \frac{\tau^{\beta\,|\,\alpha}}{m}\right)z + \left(m + \tau^{\beta\,|\,\alpha} + \frac{\tau^{\alpha\,|\,\beta}}{m}\right)s\,,$$

$$(5)\qquad 3\frac{\vartheta^3[\beta+\alpha](v)}{\vartheta^3[0](v)}\tau^{[\beta+\alpha]} = \left(m\tau^{\beta\,|\,\alpha} + 1 + \frac{\tau^{\alpha\,|\,\beta}}{m}\right) + \left(m\tau^{\beta\,|\,\alpha} + \tau^{\beta\,|\,\alpha} + \frac{\tau^{\beta\,|\,\alpha}}{m}\right)z + \left(m\tau^{\beta\,|\,\alpha} + \tau^{\alpha\,|\,\beta} + \frac{1}{m}\right)s\,,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(6)\qquad 3\frac{\vartheta^3[-\beta-\alpha](v)}{\vartheta^3[0](v)}\tau^{[-\beta-\alpha]} = \left(m\tau^{\beta|\alpha} + 1 + \frac{\tau^{\alpha|\beta}}{m}\right) + \left(m\tau^{\beta|\alpha} + \tau^{\alpha|\beta} + \frac{1}{m}\right)z + \left(m\tau^{\beta|\alpha} + \tau^{\beta|\alpha} + \frac{\tau^{\beta|\alpha}}{m}\right)s\,,$$

$$(7)\qquad 3\frac{\vartheta^3[\beta-\alpha](v)}{\vartheta^3[0](v)}\tau^{[\beta-\alpha]} = \left(m\tau^{\alpha|\beta} + 1 + \frac{\tau^{\beta|\alpha}}{m}\right) + \left(m\tau^{\alpha|\beta} + \tau^{\beta|\alpha} + \frac{1}{m}\right)z\,, + \left(m\tau^{\alpha|\beta} + \tau^{\alpha|\beta} + \frac{\tau^{\alpha|\beta}}{m}\right)s\,,$$

$$(8)\qquad 3\frac{\vartheta^3[-\beta+\alpha](v)}{\vartheta^3[0](v)}\tau^{[-\beta+\alpha]} = \left(m\tau^{\alpha|\beta} + 1 + \frac{\tau^{\beta|\alpha}}{m}\right) + \left(m\tau^{\alpha|\beta} + \tau^{\alpha|\beta} + \frac{\tau^{\alpha|\beta}}{m}\right)z + \left(m\tau^{\alpha|\beta} + \tau^{\beta|\alpha} + \frac{1}{m}\right)s\,,$$

welche die acht Quotienten von Thetakuben linear durch z und s ausdrücken, während zwischen z und s die Gleichung:

$$(G)\qquad (1+z+s)^3 + \frac{27}{m^3-1}zs = 0$$

besteht.

Setzt man in den aufgestellten acht Gleichungen $v=0$, bezeichnet die diesem Werte von v entsprechenden Werte von z, s mit z_0, s_0 beziehungsweise und beachtet, dass wegen $\tau^{[\varepsilon]} = \tau^{[-\varepsilon]}$ und $\vartheta^3[\varepsilon](0) = \vartheta^3[-\varepsilon](0)$:

$$z_0 = s_0 = \frac{\vartheta^3[\alpha](0)}{\vartheta^3[0](0)}\tau^{[\alpha]} = \frac{1-mn}{1+2\,mn}$$

ist, so ergeben sich für die vier verschiedenen, dem Argumente 0 entsprechenden Quotienten von Thetakuben die Gleichungen:

$$\frac{\vartheta^3[\alpha](0)}{\vartheta^3[0](0)}\tau^{[\alpha]} = \frac{1-mn}{1+2\,mn}, \qquad \frac{\vartheta^3[\beta](0)}{\vartheta^3[0](0)}\tau^{[\beta]} = \frac{m+mn+n}{1+2\,mn}\,,$$

$$\frac{\vartheta^3[\beta+\alpha](0)}{\vartheta^3[0](0)}\tau^{[\beta+\alpha]} = \frac{m\tau^{\beta|\alpha}+mn+n\tau^{\alpha|\beta}}{1+2\,mn}, \quad \frac{\vartheta^3[\beta-\alpha](0)}{\vartheta^3[0](0)}\tau^{[\beta-\alpha]} = \frac{m\tau^{\alpha|\beta}+mn+n\tau^{\beta|\alpha}}{1+2\,mn}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4.

Die Derivierte der Funktion $\vartheta[\varepsilon](v)$ nach v soll mit $\vartheta'[\varepsilon](v)$ und der Wert, den sie für $v=0$ annimmt, mit $\vartheta'[\varepsilon](0)$ bezeichnet werden. Deriviert man die Gleichung (5) des Art. 1 nach v und setzt hierauf $v=0$, so erhält man die Relation:

$$\vartheta'[-\varepsilon](0) = -\vartheta'[\varepsilon](0).$$

Von den neun Grössen:

$$\vartheta'[0](0),\quad \begin{matrix}\vartheta'[\alpha](0), & \vartheta'[\beta](0), & \vartheta'[\beta+\alpha](0), & \vartheta'[\beta-\alpha](0),\\ \vartheta'[-\alpha](0), & \vartheta'[-\beta](0), & \vartheta'[-\beta-\alpha](0), & \vartheta'[-\beta+\alpha](0)\end{matrix}$$

hat daher die erste den Wert 0, während von den übrigen acht je zwei unter einander stehende die Summe 0 haben; und man kann sich daher bei der Untersuchung dieser Grössen auf die vier Grössen:

$$\vartheta'[\alpha](0),\quad \vartheta'[\beta](0),\quad \vartheta'[\beta+\alpha](0),\quad \vartheta'[\beta-\alpha](0)$$

beschränken. Von diesen aber lassen sich die letzten drei durch $\vartheta'[\alpha](0)$ und Grössen $\vartheta[\varepsilon](0)$ ausdrücken. Da diese Ausdrücke für die späteren Untersuchungen nötig sind, so sollen sie hier abgeleitet werden.

Zu dem Ende deriviere man die Gleichungen (1) und (2) des Art. 3 nach v und setze hierauf $v=0$. Man erhält dann, wenn man noch zur Abkürzung:

$$\left|\frac{dz}{dv}\right|_{v=0} = z'_0, \qquad \left|\frac{ds}{dv}\right|_{v=0} = s'_0$$

setzt:

$$z'_0 = 3\,\frac{\vartheta^2[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)}{\vartheta^3[0](0)}\,\tau^{[\alpha]},\quad s'_0 = -3\,\frac{\vartheta^2[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)}{\vartheta^3[0](0)}\,\tau^{[\alpha]}.$$

Deriviert man jetzt der Reihe nach die Gleichungen (3), (5), (7) des Art. 3 nach v und setzt in den so entstehenden Gleichungen $v=0$, so erhält man, wenn man noch beachtet, dass $s'_0 = -z'_0$ ist, die drei Gleichungen:

$$9\,\frac{\vartheta^2[\beta](0)\,\vartheta'[\beta](0)}{\vartheta^3[0](0)}\,\tau^{[\beta]} = \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta}\right)z'_0,$$

$$9\,\frac{\vartheta^2[\beta+\alpha](0)\,\vartheta'[\beta+\alpha](0)}{\vartheta^3[0](0)}\,\tau^{[\beta+\alpha]} = \left(1-\frac{\tau^{\alpha|\beta}}{m}\right)\left(\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta}\right)z'_0,$$

$$9\,\frac{\vartheta^2[\beta-\alpha](0)\,\vartheta'[\beta-\alpha](0)}{\vartheta^3[0](0)}\,\tau^{[\beta-\alpha]} = \left(1-\frac{\tau^{\beta|\alpha}}{m}\right)\left(\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta}\right)z'_0,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und schliesslich, indem man für z'_0 den eben gefundenen Wert einführt und die nötigen Umformungen macht, die Gleichungen:

$$\vartheta'[\ \ \beta\ \ ](0) = \frac{m-1}{3m}\,\frac{\vartheta^2[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)}{\vartheta^2[\beta](0)}\,\frac{\tau^{[\alpha]}}{\tau^{[\beta]}}\,(\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta}),$$

$$\vartheta'[\beta+\alpha](0) = \frac{m-\tau^{\alpha|\beta}}{3m}\,\frac{\vartheta^2[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)}{\vartheta^2[\beta+\alpha](0)}\,\frac{\tau^{[\alpha]}}{\tau^{[\beta+\alpha]}}\,(\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta}),$$

$$\vartheta'[\beta-\alpha](0) = \frac{m-\tau^{\beta|\alpha}}{3m}\,\frac{\vartheta^2[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)}{\vartheta^2[\beta-\alpha](0)}\,\frac{\tau^{[\alpha]}}{\tau^{[\beta-\alpha]}}\,(\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta}),$$

welche die gewünschten Ausdrücke liefern.

5.

Ein jeder der im vorletzten Artikel betrachteten acht Thetaquotienten besitzt ein einfaches Additionstheorem. Diese Additionstheoreme können sämtlich aus der zu Anfang des Art. 2 angeführten Hauptformel (Θ) erhalten werden. Versteht man unter $[\alpha]$, wie bisher, eine beliebige der $[0]$ nicht kongruente Charakteristik, so kann man sich auf die Ableitung des Additionstheorems für den aus $\vartheta[\alpha](v)$ als Zähler und $\vartheta[0](v)$ als Nenner gebildeten Quotienten beschränken. Das diesem Quotienten entsprechende Additionstheorem soll jetzt abgeleitet werden.

Setzt man zu dem Ende, indem man unter v, t unabhängige Veränderliche versteht, in der Formel (Θ) zunächst:

$$[\eta]=[0],\quad [\varkappa]=[0],\quad [\varrho]=[0],\quad [\sigma]=[\alpha];$$

$$\begin{array}{lll} 3u_1 = v, & 3u_2 = v, & 3u_3 = v\ , \\ 3u_4 = 0, & 3u_5 = t, & 3u_6 = -t \end{array}$$

und beachtet, dass dann auf Grund der Gleichungen (J):

$$\begin{array}{lll} 3u'_1 = 0, & 3u'_2 = 0, & 3u'_3 = 0, \\ 3u'_4 = v, & 3u'_5 = v-t, & 3u'_6 = v+t \end{array}$$

wird, so erhält man aus der Formel (Θ) die spezielle Formel:

$$(\Theta')\qquad 3\,\vartheta^3[0](0)\,\vartheta[0](v)\,\vartheta[-\alpha](v-t)\,\vartheta[\alpha](v+t)$$

$$= \sum_{[\varepsilon]} \vartheta^3[\varepsilon](v) \begin{Bmatrix} \vartheta[\ \ \varepsilon\ \ ](\ 0\ ) \\ \vartheta[\varepsilon+\alpha](\ t\ ) \\ \vartheta[\varepsilon-\alpha](-t) \end{Bmatrix} e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i}\ .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man dagegen, indem man unter v, t dieselben Grössen wie vorher versteht, in der Formel (Θ):

$$[\eta] = [0], \quad [\varkappa] = [0], \quad [\varrho] = [0], \quad [\sigma] = [\alpha];$$
$$3u_1 = v, \qquad 3u_2 = v, \qquad 3u_3 = v,$$
$$3u_4 = -t, \qquad 3u_5 = t, \qquad 3u_6 = 0$$

und beachtet, dass dann auf Grund der Gleichungen (J):

$$3u'_1 = 0, \qquad 3u'_2 = 0, \qquad 3u'_3 = 0,$$
$$3u'_4 = v + t, \quad 3u'_5 = v - t, \quad 3u'_6 = v$$

wird, so erhält man aus der Formel (Θ) die spezielle Formel:

$$(\Theta'') \qquad 3\,\vartheta^3[0](0)\;\vartheta[0](v+t)\;\vartheta[-\alpha](v-t)\;\vartheta[\alpha](v)$$
$$= \sum_{[\varepsilon]} \vartheta^3[\varepsilon](v) \begin{Bmatrix} \vartheta[\;\;\varepsilon\;\;](-t) \\ \vartheta[\varepsilon+\alpha](\;t\;) \\ \vartheta[\varepsilon-\alpha](\;0\;) \end{Bmatrix} e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i}.$$

Dividiert man nun die linke Seite der Gleichung (Θ') durch die linke Seite der Gleichung (Θ''), entsprechend die rechte Seite der Gleichung (Θ') durch die rechte Seite der Gleichung (Θ'') und setzt die erhaltenen Quotienten einander gleich, so erhält man das gewünschte Additionstheorem in der Gestalt:

$$(A) \qquad \frac{\vartheta[0](v)\;\vartheta[\alpha](v+t)}{\vartheta[\alpha](v)\;\vartheta[0](v+t)} = \frac{\sum\limits_{[\varepsilon]} \vartheta^3[\varepsilon](v) \begin{Bmatrix} \vartheta[\;\;\varepsilon\;\;](\;0\;) \\ \vartheta[\varepsilon+\alpha](\;t\;) \\ \vartheta[\varepsilon-\alpha](-t) \end{Bmatrix} e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i}}{\sum\limits_{[\varepsilon]} \vartheta^3[\varepsilon](v) \begin{Bmatrix} \vartheta[\;\;\varepsilon\;\;](-t) \\ \vartheta[\varepsilon+\alpha](\;t\;) \\ \vartheta[\varepsilon-\alpha](\;0\;) \end{Bmatrix} e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i}}.$$

Das auf der rechten Seite dieser Gleichung vorkommende Zeichen Σ deutet dabei, wie schon früher erwähnt wurde, an, dass die Summe der Ausdrücke zu bilden ist, welche aus dem hinter ihm stehenden Ausdrucke hervorgehen, wenn man darin an Stelle von $[\varepsilon]$ der Reihe nach irgend neun inkongruente Charakteristiken treten lässt. Für die Ausführung der Summation soll im Folgenden das System der neun inkongruenten Charakteristiken:

$$[0], [\alpha], [-\alpha], [\beta], [\beta+\alpha], [\beta-\alpha], [-\beta], [-\beta+\alpha], [-\beta-\alpha]$$

zu Grunde gelegt werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6.

Das gewonnene Additionstheorem ermöglicht es, die nach v genommenen Derivierten der acht in Art. 3 betrachteten Thetaquotienten als Funktionen dieser Quotienten selbst und daher auch, unter Zuhilfenahme der Formeln (1) bis (8) des genannten Artikels, als Funktionen von z und s darzustellen. Versteht man unter $[\alpha]$, wie bisher, eine beliebige der $[0]$ nicht kongruente Charakteristik, so kann man sich bei der Behandlung dieses Problems auf den aus $\vartheta[\alpha](v)$ als Zähler und $\vartheta[0](v)$ als Nenner gebildeten Quotienten beschränken. Der Ausdruck für die Derivierte dieses Quotienten lässt sich aber unmittelbar aus der Gleichung (A) erhalten, indem man dieselbe nach t deriviert und in der so entstehenden Gleichung $t = 0$ setzt.

Durch Derivation der Gleichung (A) nach t erhält man nämlich, wenn man noch zur Abkürzung den Zähler des die rechte Seite der Gleichung (A) bildenden Bruches mit Z, den Nenner mit N bezeichnet, die Gleichung:

$$\frac{\vartheta[0](v)}{\vartheta[\alpha](v)}\frac{d}{dt}\left[\frac{\vartheta[\alpha](v+t)}{\vartheta[0](v+t)}\right] = \frac{N\frac{dZ}{dt} - Z\frac{dN}{dt}}{N^2},$$

wobei:

$$\frac{dZ}{dt} = \sum_{[\varepsilon]}\left\{\begin{matrix}\vartheta[\varepsilon](0)\,\vartheta'[\varepsilon+\alpha](t)\,\vartheta[\varepsilon-\alpha](-t)\\ -\vartheta[\varepsilon](0)\,\vartheta[\varepsilon+\alpha](t)\,\vartheta'[\varepsilon-\alpha](-t)\end{matrix}\right\}\vartheta^3[\varepsilon](v)\,e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i},$$

$$\frac{dN}{dt} = \sum_{[\varepsilon]}\left\{\begin{matrix}\vartheta[\varepsilon-\alpha](0)\,\vartheta'[\varepsilon+\alpha](t)\,\vartheta[\varepsilon](-t)\\ -\vartheta[\varepsilon-\alpha](0)\,\vartheta[\varepsilon+\alpha](t)\,\vartheta'[\varepsilon](-t)\end{matrix}\right\}\vartheta^3[\varepsilon](v)\,e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i}$$

ist, und aus der so erhaltenen Gleichung entsteht für $t = 0$, da dann die auf ihrer linken Seite stehende Derivierte in $\frac{d}{dv}\left[\frac{\vartheta[\alpha](v)}{\vartheta[0](v)}\right]$ übergeht, während Z und N denselben Wert und zwar den Wert:

$$\sum_{[\varepsilon]}\vartheta[\varepsilon](0)\,\vartheta[\varepsilon+\alpha](0)\,\vartheta[\varepsilon-\alpha](0)\,\vartheta^3[\varepsilon](v)\,e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i}$$

annehmen, die Gleichung:

$$(\overline{A})\qquad \frac{\vartheta[0](v)}{\vartheta[\alpha](v)}\frac{d}{dv}\left[\frac{\vartheta[\alpha](v)}{\vartheta[0](v)}\right]$$

$$= \frac{\sum_{[\varepsilon]}\left\{\begin{matrix}\vartheta'[\varepsilon](0)\,\vartheta[\varepsilon-\alpha](0)\\ -\vartheta[\varepsilon](0)\,\vartheta'[\varepsilon-\alpha](0)\end{matrix}\right\}\vartheta[\varepsilon+\alpha](0)\,\vartheta^3[\varepsilon](v)\,e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i}}{\sum_{[\varepsilon]}\vartheta[\varepsilon](0)\,\vartheta[\varepsilon+\alpha](0)\,\vartheta[\varepsilon-\alpha](0)\,\vartheta^3[\varepsilon](v)\,e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i}},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welche den gewünschten Ausdruck für die Derivierte des in Rede stehenden Thetaquotienten liefert.

Die rechte Seite der gewonnenen Gleichung soll jetzt mit Hilfe der in Art. 3 und Art. 4 gefundenen Relationen als Funktion von z und s dargestellt werden, und es möge mit Rücksicht darauf zur Abkürzung der Zähler des die rechte Seite von $(\overline{A})$ bildenden Bruches mit $\overline{Z}$, der Nenner mit $\overline{N}$ bezeichnet werden. Der Nenner $\overline{N}$ soll zuerst behandelt werden.

Zu dem Ende setze man in der Formel (Θ'') des vorigen Artikels $t = 0$ und beachte, dass dadurch die rechte Seite der genannten Formel in $\overline{N}$ übergeht. Man erhält dann zunächst die Gleichung:

$$\overline{N} = 3\,\vartheta^3[0](0)\,\vartheta[0](v)\,\vartheta[\alpha](v)\,\vartheta[-\alpha](v)\ ,$$

und weiter aus dieser, indem man den auf ihrer rechten Seite stehenden Ausdruck mit Hilfe der Formel:

$$\vartheta[0](v)\,\vartheta[\alpha](v)\,\vartheta[-\alpha](v)$$
$$= \frac{(0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha)}{(0)^3 + 2\,(\alpha)^3}\left[\vartheta^3[0](v) + \vartheta^3[\alpha](v)\,\tau^{[\alpha]} + \vartheta^3[-\alpha](v)\,\tau^{[-\alpha]}\right]$$

— die aus der Formel (V) des Art. 2 hervorgeht, wenn man darin $[\eta] = [0]$ setzt — durch Thetakuben ausdrückt, die Gleichung:

$$\overline{N} = 3\vartheta^3[0](0)\frac{(0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha)}{(0)^3+2(\alpha)^3}\left[1+\frac{\vartheta^3[\alpha](v)}{\vartheta^3[0](v)}\tau^{[\alpha]}+\frac{\vartheta^3[-\alpha](v)}{\vartheta^3[0](v)}\tau^{[-\alpha]}\right]\vartheta^3[0](v)\,.$$

Führt man in die rechte Seite dieser letzten Gleichung mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2) des Art. 3 die Grössen z und s ein und beachtet, dass nach Früherem:

$$\vartheta^3[0](0) = (0)^3,\ 3\,\frac{(0)^3}{(0)^3+2(\alpha)^3} = 1+2mn,\ (0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha) = \vartheta[0](0)\vartheta^2[\alpha](0)$$

ist, so erhält man für $\overline{N}$ schliesslich die Gleichung:

$$\overline{N} = \vartheta[0](0)\,\vartheta^2[\alpha](0)(1+2\,mn)(1+z+s)\,\vartheta^3[0](v)\ .$$

Um einen entsprechenden Ausdruck für den mit $\overline{Z}$ bezeichneten Zähler des die rechte Seite von $(\overline{A})$ bildenden Bruches zu erhalten, führe man zunächst die dort angedeutete Summation aus, indem man dabei die neun am Ende des Art. 5 angegebenen inkongruenten Charakteristiken in der Reihenfolge:

$$[0],\ [\alpha],\ [-\alpha],\ [\beta],\ [-\beta+\alpha],\ [-\beta],\ [\beta+\alpha],\ [-\beta-\alpha],\ [\beta-\alpha]$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

verwendet. Man erhält dann, wenn man noch die Relationen:

$$\vartheta[\varepsilon \pm 3\eta](0) = \vartheta[\varepsilon](0)\, e^{\pm\frac{2}{3}\varepsilon\eta'\pi i} \;,$$

$$\vartheta'[\varepsilon \pm 3\eta](0) = \vartheta'[\varepsilon](0)\, e^{\pm\frac{2}{3}\varepsilon\eta'\pi i} \;,$$

$$e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i} = \tau^{[\varepsilon]}\,\tau^{[\varepsilon]} \;, \qquad \begin{aligned} e^{\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i + \frac{2}{3}(\eta\eta' + \eta\varepsilon')\pi i} &= \tau^{[\varepsilon-\eta]}\,\tau^{\varepsilon\,|\,\eta} \;, \\ e^{\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i + \frac{2}{3}(\eta\eta' - \eta\varepsilon')\pi i} &= \tau^{[\varepsilon+\eta]}\,\tau^{\eta\,|\,\varepsilon} \end{aligned}$$

beachtet, für $\overline{Z}$ die Gleichung:

$$\begin{aligned} \overline{Z} = {} & \vartheta[0](0)\,\vartheta[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)\big[\vartheta^3[0](v) + \vartheta^3[\alpha](v)\tau^{[\alpha]} - 2\,\vartheta^3[-\alpha](v)\tau^{[-\alpha]}\big] \\ & + C_1\,\vartheta^3[\;\beta\;](v)\,\tau^{[\beta]} + C_1\,\vartheta^3[-\beta+\alpha](v)\,\tau^{[-\beta+\alpha]}\,\tau^{\beta\,|\,\alpha} \\ & + C_2\,\vartheta^3[-\beta](v)\,\tau^{[-\beta]} + C_2\,\vartheta^3[\beta+\alpha](v)\,\tau^{[\beta+\alpha]}\,\tau^{\alpha\,|\,\beta} \\ & + C_3\,\vartheta^3[-\beta-\alpha](v)\,\tau^{[-\beta-\alpha]}\,\tau^{\alpha|\beta} + C_3\,\vartheta^3[\beta-\alpha](v)\,\tau^{[\beta-\alpha]}\,\tau^{\beta|\alpha} \;, \end{aligned}$$

wobei unter C_1, C_2, C_3 die durch die Gleichungen:

$$C_1 = \big[\vartheta'[\beta](0)\,\vartheta[\beta-\alpha](0) - \vartheta'[\beta-\alpha](0)\,\vartheta[\beta](0)\big]\,\vartheta[\beta+\alpha](0)\,\tau^{[\beta]} \;,$$

$$C_2 = \big[\vartheta'[\beta+\alpha](0)\,\vartheta[\beta](0) - \vartheta'[\beta](0)\,\vartheta[\beta+\alpha](0)\big]\,\vartheta[\beta-\alpha](0)\,\tau^{[\beta]} \;,$$

$$C_3 = \big[\vartheta'[\beta-\alpha](0)\vartheta[\beta+\alpha](0) - \vartheta'[\beta+\alpha](0)\,\vartheta[\beta-\alpha](0)\big]\,\vartheta[\beta](0)\tau^{[\beta]}$$

definierten Konstanten zu verstehen sind. Drückt man jetzt weiter die auf der rechten Seite der für $\overline{Z}$ erhaltenen Gleichung vorkommenden Thetakuben mit Hilfe der Gleichungen (1) bis (8) des Art. 3 durch z, s und $\vartheta^3[0](v)$ aus, so erhält man nach einfachen Umformungen die Gleichung:

$$\begin{aligned} \overline{Z} = {} & \vartheta[0](0)\;\vartheta[\alpha](0)\;\vartheta'[\alpha](0)\;(1 + z - 2s)\;\vartheta^3[0](v) \\ & + \frac{C_1}{3m}\left\{\begin{matrix} (-\tau^{\beta|\alpha} - \tau^{\alpha|\beta}\,m + 2m^2)(1 + z) \\ +(\;\;\tau^{\beta|\alpha} + \tau^{\alpha|\beta}\,m + \;\;m^2)\;\;2s \end{matrix}\right\}\vartheta^3[0](v) \\ & + \frac{C_2}{3m}\left\{\begin{matrix} (-\tau^{\alpha|\beta} - \tau^{\beta|\alpha}\,m + 2m^2)(1 + z) \\ +(\;\;\tau^{\alpha|\beta} + \tau^{\beta|\alpha}\,m + \;\;m^2)\;\;2s \end{matrix}\right\}\vartheta^3[0](v) \\ & + \frac{C_3}{3m}\left\{\begin{matrix} (-\;1\;-\;m\;+2m^2)(1 + z) \\ +(\;\;1\;+\;m\;+\;m^2)\;\;2s \end{matrix}\right\}\vartheta^3[0](v) \;, \end{aligned}$$

und es ist jetzt nur noch übrig, die zur Abkürzung mit C_1, C_2, C_3 bezeichneten Ausdrücke zu vereinfachen.

Der mit C_1 bezeichnete Ausdruck soll zunächst behandelt werden. Zu dem Ende führe man in die Gleichung:

$$C_1 = \big[\vartheta'[\beta](0)\,\vartheta[\beta-\alpha](0) - \vartheta'[\beta-\alpha](0)\,\vartheta[\beta](0)\big]\,\vartheta[\beta+\alpha](0)\,\tau^{[\beta]}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

an Stelle von $\vartheta'[\beta](0)$, $\vartheta'[\beta-\alpha](0)$ die in Art. 4 dafür gewonnenen Ausdrücke ein. Man erhält dann zunächst die Gleichung:

$$C_1 = \left[\frac{(m-1)\ \vartheta[\beta-\alpha](0)}{\vartheta^2[\beta](0)\,\tau^{[\beta]}} - \frac{(m-\tau^{\beta|\alpha})\,\vartheta[\beta](0)}{\vartheta^2[\beta-\alpha](0)\,\tau^{[\beta-\alpha]}}\right]$$
$$\times \frac{\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta}}{3m}\,\tau^{[\alpha]}\,\vartheta^2[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)\,\vartheta[\beta+\alpha](0)\,\tau^{[\beta]}\ ,$$

und weiter nach einfachen Umformungen, wenn man noch beachtet, dass nach Früherem:

$$\vartheta[\beta](0)\,\vartheta[\beta+\alpha](0)\,\vartheta[\beta-\alpha](0)\,\tau^{[\beta]} = (\beta\,|\,\beta+\alpha\,|\,\beta-\alpha)$$
$$= n\,(0\,|\,\alpha\,|-\alpha) = n\,\vartheta[0]\,\vartheta^2[\alpha](0)$$

ist, die Gleichung:

$$C_1 = \left[(m-1)\,\frac{\vartheta^3[0](0)}{\vartheta^3[\beta](0)}\,\frac{1}{\tau^{[\beta]}} - (m-\tau^{\beta|\alpha})\,\frac{\vartheta^3[0](0)}{\vartheta^3[\beta-\alpha](0)}\,\frac{1}{\tau^{[\beta-\alpha]}}\right]$$
$$\times \frac{n}{3m}\,\frac{\vartheta^3[\alpha](0)}{\vartheta^3[0](0)}\,\tau^{[\alpha]}\,(\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta})\,\vartheta[0](0)\,\vartheta[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)\ .$$

In diese letzte Gleichung führe man nun an Stelle der auf ihrer rechten Seite vorkommenden Quotienten von Thetakuben die in Art. 3 dafür gewonnenen Ausdrücke ein. Man erhält dann die Gleichung:

$$C_1 = \left[\frac{m\,(1+2mn)\,(m-2n\,\tau^{\beta|\alpha}+\tau^{\alpha|\beta})\,(\tau^{\alpha|\beta}-1)}{(m+mn+n)\,(m\,\tau^{\alpha|\beta}+mn+n\,\tau^{\beta|\alpha})}\right]$$
$$\times \frac{n\,(1-mn)}{3m\,(1+2mn)}\,(\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta})\,\vartheta[0](0)\,\vartheta[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)\,,$$

und weiter, indem man die Relation $(\tau^{\alpha|\beta}-1)(\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta}) = -3\tau^{\beta|\alpha}$ beachtet, die Gleichung:

$$C_1 = -\frac{n\,(1-mn)\,(m-2n\,\tau^{\beta|\alpha}+\tau^{\alpha|\beta})\,\tau^{\beta|\alpha}}{(m+mn+n)\,(m\,\tau^{\alpha|\beta}+mn+n\,\tau^{\beta|\alpha})}\,\vartheta[0](0)\,\vartheta[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)\ .$$

Aus dieser geht aber schliesslich, wenn man die Grösse m durch die ihr entsprechende rationale Funktion von n ersetzt und berücksichtigt, dass dann

$$\frac{n\,(1-mn)}{m+mn+n} = \frac{1-n^3}{1+3n+3n^2+2n^3} = \frac{1-n}{1+2n}\ ,$$

$$\frac{m-2n\,\tau^{\beta|\alpha}+\tau^{\alpha|\beta}}{m\,\tau^{\alpha|\beta}+mn+n\,\tau^{\beta|\alpha}} = \frac{(1+2n)\,(1-n\,\tau^{\alpha|\beta})\,(1+2n\,\tau^{\beta|\alpha})\,(\tau^{\alpha|\beta}+n\,\tau^{\beta|\alpha})}{(1-n)\,(1-n\,\tau^{\alpha|\beta})\,(1+2n\,\tau^{\beta|\alpha})\,n\,\tau^{\beta|\alpha}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wird, die Gleichung:

$$C_1 = -\frac{\tau^{\alpha|\beta} + n\,\tau^{\beta|\alpha}}{n}\,\vartheta[0](0)\,\vartheta[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)$$

hervor.

Man gehe jetzt auf den ursprünglich mit C_1 bezeichneten Ausdruck zurück und lasse darin an Stelle der Charakteristik $[\beta]$, die nur der Bedingung unterworfen ist, keiner der Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ kongruent zu sein, das eine Mal die Charakteristik $[-\beta]$, das andere Mal die Charakteristik $[\beta-\alpha]$ treten. Der genannte Ausdruck geht dann im ersten Falle in den mit C_2 bezeichneten Ausdruck, im zweiten Falle dagegen, wenn man noch durch $\tau^{\beta|\alpha}$ teilt, in den mit C_3 bezeichneten Ausdruck über. Daraus folgt aber, dass die soeben für C_1 gewonnene Gleichung richtig bleibt, wenn man darin an Stelle von $[\beta]$ die Charakteristik $[-\beta]$ und gleichzeitig an Stelle von C_1 die Grösse C_2 setzt, dass sie aber auch richtig bleibt, wenn man darin an Stelle von $[\beta]$ die Charakteristik $[\beta-\alpha]$ und gleichzeitig an Stelle von C_1 die Grösse $C_3\,\tau^{\beta|\alpha}$ treten lässt. Man gelangt auf diese Weise, wenn man noch beachtet, dass beim Übergange von $[\beta]$ in $[-\beta]$ die Grösse n ihrer Definition gemäss ungeändert bleibt, während $\tau^{\alpha|\beta}$ in $\tau^{\beta|\alpha}$ und $\tau^{\beta|\alpha}$ in $\tau^{\alpha|\beta}$ übergeht, dass dagegen beim Übergange von $[\beta]$ in $[\beta-\alpha]$ n in $n\,\tau^{\beta|\alpha}$ übergeht, während $\tau^{\alpha|\beta}$ und $\tau^{\beta|\alpha}$ ungeändert bleiben, zu den Gleichungen:

$$C_2 = -\frac{\tau^{\beta|\alpha} + n\,\tau^{\alpha|\beta}}{n}\,\vartheta[0](0)\,\vartheta[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)\ ,$$

$$C_3 = -\frac{1+n}{n}\,\vartheta[0](0)\,\vartheta[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)\ ,$$

welche die für C_2, C_3 gewünschten vereinfachten Ausdrücke liefern.

Die so für C_1, C_2, C_3 gewonnenen Ausdrücke führe man nun in die letzte für $\overline{Z}$ aufgestellte Gleichung ein und beachte, dass die mit Hilfe dieser Ausdrücke leicht zu verificierenden Relationen:

$$C_1\,\tau^{\beta|\alpha} + C_2\,\tau^{\alpha|\beta} + C_3 = -\frac{3}{n}\,\vartheta[0](0)\,\vartheta[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)\ ,$$

$$C_1\,\tau^{\alpha|\beta} + C_2\,\tau^{\beta|\alpha} + C_3 = -\ 3\ \vartheta[0](0)\,\vartheta[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)\ ,$$

$$C_1 \qquad + C_2 \qquad + C_3 = 0$$

bestehen. Aus der genannten Gleichung geht dann nach Vereinigung zusammengehöriger Ausdrücke die Gleichung:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\overline{Z} = \vartheta[0](0)\,\vartheta[\alpha](0)\,\vartheta'[\alpha](0)\,\frac{1+2mn}{mn}(1+z-2s)\,\vartheta^3[0](v)$$

hervor.

Geht man jetzt auf die Gleichung $(\overline{A})$ zurück und ersetzt auf der rechten Seite derselben Zähler und Nenner des dort stehenden Bruches, die zur Abkürzung mit $\overline{Z}$, $\overline{N}$ beziehungsweise bezeichnet wurden, durch die für $\overline{Z}$, $\overline{N}$ gefundenen Ausdrücke, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\vartheta[0](v)}{\vartheta[\alpha](v)}\,\frac{d}{dv}\left[\frac{\vartheta[\alpha](v)}{\vartheta[0](v)}\right] = \frac{\vartheta'[\alpha](0)}{\vartheta[\alpha](0)}\,\frac{1}{mn}\,\frac{1+z-2s}{1+z+s}$$

und schliesslich die Gleichung:

$$\frac{d}{dv}\left[\frac{\vartheta[\alpha](v)}{\vartheta[0](v)}\right] = \frac{\vartheta'[\alpha](0)}{\vartheta[\alpha](0)}\,\frac{\vartheta[\alpha](v)}{\vartheta[0](v)}\,\frac{1}{mn}\,\frac{1+z-2s}{1+z+s},$$

die zunächst die Derivierte des Quotienten $\frac{\vartheta[\alpha](v)}{\vartheta[0](v)}$ bestimmt, die zugleich aber auch die Derivierten für die noch übrigen sieben Quotienten liefert, wenn man in ihr mit Hilfe der Gleichungen:

$$\frac{1}{mn} = \frac{\vartheta^3[0](0) + 2\,\vartheta^3[\alpha](0)\,\tau^{[\alpha]}}{\vartheta^3[0](0) - \vartheta^3[\alpha](0)\,\tau^{[\alpha]}},$$

$$z = \frac{\vartheta^3[\alpha](v)}{\vartheta^3[0](v)}\,\tau^{[\alpha]}, \qquad s = \frac{\vartheta^3[-\alpha](v)}{\vartheta^3[0](v)}\,\tau^{[-\alpha]}$$

die Grössen mn, z, s durch Thetafunktionen ausdrückt und dann an Stelle von $[\alpha]$ der Reihe nach die sieben den genannten Thetaquotienten entsprechenden Charakteristiken treten lässt.

7.

Auf Grund des für die Derivierte des Quotienten $\frac{\vartheta[\alpha](v)}{\vartheta[0](v)}$ soeben gefundenen Ausdruckes ist man nun im Stande, das dem genannten Quotienten entsprechende Umkehrproblem oder, was auf dasselbe hinauskommt, das dem Kubus dieses Quotienten entsprechende Umkehrproblem zu lösen. Das zuletzt genannte Problem besteht aber darin, auf Grund der Gleichung:

$$\frac{\vartheta^3[\alpha](v)}{\vartheta^3[0](v)}\,\tau^{[\alpha]} = z$$

v als Funktion von z darzustellen, oder, was dasselbe ist, die aufgestellte Gleichung nach v aufzulösen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um die gewünschte Auflösung zu erhalten, bilde man aus der in Rede stehenden Gleichung durch Derivation nach v die Gleichung:

$$3\,\frac{\vartheta^2[\alpha](v)}{\vartheta^2[0](v)}\,\tau^{[\alpha]}\,\frac{d}{dv}\left[\frac{\vartheta[\alpha](v)}{\vartheta[0](v)}\right]=\frac{dz}{dv}\;,$$

führe darin an Stelle der auf ihrer linken Seite vorkommenden Derivierten den am Ende des vorigen Artikels dafür gefundenen Ausdruck ein und drücke den dann auftretenden Quotienten von Thetakuben durch z aus. Aus der auf diese Weise entstehenden Gleichung:

$$3\,\frac{\vartheta'[\alpha](0)}{\vartheta[\alpha](0)}\,\frac{1}{mn}\,\frac{z(1+z-2s)}{1+z+s}=\frac{dz}{dv}$$

folgt dann unmittelbar die Gleichung:

$$dv=\frac{\vartheta[\alpha](0)}{\vartheta'[\alpha](0)}\,\frac{mn}{3}\,\frac{1+z+s}{z(1+z-2s)}\,dz\;,$$

welche durch Integration nach z, unter Beachtung der zwischen z und s bestehenden Gleichung:

$$(G)\qquad (1+z+s)^3+\frac{27}{m^3-1}\,z\,s=0\;,$$

die Lösung des gestellten Problems liefert. Vor Ausführung dieser Integration soll aber dem für dv gewonnenen Ausdrucke mit Hilfe der Gleichung (G) eine einfachere Gestalt gegeben werden. Zu dem Ende beachte man, dass der Gleichung (G) zufolge:

$$\frac{1+z+s}{z(1+z-2s)}=\frac{9(1+z+s)}{-27\,z\,s+9z(1+z+s)}=\frac{9}{(m^3-1)(1+z+s)^2+9z}$$

ist, und setze zur Abkürzung:

$$3mn\,\frac{\vartheta[\alpha](0)}{\vartheta'[\alpha](0)}=k\;.$$

Die für dv gewonnene Gleichung nimmt dann die Gestalt:

$$dv=\frac{k\,dz}{(m^3-1)(1+z+s)^2+9z}$$

an und liefert durch Integration, wenn man noch die Werte, welche z und s für $v=0$ annehmen, wie früher mit z_0 und s_0 beziehungsweise bezeichnet und berücksichtigt, dass $s_0=z_0$ ist, die Gleichung:

$$v=\int_{z_0,z_0}^{z,s}\frac{k\,dz}{(m^3-1)(1+z+s)^2+9z}\;.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beachtet man nun noch, dass nach Früherem:

$$m^3 - 1 = -\frac{27 z_0^{\,2}}{(1+2z_0)^3}, \quad mn = \frac{1-z_0}{1+2z_0}, \quad z'_0 = \left|\frac{dz}{dv}\right|_{v=0} = 3z_0 \frac{\vartheta'[\alpha](0)}{\vartheta[\alpha](0)}$$

und daher weiter auch:

$$k = \frac{9z_0(1-z_0)}{z'_0(1+2z_0)}$$

ist, und drückt auf Grund dieser Beziehungen die in dem Integrale vorkommenden Konstanten durch z_0 und z'_0 aus, so lässt sich das in diesem Artikel gewonnene Resultat folgendermassen aussprechen:

„Die Auflösung der Gleichung:

$$\frac{\vartheta^3[\alpha](v)}{\vartheta^3[0](v)}\,\tau^{[\alpha]} = z$$

nach v wird, wenn man zur Abkürzung:

$$|z|_{v=0} = \frac{\vartheta^3[\alpha](0)}{\vartheta^3[0](0)}\,\tau^{[\alpha]} = z_0\,, \quad \left|\frac{dz}{dv}\right|_{v=0} = 3z_0\,\frac{\vartheta'[\alpha](0)}{\vartheta[\alpha](0)} = z'_0$$

setzt und unter s die durch die Gleichung:

$$(G) \qquad (1+z+s)^3 - \frac{(1+2z_0)^3}{z_0^{\,2}}\,z\,s = 0$$

definierte Funktion von z versteht, durch die Gleichung:

$$v = \frac{1}{z'_0}\int_{z_0, z_0}^{z, s} \frac{z_0(1-z_0)(1+2z_0)^2\,dz}{-3z_0^{\,2}(1+z+s)^2 + (1+2z_0)^3\,z}$$

geliefert."

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beachtet mai

$$m^3 - 1 = -\frac{27z}{(1+} \qquad 3z_0 \frac{\vartheta'[\alpha](0)}{\vartheta[\alpha](0)}$$

und daher weiter

ist, und drückt a dem Integrale vorkommend s, so lässt sich das in diese ndermassen aussprechen:

„Die Auflösun

nach v wird, wenn

$$|z|_{v=0} = \frac{\vartheta^3[\alpha]}{\vartheta^3[0]} \qquad = z'_0$$

setzt und unter s d

(G) $(1 -$

definierte Funktion :

$$v = \frac{1}{z'_0} \int_{z_0, z_0}^{z_0}$$

geliefert."

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf