Beiträge

zur

Functionentheorie.

A. Geometrisch-mechanische Bedeutung der bestimmten Integrale complexer Funktionen.

Es ist ein bekannter und für die Grössenschätzung wichtiger Satz, dass bei einer reellen Function einer reellen Veränderlichen der Werth von $\int_a^z f(z)\,dz : (z-a)$ unter denjenigen enthalten ist, welche $f(z)$ zwischen $z=a$ und $z=z$ annimmt; und es liegt seine Gültigkeit bei complexen Functionen für eine unendlich kleine Differenz $(z-a)$ auf der Hand, weil der obige Ausdruck für eine solche in den Differentialquotienten des Integrals übergeht. Im Falle einer endlichen Differenz $(z-a)$ kann ein Gleiches jedoch nicht behauptet werden, da sich der Werth jenes Ausdrucks als gleichzeitiger Werth irgend eines benutzten $f(z)$ z. B. dann unbedingt vermeiden lässt, wenn der Werth des Integrals nicht vom Integrationswege abhängt.

Nun ist es aber nicht bloss von theoretischem Interesse, sondern auch von praktischer Bedeutung — wozu der nächste Abschnitt ein Beispiel giebt — den Werth des bestimmten Integrals in der Anschauung genau zu fixiren; weshalb es gerechtfertigt erscheint, diesem Gegenstande einige Aufmerksamkeit zu widmen.

Zu dem Zwecke denken wir uns die Werthe der complexen Grössen $z=x+iy$ und $f(z)=X+iY$ nach der Gauss'schen Methode durch Punkte einer Ebene dargestellt und fassen, wenn $f(z)$ mehrdeutig sein sollte, unter der Bezeichnung des Weges oder der Bahn $\mathfrak{W}$ der Function $f(z)$ eine im Voraus bestimmte Folge der Punkte $f(z)$ zusammen, welche dem Wege $\mathfrak{w}$ von z in der Weise entsprechen, dass die Vieldeutigkeit von $f(z)$ durch beliebige Auswahl unter den gleichzeitigen Werthen aufgehoben ist. Dadurch soll aber die völlige Unbestimmtheit der Function $f(z)$, welche in einzelnen Punkten des Integrationsweges $\mathfrak{w}$ eintreten kann, keineswegs ausgeschlossen sein, so wie auch $\mathfrak{W}$ keinen stetigen Zusammenhang zu zeigen braucht, sondern wir fordern nur die Erfüllung derjenigen ausreichenden und meistens erfüllten, wenn auch nicht durchaus nothwendigen Bedingungen für die endliche Bestimmtheit des Integrals, welche in einer früheren Abhandlung „Ueber die Endlichkeit von bestimmten Integralen und Reihensummen. Berlin 1867." aufgestellt sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es zeigte sich dort u. A., was für unsern gegenwärtigen Zweck wichtig ist, die endliche Bestimmtheit von $\int_a^b f(z)\,dz$ als verbürgt, wenn $f(z)$ nur in einzelnen Punkten des Integrationsweges $\mathfrak{w}$ aufhört, endlich und bestimmt zu sein, in diesen singulären Punkten aber folgende Eigenschaften besitzt:

1. In den singulären Punkten z', durch welche der Integrationsweg $\mathfrak{w}$ hindurch führt, muss durch einen zweiten Punkt z von $\mathfrak{w}$ die Grösse

$$\underset{z=z'}{Lim}\,.\,(z-z')f(z)$$

einen bestimmten endlichen Werth erlangen.

2. In den Endpunkten z' des Integrationsweges muss

$$\underset{z=z'}{Lim}\,.\,(z-z')\,l^1(z-z')\,l^2(z-z')\ldots[l^n(z-z')]^{1+\varepsilon}f(z)$$

für irgend eine Nummer n und ein positives ε endlich sein, wobei $l^1(z-z')=l(z-z')$, $l^m(z-z')=l\,.\,l^{m-1}(z-z')$ gesetzt ist. Dies reducirt sich in den einfachsten Fällen darauf, dass es eine positive Grösse μ giebt, welche

$$\underset{z=z'}{Lim}\,.\,(z-z')^{1-\mu}f(z)=o$$

macht.

Indem wir nun die Function $f(z)$ den aufgezählten Bedingungen unterwerfen, wollen wir den Integrationsweg $\mathfrak{w}$ als gradlinig annehmen, so dass seine Elemente dz sämmtlich gleiche Richtungswinkel erhalten.

Wenn wir daher die dz dadurch völlig gleich machen, dass wir ihnen auch gleiche absolute Grösse geben, so folgt aus der Definition des bestimmten Integrals, nach welcher

$$\int_a^b f(z)\,dz = Lim\,.\,\Sigma f(z)\,dz$$

ist, unmittelbar die Gleichung:

$$(1.)\quad \int_a^b f(z)\,dz:(b-a)=Lim\,.\,\frac{\Sigma X}{n}+i\,.\,Lim\,.\,\frac{\Sigma Y}{n}.$$

Diese interpretirt sich aber in folgender Weise:

Lehrsatz I.

Theilt man den graden Integrationsweg $\mathfrak{w}$ des Integrals in unendlich viele gleiche Theile, so ist

$$\int_a^b f(z)\,dz:(b-a)$$

der Punkt der mittleren Entfernung aller Punkte, welche in der Bahn $\mathfrak{W}$ der Function $f(z)$ den Theilpunkten von $\mathfrak{w}$ entsprechen.

— Dass man hierbei die Punkte von $\mathfrak{w}$ überspringen darf, in denen $f(z)$ einen unbestimmten (endlichen) Werth besitzt, liegt auf der Hand, da die mit unbestimmt endlichen Zählern versehenen Brüche $\frac{X}{n}, \frac{Y}{n}$ für unendlich grosse n verschwinden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Mangel dieser Interpretation, dass man ausser der Gestalt der Bahn $\mathfrak{w}$ noch die Vertheilung gewisser Punkte auf ihr kennen muss, lässt sich verringern, wenn man annimmt, dass $f(z)$ nach der Richtung des Integrationsweges $\mathfrak{w}$ differentiirbar sei.

Denn bezeichnet man die in Rede stehende Ableitung durch $f'(z)$, so wird identisch:

$$b-a=\int_a^b dz=\int_{f(a)}^{f(b)}\frac{df(z)}{f'(z)},\ \int_a^b f(z)dz=\int_{f(a)}^{f(b)}\frac{f(z)\,df(z)}{f'(z)};$$

mithin, wenn man noch die Bezeichnungen

$$(2.)\quad \begin{cases} df(z)=dv\,.\,e^{i\varphi}, \\ f'(z)=v'\,.\,e^{i\varphi'} \end{cases}$$

einführt und unter V die Länge der vom Punkte $f(a)$ bis zum Punkte $f(b)$ reichenden Bahn $\mathfrak{w}$ der Function $f(z)$ versteht:

$$(3.)\quad \int_a^b f(z)dz:(b-a)=\frac{\int_o^V X\frac{dv}{v'}}{\int_o^V\frac{dv}{v'}}+i\,.\,\frac{\int_o^V Y\frac{dv}{v'}}{\int_o^V\frac{dv}{v'}}.$$

Zur Ableitung dieser Formel bemerken wir noch, dass $df(z)$ und dv augenscheinlich die Elemente von $\mathfrak{W}$ und von V sind, dass in Bezug auf die letzte Grösse diejenigen Punkte übersprungen werden dürfen, in denen $f(z)$ unbestimmt wird, und dass der in

$$\int_{f(a)}^{f(b)}\frac{f(z)\,df(z)}{f'(z)}:\int_{f(a)}^{f(b)}\frac{df(z)}{f'(z)}=\int_o^V f(z)\frac{dv}{v'}.e^{i(\varphi-\varphi')}:\int_o^V\frac{dv}{v'}.e^{i(\varphi-\varphi')}$$

auftretende Factor $e^{i(\varphi-\varphi')}$ sich weghebt, weil $(\varphi-\varphi')$ als Richtungswinkel der Elemente

$$dz=\frac{df(z)}{f'(z)}=\frac{dv}{v'}.\ e^{i(\varphi-\varphi')}$$

des graden Integrationsweges $\mathfrak{w}$ constant ist.

Die Gleichung (3.) lässt sich aber in folgender Weise interpretiren:

Lehrsatz II.

Unter der Voraussetzung eines graden Integrationsweges ist

$$\int_a^b f(z)\,dz:(b-a)$$

die complexe Coordinate des Schwerpunktes der entsprechenden Bahn $\mathfrak{W}$ von $f(z)$, wenn man die letztere proportional dem Modul von $\frac{1}{f'(z)}$ belastet denkt.

Die Grösse der Belastung von $\mathfrak{W}$ lässt sich ferner durch Ausbreitung eines Flächenstücks um diese Linie veranschaulichen.

Denn stellt man sich vor, dass eine Grade, welche die Länge c und den constanten Richtungswinkel $(\gamma+\varrho)$ hat, mit ihrem Mittelpunkte auf $\mathfrak{W}$ entlang gleitet, so ist die Abweichung beider $=\varphi-(\gamma+\varrho)$, mithin die Grösse des bestrichenen Flächenelements

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$= c \sin(\varphi - \gamma - \varrho)\, dv;$$

und sein Schwerpunkt liegt in $\mathfrak{W}$. Soll daher dieser Ausdruck $= k \cdot \frac{dv}{v'}$ sein, so muss

$$c = \frac{k}{v' \sin(\varphi - \gamma - \varrho)},$$

oder wenn man unter ϱ den Richtungswinkel des Integrationsweges versteht,

$$c = \frac{k}{v' \sin(\varphi' - \gamma)}$$

gesetzt werden, weil, wie schon oben angegeben wurde, $\varphi - \varphi' = \varrho$ ist.

$v' \sin(\varphi' - \gamma)$ bedeutet aber den Abstand des Punktes $f'(z)$ von einer durch den Nullpunkt gehenden Graden, deren Richtungswinkel γ mit der Ablenkung der bewegten Graden c gegen den Integrationsweg $\mathfrak{w}$ übereinstimmt.

Man kann daher den obigen Lehrsatz II. auch in folgender Weise aussprechen:

Lehrsatz III.

Dreht man das Axenkreuz der Ebene, in welcher die längs der Graden $\mathfrak{w}$ gewonnenen Ableitungen $f'(z)$ verzeichnet werden, um einen eben so grossen Winkel, als um welchen eine mit ihrer Mitte auf $\mathfrak{W}$ entlang gleitende Strecke von der Richtung des Weges $\mathfrak{w}$ abweicht, und lässt die Länge dieser Strecke sich so verändern, dass sie den neuen Ordinaten von $f'(z)$ umgekehrt proportional bleibt, so stellt der Schwerpunkt des durch die bewegliche Strecke bestrichenen Flächenstücks den Werth von

$$\int_a^b f(z)\, dz : (b - a)$$

auf dem Integrationswege $\mathfrak{w}$ dar.

Zusatz.

Ist die Bahn von $f'(z)$ eine durch den Coordinatenanfang gehende Grade, so darf man die das fragliche Flächenstück bestreichende Strecke dem Modul von $f'(z)$ umgekehrt proportional machen.

— Denn dann sind die Moduln den Ordinaten proportional, oder, was dasselbe heisst, das constante $\sin(\varphi' - \gamma)$ hebt sich in der Formel fort.

Vornehmlich wichtig an unsern Sätzen ist das zweifellose Resultat, dass Modul und Argument des Quotienten $\int_a^b f(z)\, dz : (b - a)$ Mittelwerthe zwischen den Moduln, beziehungsweise Argumenten von $f(z)$ auf dem graden Integrationswege sind, und dass die Stelle der kleinsten $f'(z)$ eine Attraction auf sie ausübt.

Der Zusatz findet seine Anwendung hauptsächlich bei reellen Functionen einer reellen Veränderlichen, bei welchen dann auch $f'(z)$ reell wird. Trägt man die reciproken Werthe dieser Funktion als rechtwinklige Ordinaten zu der in der reellen Axe liegenden Bahn $\mathfrak{W}$ von $f(z)$ auf beiden Seiten ab, so bestimmt sich dadurch das Flächenstück, dessen Schwerpunkt ermittelt werden soll. — Handelt es sich ferner rum, ihn näherungsweise zu berechnen, so kann man u. A. dadurch zum Ziele gelangen, man an die Stelle der Function $\frac{1}{f'(z)}$ von $f(z)$ eine algebraische Function von $f(z)$ welche sich an jene hinreichend genau anschmiegt. Ist z. B. die Begränzung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

des Flächenstücks nahezu grade, so giebt schon der Ausdruck

$$\frac{1}{3} \cdot \left\{ f(a) + f(b) + \frac{f(a) f'(b) + f(b) f'(a)}{f'(a) + f'(b)} \right\}$$

den Schwerpunkt ziemlich genau.

B. Allgemeine Methode zur Berechnung der Werthe der Veränderlichen, für welche eine Function einen verlangten Werth annimmt.

Da jeder Unendlichkeitspunkt einer Function ein Nullpunkt der reciproken Function ist, und es keiner Schwierigkeit unterliegt, zu ermitteln, was aus der Function für $z = \infty$ werde, so können wir die Aufgabe auch so aussprechen, dass die endlichen Wurzeln einer Gleichung gefunden werden sollen.

Diese Gleichung stellen wir in der Form

$$(1.) \quad \varphi(z) = f(z)$$

dar und bezeichnen eine ihrer Wurzeln durch ζ.

Ferner setzen wir voraus, dass beide Functionen $\varphi(z)$ und $f(z)$ in der Nähe des Punktes $z = \zeta$ endlich bestimmt, stetig und monogen seien, indem wir durch den letzten Ausdruck mit Cauchy die Eigenschaft bezeichnen, dass die Ableitungen $\varphi'(z)$ und $f'(z)$ nicht von der Differentiationsrichtung abhängen.*)

Dann lassen sich durch die Gleichung

$$(2.) \quad \varphi(z_{n+1}) = f(z_n)$$

die Grössen z_{n+1} und z_n in eine solche Abhängigkeit von einander setzen, dass z_{n+1} vom Punkte $z = \zeta$ aus einen stetigen (im Allgemeinen krummen) Weg $\mathfrak{w}'_{n+1}$ beschreibt, wenn z_n von demselben Punkte aus einen graden Weg $\mathfrak{w}_n$ zurücklegt; denn es folgt aus der obigen Voraussetzung:

$$(3.) \quad \begin{cases} \varphi'(z_{n+1})\, dz_{n+1} = f'(z_n)\, dz_n, \\ z_{n+1} - \zeta = \displaystyle\int_{\zeta}^{z_n} \frac{f'(z_n)}{\varphi'(z_{n+1})}\, dz_n, \end{cases}$$

so dass eine Unstetigkeit des Weges $\mathfrak{w}'_{n+1}$ nur eintreten kann, wo die Function

$$\frac{dz_{n+1}}{dz_n} = \frac{f'(z_n)}{\varphi'(z_{n+1})} = \psi(z_n)$$

von einer hinreichend hohen Ordnung unendlich wird. (Vergl. das Citat aus der erwähnten Abh.)

Indem wir uns nun auf den Lehrsatz II. des vorigen Abschnittes berufen, leiten wir aus der letzten Gleichung (3.) sofort die folgende ab:

$$(4.) \quad z_{n+1} - \zeta = (z_n - \zeta) \cdot s_n,$$

wo s_n den Schwerpunkt der dem graden Wege $\mathfrak{w}_n$ von z_n entsprechenden Bahn $\mathfrak{B}_n$ von $\frac{dz_{n+1}}{dz_n} = \psi(z_n)$ bedeutet, wenn man diese proportional dem reciproken Modul von $\psi'(z_n)$ belastet denkt.

*) Die Begriffe einer monogenen Function und einer Function von $x + iy$ im Sinne Riemanns decken sich nicht, sondern der letztere ist weiter.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nimmt man daher irgend einen Werth $z_1 = \zeta_1$ an und bestimmt $\zeta_2, \zeta_3, \ldots$ nach und nach durch Gl. (2.), so ergiebt sich durch wiederholte Anwendung der Gl. (4.) die folgende:

$$(5.) \quad \zeta_{n+1} - \zeta = (\zeta_1 - \zeta) \,.\, \prod_{m=1}^{m=n} s_m,$$

welche ohne Weiteres erkennen lässt, dass $\underset{n=\infty}{Lim} \,.\, \zeta_n = \zeta$ sein muss, wenn $mod.\, s_n < 1$ ist und bleibt, wie gross man auch n annehmen mag. Hierzu ist aber offenbar im Allgemeinen nöthig, dass $mod.\, \psi(\zeta)$ selbst < 1 sei, weil nur in diesem Falle — von der Möglichkeit $mod.\, \psi(\zeta) = 1$ sehen wir ab — der Punkt ζ_{n+1} stets näher an ζ liegen kann, als ζ_n; wie sich aus (4.) in evidenter Weise ergiebt.

Um uns nicht in unfruchtbare Subtilitäten zu verlieren, wollen wir für das Weitere nur beachten, dass jedenfalls $mod.\, s_n < 1$ hervorgeht, wenn der ganze Weg $\mathfrak{B}_n$ innerhalb eines mit dem Radius 1 um den Coordinatenanfang beschriebenen Kreises verläuft, wie die Belastung auch vertheilt sein mag. Da dann ζ_{n+1} dem Punkte ζ näher gerückt ist, als ζ_n [Gl. (4.)], so wird auch $mod.\, s_{n+1} < 1$ sein, wenn ein um ζ mit dem Radius $\zeta\zeta_n$ gezogener Kreis nur Punkte einschliesst, in denen $mod.\, \psi(z) < 1$ ist, u. s. f.

Man braucht aber die letzte Bedingung nicht immer auf den ganzen Kreis auszudehnen, da man es bei reellen Wurzeln reeller Gleichungen nur mit einem Durchmesser oder Radius zu thun hat. Dann bezeichnet man durch ϱ_n den Richtungswinkel des graden Weges $\mathfrak{w}_n$, durch ψ_n denjenigen von $\mathfrak{B}_n$ im Punkte $\psi(\zeta_n)$ und durch ϱ'_{n+1} denjenigen von $\mathfrak{w}'_{n+1}$ im Punkte ζ_{n+1}, so ist in Folge der Gl. (3.): $\varrho'_{n+1} = \varrho_n + \psi_n$, und daher ϱ'_{n+1} von ϱ_n um π oder 2π verschieden, wenn $\psi_n = \pi$ oder $= 2\pi$ ist.

Aus dieser Gleichung geht aber auch noch hervor, dass die Wege $\mathfrak{w}'_1, \mathfrak{w}'_2, \mathfrak{w}'_3, \ldots$ um den Punkt ζ einen regelmässigen Stern bilden, dessen Strahlen in diesem Punkte um den Richtungswinkel von $\psi(\zeta)$ von einander abweichen.

Was uns von den Resultaten dieser Betrachtung das Wichtigste ist, enthält der folgende

Lehrsatz.

Liegt der Punkt ζ_1 im Innern eines Kreises, dessen Mittelpunkt ζ der Gleichung

$$\varphi(\zeta) = f(\zeta)$$

genügt, während alle Punkte seiner Fläche, indem man stets

$$\varphi(z_{n+1}) = f(z_n)$$

setzt, der Grösse

$$\frac{dz_{n+1}}{dz_n} = \psi(z_n) = \frac{f'(z_n)}{\varphi'(z_{n+1})}$$

einen die Einheit nicht erreichenden Modul ertheilen, so ist jederzeit

$$\underset{n=\infty}{Lim} \,.\, \zeta_n = \zeta,$$

wie man im Übrigen auch den Punkt ζ_1 gewählt haben mag.

Zusatz.

Ist ζ eine reelle Wurzel einer Gleichung zwischen reellen Functionen, so ergiebt sich ζ als Grenzwerth von ζ_n,

1.) wenn die Ableitung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{f'(z_1)}{\varphi'(z_2)}$$

zwischen $z_1 = \zeta$ *und* $z_1 = \zeta_1$ *überall positiv und kleiner als die Einheit ist;*

2.) wenn sie zwischen $z_1 = \zeta_1$ *und* $z_1 = \zeta_2$ *überall negativ und, absolut genommen, kleiner als die Einheit ist; und*

3.) wenn sie zwischen $z_1 = \zeta_1$ *und* $z_1 = \zeta - (\zeta_1 - \zeta)$ *nirgends einen die Einheit erreichenden Modul besitzt, wie sich auch ihr Vorzeichen in diesem Intervall ändern mag.*

Anstatt der recurrirenden Formel (2.) verwendet man übrigens mit grösserem Nutzen wegen der stärkeren Convergenz die folgende:

$$(6.)\quad \varphi(\zeta_{n+1}) = \frac{f(\zeta_n)\,\varphi'(\zeta_1) - \varphi(\zeta_n)\,f'(\zeta_1)}{\varphi'(\zeta_1) - f'(\zeta_1)},$$

und vor allen Dingen diese:

$$(7.)\quad \varphi(\zeta_{n+1}) = \frac{f(\zeta_n)\,\varphi'(\zeta_n) - \varphi(\zeta_n)\,f'(\zeta_n)}{\varphi'(\zeta_n) - f'(\zeta_n)} = f_n(\zeta_n);$$

denn die Gleichung

$$\varphi(z) = \frac{f(z)\,\varphi'(\zeta_n) - \varphi(z)\,f'(\zeta_n)}{\varphi'(\zeta_n) - f'(\zeta_n)} = f_n(z),$$

welche mit (1.) gleiche Wurzeln besitzt, bietet den Vortheil, dass für sämmtliche Werthe von n die Ableitungen

$$\frac{dz_{n+1}}{dz_n} = \frac{f'_n(z_n)}{\varphi'(z_{n+1})} = \frac{f'(z_n)\,\varphi'(\zeta_n) - \varphi'(z_n)\,f'(\zeta_n)}{\varphi'(z_{n+1})\,[\varphi'(\zeta_n) - f'(\zeta_n)]}$$

beziehungsweise an den Stellen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n, \ldots$ verschwinden und daher die Werthe von s_n in (5.) bald sehr klein geben.

Zum Zwecke der praktischen Rechnung muss übrigens $\varphi(z)$ eine leicht umzukehrende Function sein, weshalb sie sich im Allgemeinen am einfachsten gestaltet, wenn $\varphi(z) = z$ gemacht wurde.

Für die Auflösung der Gleichung

$$z = f(z)$$

ergeben sich übrigens aus dem Obigen die Formeln:

$$(8.)\quad \zeta_{n+1} = f(\zeta_n),$$

$$(9.)\quad \zeta_{n+1} = \frac{f(\zeta_n) - \zeta_n f'(\zeta_1)}{1 - f'(\zeta_1)} = \zeta_n - \frac{\zeta_n - f(\zeta_1)}{1 - f'(\zeta_1)},$$

$$(10.)\quad \zeta_{n+1} = \frac{f(\zeta_n) - \zeta_n f'(\zeta_n)}{1 - f'(\zeta_n)} = \zeta_n - \frac{\zeta_n - f(\zeta_n)}{1 - f'(\zeta_n)},$$

von denen die letzte am wirksamsten ist. Die Anwendbarkeit der beiden letzten entscheidet sich aber danach, ob

$$(11.)\quad \frac{dz_2}{dz_1} = \frac{f'(z_1) - f'(\zeta_1)}{1 - f'(\zeta_1)} = 1 - \frac{1 - f'(z_1)}{1 - f'(\zeta_1)}$$

den oben aufgestellten Bedingungen genügt.

Beispiele.

1.) Gauss giebt in seiner *Theoria motus corporum coelestium* p. 10. den Beweis, dass man, nach der recurrirenden Formel

$$u_{n+1} = \mu + e \sin u_n$$

rechnend, die reelle Wurzel der Gleichung

$$u = \mu + e \sin u$$

finden muss, wenn $e < 1$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man erkennt auf der Stelle, dass diese Auflösung mit unserm Satze übereinstimmt, da

$$mod.\ \frac{du_{n+1}}{du_n} = mod.\ e \cos u_n < 1$$

ist, von welchem Anfangswerthe u_1 man auch ausgehen mag; so wie, dass der umgekehrte Weg $e \sin u_{n+1} = u_n - \mu$ immer weiter von der Wurzel entfernt.

Will man aber eine schneller wirkende Formel haben, so ergiebt sich aus (10.):

$$u_{n+1} = \frac{\mu + e(\sin u_n - u_n \cos u_n)}{1 - e \cos u_n}$$

als geeignet für diesen Zweck.

2.) Um die Rechnung an einem numerischen Beispiele durchzuführen, wählen wir die von Gauss in seiner Abhandlung vom Jahre 1849 benutzte algebraische Gleichung

$$z^7 + 28z^4 = 480;$$

und zwar wollen wir die zwischen $z = 1$ und $z = 2$ liegende reelle Wurzel berechnen, indem wir die Gleichung zunächst so transformiren, dass sie für unsere Methode möglichst ungünstig wird, und dann, indem wir ihr eine günstigere Form geben.

Zunächst schreiben wir sie in der Gestalt

$$z = \frac{480}{z^6 + 28z^3} = f(z),$$

so dass

$$f'(z) = -\frac{2880(z^3 + 14)}{(z^3 + 28z^2)^2}$$

in dem von $z = 1$ bis $z = 2$ reichenden Intervall zwischen 3 und 48 liegt. Dessen ungeachtet wirkt noch die Formel (10.), welche in unserem Falle

$$\zeta_{n+1} = \frac{3360\,\zeta_n(\zeta_n^3 + 16)}{\zeta_n^4(\zeta_n^3 + 28)^2 + 2880(\zeta_n^3 + 14)}$$

giebt, weil der für $\zeta_1 = 2$ verschwindende Differentialquotient (11.)

$$\frac{dz_2}{dz_1} = 1 - \frac{18}{73} \cdot \left[1 + \frac{2880(z_1^3 + 14)}{z_1^4(z_1^3 + 28)^2}\right]$$

von $z_1 = \zeta_1$ bis zu dem aus ihr berechneten Werthe $z_1 = \zeta_2 = \frac{140}{73} = 1{,}91781$ negativ und, absolut genommen, < 1 ist. — Bei genauer Rechnung findet man nähmlich, dass $\frac{dz_2}{dz_1}$ in diesem Intervall zwischen 0 und $-0{,}146037$ liegt.

Daher liegt ζ zwischen $\zeta_1 = 2$ und $\zeta_2 = 1{,}91781$; und alle folgenden Werthe ζ_n geben den Werthe ζ genauer. Der nächste ist schon $\zeta_3 = 1{,}922862$, welcher von dem von Gauss berechneten $\zeta = 1{,}9228841$ nur noch in der sechsten Ziffer abweicht, während ζ_4, d. i. der dritte berechnete, den Werth von ζ genauer giebt, als sich mit siebenstelligen Tafeln berechnen lässt. — Von der selbstständigen Beurtheilung des Fehlers sprechen wir später.

Um dieselbe Wurzel auch nach einer günstigeren Formel zu berechnen, schreiben wir die vorgelegte Gleichung in der Form

$$z = \sqrt[4]{\frac{480}{28 + z^3}} = f(z).$$

Dann ist schon die Formel (8.) brauchbar, weil

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{dz_2}{dz_1} = f'(z_1) = -\frac{3z_1^2}{2(28+z_1^3)} \cdot \sqrt[4]{\frac{30}{28+z_1^3}}$$

in dem von $z_1 = 1$ bis $z_1 = 2$ reichenden Intervall ungefähr zwischen $-\frac{1}{19}$ und $-\frac{1}{6}$ liegt.

Die Formel (10.) aber, welche hier als

$$\zeta_{n+1} = f(\zeta_n) \cdot \frac{1 + \frac{3\zeta_n^2}{4(28+\zeta_n^3)} \cdot \zeta_n}{1 + \frac{3\zeta_n^2}{4(28+\zeta_n^3)} \cdot f(\zeta_n)}$$

erscheint, giebt, nachdem $\zeta_1 = 2$ gesetzt ist, die beiden Näherungswerthe

$$\zeta_2 = \frac{14 \cdot \sqrt[4]{\frac{40}{3}}}{12 + \sqrt[4]{\frac{40}{3}}} = 1{,}9231\,;\ \zeta_3 = 1{,}9228841;$$

von denen schon der zweite völlig mit dem von Gauss berechneten übereinstimmt.

Beurtheilung des Fehlers.

Hat man sich nach den in unserm Satz angegebenen Kennzeichen überzeugt, dass die berechneten Werthe zu dem gesuchten convergiren, so hält es auch nicht schwer, für die Grösse des jedes Mal gemachten Fehlers eine obere Grenze anzugeben; und zwar dient hierzu unmittelbar die Gleichung (4.):

$$\zeta_{n+1} - \zeta = (\zeta_n - \zeta) \cdot s_n,$$

in welcher $(\zeta_{n+1} - \zeta)$ und $(\zeta_n - \zeta)$ die Fehler zweier auf einander folgenden Näherungswerthe sind. In anderer Form geschrieben, lautet sie

$$(12.)\quad \zeta_{n+1} - \zeta = -(\zeta_{n+1} - \zeta_n)\frac{s_n}{1 - s_n},$$

so dass man in dieser Gleichung einen Anhalt hat zur Beurtheilung des Fehlers nicht blos im Modul, sondern auch im Argument, da s_n in Bezug auf beide Stücke durch Mittelwerthe der $\psi(z_n)$ bestimmt wird, und die Differenz $(\zeta_{n+1} - \zeta_n)$ bekannt ist.

Verlangt man eine möglichst grosse Genauigkeit der Fehlerangabe, so muss man bei der Verwendung von (12.) die jedesmalige Natur von $\psi(z_n)$ auf $\mathfrak{w}_n$ berücksichtigen. Will man ihr aber einen weiteren Spielraum lassen, so erhellt sofort aus (12.), dass unterallen Umständen der Modul des Fehlers

$$(13.)\quad mod.(\zeta_{n+1} - \zeta) < mod.(\zeta_{n+1} - \zeta_n) \cdot \frac{p}{1-p}$$

ist, wo p den grössten Modul bedeutet, welchen $\psi(z_n) = \frac{f'(z_n)}{\varphi'(z_{n+1})}$ auf dem Wege $\mathfrak{w}_n$ annehmen kann. — Rechnet man nach den Formeln (9.) oder (10.), so muss man sich hier natürlich überall $f_1(z)$, beziehungsweise $f_n(z)$ für $f(z)$ gesetzt denken.

Benutzen wir die Formel (13.) zur Beurtheilung des Fehlers von ζ_3 im letzten Beispiel, so ist zu berücksichtigen, dass

$$f_2(z) = \frac{f(z) - z\,f'(\zeta_2)}{1 - f'(\zeta_2)},\ f_2'(z) = \frac{f'(z) - f'(\zeta_2)}{1 - f'(\zeta_2)} = \psi(z)$$

war, und dass, weil ζ zwischen ζ_2 und ζ_3 liegt, wegen des Verschwindens von $\psi(\zeta_2)$ jedenfalls

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$p < mod.\ \psi(\zeta_3) = mod.\ \frac{f'(\zeta_3) - f'(\zeta_2)}{1 - f'(\zeta_2)} = 0{,}000\,020\,621\,6$$

ist. Da ferner $\zeta_2 - \zeta_3 = 0{,}000\,242\,5$ ist, so ergiebt sich daher, dass der Fehler von $\zeta_3 < 0{,}000\,000\,005$ ist, dass also der fragliche Werth ζ_3 mindestens in den ersten 8 Decimalstellen richtig ausgefallen wäre, wenn man ihn so weit berechnet hätte.

C. Ueber die Glieder der Taylor'schen Reihe und eine auf ihre Eigenschaften gestützte Methode zur Berechnung der singulären Punkte und der Wurzeln der Functionen.

Ist $f(z)$ eine in dem Gebiete $\mathfrak{Z}$ der z- Fläche endliche und eindeutig bestimmte Function der complexen Veränderlichen z, und ihre erste Ableitung nicht blos endlich und bestimmt, sondern auch unabhängig von der Differentiationsrichtung, so gilt bekanntlich ein Gleiches von allen höheren Ableitungen, so lange deren Ordnungszahl endlich ist.

Wir wollen zunächst untersuchen, wie sie sich verhalten, wenn ihre Ordnungszahl ins Unendliche wächst.

Zu dem Zwecke sei $z = a$ ein algebraisch singulärer Punkt der Function $f(z)$, das soll heissen: ein Punkt der z- Fläche, in welchem für irgend einen Werth von m

$$\lim_{z=a} . (z-a)^m f(z) = A$$

eine von der Annäherungsrichtung unabhängige, bestimmte, endliche, nicht verschwindende Grösse ist, und in dessen Bereich aus $(z-a)^m f(z)$ durch die Substitution $(z-a) = \zeta^\mu$ eine eindeutig bestimmte, monogene Function von ζ hervorgeht, während $f(z)$ selbst in ihm unendlich oder vieldeutig wird.

Da sich diese Function von ζ nach steigenden Potenzen von ζ entwickeln lässt, so folgt:

$$f(z) = (z-a)^{-m} . \left\{ A + A' . (z-a)^{\frac{1}{\mu}} + A'' . (z-a)^{\frac{2}{\mu}} + \cdots \right\},$$

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = (z-a)^{-(m+n)} . \left\{ \binom{-m}{n} A + \binom{-m+\frac{1}{\mu}}{n} A' (z-a)^{\frac{1}{\mu}} + \binom{-m+\frac{2}{\mu}}{n} A'' (z-a)^{\frac{2}{\mu}} + \cdots \right\}.$$

Nach der Annahme verschwindet A nicht, weshalb auch das erste Glied der letzten Reihe für kein n verschwinden kann, wenn m eine positive Zahl, d. h. wenn $z = a$ ein Unendlichkeitspunkt von $f(z)$ ist. Eben so verhält es sich, wenn bei einem blossen Verzweigungspunkte $z = a$ der Exponent m eine (negative) gebrochene Zahl ist. Hat aber das zu einem blossen Verzweigungspunkte gehörende m einen ganzzahligen (negativen) Werth, so muss zwar der Binomialcoefficient $\binom{-m}{n}$ für hinreichend hohe n verschwinden; jedoch wird es dann der Verzweigung wegen in der Reihe für $f(z) . (z-a)^m$ wenigstens ein nicht verschwindendes Glied $A^{(k)} (z-a)^{\frac{k}{\mu}}$ geben, in welchem der Exponent $\frac{k}{\mu}$ eine gebrochene Zahl ist, und dieses wird auch bei der Differentiation für kein n verschwinden, weil der hinzutretende Factor $\binom{-m+\frac{k}{\mu}}{n}$ nicht verschwindet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daher erscheint die letzte Gleichung, nachdem n eine gewisse endliche Nummer überschritten hat, jederzeit in der Form:

$$\frac{(z-a)^{\alpha+n} f^{(n)}(z)}{\binom{-\alpha}{n} n!} = A + \frac{\binom{-\alpha+\frac{1}{\mu}}{n}}{\binom{-\alpha}{n}} A'(z-a)^{\frac{1}{\mu}} + \frac{\binom{-\alpha+\frac{2}{\mu}}{n}}{\binom{-\alpha}{n}} A''(z-a)^{\frac{2}{\mu}} + \cdots,$$

indem A eine endliche, nicht verschwindende — mit dem obigen A nicht nothwendig übereinstimmende — Constante, und

$$\alpha = m - \frac{k}{\mu}$$

ebenfalls eine durch die Natur der Function $f(z)$ im Punkte $z=a$ bedingte Constante bedeutet. — Beide Constanten, A und α, werden durch die Reihenentwickelung der Function $f(z)$ leicht bestimmt, indem

$$A(z-a)^{-\alpha}$$

das erste nicht verschwindende Glied derselben vorstellt, in welchem α entweder eine positive oder eine gebrochene negative Zahl ist.

Die Zahl α, welche die *Charakteristik* des Punktes $z=a$ heissen soll, stimmt demnach, wenn sie positiv ist, mit der Ordnung überein, von welcher die Function in ihm unendlich wird, kennzeichnet aber wenn sie negativ ist, bloss eine Verzweigung der Function.

Wir bemerken noch, dass die rechte Seite der letzten Gleichung sich auf ihr Anfangsglied A reducirt, wenn man n unendlich gross werden lässt; denn es ist:

$$Lim. \frac{\binom{-\alpha+\frac{r}{\mu}}{n}}{\binom{-\alpha}{n}} = Const. Lim \frac{n^{\alpha-\frac{r}{\mu}-1}}{n^{\alpha-1}} = Const. Lim\, n^{-\frac{r}{\mu}} = o.$$

Dividirt man sie aber durch

$$(z-a)^{\alpha+n} : \binom{-\alpha}{n},$$

so folgt:

$$(1.)\quad \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \binom{-\alpha}{n}(z-a)^{-(\alpha+n)} . \varphi(z,n) + \psi(z),$$

wo der Ausdruck

$$\varphi(z,n) = A + \frac{\binom{-\alpha+\frac{1}{\mu}}{n}}{\binom{-\alpha}{n}} A'(z-a)^{\frac{1}{\mu}} + \frac{\binom{-\alpha+\frac{2}{\mu}}{n}}{\binom{-\alpha}{n}} A''(z-a)^{\frac{2}{\mu}} + \cdots$$

alle Glieder enthalten soll, in denen der Exponent $\frac{k}{\mu} < \alpha + n$ ist, so dass $\psi(z)$ eine für $z=a$ endliche Function bedeutet, und die für alle endlichen Werthe von z endliche und bestimmte Function $\varphi(z,n)$ für $z=a$ den Werth A annimmt, wie auch für $n=\infty$.

Da nun die Gl. (1.) für jeden beliebigen algebraisch singulären Punkt gilt, so schliesst man, dass

$$(2.)\quad \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \psi(z) + \Sigma \binom{-\alpha_s}{n}(z-a_s)^{-(\alpha_s+n)} . \varphi_s(z,n)$$

gesetzt werden kann; wo wir unter den α_s die Charakteristiken aller algebraisch singulären Punkte a_s verstehen, welche auf einer keinen singulären Punkt von $f(z)$ einschliessenden Kreislinie $\mathfrak{K}$ liegen, und deren $(\alpha_s + n)$ für die gedachte Nummer n schon $> o$ geworden ist. Dabei soll diese Nummer n überhaupt nicht grösser genommen werden, als nöthig ist, damit irgend ein $(\alpha_s + n) > o$ werde (so dass bei dem Vor-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

kommen eines positiven α_s die Nummer $n = o$ gedacht wird); und zwar zu dem Zweck, um von allen sonst noch möglichen Singularitäten möglichst wenige auszuschliessen, wenn wir verlangen, dass $\psi(z)$ auf $\mathfrak{K}$ endlich bestimmt sei.

Wird nehmlich der letzten Forderung Genüge geleistet, so ist, wie wir in der schon oben citirten Abhandlung gezeigt haben, jederzeit

$$\underset{\omega=\infty}{Lim} \cdot \frac{(\zeta - t)^{\omega}\, \psi^{(\omega)}(t)}{(\omega - 1)!} = o,$$

wenn wir unter $z = t$ den Mittelpunkt des Kreises $\mathfrak{K}$ und unter ζ einen Punkt seiner Peripherie verstehn. Und deshalb verschwindet für unendlich grosse ω das erste Glied auf der rechten Seite der aus (2.) folgenden Gleichung;

$$(3.)\quad \frac{(t-\zeta)^{\alpha+\omega} f^{(\omega)}(t)}{\binom{-\alpha}{\omega} \cdot \omega!} = \frac{(t-\zeta)^{\alpha+n}}{(n+1)\binom{-\alpha}{\omega}\binom{\omega}{n+1}} \cdot \frac{(t-\zeta)^{\omega-n}\, \psi^{(\omega-n)}(t)}{(\omega-n-1)!}$$

$$+ \Sigma \frac{\binom{-\alpha_s}{\omega}}{\binom{-\alpha}{\omega}} \cdot \frac{(t-\zeta)^{\alpha+\omega}}{(t-a_s)^{\alpha_s+\omega}} \cdot \chi_s(t,\omega),$$

zumal da

$$\binom{-\alpha}{\omega}\binom{\omega}{n+1} = \pm\, Const \,.\, \omega^{\alpha-1} \,.\, \omega^{n+1} = \pm\, Const \,.\, \omega^{\alpha+n} = \infty$$

wird, wenn nur $\alpha + n > o$ ist. Die hier durch $\chi_s(t,\omega)$ bezeichneten Functionen gehen aus den $\varphi_s(z,n)$ ohne Vermehrung der Glieder hervor, wenn man $z = t$, $n = \omega$ substituirt, weshalb

$$\underset{\omega=\infty}{Lim} \cdot \chi_s(t,\omega) = A_s$$

ist.

Da über α, ausser dass $\alpha + n > o$ sei, noch keine Festsetzung getroffen wurde, so ist es gestattet, dadurch den grössten Werth zu bezeichnen, welcher unter den α_s vorkommt, so dass

$$\frac{\binom{-\alpha_s}{\omega}}{\binom{-\alpha}{\omega}}$$

entweder constant $= 1$ oder im Grenzfalle $= o$ wird, weil

$$Const \,.\, \frac{\omega^{\alpha_s - 1}}{\omega^{\alpha - 1}} = Const \,.\, \omega^{\alpha_s - \alpha}$$

ein Aequivalent dieses Quotienten ist.

Bezeichnen wir noch

$$\zeta - t = re^{i\varrho},\ a_s - t = re^{i\varrho_s},$$

d. i., benennen wir durch r den Radius des Kreises $\mathfrak{K}$, und durch ϱ und ϱ_s die Richtungswinkel der nach den Punkten ζ und a_s führenden Radien, so erhellt daher die Richtigkeit des folgenden Satzes. Um ihn bequemer aussprechen zu können, geben wir aber zuvor die

Definition.

Der um den Mittelpunkt $z = t$ mit dem Radius r gezogene Kreis $\mathfrak{K}$, in dessen Fläche die monogene Function $f(z)$ zugleich mit ihrer Ableitung überall endlich, ein-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

deutig bestimmt und stetig ist, während auf seiner Peripherie singuläre Punkte liegen, soll der *Convergenzkreis* des Punktes t heissen.

Der Convergenzkreis heisst ein *s-fach algebraischer von der Ordnung* α: 1.) wenn auf ihm s Unendlichkeitspunkte z' von der Beschaffenheit liegen, dass bei jeder Annäherungsrichtung

$$\underset{z=z'}{Lim} \,.\, (z-z')^{\alpha} f(z)$$

dieselbe bestimmte, endliche, nicht verschwindende Grösse ist, während dieser Ausdruck in jedem andern Punkte z' von $\mathfrak{A}$ verschwindet;

2.) wenn $f(z)$ in jedem Punkte von $\mathfrak{A}$ endlich bleibt, und

$$\underset{z=z'}{Lim} \,.\, (z-z')^{\alpha+n} f^{(n)}(z)$$

für irgend eine Nummer n diese Eigenschaft hat.

Lehrsatz.

Besitzt der Punkt $z=t$ in Folge der Nachbarschaft von Unendlichkeits- oder Verzweigungspunkten einen s-fach algebraischen Convergenzkreis von der Ordnung α, so ist stets

$$(4.)\quad \frac{(t-\zeta)^{\alpha+\omega} \,.\, f^{(\omega)}(t)}{\binom{-\alpha}{\omega} \,.\, \omega!} = \psi(t,\omega) + \Sigma A_s e^{i(\varrho-\varrho_s)(\alpha+\omega)},$$

wo $\psi(t,\omega)$ eine für $\omega=\infty$ verschwindende Function, die A_s endliche, nicht verschwindende Constanten bedeuten, und die Summation über alle diejenigen Punkte a_s des Convergenzkreises zu erstrecken ist, welche ihm die Ordnung α ertheilen. — Ob auf ihm noch mehr singuläre Punkte von niedrigerer Ordnung liegen, ist ohne Belang.

Ferner lässt sich durch eine etwas umständlichere Betrachtung leicht zeigen und geht theilweise aus dem Obigen hervor, dass die letzteren auch nicht algebraische Natur zu haben brauchen, wenn nur ihre Anzahl endlich ist.

Die zuletzt ausgesprochene Beschränkung, dass die Anzahl aller singulären Punkte auf dem Convergenzkreise eine endliche sein müsse können wir jedoch nicht vermeiden, weil wir bei dem gegenwärtigen Standpunkt unserer Kenntniss sonst das Verschwinden des ersten Gliedes auf der rechten Seite von (3.) nicht zu behaupten vermögen.

In der weiteren Untersuchung unterscheiden wir einfach und mehrfach algebraische Convergenzkreise.

I. Einfach algebraischer Convergenzkreis.

Giebt es auf dem Convergenzkreis nur einen Punkt $z=a$ mit der höchsten Charakteristik α, so stellt sich die Gl. (4.), indem wir den allgemeinen Coefficienten der Taylor'schen Reihe

$$\frac{f^{(\omega)}(t)}{\omega!} = f_\omega$$

bezeichnen, unmittelbar in der Form dar:

$$(5.)\quad \frac{(t-a)^{\alpha}}{(-1)^{\omega}\binom{-\alpha}{\omega}} \,.\, (a-t)^{\omega} f_\omega = A + \psi(t,\omega);$$

oder weil $(t-a)^{\alpha}$ nicht von ω abhängt, und der Grenzwerth von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{(-1)^{\omega}\binom{-\alpha}{\omega}}{\omega^{\alpha-1}}$$

eine bestimmte, endliche, nicht verschwindende Grösse ist, so wird für unendlich grosse ω:

$$(6.)\quad (a-t)^{\omega}\,.\,f_{\omega} = C\,.\,\omega^{\alpha-1},$$

indem C eine leicht zu berechnende Constante bedeutet.

Aus der für jedes ω geltenden Gleichung (5.) schliesst man auf ersichtliche Weise, dass für jedes ω

$$(7.)\quad a-t = \frac{f_{\omega}}{f_{\omega+1}}\cdot\frac{\omega+\alpha}{\omega+1}\cdot\frac{A+\psi(t,\omega+1)}{A+\psi(t,\omega)}$$

ist, und dass deshalb durch Weglassung der sich der Einheit nähernden Factoren eine Anzahl berechenbarer Näherungsausdrücke für α aufgestellt werden kann. — Daher der

Lehrsatz.

Ist der Convergenzkreis $\mathfrak{K}$ des Punktes $z=t$ einfach algebraisch von der Ordnung α, und z ein beliebiger Punkt desselben, so fehlt in der Taylor'schen Entwickelung von $f(z)$ nach Potenzen von $(z-t)$ kein Glied $(z-t)^n f_n$, dessen n gross genug ist; vielmehr nähert sich der Quotient

$$f_n : f_{n+1}$$

von dieser Stelle an stetig dem Werthe von $(a-t)$, indem $z=a$ denjenigen der auf $\mathfrak{K}$ liegenden singulären Punkte bedeutet, welchem die Charakteristik α zukommt.

Ist $\alpha=1$, so wird

$$\underset{n=\infty}{Lim}\,.\,(a-t)^n f_n = \frac{A}{t-a} = \underset{z=a}{Lim}\,.\,\frac{(z-a)\,f(z)}{t-a}$$

eine bestimmte, endliche, nicht verschwindende Grösse; und die Taylor'sche Reihe oscillirt auf ihrer Convergenzgrenze mit Ausnahme der Unendlichkeitspunkte von $f(z)$, in denen sie divergirt.

Ist $\alpha > 1$, so divergirt die Taylor'sche Reihe in jedem Punkte z ihrer Convergenzgrenze, da deren Glieder so ins Unendliche wachsen, dass ihre Moduln immer mehr der Potenz $n^{\alpha-1}$ proportional werden, und ihre Argumente sich dem Richtungswinkel von

$$\underset{z=a}{Lim}\,.\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^{\alpha} f(z)$$

als Grenze nähern.)*

Stellen wir die zur Berechnung von a aus (7.) und (6.) folgenden Näherungsformeln zusammen, so erhalten wir die Ausdrücke:

$$(8.)\quad a-t = \frac{f_{\omega}}{f_{\omega+1}} = \frac{f_{\omega}}{f_{\omega+1}}\cdot\frac{\omega+\alpha}{\omega+1} = \frac{f_{\omega}}{f_{\omega+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\alpha-1}.$$

Der durch den ersten gefundene Näherungswerth von a heisse $a^{(\omega)}$, und es werde

$$\frac{a^{(\omega)}-t}{a^{(\omega-1)}-t} = \frac{f_{\omega}}{f_{\omega+1}} : \frac{f_{\omega-1}}{f_{\omega}} = b^{(\omega)}$$

gesetzt.

---

*) In der schon früher citirten Abhandlung ist gezeigt worden, dass die Taylor'sche Reihe in jedem Punkte der Convergenzgrenze den Werth von $f(z)$ wiedergiebt, wenn $\alpha < 1$ ist, wobei aber der Convergenzkreis nicht einfach algebraisch zu sein, sondern in seinen singulären Punkten z' nur der Bedingung $\underset{z=z'}{Lim}\,.\,(z-z')\,f(z) = o$ zu genügen braucht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dann folgt aus (8.) weiter, dass für unendlich grosse ω

$$(9.)\quad \alpha - 1 = \frac{(\omega+1)\,\omega\,(b^{(\omega)}-1)}{1-\omega\,(b^{(\omega)}-1)} = \frac{\log b^{(\omega)}}{\log\frac{\omega^2}{\omega^2-1}} = \omega^2 . l\,b^{(\omega)}$$

sein müsse, so dass auch die Charakteristik des Punktes $z = a$ aus den f_ω berechnet werden kann.

Von anderen, minder bequemen Näherungsformeln für a und α sehen wir hier ab, bemerken aber, dass *die aufgezählten desto schneller wirken müssen, je näher t an a liegt*, und dass man deshalb häufig gut thut, den ursprünglich willkürlich gewählten Punkt t in einen berechneten Näherungswerth $a^{(\omega)}$ zu verlegen. Denn das $\psi\,(t,n)$ der Gl. (7.) ist eine bei der Annäherung von t an a stetige, für $t = a$ verschwindende Function, und der zweite Ausdruck (8.) würde nach (7.) den Werth von a völlig genau geben, wenn $\psi\,(t,n)$ und $\psi\,(t,n+1) = o$ wären.

Wiederholt man die Verlegung des Punktes t in berechnete Näherungswerthe t_1, t_2, $t_3, \ldots$ von a nachdem man ein f_n derselben Ordnung erreicht hat, so geht der zweite Ausdruck (8.) über in:

$$(10.)\quad t_{n+1} - t_n = \frac{\omega+\alpha}{\omega+1} \cdot \frac{f_\omega\,(t_n)}{f_{\omega+1}\,(t_n)},$$

wo ω als endlich gedacht wird, und $\omega + \alpha > o$ sein muss. Ist $z = a$ ein Unendlichkeitspunkt ($\alpha > o$), so genügt es schon, $\omega = o$ zu wählen und daher nach der Formel

$$(11.)\quad t_{n+1} - t_n = \frac{\alpha\, f\,(t_n)}{f'\,(t_n)}$$

zu rechnen. — Auf die nahe liegende Vergleichung mit dem vorigen Abschnitt und der Newton'schen Näherungsmethode brauchen wir wohl nicht erst hinzuweisen.

Die Berechnung der Nullpunkte einer Function $\varphi\,(z)$ — und die Auflösung der Gleichungen überhaupt — lässt sich selbstverständlich leicht auf das Obige zurückführen, da

$$(12.)\quad f\,(z) = \frac{1}{\varphi\,(z)}$$

in den Wurzelpunkten von $\varphi\,(z)$ unendlich wird. Man hat zu der hierbei erforderlichen Berechnung der Grössen f_n aus den

$$\varphi_n = \frac{\varphi^{(n)}\,(t)}{n!}$$

die Formeln:

$$(13.)\quad f_n\,\varphi_o + f_{n-1}\,\varphi_1 + f_{n-2}\,\varphi_2 + \cdots + f_o\,\varphi_n = o,$$

$$(14.)\quad (-1)^n\,\varphi_o^{\,n+1} . f_n = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_o & & \\ \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_o & \\ \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n & \varphi_{n-1} & \varphi_{n-2} & \cdot\,\varphi_1 \end{vmatrix},$$

welche, wenn $\varphi\,(z)$ eine ganze rationale algebraische Function ist, im Ganzen schnell zum Ziele führen.

Beispiele.

1.) Die Wurzeln z der quadratischen Gleichung

$$\varphi\,(z) = 1 - z - uz^2 = o,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welche sich unter der Form

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4u}}{2u}$$

darstellen, sind gleich gross, wenn $u = -\frac{1}{4}$ ist, und haben übrigens nur dann gleiche Moduln, wenn u eine den Werth $-\frac{1}{4}$ nicht erreichende negative Zahl, d. i., wenn $-\infty < u < -\frac{1}{4}$ ist.

Daher folgt aus dem ersten Ausdruck (8.) die Convergenz des unendlichen Kettenbruchs

$$1 \,/\, 1 + u \,/\, 1 + u \,/\, 1 + u \,/\, 1 + \cdots\cdots$$

für jedes reelle oder complexe u zu der mit dem kleineren Modul versehenen Wurzel z der obigen Gleichung, wenn u nur nicht eine negative Zahl bedeutet, deren absoluter Werth den Bruch $\frac{1}{4}$ übersteigt, während der Werth $u = -\frac{1}{4}$ noch gestattet ist.

(An einer andern Stelle ist daraus abgeleitet, dass jeder Kettenbruch

$$u_1 \,/\, 1 + u_2 \,/\, 1 + u_3 \,/\, 1 + u_4 \,/\, 1 + \cdots\cdot$$

zu dem Werthe der entwickelten Function convergirt, wenn bei wachsendem n der Modul von $u_n < \frac{1}{4}$ bleibt. Z. B. der Gauss'sche Quotient hypergeometrischer Reihen.)

2.) Nimmt man $\varphi(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ an, so ergiebt sich, wenn man von der Reihenentwickelung für e^z ausgeht und dann die Formel (14.) für $t = o$ benutzt, sofort:

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2} z + \frac{B_1}{2!} z^2 - \frac{B_2}{4!} z^4 + \frac{B_3}{6!} z^6 - \cdots,$$

und zugleich erhält man zur Berechnung der Bernoulli'schen Zahlen B_n den Ausdruck:

$$2 \cdot \frac{B_n}{(2n)!} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3!} & 1 & & & \\ \frac{3}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & & \\ \frac{5}{7!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \frac{2n-1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \cdot & \frac{1}{3!} \end{vmatrix}.$$

Setzt man aber in der letzten Reihenentwickelung iz für z, so geht sie über in

$$\frac{1}{2} z \cot \frac{1}{2} z = 1 - \frac{B_1}{2!} z^2 - \frac{B_2}{4!} z^4 - \frac{B_3}{6!} z^6 - \cdots$$

Und da die hier entwickelte Function von z^2 auf dem Convergenzkreise des Punktes $z^2 = o$ nur an der Stelle $z^2 = (2n)^2$ (und zwar von der ersten Ordnung) unendlich wird, so ist in Folge der Gl. (8):

$$(2n)^2 = \underset{n=\infty}{Lim} \,.\, (2n+1)(2n+2)\, B_n : B_{n+1} \,.$$

— Die numerische Rechnung giebt schon für $n = 8$ den auf 5 Stellen richtigen Werth: $\log n = 0{,}49\,715$.

3.) Um die schon einmal aufgesuchte Wurzel der Gleichung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\varphi(z) = z^7 + 28 z^4 - 480 = o$$

auch nach dieser Methode zu berechnen, setzen wir $t = 2$, also:

$$\begin{array}{llll}
\varphi_0 = t^4 (t^3 + 28) - 480 = & 96, & \varphi_4 = 7 (5 t^3 + 4) = & 308, \\
\varphi_1 = 7 t^3 (t^3 + 16) & = 1344, & \varphi_5 = 21 t^2 & = 84, \\
\varphi_2 = 21 t^2 (t^3 + 8) & = 1344, & \varphi_6 = 7 t & = 14, \\
\varphi_3 = 7 t (5 t^3 + 16) & = 784, & \varphi_7 = 1, \varphi_{7+n} & = 0.
\end{array}$$

Demnach folgt aus (12.) und (13.) oder (14.):

$$f_0 = + \frac{1}{96}, \quad f_2 = + \frac{91}{48}, \quad f_4 = + \frac{734\,531}{2\,304},$$

$$f_1 = - \frac{7}{48}, \quad f_3 = - \frac{14\,161}{576}, \quad f_5 = - \frac{1\,058\,337}{256}, \text{ u. s. w.}$$

und, indem die Genauigkeit der Näherungswerthe $a^{(n)}$ mit den Indices wächst, aus dem ersten Ausdrucke (8.):

$$a^{(o)} - 2 = f_0 : f_1 = - \frac{1}{14} \qquad = - 0{,}071\,428\,571\,428,$$

$$a^{I} - 2 = f_1 : f_2 = - \frac{1}{13} \qquad = - 0{,}076\,923\,076\,923,$$

$$a^{II} - 2 = f_2 : f_3 = - \frac{156}{2\,023} \qquad = - 0{,}077\,113\,198\,220,$$

$$a^{III} - 2 = f_3 : f_4 = - \frac{8\,092}{104\,933} \qquad = - 0{,}077\,115\,873\,939,$$

$$a^{IV} - 2 = f_4 : f_5 = - \frac{104\,933}{1\,360\,719} = - 0{,}077\,115\,848\,3125;$$

d. i.:

$$\begin{array}{ll}
a^{(o)} = 1{,}928\,571\,428\,571; & a^{III} = 1{,}922\,884\,126\,061; \\
a^{I} = 1{,}923\,076\,923\,077; & a^{IV} = 1{,}922\,884\,151\,6875; \\
a^{II} = 1{,}922\,886\,801\,780; & \text{u. s. w.}
\end{array}$$

Es ist augenscheinlich, dass a^{IV} noch über die 8te Ziffer hinaus richtig sein wird. Für die Anzahl α dieser Wurzeln $z = a$ erhalten wir, weil

$$b^{III} = \frac{a^{III} - 2}{a^{II} - 2} = 1 + \frac{25}{771\,134}, \; b^{IV} = \frac{a^{IV} - 2}{a^{III} - 2} = 1 - \frac{26}{7\,115\,874}$$

ist, aus dem ersten Ausdrucke (9.) die Näherungswerthe:

$$\alpha^{III} - 1 = \frac{300}{771\,059}, \quad \alpha^{IV} - 1 = - \frac{520}{77\,115\,978}.$$

Jeder von ihnen reicht, da α eine ganze Zahl sein muss, hin, $\alpha = 1$ zu bestimmen. — Wo α einen andern Werth hat, wird die Correction von $a^{(n)}$ durch den Factor $\frac{n + \alpha}{n + 1}$ bei niedrigen Werthen von n offenbar einen merklichen Einfluss ausüben, und ihre Berücksichtigung deshalb unnöthige Rechnung ersparen.

II. Mehrfach algebraischer Convergenzkreis.

Ist der Convergenzkreis des Punktes $z = t$ ein s-fach algebraischer von der Ordnung α, so folgt, indem man

$$f_{n,m} = \frac{(n+1)(n+2) \quad \ldots \quad (n+m)}{(n+\alpha)(n+\alpha+1) \ldots (n+\alpha+m-1)} f_{n+m}, \; f_{n,o} = f_n$$

und die reciproken Werthe der in Betracht kommenden Differenzen

$$\frac{1}{a_s - t} = u_s$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bezeichnet, mit Vernachlässigung der für unendlich grosse n verschwindenden Functionen ψ aus (4.) ohne Mühe:

$$\begin{vmatrix} u_1^{\,0} & u_2^{\,0} & \cdot\,\cdot & u_s^{\,0} \\ u_1^{\,1} & u_2^{\,1} & \cdot\,\cdot & u_s^{\,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ u_1^{\,s-1} & u_2^{\,s-1} & \cdot\,\cdot & u_s^{\,s-1} \end{vmatrix} A_1\, u_1^{\,\alpha+n} = \frac{(-1)^{\alpha+n}}{\binom{-\alpha}{n}} \begin{vmatrix} f_{n,o} & u_2^{\,0} & \cdot\,\cdot & u_s^{\,0} \\ f_{n,1} & u_2^{\,1} & \cdot\,\cdot & u_s^{\,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ f_{n,s-1} & u_2^{\,s-1} & \cdot\,\cdot & u_s^{\,s-1} \end{vmatrix}.$$

Die hier links stehende Determinante ist bekanntlich das Product aller Differenzen, welche man durch Subtraction jedes Gliedes der Reihe $u_1, u_2, \ldots, u_s$ von allen folgenden erhält. Und da sich die rechts stehende nur durch die Elemente der ersten Columne von ihr unterscheidet, so ist klar, dass beide Seiten der Gleichung das aus $u_2, \ldots, u_s$ auf gleiche Weise gebildete Differenzenproduct als gemeinschaftlichen Factor besitzen, nach dessen Weglassung die symbolisch zu verstehende Gleichung

$$A_1\, u_1^{\,\alpha+n} \cdot \prod_{m=2}^{m=s} (u_m - u_1) = \frac{(-1)^{\alpha+n}}{\binom{-\alpha}{n}} f_n \cdot \prod_{m=2}^{m=s} (u_m - f)$$

übrig bleibt. In dieser Gleichung muss nehmlich nach ausgeführter Multiplication $f_{n,k}$ für $f_n \cdot f^k$ gesetzt werden.

Wegen der Identität

$$u_m - u_1 = \frac{a_1 - a_m}{(a_1 - t)(a_m - t)}$$

kann man daher auch schreiben:

$$(15.)\quad A_1 \cdot \prod_{m=2}^{m=s} (a_m - a_1) = \frac{(t - a_1)^{\alpha+n+s-1}}{\binom{-\alpha}{n}} f_n \prod_{m=2}^{m=s} (1 + (t - a_m) f),$$

so dass die rechte Seite einen Ausdruck — analog (5.) — darstellt, welcher sich bei unendlichem n einer bestimmten endlichen, nicht verschwindenden Grenze nähert und nach der Bestimmung der a_m eben so zur Berechnung der A_m verwandt werden kann, wie (5.) zur Berechnung von A. Dass etwas Aehnliches in Betreff der Berechnung von α gilt, ist augenfällig.

Wir wollen hier auf die letztgenannten Zwecke in Ansehung ihrer geringeren Wichtigkeit nicht weiter eingehen, zumal die Resultate leicht zu extrahiren sind, und erörtern aus demselben Grunde auch nicht das Verhalten der Taylor'schen Reihe auf ihrer Convergenzgrenze und das periodische Schwanken ihrer Glieder, worüber die Gl. (4.) unmittelbare Auskunft giebt.

Was uns hier noch näher beschäftigen soll, ist die Berechnung der Grössen $(a_m - t)$, und zwar wollen wir dabei wieder von der Gl. (4.) ausgehn, indem wir $\varrho = o$ setzen. Dann lautet dieselbe:

$$r^{\alpha+n} \cdot \left\{ \frac{(-1)^{\alpha+n}}{\binom{-\alpha}{n}} f_n - A_1 u_1^{\,\alpha+n} - A_2\, u_2^{\,\alpha+n} - \ldots - A_s u_s^{\,\alpha+n} \right\} = \psi(t,n),$$

so dass, wenn man n nach und nach bis $(n+s)$ erhöht und aus den so erhaltenen $(s+1)$ Gleichungen die A_m eliminirt, durch ähnliche Schlüsse, wie oben, das Verschwinden des symbolischen Ausdrucks:

$$\frac{(-r)^{\alpha+n}}{\binom{-\alpha}{n}} f_n \prod_{m=1}^{m=s} (1 - (a_m - t) f)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

für unendlich grosse n hervorgeht. Bezeichnet man daher der Kürze wegen das endlich bleibende

$$\frac{(-r)^{\alpha+n}}{\binom{-\alpha}{n}} \cdot f_{n,m} = F_{n,m},$$

so folgt, immer für unendlich grosse n:

$$(16.)\quad F_{n,o} - C_1 F_{n,1} + C_2 F_{n,2} - \cdots + (-1)^s C_s F_{n,s} = o;$$

und diese C_m sind ihrer Bildungsweise nach zugleich die Coefficienten einer Gleichung

$$(17.)\quad w^s - C_1 w^{s-1} + C_2 w^{s-2} - \cdots + (-1)^s C_s = o,$$

deren s Wurzeln w mit den Grössen $(a_m - t)$ übereinstimmen.

Es kommt demnach nur noch darauf an, die C_m zu berechnen; was aber keiner Schwierigkeit unterliegt, da man nur dem n der Gl. (16.) s auf einander folgende Werthe zu ertheilen braucht, um s lineare Gleichungen für die Unbekannten C_m zu erhalten. In den durch die Elimination hervorgehenden Ausdrücken erscheinen die C_m als Quotienten zweier Determinanten s-ten Grades, weshalb man durch das Product der Factoren von der Form $(-r)^{\alpha+n} : \binom{-\alpha}{n}$ heben, d. i. die $F_{n,m}$ mit den $f_{n,m}$ vertauschen darf. Nachdem dieses geschehen, ist das Resultat folgendes:

$$(18.)\quad (-1)^{m-1} C_m \cdot \begin{vmatrix} f_{n,s} & \cdot\cdot & f_{n,m} & \cdot\cdot & f_{n,1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ f_{n+s-1,s} & \cdot\cdot & f_{n+s-1,m} & \cdot\cdot & f_{n+s-1,1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_{n,s} & \cdot\cdot & f_{n,o} & \cdot\cdot & f_{n,1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ f_{n+s-1,s} & \cdot\cdot & f_{n+s-1,o} & \cdot\cdot & f_{n+s+1,1} \end{vmatrix}$$

Dass hier auch allgemein f_{n+m} für $f_{n,m}$ gesetzt werden darf und, bevor man den Werth von α kennt, sogar gesetzt werden muss, braucht wohl kaum erst erwähnt zu werden.

Ist im Besonderen $s = 2$, so ergeben sich demnach $(a_1 - t)$ und $(a_2 - t)$ als die beiden Wurzeln w der quadratischen Gleichung:

$$(19.)\quad (f_{n,2} f_{n+1,1} - f_{n,1} f_{n+1,2}) w^2 - (f_{n,2} f_{n+1,o} - f_{n,o} f_{n+1,2}) w$$
$$+ (f_{n,1} f_{n+1,o} - f_{n,o} f_{n+1,1}) = o,$$

oder auch:

$$(20.)\quad (f^2_{n+2} - f_{n+3} f_{n+1}) w^2 - (f_{n+2} f_{n+1} - f_{n+3} f_n) w + (f^2_{n+1} - f_{n+2} f_n) = o.$$

In Ansehung des praktischen Interesses wollen wir bei diesem Falle noch etwas verweilen, indem wir weiter voraussetzen, dass die Function $f(z)$ mit allen ihren Ableitungen im reellen Punkte $z = t$ reell, die Punkte $z = a_1$ und $z = a_2$ aber nicht reell seien. Da dann die Gleichungen (19.) und (20.) unter der Form

$$\varkappa w^2 - \lambda w + \mu = 0$$

mit reellen Coefficienten erscheinen, und der Sinus des Richtungswinkels ϱ von $w = re^{i\varrho}$ nicht verschwindet, so folgt:

$$\varkappa r^2 \cos 2\varrho - \lambda r \cos\varrho + \mu = o, \quad 2\varkappa r \cos\varrho - \lambda = o;$$

$$r = \sqrt{\frac{\mu}{\varkappa}}, \quad \cos\varrho = \frac{\lambda}{2\sqrt{\varkappa\mu}}; \quad w = \frac{\lambda \pm i\sqrt{4\varkappa\mu - \lambda^2}}{2\varkappa}.$$

U. A. ergiebt sich daher aus unsern Betrachtungen der folgende

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lehrsatz.

Ist der Convergenzkreis des Punktes $z = t$ ein s-fach algebraischer, so lassen sich aus den Coefficienten der Taylor'schen Reihe die Coefficienten (18.) einer Gleichung s-ten Grades (17.) berechnen, durch deren Wurzeln $w_m = a_m - t$ die s singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_s$ des Convergenzkreises bestimmt werden.

Zusatz.

Bei einem zweifach algebraischen Convergenzkreise, dessen singuläre Punkte nicht in der reellen Axe liegen, während t, $f(t)$ und alle Ableitungen $f^{(n)}(t)$ reell sind, ergiebt sich für unendlich grosse n:

$$(21.)\quad \begin{cases} r = \sqrt{\dfrac{f_{n,1}\, f_{n+1,o} - f_{n,o}\, f_{n+1,1}}{f_{n,2}\, f_{n+1,1} - f_{n,1}\, f_{n+1,2}}}, \\[2ex] \cos\varrho = \dfrac{f_{n,2}\, f_{n+1,o} - f_{n,o}\, f_{n+1,2}}{2\sqrt{(f_{n,1}\, f_{n+1,o} - f_{n,o}\, f_{n+1,1})\,(f_{n,2}\, f_{n+1,1} - f_{n,1}\, f_{n+1,2})}}; \end{cases}$$

oder einfacher:

$$(22.)\quad r = \sqrt{\frac{c_n}{c_{n+1}}},\ \cos\varrho = \frac{h_n}{2\sqrt{c_n\, c_{n+1}}},\ a - t = \frac{h_n \pm i.\sqrt{4\, c_n\, c_{n+1} - h^2_n}}{2\, c_{n+1}},$$

indem

$$(23.)\quad c_n = f^2_n - f_{n-1}\, f_{n+1},\ h_n = f_n\, f_{n+1} - f_{n-1}\, f_{n+2}$$

gesetzt ist.

Beispiele.

1.) Während die im ersten Beispiel zum vorhergehenden Abschnitt besprochene Kettenbruchentwickelung nicht zu einer Wurzel z der quadratischen Gleichung $\varphi(z) = 1 - z - uz^2 = o$ convergirt, wenn u eine zwischen $-\infty$ und $-\frac{1}{4}$ liegende reelle Zahl ist, ergeben sich die Wurzeln aus dem Kettenbruch mit Hülfe von (22.) bei jedem n genau. Denn weil die f_n, welche seine Näherungsnenner sind, den Relationen $f_n = f_{n-1} + u f_{n-2}$, $c_{n+1} = f^2_{n+1} - f_n\, f_{n+2} = -u\,(f^2_n - f_{n-1}\, f_{n+1}) = -u\,.\,c_n$, $h_n = c_n$ genügen, so wird:

$$r = \frac{1}{\sqrt{-u}},\ \cos\varrho = \frac{1}{2\sqrt{-u}};$$

wie auch nicht anders vorausgesetzt werden kann, da von der Gl. (20.) d. i. von $c_{n+1}\, w^2 - h_{n+1}\, w + c_n = o$ nach Division mit c_n nur $-uw^2 - w + 1 = o$ übrig bleibt.

2.) Es bedarf keiner subtilen Untersuchung, um zu erkennen, dass eine Gleichung von der Form

$$\varphi(z) = z^3 - mz^2 - 1 = o,$$

wenn $m > o$ ist, ausser der zwischen m und $(m+1)$ liegenden positiven, die Einheit übersteigenden Wurzel zwei conjugirte complexe Wurzeln besitzt, deren zwischen $\sqrt{\frac{1}{m}}$ und $\sqrt{\frac{1}{m+1}}$ liegender Modul < 1 ist; weshalb der Convergenzkreis des Punktes $z = o$ für die Function $f(z) = [\varphi(z)]^{-1}$ zweifach algebraisch sein muss.

Um daher die complexen Wurzeln obiger Gleichung zu finden, berechnen wir die f_n nach der aus (13.) für $t = o$ folgenden Formel:

$$f_n = -m\, f_{n-2} + f_{n-3},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

unter deren Bedingung $h_n = -c_{n-1}$ hervorgeht; so dass, wenn wir jetzt die Näherungswerthe

$$z_n = r_n e^{i\varphi_n}$$

der Wurzeln z mit den Nummern der c in den Zählern von r versehen, aus (22.) erhalten wird:

$$r_n = \sqrt{\frac{c_n}{c_{n+1}}},\ \cos\varphi_n = -\frac{c_{n-1}}{2\sqrt{c_n c_{n+1}}},$$

$$z_n = x_n \pm i y_n = \frac{-c_{n-1} \pm i \,.\, \sqrt{4 c_n c_{n+1} - c^2_{n-1}}}{2 c_{n+1}}.$$

Nehmen wir z B. $m = 10$ an, so berechnet sich:
$f_0 = -1$, $f_1 = o$, $f_2 = +10$, $f_3 = -1$, $f_4 = -100$, $f_5 = +20$, $f_6 = +999$, $f_7 = -300$, $f_8 = -9970$, $f_9 = +3999$, $f_{10} = +99\,400$, $f_{11} = -49\,960$, $f_{12} = -990\,001$, $f_{13} = +599\,000$, $f_{14} = +9\,850\,050$, $f_{15} = -6\,980\,001$, $f_{16} = -97\,901\,500$, $f_{17} = +79\,650\,060$, u. s. w.

Weil demnach

$$c_4 = 10\,020,\ c_5 = 100\,300,\ c_6 = 1\,004\,001$$

ist, so ergiebt sich:

$$z_5 = \frac{-10\,020 \pm i\sqrt{100\,676\,200\,200}}{2 \,.\, 1\,004\,001} = -0{,}049\,900\,3487 \pm i \,.\, 0{,}158\,038\,8875;$$

und dieser Werth, zu welchem die f nur bis f_7 berechnet zu sein brauchen, ist noch in den 9ten Decimalstellen richtig.

Rechnet man aber so genau, wie es mit den aufgeführten Werthen der f möglich ist, benutzt also die Werthe

$$\begin{aligned} c_{13} &= 10\,110\,360\,350\,050, \\ c_{14} &= 101\,204\,505\,601\,500, \\ c_{15} &= 1\,013\,055\,084\,035\,001, \\ c_{16} &= 10\,140\,661\,200\,700\,060;\ ^{*)} \end{aligned}$$

so kann ein Fehler erst in der Stelle eintreten, in welcher

$$x_{14} = -\frac{c_{13}}{2c_{15}} \text{ und } x_{15} = -\frac{c_{14}}{2c_{16}}$$

von einander abweichen.

Da nun, wie man leicht findet — und zwar immer unter der Voraussetzung der Relation

$$f_n = -m f_{n-2} + f_{n+3}$$

— die Gleichung

$$c_{n+1} c_{n+2} - c_n c_{n+3} = f_{n+3}$$

Statt hat, so ist

$$2 \,.\, (x_{14} - x_{15}) = -\left(\frac{c_{13}}{c_{15}} - \frac{c_{14}}{c_{16}}\right) = \frac{f_{16}}{c_{15}\, c_{16}}$$

$$= -\frac{97\,901\,500}{1\,013\,055\,084\,035\,001 \,.\, 10\,140\,661\,200\,700\,060},\ abs \,.\, (x_{14} - x_{15}) < 10^{-23}.$$

---

*) Es ist $c_{n+1} = m c_n + c_{n-2}$, worauf sich auch der Ausdruck $Lim \,.\, \frac{c_{n+1}}{c_n}$ für die reelle Wurzel gründet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ohne eine noch grössere Genauigkeit in der Abschätzung der Fehler anzustreben, sehen wir daher, dass z_{14} noch in den 23ten, z_{15} noch in den 25ten Decimalstellen ihrer reellen Theile richtig erhalten werden müssen, und finden auch die Genauigkeit des berechneten z_5 in den 9ten Stellen bestätigt. — Der Werth von x ist in den 25 Ziffern

$$x = 0{,}049\,900\,348\,507\,113\,792\,740\,0740$$

genau.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf