Ueber die Flächen,

welche den Verlauf der elliptischen Functionen versinnlichen können.

Wenn man den Verlauf, den eine complexe Variabele $u = x + yi$ nimmt, durch eine Curve darstellt, welche ein Punkt mit den veränderlichen Coordinaten x und y in einer Ebene beschreibt, so bieten sich für die Darstellung des entsprechenden Verlaufs einer (monogenen) Function $f(u) = X + Yi$ dieser Variabelen zweierlei Weisen dar. Man kann entweder X und Y als Coordinaten einer neuen Curve ansehen, welche durch die erste erzeugt wird; oder man kann X und Y als zweierlei, auf der Ebene der xy im Punkte x, y zu errichtende z Coordinaten ansehen; die Gleichung $z = X$ liefert dann eine (reelle) Fläche, und die Gleichung $z = Y$ eine zweite (imaginäre), und diese beiden Flächen geben zusammen ein Bild von dem Verlauf der Function. Die erste Darstellungsweise ist die gebräuchlichere, und für die Auffindung allgemeiner Theoreme aus leicht erkennbaren Gründen fruchtbarere; wenn es sich aber blos um die Discussion einer analytisch bereits bekannten Function handelt, hat die zweite den Vorzug der grösseren Anschaulichkeit. Wie z. B. die Werthe der elliptischen Functionen sich mit der complexen Variabelen ändern, ist aus den analytischen Darstellungen derselben zwar zu entnehmen, aber eine allgemeine Uebersicht über die Totalität ihres Verlaufs scheint nur durch die Betrachtung der entsprechenden Flächen gewonnen werden zu können. Die Einführung derselben in die mathematische Terminologie würde der Auffassung und dem Gedächtniss eine Hilfe in einem Gebiete darbieten, in dessen wunderbarem Reichthum zugleich eine der vornehmlichsten Schwierigkeiten seiner Beherrschung liegt Man würde z. B. die Art, in welcher die Grössen x und y durch die Gleichung

$$x + yi = \int_0^{\alpha + \beta i} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - k^2 \lambda^2)}}$$

von den Grössen α und β abhängig gemacht sind, bequem auf die folgende Weise angeben können: man lege durch die reelle Fläche für *sin am u* einen Schnitt parallel

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zur xy Ebene im Abstand α, und ebenso durch die imaginäre Fläche im Abstand β; die Projectionen dieser Schnitte auf die Ebene der xy schneiden sich (in jedem Perioden-Parallelogramm) in zwei Punkten, deren Coordinaten x und y (bis auf Vielfache der Perioden) bestimmen.

Diese Flächen erregen ausserdem das Interesse durch ihre eigenthümliche Gestaltung. Abgesehen von einigen allgemeinen Sätzen, die sich z. B. in dem bereits sehr verbreiteten Lehrbuche der Herren Briot und Bouquet*) finden, ist mir aber eine nähere Behandlung derselben bis jetzt nicht bekannt geworden; ich habe daher geglaubt diese Gelegenheitsschrift der Besprechung einiger ihrer auffallendsten Eigenschaften widmen zu dürfen.

---

1. Definitionen. Liouville's Satz. Wenn ein Punkt der xy Ebene die (rechtwinkligen) Coordinaten x und y hat, so möge $u = x + yi$ die Charakteristik des Punktes heissen. Ein Parallelogramm in der xy Ebene soll ein Perioden-Parallelogramm genannt werden, wenn die Charakteristiken der Endpunkte seiner Seiten sich um je eine der Perioden unterscheiden. Diese Definitionen vorausgeschickt, nehmen wir unseren Ausgangspunkt von einem Satze des Herrn J. Liouville, welchen man in dem oben genannten Lehrbuche findet. Nach demselben nimmt eine jede eindeutige doppelt periodische Function in jedem Perioden-Parallelogramm alle möglichen, reellen und imaginären, Werthe an, und alle gleich oft. Man kann also eine doppelt periodische Function $n$ter Ordnung eine solche nennen, die ein und denselben Werth in jedem Perioden-Parallelogramm n mal annimmt; dabei muss n mindestens gleich Zwei sein. Nennt man ferner conjugirte Argumente solche Werthe der Variabelen, welchen gleiche Werthe der Functionen entsprechen, so ist die Summe der n conjugirten Argumente in einem Perioden-Parallelogramm gleich einer bestimmten Constanten, vermehrt oder vermindert um ganze Vielfache der Perioden.

2. Doppelpunkte. In Bezug auf die doppelt periodischen Functionen zweiter Ordnung folgt hieraus unmittelbar, dass es in jedem Perioden-Parallelogramm vier Argumente giebt, welche mit ihren conjugirten zusammenfallen. Es seien ω und $\omega_{,}$ die Perioden, γ die constante Summe der conjugirten Argumente, so sind die Argumente

$$\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma+\omega}{2}, \frac{\gamma+\omega_{,}}{2}, \frac{\gamma+\omega+\omega_{,}}{2}$$

offenbar sich selbst conjugirt. Die Functionswerthe, welche diesen Argumenten entsprechen, kommen in jedem Perioden-Parallelogramm nur einmal vor, oder die beiden entsprechenden fallen zusammen. Die Punkte der xy Ebene, deren Charakteristiken diese Argumente sind, wollen wir zur Abkürzung Doppelpunkte nennen.

Für die elliptischen Functionen mit dem (reellen, unter Eins liegenden) Modul k ist z. B:

*) Théorie des fonctions doublement périodiques. Paris 1859.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

		$\sin am\, u$ Fig. 1.*)	$\cos am\, u$ Fig. 2.	$\Delta am\, u$ Fig. 3.	$tg\, am\, u$ Fig. 4.
	ω	$4K$	$4K$	$2K$	$2K$
	$\omega_{,}$	$2iK'$	$2K+2iK'$	$4iK'$	$4iK'$
	γ	$2K$	0	0	$2iK'$
Charakteristik der Doppelpunkte	D	K	0	0	iK'
	D_1	$3K$	$2K$	$2iK'$	$3iK'$
	E	$K+iK'$	$K+iK'$	K	$K+iK'$
	E_1	$3K+iK'$	$3K+iK'$	$K+2iK'$	$K+3iK'$
Werthe der Function in den Punkten	D	1	1	1	i
	D_1	-1	-1	-1	$-i$
	E	$\frac{1}{k}$	$-\frac{ik'}{k}$	k'	$\frac{i}{k'}$
	E_1	$-\frac{1}{k}$	$\frac{ik'}{k}$	$-k'$	$-\frac{i}{k'}$

3. Congruente Flächentheile. Zieht man von einem Punkt der xy Ebene eine gerade Linie zu einem Doppelpunkt, und verlängert sie um sich selbst, so sind die Charakteristiken ihrer Endpunkte conjugirte Argumente.

Die Gestaltung der Flächen, welche den Verlauf der Function darstellen, ist nun unabhängig von der Wahl des Punktes mit welchem man eine Periode anfangen lässt, wir können also immer einen Doppelpunkt als ersten Eckpunkt eines Perioden-Parallelogramms annehmen. Es sei also (Fig. 1.) $DFGH$ ein solches Parallelogramm, D ein Doppelpunkt. Denkt man sich nun die beiden über dem Parallelogramm liegenden Flächen in zwei Exemplaren, und lässt das zweite Exemplar um die durch E_1 gehende Verticale eine Drehung von 180° austühren, so kommt es mit dem ersten wieder zur Deckung. Die (reelle sowohl als die imaginäre) Fläche über dem Perioden-Parallelogramm besteht also aus vier Theilen: DEE_1D_1 und $GE_2E_1D_2$, HEE_1D_2 und $FE_2E_1D_1$, von denen je zwei congruent sind, und (für einen über E_1 stehenden Beobachter) symmetrisch liegen.

4. Beschränkung der Aufgabe. Theorem. In der Theorie der elliptischen Functionen kommen vorzugsweise solche doppelt periodischen Functionen zweiter Ordnung vor, welche an den Doppelpunkten paarweis entgegengesetzte Werthe annehmen. Die ihnen entsprechenden Flächen zeichnen sich durch ihre Symmetrie aus. Wir beschränken die Betrachtung auf Functionen dieser Art, und benutzen zur Aufdeckung jener Symmetrie den folgenden, Bekanntes in anderer Fassung aussprechenden, Satz:

> Wenn die Werthe einer doppelt periodischen Function zweiter Ordnung an den Doppelpunkten paarweis entgegengesetzt sind, so wird sie in der Mitte der einander entsprechenden Doppelpunkte entweder unendlich oder gleich Null.

*) Um bestimmte Verhältnisse für die Figuren zu haben, ist bei allen der Modul $k = \sin 15°$ angenommen, also $K = 1{,}59814$, $K' = 2{,}76806$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. Setzt man

$$f(u) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\omega}(2u - \alpha - \beta + 2m\omega_{,}) - \cos\pi\frac{\alpha-\beta}{\omega}},$$

so ist $f(u)$ eine doppelt periodische Function zweiter Ordnung mit den Perioden ω und $\omega_{,}$, welche für $u = \alpha$ und $u = \beta$ unendlich wird*); bezeichnet ferner A eine Constante, so ist

$$L(u) = A(f(u) - f(a)),$$

eine ebensolche Function, welche ausserdem für das Argument a verschwindet. Da nun zwei eindeutige Functionen, welche für dieselben Argumente unendlich werden, und für dieselben Argumente verschwinden, nur durch einen Factor von einander verschieden sein können**), so ist $L(u)$ die allgemeinste Form für alle doppelt periodischen Functionen zweiter Ordnung mit denselben Perioden.

Wir können ferner, wie oben, den Anfangspunkt immer in einen Doppelpunkt verlegen, ohne dadurch die Form der Flächen zu ändern. Dann wird

$$\alpha + \beta = o, \quad \alpha - \beta = 2\alpha$$

und

$$f(u) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\omega}(2u + 2m\omega_{,}) - \cos\frac{2\pi\alpha}{\omega}}.$$

Genügt nun $L(u)$ den Bedingungen des Satzes, so ist

$$A\left\{f(o) - f(a)\right\} = -A\left\{f\left(\frac{\omega}{2}\right) - f(a)\right\},$$

$$A\left\{f\left(\frac{\omega_{,}}{2}\right) - f(a)\right\} = -A\left\{f\left(\frac{\omega+\omega_{,}}{2}\right) - f(a)\right\},$$

also

$$f(o) + f\left(\frac{\omega}{2}\right) = f\left(\frac{\omega_{,}}{2}\right) + f\left(\frac{\omega+\omega_{,}}{2}\right) \qquad (1)$$

und durch diese Gleichung könnte α bestimmt werden.

Das allgemeine Glied der Reihe für $f(o) + f\left(\frac{\omega}{2}\right)$ wird nun:

$$\frac{2\cos 2\pi\frac{\alpha}{\omega}}{\left(\cos\frac{2\pi m\omega_{,}}{\omega}\right)^2 - \left(\cos\frac{2\pi\alpha}{\omega}\right)^2},$$

und das allgemeine Glied für $f\left(\frac{\omega_{,}}{2}\right) + f\left(\frac{\omega+\omega_{,}}{2}\right)$ wird:

$$\frac{2\cos 2\pi\frac{\alpha}{\omega}}{\left(\cos\pi(2m+1)\frac{\omega_{,}}{\omega}\right)^2 - \left(\cos\frac{2\pi\alpha}{\omega}\right)^2},$$

mithin wird die Gleichung (1) erfüllt, wenn man

$$\alpha = \frac{\omega}{4}$$

*) Briot et Bouquet l. c. p. 84 **) Id. p. 39.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

setzt. Dann wird jede Seite der Gleichung für sich gleich Null, also auch

$$f(a) = \frac{1}{2}\left\{f(o) + f\left(\frac{\omega}{2}\right)\right\} = o,$$

und

$$L(u) = A f(u),$$

so dass die Function bis auf den Factor A bestimmt ist, und die Behauptung des Satzes auch darin erfüllt, dass sie für $u = \frac{\omega}{4} + \frac{\omega_{,}}{2}$ verschwindet; denn das allgemeine Glied der Reihe für $f\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega_{,}}{2}\right)$ ist

$$\frac{-1}{\sin(2m+1)\pi\frac{\omega_{,}}{\omega}},$$

so dass die den positiven m entsprechenden Glieder sich gegen die den negativen m entsprechenden heben.

Gesetzt nun $M(u)$ sei eine andere Function, welche den Bedingungen des Satzes entspräche, und im Anfangspunkt einen Doppelpunkt hätte, so müsste sich $M(u)$ stets durch $L(u)$ ausdrücken lassen. Denn würde $M(u)$ unendlich für $u = \alpha_1$ und gleich Null für $u = a_1$, so müsste

$$M(u) = A_1 \frac{f(u) - f(a_1)}{f(u) - f(\alpha_1)} \qquad (2)$$

sein (wo A_1 eine willkürliche Constante ist), denn die rechte Seite verschwindet für dieselben Argumente und wird für dieselben Argumente unendlich, wie die linke. Nur in dem Falle, wo $f(a_1)$ selbst unendlich, also $a_1 = \frac{\omega}{4}$ ist, würde die Form (2) nicht passen, dann ist aber

$$M(u) = \frac{A_1}{f(u) - f(\alpha_1)}. \qquad (3)$$

Indem wir nun auf die Form (2) von $M(u)$ die Bedingungen des Satzes anwenden, erhalten wir:

$$\frac{f(o) - f(a_1)}{f(o) - f(\alpha_1)} = -\frac{f\left(\frac{\omega}{2}\right) - f(a_1)}{f\left(\frac{\omega}{2}\right) - f(\alpha_1)},$$

da aber $f(o) = -f\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ist, so kommt:

$$\frac{f(o) - f(a_1)}{f(o) - f(\alpha_1)} = -\frac{f(o) + f(a_1)}{f(o) + f(\alpha_1)},$$

also:

$$\frac{f(o)}{f(\alpha_1)} = -\frac{f(a_1)}{f(o)},$$

und:

$$f(o)\,f(o) = -f(a_1)\,f(\alpha_1).$$

Ebenso erhält man:

$$f\left(\frac{\omega_{,}}{2}\right) . f\left(\frac{\omega_{,}}{2}\right) = -f(a_1)\,f(\alpha_1);$$

und hieraus würde folgen, dass entweder $f(o) = f\left(\frac{\omega_{,}}{2}\right)$ oder $f(o) = f\left(\frac{\omega + \omega_{,}}{2}\right)$ sein müsste; dies ist aber nicht möglich, weil die Functionswerthe, welche den Doppelpunkten entsprechen in jedem Perioden-Parallelogramm nur einmal vorkommen können.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es bleibt also nur noch die Möglichkeit $M(a_1) = \infty$, und also nach (3)

$$M(u) = \frac{A_1}{f(u) - f(a_1)}.$$

Dann ist wieder

$$f(o) - f(a_1) = -f\left(\frac{\omega}{2}\right) + f(a_1),$$

also

$$2f(a_1) = o \qquad a_1 = \frac{\omega}{4} + \frac{\omega_{\prime}}{2},$$

$$M(u) = \frac{A_1}{f(u)}. \qquad (4)$$

Die Perioden, und die Bedingung, dass die Functionswerthe an den Doppelpunkten paarweis entgegengesetzt sein sollen, bestimmen also die doppelt periodische Function bis auf einen constanten Factor und die Constante γ. Denn die Function und ihre reciproke unterscheiden sich von einander, wie gleich zu zeigen ist, auch nur durch einen solchen Factor und die Lage des Anfangspunktes.

5. Entgegengesetzte Flächentheile. Für das Folgende nehmen wir nun an, dass wenigstens eine der Perioden nicht complex sei*), und dass die Function an denjenigen Doppelpunkten entgegengesetzte Werthe annehme, deren Charakteristiken sich um die Hälfte der nicht complexen Periode von einander unterscheiden. Wir können auch immer annehmen, dass diese Periode reell sei, denn wenn sie imaginär ist, braucht man nur die Variabele u mit der Variabele ui zu vertauschen, d. h. geometrisch die Axen der x und der y zu verwechseln. Ist nun ω diese Periode, so folgt aus §. 4.:

$$L\left(\frac{\omega}{2} + u\right) = -L(u).$$

Gesetzt nemlich (Fig. 1.) die Werthe der Function an den Doppelpunkten D und D_1, E und E_1 seien d und $-d$, e und $-e$, ferner sei $L\left(\frac{\omega}{4}\right) = o$, $L\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega_{\prime}}{2}\right) = \infty$: so sind die Werthe der Function an den Doppelpunkten D_1 und F gleich $-d$ und d, und dazwischen wird die Function gleich Null; an den Doppelpunkten E_1 und E_2

*) Den Fall zweier complexer Perioden kann man zwar durch Transformation der Coordinaten auf den zurückführen, wo die eine Periode reell, die andere complex oder imaginär ist, aber die Function ist in Bezug auf die neuen Coordinaten nicht mehr monogen.

Sind nemlich die beiden Perioden $\alpha + \beta i$, und $\gamma + \delta i$, und $\alpha > \beta$, so kann man statt der Variabelen $u = x + yi$ einführen $u_1 = x_1 + y_1 i$, wo

$$x_1 = \frac{x\alpha - y\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}, \qquad x = \frac{x_1\alpha + y_1\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}},$$

$$y_1 = \frac{-x\beta + y\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}, \qquad y = \frac{x_1\beta + y_1\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$$

ist. Die Perioden für u_1 werden dann $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ und $\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} + \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} i$; ist aber die Function $f(u) = X + Yi$, so wird:

$$\frac{\partial X}{\partial x_1} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial Y}{\partial y_1} = \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}},$$

also ist $\frac{\partial X}{\partial x_1}$ nicht gleich $\frac{\partial Y}{\partial y_1}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nimmt die Function die Werthe $-e$ und e an, und dazwischen den Werth unendlich — mithin breitet sich die Function L über das Viertel $D_1 F E_2 E_1$ ebenso aus, wie eine Function, welche in D_1 ihren Anfangspunkt hat, und sich von der Function L nur durch den Factor -1 unterscheidet.

Geht man also von irgend einem Punkte der xy Ebene parallel der x Axe um $\frac{\omega}{2}$ fort, so gelangt man zu Ordinaten der Flächen, welche denen entgegengesetzt sind, die dem Ausgangspunkt entsprechen.

Ferner ist

$$L\left(\frac{\omega_1}{2}+u\right)=\frac{L(o)\,L\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}{L(u)},$$

denn eine Function, welche in E ihren Anfangspunkt hat, in der Mitte O zwischen E und E_1 unendlich wird, und in der Mitte A_2 zwischen den Doppelpunkten H und D_2 verschwindet, kann nach dem Obigen von $\frac{1}{L(u)}$ nur durch einen constanten Factor verschieden sein.

6. Functionen mit einer reellen und einer imaginären Periode. Wir unterscheiden nun die beiden Fälle, wo die zweite Periode ω_1 rein imaginär, und wo sie complex ist; und behandeln zunächst den ersten Fall. Wir können die Perioden dann $4K$ und $2K'i$ nennen und festsetzen, dass $L(o)=1$, $L(K)=o$ sein soll, hierdurch ist dann auch e oder $L(K'i)$ bestimmt, und zwar wird e immer reell. Nach §. 4. Gl. 4. wird nemlich

$$L(u)=\frac{A}{\sum\limits_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi u}{2K}+\frac{m\pi K i}{K}\right)}},$$

und da $L(o)=1$ sein soll,

$$A=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cos\frac{m\pi K'i}{K}},$$

oder, wenn $e^{-\frac{\pi K'}{K}}=q$ gesetzt wird,

$$A=1+\frac{4q}{1+q^2}+\frac{4q^2}{1+q^4}+\frac{4q^3}{1+q^6}+\ldots.$$

und

$$e=L(K'i)=\frac{A}{\sum\limits_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{\cos\frac{(2m+1)\pi K i}{2K}}},$$

oder

$$\frac{A}{e}=4\sqrt{q}\left\{\frac{1}{1+q}+\frac{q}{1+q^3}+\frac{q^2}{1+q^5}+\ldots\right\}.$$

Da die Reihe für A bekanntlich gleich $\frac{2K}{\pi}$ und die Reihe für $\frac{A}{e}$ gleich $\frac{2Kk}{\pi}$ ist*),

*) Jacobi. Fund. p. 103.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so wollen wir nun auch $\frac{1}{k}$ statt e schreiben. Unsere Function ist nichts Anderes als $sin\,am\,(u+K, k)$; zur Abkürzung behalten wir aber die Bezeichnung $L(u)$ bei, und setzen

$$L(u) = L(x+yi) = X + Yi = f(x,y) + i\varphi(x,y).$$

7. Achtel der Perioden-Parallelogramme. Ueber der xy Ebene denken wir uns nun gleichzeitig die Fläche

$$z = f(x,y)$$

und die Fläche

$$z = \varphi(x,y)$$

ausgebreitet. Dabei sei D (Fig. 1.) der Anfangspunkt, DF die Richtung der positiven x, DH die der positiven y; die Strecke $DF = 4K$, $DH = 2K'$. Breiten wir dann dieselben beiden Flächen noch einmal über dieselbe Ebene aus, indem wir F als Anfangspunkt nehmen, die x von F nach D, die y aber von F nach G, also wie vorher zählen, so kommt die zweite reelle Fläche mit der ersten zur Deckung; die zweite imaginäre könnte entweder mit der ersten zur Deckung kommen, oder ihre z Coordinaten sind denen der ersten genau entgegengesetzt. Es sind diese Behauptungen einfache Consequenzen des Satzes im §. 4.; die Zweideutigkeit in Bezug auf die imaginären Flächen aber entspringt aus der Zweideutigkeit des Vorzeichens von i in der Gleichung

$$L(u) = X + Yi,$$

und soll weiter unten gehoben werden.

Drittens können wir den Punkt H als Anfangspunkt nehmen, und die x in der Richtung HG, die y in der Richtung HD_1 zählen, die dritte reelle Fläche muss dann wieder mit den beiden ersten zur Deckung kommen, für die imaginäre aber bestehen zunächst dieselben zwei Möglichkeiten wie oben.

Endlich gilt dasselbe von den der Function $-L(u)$ entsprechenden Flächen, wenn man D_1 als Anfangspunkt nimmt, und die x entweder von D_1 nach F_1 oder von D_1 nach D hin zählt.

Für den Theil der reellen Fläche $z = X$, welcher über dem Periodenrechteck $DFGH$ liegt, ergiebt sich hieraus, dass er durch Verticalschnitte längs EE_2 und D_1D_2 in symmetrische Viertel getheilt wird; oder dass

$$f(x,y) = f(4K-x,y) = f(x,2K'-y)$$

ist. Ferner ist aber auch

$$f(x,y) = -f(2K-x,y), \qquad (1)$$

und

$$f(2K+x,y) = -f(4K-x,y). \qquad (2)$$

Setzt man nun $x = K$, so folgt aus (1):

$$f(K,y) = -f(K,y) = o$$

und aus (2):

$$f(3K,y) = -f(3K,y) = o,$$

also schneidet die reelle Fläche die xy Ebene längs der geraden Linien AA_2 und A_1A_3. Die in der Figur mit I und Ib bezeichneten Achtel sind symmetrisch, ebenso die mit Ia und Ic bezeichneten; die Achtel I und Ic sind congruent, und ebenso Ia und Ib.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Desgleichen ist II mit IIa symmetrisch, und IIb mit IIc; II und IIc sind congruent und ebenso IIa und IIb. Endlich sind die Achtel über I und II entgegengesetzt, und kommen zur Deckung, wenn man I um die Axe OA dreht, bis $EOAD$ in die Lage $E_1 OAD_1$ kommt.

In Bezug auf die imaginäre Fläche ist zunächst zu bemerken, dass das Zeichen von i vor dem imaginären Theil der Function $L(u)$ zwar an sich zweideutig ist, aber für eine bestimmte Function stets dasselbe bleiben muss, so dass Zeichenwechsel in den Ordinaten $z = \varphi(x, y)$ nur durch die Zeichenwechsel der Function $\varphi(x, y)$ selbst entstehen können. Das Zeichen von i sei nun für die erste Fläche, die wir vom Anfangspunkt D aus ausgebreitet dachten, positiv genommen, dann ist die Frage, wie wir es zu wählen haben, wenn wir dieselbe Function von F aus ausbreiten, und die x nach der Richtung FD zählen, damit wirklich die neue imaginäre Fläche mit der alten zur Deckung komme. Die Beantwortung der Frage kann aus der Bedingung abgeleitet werden, dass die Function $L(u)$ doppelt periodisch von der zweiten Ordnung sein soll. Könnten wir das zweite Mal auch das positive Vorzeichen nehmen, so käme derselbe Werth von X mit demselben Werth von Y combinirt in den vier Achtel I, Ia, Ib, Ic vor, er kann aber nur zweimal vorkommen, also muss auch das Zeichen von i beim zweiten Male negativ genommen werden; dasselbe gilt vom dritten Male. Es ist also:

$$\varphi(x, y) = -\varphi(4K - x, y) = -\varphi(x, 2K' - y),$$

mithin

$$\varphi(2K, y) = -\varphi(2K, y) = o,$$
$$\varphi(x, K') = -\varphi(x, K') = o,$$

ferner

$$\varphi(x, o) = -\varphi(x, 2K')$$

und da andererseits wegen der Periodicität

$$\varphi(x, o) = \varphi(x, 2K')$$

ist, so folgt

$$\varphi(x, o) = o,$$

d. h. die imaginäre Fläche schneidet die xy Ebene in den Grenzen des Perioden-Rechtecks, und in den Linien EE_2 und $D_1 D_2$, welche dasselbe halbiren.

Da nun jetzt von D_1 nach D hin die Function $-L(u)$ mit dem negativen Vorzeichen von i, also $-Lu = -X + Yi$ sich erstreckt, und zur Deckung kommt mit der Function $L(u) = X + Yi$, die von D nach D_1 hin ausgeht, so ist

$$\varphi(x, y) = \varphi(2K - x, y)$$

und ebenso

$$\varphi(x + 2K, y) = \varphi(4K - x, y),$$

d. h. für die imaginäre Fläche ist das Achtel I symmetrisch mit II, und IIa mit Ia; das Viertel über $I + II$ kommt mit $IIa + Ia$ zur Deckung durch Drehung um die Axe $E_1 D_1$, und mit $Ib + IIb$ durch Drehung um die Axe EE_1.

Hiernach lässt sich nun leicht übersehen, wie die Function $L(u)$ innerhalb eines Perioden-Parallelogramms so verläuft, dass jeder Werth gerade zweimal vorkommt. In der Fig. (1.) sind die Achtel der reellen Fläche, welchen negative Ordinaten entsprechen durch ausgezogene Linien schraffirt, und die Achtel der imaginären Fläche, welchen negative Ordinaten entsprechen, durch punktirte Linien.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

8. Allgemeine Eigenschaften der Niveaulinien. Bevor wir die Flächen für $\sin am\,(u+K)$ weiter discutiren, bemerken wir einige Eigenschaften der Schnitte, welche parallel zur xy Ebene durch solche Flächen gelegt sind, welche doppelt periodische Functionen zweiter Ordnung darstellen. Wir nennen diese Schnitte und auch ihre Projectionen auf die xy Ebene Niveaulinien der Fläche.

Wenn

$$L(u) = L(x+yi) = X + Yi$$

eine monogene Function von u ist, so gelten bekanntlich die Gleichungen:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}. \qquad (1)$$

Betrachtet man nun $z = X$ als Gleichung einer Fläche, so ist die Differential-Gleichung einer Niveaulinie

$$\frac{\partial X}{\partial x}\,dx + \frac{\partial X}{\partial y}\,dy = o,$$

desgleichen ist für die Fläche $z = Y$ die Differential-Gleichung einer Niveaulinie

$$\frac{\partial Y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Y}{\partial y}\,dy = o,$$

da nun aus (1) folgt:

$$\frac{\partial X}{\partial x}\,\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\,\frac{\partial Y}{\partial y} = o,$$

so schneiden die Niveaulinien der beiden Flächen einander unter rechten Winkeln*); oder: die Niveaulinien der einen Fläche sind die Projectionen für die Curven des steilsten Abfalls auf der anderen Fläche.

Wenn nun $L(u)$ eine doppelt periodische Function zweiter Ordnung ist, so kommt innerhalb jedes Perioden-Parallelogramms jeder beliebige Werth zweimal vor, folglich muss auch jeder beliebige Werth von X zweimal mit jedem beliebigen reellen Werth von Y combinirt vorkommen. Denkt man sich also in einem Perioden-Parallelogramm die Niveaulinien beider Flächen verzeichnet, so bilden diese zwei Curvensysteme von der Art, dass jede Curve des einen Systems alle Curven des andern Systems zweimal, und zwar rechtwinklig, schneidet, aber keine desselben Systems trifft. Durchläuft u alle Werthe, welche Charakteristiken für die Punkte einer Curve des zweiten Systems (Y) sind, so durchläuft X alle Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$, und zwar nimmt es jeden zweimal an.

Wenn ferner der Differentialquotient von $L(u)$ nur an den Punkten unbestimmt oder unendlich wird, für welche $L(u)$ unendlich wird, so kann es keine Niveaulinie geben, welche nicht durch einen der Punkte ginge, in welchem $L(u)$ unendlich wird. Eine solche Niveaulinie müsste nemlich wegen der Stetigkeit der Fläche geschlossen sein, und es würden innerhalb derselben eine Reihe sich stetig verengender Niveaulinien desselben Systems liegen müssen. In den, von diesen Curven eingeschlossenen, Raum müssten nun unzählige Niveaulinien des anderen Systems eintreten, und da dieser Raum immer kleiner wird, so müssten die Curven des zweiten Systems schliess-

*) Dass zwei Curven, deren Gleichungen $X = A$ und $Y = B$ sind, einander rechtwinklig schneiden, bemerkt z. B. Prouhet in Sturm Cours d'Analyse. Paris 1859. T. II. Note IV. p. 340.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

lich in einen Punkt zusammenlaufen, und in diesem wäre dann der Differentialquotient von $L(u)$ unbestimmt.

Wenn die eine der Perioden reell ist, so schneidet jede Niveaulinie eine zur Axe der x gezogene Parallele in einer geraden Anzahl von Punkten oder gar nicht. Denn: legt man durch diese Parallele einen senkrechten Schnitt durch die Fläche, so bekommt man eine continuirliche Curve (den Fall ausgenommen, wo die Ebene durch den Punkt geht, in welchem die Fläche unendlich wird), welche an den Endpunkten gleiche Ordinaten hat; es muss also der Werth jeder Ordinate in gerader Anzahl vorkommen, die Ordinaten der höchsten Punkte müssen natürlich doppelt gezählt werden, in ihren Fusspunkten berühren die Niveaulinien die Parallele. Wenn die zweite Periode rein imaginär ist, so gilt das Analoge von den Parallelen zur y Axe.

9. Streifen der reellen und Felder der imaginären Fläche für $\sin am(u+K)$. Wenden wir uns nun wieder zu den speciellen Flächen für $\sin am(u+K)$ zurück, so ergiebt sich zunächst, dass die ganze, über der unendlichen xy Ebene liegende Fläche $z = f(x, y)$ aus Streifen besteht, welche abwechselnd über und unter der xy Ebene liegen, und durch Parallelen zur y Axe begrenzt werden, die den Abstand $2K$ von einander haben. Die Fläche $\varphi(x, y)$ dagegen besteht aus Feldern, die schachbrettartig abwechselnd über und unter der xy Ebene liegen, und begrenzt werden von Parallelen zur Axe der x in Abständen von der Grösse K', und von Parallelen zur Axe der x im Abstand $2K$. Die Linien, welche die reelle Fläche in Streifen theilen, theilen die Felder der imaginären Fläche in symmetrische Hälften.

Nach dem Früheren ist das Gesagte klar, sobald feststeht, dass ausser den genannten geraden Linien keine Durchschnitte der Flächen mit der xy Ebene vorkommen. Nun kann aber längs AA_2, wo X im Allgemeinen verschwindet, Y nicht verschwinden, ausser in A und A_2, dabei sind die Werthe über AO denen über A_2O entgegengesetzt, und in O wird $Y = \pm\infty$; mithin muss Y längs der Linie AA_2 alle Werthe zwischen o und $-\infty$ und zwischen ∞ und o durchlaufen; dasselbe ist bei der Linie A_1A_3 der Fall; also kommt der Werth $X = o$ auf diesen Linien mit allen Werthen von Y combinirt vor, und mit jedem zweimal, X kann also an keiner anderen Stelle verschwinden. Ferner: führt man das Argument von X durch den Weg $ADEOE_1D_1A$, so durchläuft X alle Werthe von o bis 1, von 1 bis $\frac{1}{k}$, von $\frac{1}{k}$ bis ∞, von $-\infty$ bis $-\frac{1}{k}$, von $-\frac{1}{k}$ bis -1, von -1 bis o, dasselbe gilt für den Weg $A_3GE_2O_1E_1D_2A_3$; auf beiden bleibt $Y = o$, also kommen auf diesen Wegen alle möglichen Werthe von X zweimal mit dem Werthe $Y = o$ combinirt vor, Y kann also an keinem anderen Punkte verschwinden*).

10. Querschnitte und Längsschnitte durch die Flächen. Will man sich nun die Fläche X vorstellen, so ist die nächste Frage, wie es möglich ist, dass

*) Beiläufig folgt hieraus, dass $\frac{1}{k} > 1$, also $k < 1$ sein muss; denn sonst würden auf den genannten Wegen die Werthe zwischen 1 und $\frac{1}{k}$ mehr als je einmal vorkommen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Unterbrechung der Stetigkeit im Punkte O auf diesen einzelnen Punkt beschränkt bleibe? Diese Stetigkeitsunterbrechung trat bisher am auffallendsten in dem Umstande hervor, dass der Verticalschnitt längs AA_2 oder A_1A_3 eine horizontale Gerade ist, mit Ausnahme der Punkte O und O_1, in welchen $X = \pm\infty$ wird.

Betrachten wir, um die Vorstellungen zu fixiren, das Flächenstück über $AOED$, und legen eine Reihe von Schnitten senkrecht gegen die Axe der y durch dasselbe — die wir Querschnitte nennen wollen —, so werden dieselben je mehr sie von A aus nach O rücken, immer steiler werden, bis sie kurz vor O fast vertical abfallen. Dass dem so sei, sieht man ohne Rechnung. Es liefert $\frac{\partial X}{\partial x}$ für $x = K$ die Tangente des Neigungswinkels, unter welchem ein Querschnitt bei der Linie AO eintrifft; nun ist aber $\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}$; und $\frac{\partial Y}{\partial y}$ bestimmt, wenn $x = K$ gesetzt wird, die Tangenten des längs AO durch die imaginäre Fläche gelegten Verticalschnitts; und dieser muss immer steiler werden, bis er über O ins Unendliche geht. —

Der Querschnitt längs EE_2 muss nun in O selbst eine Stetigkeitsunterbrechung haben, die in gewisser Weise durch die vorhergehenden Querschnitte vorbereitet sein muss. Dies ist in folgender Weise möglich: von einem gewissen Querschnitt an stellen sich auf diesen Curven höchste Punkte heraus, deren Projectionen allmählig an die Linie AO heranrücken, bis in dem letzten das Maximum gerade über O liegt. Links von dem Maximum kehren die Querschnitte (die ein solches Maximum haben) ihre convexe Seite anfangs der xy Ebene zu, wenden sich dann zu ihrem höchsten Punkt, und fallen endlich, die convexe Seite nach oben gekehrt, zur Linie AO ab. Mit dem Maximum rückt nun auch der Wendepunkt der Querschnitte mehr nach OA hin, bis in dem letzten Querschnitt der Wendepunkt verschwindet, so dass diese Curve über der ganzen Strecke EO ihre convexe Seite nach unten kehrt, und über O in einen unendlichen Zweig mit verticaler Asymptote ausläuft, dem ein anderer auf der rechten Seite der Asymptote entspricht, welcher vom negativ Unendlichen herkommt. Die Curve, auf welcher die Projectionen der Querschnittsgipfel liegen, muss der Symmetrie der Flächen wegen vom Punkte O aus sich nach der Linie DE wenden und diese rechtwinklig schneiden. Legt man durch diese Curve eine verticale Cylinderfläche, so theilt dieselbe die Fläche in zwei Theile, von denen der eine zu der unendlich hohen Spitze über O aufsteigt, der andere zu der Spitze unter O abfällt. Auch diese Behauptungen folgen ohne Weiteres aus der Relation zwischen der reellen und der imaginären Fläche. Die Längsschnitte (Schnitte senkrecht gegen die x Axe) durch ein Feld der imaginären Fläche müssen offenbar sämmtlich höchste oder tiefste Punkte haben, da sie mit den Ordinaten o aufangen und (mit Ausnahme des durch O gehenden) endigen. An diesen Punkten muss $\frac{\partial Y}{\partial y}$ sein Zeichen wechseln, und da $\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x}$, so entsprechen den ausgezeichneten Ordinaten der imaginären Fläche analoge der reellen.

Die Gestalt eines Feldes der imaginären Fläche ist leichter aufzufassen. Wir wollen annehmen, dass das Feld über $D_1E_1E_2F$ positive Ordinaten habe. Die Längsschnitte, welche durch die auf einander folgenden Punkte von D_1A_1 gehen, steigen bis zu einem

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

höchsten Punkte an, und fallen dann nach $E_1 O_1$ wieder ab, die höchsten Punkte rücken allmählig nach O_1 hin, und auf dem durch O_1 gehenden Schnitt bildet sich der unendliche Zweig u. s. f.

11. Formeln. Die Discussion der in Rede stehenden Flächen liesse sich auf diese Weise noch fortführen, ohne die analytischen Ausdrücke für die Functionen X und Y, welche die Theorie der elliptischen Functionen liefert, zu benutzen. Der Zusammenhang zwischen den Eigenschaften beider Flächen tritt durch solche Reflexionen wohl deutlicher hervor, aber der Ausdruck wird zu weitläufig; bei der Benutzung jener Ausdrücke spiegelt sich diese Weitläufigkeit zwar in der Schwerfälligkeit der entsprechenden Formeln wieder, indessen sind diese für die Verificirung der Schlüsse doch nicht zu entbehren.

Man kann diese Formeln mit den von Jacobi eingeführten Bezeichungen kaum noch schreiben, wir wählen daher die von Briot und Bouquet benutzten kürzeren Zeichen; danach ist

$$\sin am\,(u,k) = \lambda\,(u,k)\ ,\ \cos am\,(u,k) = \mu(u,k)$$
$$\Delta\, am\,(u,k) = \nu\,(u,k)\ ,\ tg\, am\,(u,k) = \tau(u,k).\ ^{*})$$

Wenn die Functionen der complexen Variabelen $u = x + yi$ in ihre reellen und imaginären Theile gespalten werden, so kommen im Allgemeinen nur die elliptischen Functionen für die reelle Variabele x und den Modul k, und die Functionen für die reelle Variabele y und den complementären Modul k' vor; wir bezeichnen dann $\lambda(x,k)$ einfach mit λ, und $\lambda\,(y,k')$ mit $\lambda_{,}$, und analog die übrigen Functionen. Die oben an ein Functionszeichen angebrachten Striche dienen zur Bezeichnung der Differentialquotienten.

Aus dem Additionstheorem folgt nun:

$$\lambda\,(x+yi) = \frac{\lambda(x)\ \mu(yi)\ \nu(yi) + \lambda(yi)\ \mu(x)\ \nu(x)}{1 - k^2\ \lambda^2(x)\ \lambda^2(yi)},$$

und da:

$$\lambda(yi,k) = i\,\tau(y,k'), \qquad \mu(yi) = \frac{1}{\mu(y,k')},$$
$$\nu(yi,k) = \frac{\nu(y,k')}{\mu(y,k')}, \qquad \tau(yi) = i\,\lambda(y,k'), \tag{1}$$

so ist:

$$\lambda(x+yi) = \frac{\lambda\nu_{,} + iu\nu\lambda_{,}\mu_{,}}{\mu_{,}^2 + k^2\lambda^2\lambda_{,}^2} = X + Yi,$$

mithin:

$$X = \frac{\lambda\nu_{,}}{\mu_{,}^2 + k^2\lambda^2\lambda_{,}^2}, \qquad Y = \frac{\mu\nu\lambda_{,}\mu_{,}}{\mu_{,}^2 + k^2\lambda^2\lambda_{,}^2}.\ ^{**})$$

Die oben betrachteten Functionen X und Y stimmen mit den so eben definirten überein, wenn wir jetzt annehmen, dass der Anfangspunkt von D aus um die Strecke K nach links verschoben sei, bis nach B.

Für die reelle Fläche erhalten wir den Querschnitt längs BF, wie sich von selbst versteht:

$$z = \lambda,$$

*) Typische Rücksichten nöthigen uns τ zu setzen, wo in dem angeführten Buche π steht.

**) Für die numerische Berechnung ist es bequem statt $\mu_{,}^2 + k^2\lambda^2\lambda_{,}^2$ zu setzen: $1 - \nu^2\lambda_{,}^2$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und den Querschnitt längs EE_2

$$z = \frac{1}{k\lambda},$$

als Längsschnitt längs DE_1:

$$z = \frac{1}{\nu_,} = \frac{1}{k} \triangle coam\,(y, k'),$$

als Längsschnitt längs AO:

$$z = o,$$

nur in O erscheint z unter der Form $\frac{o}{o}$.

Das Feld DD_1E_1E der imaginären Fläche liegt unterhalb der xy Ebene; die Gleichung des Längsschnitts durch AO ist

$$z = -\tau_1.$$

Die geraden Begrenzungslinien ergeben sich leicht.

Die Ausdrücke für $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ u. s. w., deren wir nun bedürfen, gewinnen wir durch die Bemerkung, dass einerseits:

$$\lambda'(x + yi) = \frac{\partial X}{\partial x} + i\,\frac{\partial Y}{\partial x},$$

und andererseits:

$$\lambda'(x + yi) = \mu(x + yi) \,.\, \nu(x + yi) \qquad (2)$$

ist, also $\frac{\partial X}{\partial x}$ gleich dem reellen Theil in dem Produkt (2), und $\frac{\partial Y}{\partial x}$ gleich dem in i multiplicirten sein muss. Da nun aus den Additions-Sätzen und den Gleichungen (1) folgt:

$$\mu(x + yi) = \frac{\mu\mu_, - i\lambda\nu\lambda_,\nu_,}{\mu_,^2 + k^2\lambda^2\lambda_,^2},$$

$$\nu(x + yi) = \frac{\nu\nu_,\mu_, - ik^2\lambda\mu\lambda_,}{\mu_,^2 + k^2\lambda^2\lambda_,^2},$$

so wird:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\mu\nu\nu_,\left\{\mu_,^2 - k^2\lambda^2\lambda_,^2\right\}}{\left\{\mu_,^2 + k^2\lambda^2\lambda_,^2\right\}^2} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\lambda\lambda_,\mu_,\left\{\nu^2\nu_,^2 + k^2\mu^2\right\}}{\left\{\mu_,^2 + k^2\lambda^2\lambda_,^2\right\}^2}.$$

Da ferner

$$\lambda''(x + yi = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + i\,\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},$$

und andererseits

$$\lambda'' = -\lambda(\nu^2 + k^2\mu^2)$$

ist, so folgt:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial y} = \frac{-\lambda\nu_,\left\{(\nu^2\nu_,^2 + k^2\mu^2)(\mu_,^2 - k^2\lambda^2\lambda_,^2) + 4k^2\mu^2\nu^2\lambda_,^2\mu_,^2\right\}}{\left\{\mu_,^2 + k^2\lambda^2\lambda_,^2\right\}^3}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y} = \frac{-\mu\nu\lambda_,\mu_,\left\{(\nu^2\nu_,^2 + k^2\mu^2)(\mu_,^2 - k^2\lambda^2\lambda_,^2) - 4k^2\lambda^2\nu_,^2\right\}}{\left\{\mu_,^2 + k^2\lambda^2\lambda_,^2\right\}^3}.$$

12. Spezielle Discussion der reellen Fläche für *sin am u.* Querschnitte. Wir betrachten nun zunächst die reelle Fläche und insbesondere den oben discutirten Flächentheil $DAOE$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Curve, auf welcher die Projectionen der Querschnittsgipfel liegen, hat, wie aus (3) folgt, die Gleichung

$$\mu_{,}^{2} = k^2\lambda^2\lambda^2, \text{ oder } \lambda^2 = \frac{1}{k^2\tau_{,}^{2}},$$

mit der Beschränkung natürlich, dass x und y reell sein müssen. Da nun in dem betrachteten Raume λ und $\tau_{,}$ beide positiv sind, so wird die Gleichung

$$\lambda = \frac{1}{k\tau_{,}}. \qquad (5)$$

Da ferner λ für reelle x höchstens $= 1$ werden kann, so muss $\tau_{,}$ mindestens $= \frac{1}{k}$ sein. Die Curve beginnt also in einem Punkte C auf der Linie DE, dessen Ordinate y_0 bestimmt ist durch die Gleichung

$$tg\ am\ (y_0, k') = \frac{1}{k} \text{ oder}$$

$$tg\ coam\ (y_0, k') = 1,$$

$$y_0 = K' - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi}};$$

der Punkt C liegt also zwischen E und der Mitte von DE, und rückt mit abnehmendem k immer weiter von D fort, so dass er für $k = o$, wo die elliptischen Functionen in die Kreisfunctionen übergehen, im Unendlichen liegt*). Wie aus der bekannten Gleichung

$$\nu'' = -k^2\nu(1-2\lambda^2)$$

leicht erhellt, hat auch der Längsschnitt der Fläche längs DE, dessen Gleichung $z = \frac{1}{k} \triangle\ coam\ (y, k')$ ist, in C seinen Wendepunkt.

Aus (5) erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}{(1+k^2\lambda^2)(1+\lambda^2)}},$$

und zwar ist die Wurzel in diesem Raume positiv zu nehmen; λ nimmt mit wachsendem x ab, also ist die Curve in C parallel der x Axe, kehrt ihre convexe Seite dieser Axe zu, und trifft unter 45° bei der Linie OA im Punkte O ein; hier kreuzen sich die vier Zweige rechtwinklig, welche den Räumen I, II, IIb, Ib entsprechen.

Betrachtet man nun die auf einander folgenden Querschnitte, so haben die zwischen D und C liegenden sämmtlich über der Linie DC ihren höchsten Punkt, und fallen, die concave Seite nach unten gekehrt, zur Linie AO ab, haben dort einen Wendepunkt und treten dann unter die xy Ebene. Denn für $x = K$ wird $\mu = o$ und also auch $\frac{\partial X}{\partial x}$, während $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ negativ bleibt, so lange $\mu_{,}^{2} < k^2\lambda^2\lambda_{,}^{2}$ ist. Von dem durch C gehenden Querschnitt an liegen über CO niedrigste Punkte, weil $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ für $x = K$ dann positiv wird; die Querschnitte kehren anfangs ihre convexe Seite nach unten, wenden sich dann, erreichen über der Curve (5) ihren Gipfel, und kommen, die concave Seite nach unten gekehrt, bei AO an, wo ein neuer Wendepunkt eintritt.

*) Für $k = sin\ 15^0$ wird $DC = y_0 = 1{,}89536$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Längsschnitte haben innerhalb des Raumes $DAOE$ kein Maximum, sie fangen bei DA horizontal an; die convexe Seite nach unten gekehrt, steigen sie stetig höher, bis sie jenseit der Curve (5) über denselben Punkten der xy Ebene sich wenden, wo auch die Querschnitte ihren Wendepunkt haben; sie erreichen endlich über EO ihre Gipfel.

Dies Verhalten der Quer- und Längsschnitte lässt sich noch auf eine andere Weise einsehen. Wenn nemlich $L(u)$ eine doppelt periodische Function von der Art ist, wie wir sie hier betrachten, so ist

$$L'^2 = (1 - L^2)\,(1 - k^2 L^2),$$

und wenn $L = X + Yi$ gesetzt wird, so ist:

$$L'^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + 2i\,\frac{\partial X}{\partial x}\,\frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$= 1 - (1+k^2)\,(X^2 - Y^2) + k^2\,(X^4 + Y^4 - 6X^2Y^2) - 2iXY\{1 + k^2 - 2k^2(X^2 - Y^2)\}.$$

Ist nun k nicht complex, und soll $\frac{\partial X}{\partial x}$ oder $\frac{\partial Y}{\partial x}$ verschwinden, ohne dass gleichzeitig eine der Grössen X oder Y verschwindet, so muss

$$X^2 - Y^2 = \frac{1 + k^2}{2k^2} \qquad (6)$$

sein, und hieraus folgt

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 = -\,\frac{k'^4 + 16k^4 X^2 Y^2}{4k^2}.$$

Ist nun k reell, so ist die rechte Seite negativ, also kann nur $\frac{\partial X}{\partial x}$ verschwinden; ist dagegen k imaginär, so ist die rechte Seite positiv, und dann kann nur $\frac{\partial Y}{\partial x}$ verschwinden.

Zugleich bekommen wir durch die Gleichung (6) das Minimum, welches X unter diesen Bedingungen haben kann, nemlich:

$$X = \sqrt{\frac{1 + k^2}{2k^2}}.$$

Dies tritt im Punkte C ein.

13. Niveaulinien der reellen Fläche. Nach dem Obigen ist die Form der Niveaulinien leicht zu erkennen. Man kann unterscheiden: erstens diejenigen, welche den Werthen von X zwischen o und 1 entsprechen; sie schneiden DA rechtwinklig, wenden sich zu O, bilden in dem Flächentheil Ib einen congruenten, symmetrisch liegenden, Theil, treten dann in das folgende Perioden-Rechteck u. s. w.; sie sind also Curven, die sich durch die unendlichen Streifen der Fläche ununterbrochen hindurchziehen. Da

$$-\,\frac{\frac{\partial X}{\partial x}}{\frac{\partial X}{\partial y}} = -\,\frac{\mu\nu\nu_{,}\{\mu_{,}^2 - k^2\lambda^2\lambda_{,}^2\}}{\lambda\lambda_{,}\mu_{,}\{\nu^2\nu_{,}^2 + k^2\mu^2\}},$$

da ferner $\mu_{,}^2 - k^2\lambda^2\lambda_{,}^2 > o$ bleibt, und μ von $x = K$ bis $x = 2K$ negativ ist, so bilden die Tangenten an die Curve lauter spitze Winkel mit der Axe der x.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn zweitens X in dem Intervalle zwischen 1 und $\sqrt{\frac{1+k^2}{2k^2}}$ liegt, so schneiden die Niveaulinien die Linie DE rechtwinklig, und bilden geschlossene Curven, die sich durch die Räume I, Ib und die entsprechenden, links von DH liegenden, erstrecken, und aus vier congruenten Theilen bestehen. Auch auf ihnen nehmen innerhalb $DAOE$ die Ordinaten y mit wachsendem x stets zu.

Liegt drittens X zwischen $\sqrt{\frac{1+k^2}{2k^2}}$ und $\frac{1}{k}$, so bilden die vier congruenten Theile einer Niveaulinie zwar noch zusammen eine geschlossene Curve, aber die Ordinaten nehmen, wenn x von K bis $2K$ wächst, anfangs ab, bis die Niveaulinie die Curve $k\lambda\tau_{,} = 1$ schneidet; hier hat die Curve wieder eine zur x Axe parallele Tangente; sie entfernt sich nun von der x Axe, geht durch O u. s. w.

Wenn viertens X grösser als $\frac{1}{k}$ wird, zerfallen die Niveaulinien (eines Perioden-Rechtecks) in zwei geschlossene Curven, die sich vom Punkt O (oder seinem entsprechenden) immer weniger entfernen, von OE halbirt, und rechtwinklig geschnitten werden und sämmtlich die Curve $k\lambda\tau_{,} = 1$ schneiden; in dem Theile zwischen EO und dem Durchschnittspunkt mit der letztgenannten Curve nehmen die y mit wachsendem x ab, in dem andern zu. Die letzten Behauptungen verificirt man leicht, wenn man die Gleichung

$$X = \frac{\lambda\nu_{,}}{\mu_{,} + k^2\lambda^2\lambda_{,}^2} = \frac{\lambda\tau_{,}'}{1 + k^2\lambda^2\tau_{,}^2}$$

nach Potenzen von $k\lambda\tau_{,}$ ordnet, also schreibt:

$$k^2\lambda^2\tau_{,}^2 - k\lambda\tau\,\frac{\tau_{,}'}{k\tau X} + 1 = o.$$

Von den beiden Wurzeln $k\lambda\tau_{,}$, welche demselben Werth von τ oder y entsprechen, ist also die eine stets grösser, die andere stets kleiner als Eins; d. h. von den Durchschnittspunkten der Niveaulinie mit einer Parallelen zur x Axe liegt der eine diesseit, der andere jenseit der Curve $k\lambda\tau_{,} = 1$.

14. Wendepunkte der Niveaulinien. Mehr Umstände macht die Bestimmung der Wendepunkte der Niveaulinien. Die Niveaulinien der ersten und dritten Art haben in dem Raume $DAOE$ einen Wendepunkt, die der vierten Art keinen; die der zweiten entweder zwei oder keinen.

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = r, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} = s,$$

so müssen die Coordinaten der Wendepunkte einer Niveaulinie die Gleichung

$$(p^2 - q^2)\, r + 2pqs = o \qquad (1)$$

erfüllen. Die oben gefundenen Ausdrücke für die Grössen p, q, r, s in diese Gleichung einzusetzen, würde zu langwierige Rechnungen veranlassen; wir drücken sie daher durch X und Y aus. Es ist

$$\lambda'^2 = 1 - (1 + k^2)\,\lambda^2 + k^2\lambda^4,$$

also

$$\lambda'' = -(1 + k^2)\,\lambda + 2k^2\lambda^3, \qquad (2)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

andererseits ist aber

$$\lambda = X + Yi, \qquad \lambda'' = r - si,$$

setzt man diese Werthe in (2) ein, und sondert die reellen und imaginären Theile, so kommt:

$$r = -(1 + k^2)\,X + 2k^2X^3 - 6k^2XY^2,$$
$$s = \quad (1 + k^2)\,Y - 6k^2X^2Y + 2k^2Y^3.$$

Aus §. 12. folgt:

$$p^2 - q^2 = 1 - (1 + k^2)(X^2 - Y^2) + k^2(X^4 + Y^4 - 6X^2Y^2),$$
$$2pq = 2XY\left\{1 + k^2 - 2k^2(X^2 - Y^2)\right\};$$

wenn man nun noch zur Abkürzung setzt:

$$l = 1 - (1 + k^2)\,X^2 + k^2X^4,$$
$$m = 1 + k^2 - 2k^2X^2,$$
$$n = 1 + k^2 - 6k^2X^2,$$

so geht die Gleichung (1) über in:

$$2k^4Y^6 + k^2(3m - 2n)\,Y^4 + (mn - 6k^2l^2)\,Y^2 - lm = o, \qquad (3)$$

wo auf der linken Seite der Factor X fortgelassen ist.

Auf ein und derselben Niveaulinie ist nun X constant, während Y alle möglichen reellen Werthe durchläuft; hat also die Gleichung (3) reelle Wurzeln, so entsprechen jeder derselben zwei Wendepunkte, nemlich die beiden Punkte, in welchen die Niveaulinie X der reellen Fläche geschnitten wird von der Niveaulinie Y der imaginären Fläche. Von diesen beiden Punkten liegt natürlich nur einer im Raume $DAOE$. Ferner sind die Wurzeln von (3) paarweise entgegengesetzt, und nur die positiven entsprechen Punkten des genannten Raumes. Die Zahl der Wendepunkte einer Niveaulinie, welche in demselben liegen, ist also gleich der Zahl der positiven reellen Wurzeln der Gleichung (3). Setzen wir $Y^2 = z$, so ist die Gleichung vom dritten Grade in Bezug auf z, und es handelt sich nur um die Bestimmung der Anzahl der positiven reellen Wurzeln z. Da nun

$$3m - 2n = 1 + k^2 + 6k^2X^2,$$

also stets positiv ist, so können in den Vorzeichen der Terme links höchstens zwei Variationen vorkommen; es kann also höchstens zwei positive Wurzeln geben. Unterscheiden wir nun die vier Intervalle für X, so ist in dem ersten

$$o < X^2 < 1$$

also $lm > o$, d. h. der letzte Term negativ; also hat die Gleichung eine positive Wurzel, und da nur eine Variation vorhanden ist, nur eine.

In dem zweiten Intervall

$$1 < X^2 < \frac{1 + k^2}{2k^2}$$

ist $lm < o$, je nach dem Zeichen des Coefficienten von z, nemlich:

$$mn - 6k^2l^2 = 6k^4X^4 - 2k^2(1 + k^2)\,X^2 + (1 + k^2)^2 - 6k^2,$$

sind also zwei Variationen vorhanden, oder keine. Ist der Coefficient von Y^2 positiv, so giebt es keine positive Wurzel; ist er negativ, so hat die Gleichung nur eine negative Wurzel, die beiden andern sind also entweder positiv oder imaginär. Der Coefficient wechselt nun sein Zeichen wenn

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$X = \frac{1 + k^2 \pm \sqrt{(5 - k^2)(5k^2 - 1)}}{6k^2}$$

wird; d h. er wird nie negativ, wenn $k^2 < \frac{1}{5}$ ist; ist aber $k^2 > \frac{1}{5}$, so ist er zwar negativ für $X^2 = 1$, erlangt aber positive Werthe schon bevor X^2 die Grenze $\frac{1 + k^2}{2k^2}$ erreicht hat.

Für das Intervall

$$1 < X^2 < \frac{1 + k^2 + \sqrt{(5 - k^2)(5k^2 - 1)}}{6k^2}$$

wäre also die Frage nach den Wendepunkten erst durch eine längere Rechnung zu entscheiden, in dem Intervall

$$\frac{1 + k^2 + \sqrt{(5 - k^2)(5k^2 - 1)}}{6k^2} < X^2 < \frac{1 + k^2}{6k^2}$$

haben die Niveaulinien keinen Wendepunkt.

In dem dritten Intervall

$$\frac{1 + k^2}{2k^2} < X^2 < \frac{1}{k^2}$$

ist $lm > o$, also hat die Gleichung wieder eine positive Wurzel.

Wenn endlich $X^2 > \frac{1}{k^2}$ ist, so sind alle Coefficienten der Gleichung (3) positiv, und die Niveaulinien haben keinen Wendepunkt.

15. Charakteristische Kegelschnitte der reellen Fläche. Mit der Form der Niveaulinien ändert sich natürlich auch die der charakteristischen Kegelschnitte. Es ist bekannt, dass dieselben bei allen, eine monogene Function darstellenden, Flächen zu Projectionen auf der xy Ebene gleichseitige Hyperbeln haben,*) dass also die Flächen in allen Punkten concav-convex sind. Im vorliegenden Falle lässt sich nun leicht verfolgen, wie die charakteristischen Kegelschnitte selbst sich ändern, wenn ihr Mittelpunkt auf dem durch DE geführten Längsschnitt entlang rückt.

Verlängert man die Ordinate z eines Punktes x, y, z der Fläche $z = X$ um die unendlich kleine Strecke ζ, und legt durch den Endpunkt einen Schnitt durch die Fläche parallel zur Tangentialebene am Punkte x, y, z, so ist die Gleichung für die Projection der Schnittcurve

$$2\zeta = r\xi^2 + 2s\xi\eta - r\eta^2,$$

wo die ξ und η vom Punkte x, y als Anfangspunkt aus und parallel den Axen der x und y gezählt sind. Für die Punkte des Längsschnitts durch DE ist nun $p = o$, also schneidet die Tangentialebene die Ebene der xy in einer Parallelen zur x Axe, und ihr Neigungswinkel i ist bestimmt durch die Gleichung

$$\cos i = \frac{1}{\sqrt{1 + q^2}},$$

setzt man also $\eta_{,} = \frac{\eta}{\cos i}$ oder $\eta = \frac{\eta_{,}}{\sqrt{1 + q^2}}$,

so ist:

$$2\zeta = r\xi^2 + \frac{2s\xi\eta_{,}}{\sqrt{1 + q^2}} - \frac{r\eta_{,}^2}{1 + q^2} \qquad (1)$$

*) Vgl. z. B. Briot et Bouquet a. a. O. p. 9.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Gleichung des charakteristischen Kegelschnitts, bezogen auf den Endpunkt von ζ als Anfangspunkt, und den Durchschnitt des Längsschnitts mit der Tangentialebene als Axe der $\eta_{,}$.

Nun ist aber für $x = K$ beständig $s = o$, also geht (1) über in

$$2\zeta = r\xi^2 - \frac{r\eta_{,}^2}{1+q^2}.$$

Da nun r negativ ist, so lange y zwischen 0 und DC liegt, so sind die reellen Axen der Hyperbeln, in welchen die Fläche geschnitten wird, parallel der Axe der $\eta_{,}$; wächst dagegen y von DC bis K', so ist r positiv, und die reellen Axen der Hyperbeln sind der x Axe parallel. Im Punkte C selbst hat die Fläche mit ihrer Tangentialebene eine Berührung zweiter Ordnung, der Punkt kann also als ein Nabelpunkt der Fläche angesehen werden.*)

In den Punkten D und E ist die Tangentialebene horizontal, die charakteristischen Kegelschnitte sind also selbst gleichseitige Hyperbeln. Da das Verhältniss der imaginären zur reellen Axe anfangs $= \sqrt{1+q^2}$ ist, und q beständig wächst, so öffnen sich die Asymptoten-Winkel immer mehr, bis $y = DC$ geworden ist, von da an wird das Verhältniss der Axen $= \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$, und q nimmt ab, also wächst auch jetzt der Asymptotenwinkel, bis er bei E wieder 45° erreicht.

16. Längsschnitte von constantem Flächeninhalt. Schliesslich erwähnen wir noch des, die Fläche charakterisirenden, Umstandes, dass der Flächeninhalt aller Längsschnitte derselbe ist. Der Ausdruck für X lässt sich nemlich, da $\frac{\nu_{,}}{\mu_{,}^2} = \tau_{,}'$ ist, schreiben

$$X = \frac{\lambda\tau_{,}'}{1+k^2\lambda^2\tau_{,}^2},$$

der Flächeninhalt F eines Längsschnitts über einer im Raume $DAOE$ gezogenen Parallelen zur y Axe wird also

$$F = \int_0^{K'} \frac{\lambda\tau_{,}'\,dy}{1+k^2\lambda^2\tau_{,}^2} = \frac{1}{k}\int_0^{\infty} \frac{d(k\lambda\tau_{,})}{1+k^2\lambda^2\tau_{,}^2},$$

und da $k\lambda\tau_{,}$ längs der Grundlinie des Schnitts von o bis ∞ wächst, ohne seine Zeichen zu ändern, so kommt

$$F = \frac{\pi}{2k}.$$

Demnach wird das Volumen zwischen der Grundfläche $DAOE$ und der Oberfläche:

$$\frac{K}{k}\,\frac{\pi}{2}.\text{**)}$$

Ferner: die durch die Curve $k\lambda\tau_{,} = 1$ gelegte cylindrische Fläche halbirt die eben

*) Dasselbe gilt vom Punkte A.

**) Prouhet hat a. a. O. bemerkt, dass das Volumen eines Körpers zwischen der Fläche $z = X$, der xy Ebene und einem geraden Cylinder vom Radius r, dessen Axe in die z Axe fällt, gleich

$$\pi r^2 X_0$$

ist; wenn X der reelle oder imaginäre Theil einer monogenen Function von $x + yi$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

berechneten Längsschnitte. Denn der Flächeninhalt des Längsschnitts über dem Theil der Parallelen zur y Axe, welcher zwischen DA und jener Curve liegt, ist

$$\frac{1}{k}\int_0^1 \frac{d(k\lambda\tau_{,})}{1+k^2\lambda^2\tau_{,}^2} = \frac{1}{k}\,\frac{\pi}{4}.$$

Der Zusammenhang dieser Sätze mit den allgemeinen Eigenschaften der hier betrachteten Functionen ergiebt sich leicht. Ist überhaupt

$$L(x+yi) = X + Yi$$

eine monogene Function, so ist

$$\frac{\partial \int_a^b X\,\partial y}{\partial x} = \int_a^b \frac{\partial X}{\partial x}\,\partial y = \int_a^b \frac{\partial Y}{\partial y}\,\partial y = Y_b - Y_a,$$

nimmt nun Y für $y = b$ denselben Werth an, wie für $y = a$, so ist $\int_a^b X\partial y$ unabhängig von x. In unserem Falle ist Y an beiden Grenzen gleich Null.

Wenn die obere Grenze eine Function von x ist, also gleich $f(x)$, so wird

$$\frac{\partial \int_a^{f(x)} X\,\partial y}{\partial x} = \int_a^{f(x)} \frac{\partial X}{\partial x}\,\partial y + X\,.\,\frac{\partial f(x)}{\partial y} = \underset{f(x)}{Y} - Y_a + X\,\frac{\partial f(x)}{\partial x};$$

und das Integral $\int_a^{f(x)} X\,dy$ verschwindet, wenn $\underset{f(x)}{Y} - Y_a + X\,\frac{\partial f(x)}{\partial x} = o$ ist.

In unserem Falle ist nun $Y_a = o$, und die Werthe, welche Y und X an den Grenzen annehmen, genügen der Gleichung:

$$X^2 - Y^2 = \frac{1+k^2}{2k^2},$$

also ist

$$X\frac{\partial X}{\partial x}\,\partial x + X\,\frac{\partial X}{\partial y}\,\partial y - Y\frac{\partial Y}{\partial x}\,\partial x - Y\,\frac{\partial Y}{\partial y}\,\partial y = o,$$

da ausserdem $\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = o$, und $\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$ nicht verschwindet, so muss

$$X\,\partial y + Y\,\partial x = o$$

sein, was oben verlangt war.

17. Die imaginäre Fläche für *sin am u*. Nach dem Vorhergehenden ist eine nähere Discussion der Fläche $z = Y$ nicht mehr erforderlich. Um positive z zu haben, kann man das Feld $D_1FE_2E_1$ betrachten.

Die Niveaulinie, welche $Y = o$ entspricht, ist dann der Umfang des Rechtecks selbst. Die anderen Niveaulinien sind sämmtlich geschlossene Curven, welche die Curven O_1C_1 und O_1C_2 parallel zur y Axe schneiden, sonst aber keine, dieser Axe parallelen Tangenten haben, und durch O_1A_1 in symmetrische Hälften getheilt und rechtwinklig geschnitten werden. Der Flächeninhalt eines Querschnitts, der zur Grundlinie eine Gerade, wie z. B. RS hat, die auf der Curve C_1O_1 anfängt, und auf O_1A_1 endet, ist wieder gleich $\frac{1}{k}\cdot\frac{\pi}{4}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

18. Die Flächen für $tg\ am\ u$ und $\Delta\ am\ u$. Die Flächen, welche $sin\ am\ (x + yi)$ darstellen, kehren bis auf die constanten Parameter wieder bei der Darstellung von $tg\ am\ (x + yi)$ und $\Delta\ am\ (x + yi)$.

Es hat $tg\ am\ (x + yi, k)$ die Perioden $2K$ und $4K'i$, und die Doppelpunkte, an welchen die Funktion entgegengesetzte Werthe annimmt, liegen um die Hälfte der imaginären Periode von einander ab. Die Function verschwindet in dem Punkte $x = o$, $y = 2K'$, und wird i für $x = o$, $y = K'$. Hierdurch ist die Function bestimmt; und man sieht sofort ein, dass sie bis auf den Factor i mit einem $sin\ am$ übereinstimmen muss. In der That, denken wir uns über der xy Ebene die Function $i\ sin\ am\ (x + yi, k')$ (die also die Perioden $2K$ und $4K'i$ hat) ausgebreitet, vom Anfangspunkte B aus; und dann die xy Ebene so um B gedreht, dass der positive Theil der x Axe in den positiven Theil der y Axe fällt, so bekommen wir eine Function, welche die für $tg\ am\ (x + yi, k)$ aufgestellten Bedingungen erfüllt. Da bei dieser Drehung x übergeht in y, und y in $-x$, so bekommen wir die Gleichung

$$i\ sin\ am\ (y - xi, k') = tg\ am\ (x + yi, k),$$

oder, wenn wir $x + yi = ui$, also $y - xi = u$ setzen,

$$tg\ am\ (ui, k) = i\ sin\ am\ (u, k'),$$

wie bekannt ist.

Ist $sin\ am\ (x + yi, k') = f(x, y, k') + i\,\varphi(x, y, k')$,

also

$$i\ sin\ am\ (y - xi, k') = if(y, -x, k') - \varphi(y, -x, k'),$$

und setzt man ferner:

$$tg\ am\ (x + yi, k) = \chi(x, y) + i\,\psi(x, y),$$

so folgt:

$$\chi(x, y) = -\varphi(y, -x, k');$$

da endlich $\varphi(y, -x) = -\varphi(y, x)$, so ist

$$\chi(x, y) = \varphi(y, x, k')$$

d. h. die reelle Fläche für $tg\ am\ (u, k)$ ist congruent der imaginären Fläche für $sin\ am\ (u, k')$. Ebenso erhält man $\psi(x, y) = f(y, -x, k')$, und da

$$f(y, -x, k') = f(y, x, k')$$

ist, so hat man auch:

$$\psi(x, y) = f(y, x, k'),$$

d. h. die imaginäre Fläche für $tg\ am\ (u, k)$ ist congruent der reellen für $sin\ am\ (u, k')$.

Die Function $\Delta am\ (u, k)$ hat gleichfalls die Perioden $2K$ und $4K'i$, und an denjenigen Doppelpunkten entgegengesetzte Werthe, welche um die halbe imaginäre Periode von einander abstehen, sie verschwindet für $x = K$, $y = K'$, und nimmt an dem Doppelpunkte $x = K$, $y = o$, den Werth k' an. Hiernach sieht man, wie vorher, dass

$$-k'\ sin\ am\ (y - xi, k') = \Delta\ am\ (K + iK' + x + yi, k)$$

ist. Dies ist durch die bekannten Formeln leicht zu verificiren. Wenn man also die z Coordinaten der Flächen für $sin\ am\ (u, k')$ im Verhältniss von $k' : 1$ verjüngt, so können diese zur Deckung mit den Flächen gebracht werden, welche $\Delta am\ (u, k)$ darstellen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

19. **Functionen mit einer reellen und einer complexen Periode.** Es wäre nun zweitens der Fall zu untersuchen, wo die eine Periode reell, die andere complex ist. Hier kommt es auf das Verhältniss des reellen Theiles der complexen Periode zu der reellen Periode an. Wir wollen nur den Fall in Betracht ziehen, wo dies Verhältniss $= \frac{1}{2}$ wird, und können also die Perioden $4K$ und $2K + 2iK'$ nennen. Bezeichnen wir ferner die Function mit $M(u)$, und setzen fest, dass ein Doppelpunkt im Anfangspunkt liegen, $M(K) = o$ und $M(o) = 1$ sein soll, so wird $M(K + iK')$, d. h. der Werth der Function an demjenigen Doppelpunkt, der um die Hälfte der zweiten Periode vom Anfangspunkt absteht, imaginär.

Es ist nemlich

$$M(u) = \frac{A}{\sum\limits_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi u}{2K} + \frac{m\pi(K+iK')}{2K}\right)}},$$

also

$$M(o) = \frac{A}{1 + 2\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\cos\frac{\pi m K' i}{K}}},$$

oder wenn man wieder $e^{-\pi\frac{K'}{K}} = q$ setzt,

$$M(o) = \frac{A}{1 + 4\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^m q^m}{1 + q^{2m}}},$$

und da $M(o) = 1$ sein soll,

$$A = 1 - \frac{4q}{1+q^2} + \frac{4q^2}{1+q^4} - \frac{4q^3}{1+q^6} + \ldots$$

Ferner wird

$$M(K + iK') = \frac{-A}{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\sin\frac{(2m+1)\pi K' i}{2K}}}$$

$$= \frac{A}{i\,4\sqrt{q}\sum\limits_{o}^{\infty} \frac{(-1)^m q^m}{1 - q^{2m+1}}},$$

also imaginär.

Da nun anderweitig bekannt ist, dass

$$A = \frac{2kK}{\pi}$$

und

$$\frac{2kK}{\pi} = \frac{4\sqrt{q}}{1-q} - \frac{4\sqrt{q^3}}{1-q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}}{1-q^5} - \ldots,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so wollen wir den Werth $M(K+iK')$ auch mit $-\frac{ik'}{k}$ bezeichnen. Die Function $M(u)$ ist, wie man sieht, gleich $cos\ am\ (u, k)$.

20. Felder der imaginären Fläche für $cos\ am\ u$. Es sei nun in der Figur (2) D der Anfangspunkt, DD_1 die Axe der positiven x, DY die Axe der positiven y, ferner seien D, D_1, E_1, E Doppelpunkte, an welchen die Function die Werthe $1, -1, \frac{ik'}{k}, -\frac{ik'}{k}$ annimmt, und

$$M(x+yi) = F(x, y) + i\,\Phi(x, y);$$

so sieht man zunächst, dass sich die Function nach der negativen Seite der x Axe ebenso ausbreitet wie nach der positiven, nur das Vorzeichen von i ist entgegengesetzt (vergl. §. 7), also ist

$$F(x, y) = F(-x, y), \quad \Phi(x, y) = -\Phi(-x, y) \qquad (1)$$

also

$$\Phi(o, y) = -\Phi(o, y) = o, \qquad (2)$$

und da $4K$ die reelle Periode ist:

$$\Phi(x, y) = -\Phi(4K - x, y), \quad \Phi(2K + x, y) = -\Phi(2K - x, y), \qquad (3)$$

also

$$\Phi(2K, y) = -\Phi(2K, y) = o.$$

Die imaginäre Fläche schneidet also die xy Ebene in geraden Linien, welche der y Axe parallel laufen, und um Vielfache von $2K$ von ihr abstehen.

Desgleichen breitet sich die Function nach der negativen Seite der y Axe ebenso aus, wie nach der positiven, nur das Vorzeichen von i ist wieder entgegengesetzt, also ist

$$F(x, y) = F(x, -y), \quad \Phi(x, y) = -\Phi(x, -y), \qquad (4)$$

also

$$\Phi(x, o) = -\Phi(x, o) = o$$

und da man y um $4K'$ vermehren oder vermindern kann, ohne den Werth der Function zu ändern, so ist auch

$$\Phi(x, 2K'+y) = -\Phi(x, 2K'-y) \qquad (5)$$
$$\Phi(x, 2K') = -\Phi(x, 2K') = o.$$

Die imaginäre Fläche schneidet also die xy Ebene auch in Linien, welche der x Axe parallel laufen, und um Vielfache von $2K'$ von ihr abstehen.

Die imaginäre Fläche zerfällt also in Felder, welche zur Grundfläche Rechtecke mit den Seiten $2K$ und $2K'$ haben, dabei lehrt die Gleichung (3): wenn man ein Feld um eine zur y Axe parallele Seite dreht, so kommt es mit dem benachbarten zur Deckung. Die Gleichung (5) zeigt, dass dies auch von einer zur x Axe parallelen Seite gilt. Ein solches Feld ist z. B. DD_1HY. In der Mitte desselben liegt ein Doppelpunkt E der Fläche. Die Linien NO und MA theilen dasselbe wieder in vier Theile, von denen $NEAD$ mit $OEMH$ congruent ist, und $OEAD_1$ mit $NEMY$. Aus der (im §. 5 bewiesenen) Gleichung

$$\Phi(2K + x, y) = -\Phi(x, y)$$

und aus (3)

$$\Phi(2K + x, y) = -\Phi(2K - x, y),$$

folgt endlich:

$$\Phi(K + x, y) = \Phi(K - x, y),$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so dass die Theile über $EADN$ und EAD_1O_1 symmetrisch sind in Bezug auf die Linie EA; und also auch EOD_1A und $EOHM$ symmetrisch in Bezug auf die Linie EO. Die Gestaltung der ganzen Fläche ist also aus der eines solchen Theiles zu erkennnen.

21. Vergleichung der reellen Fläche mit der imaginären. Die reelle Fläche ist nun von derselben Art, wie die imaginäre. Betrachten wir nemlich E als Anfangspunkt, EM als Axe der positiven x, EN als Axe der positiven y, so können wir die Function ansehen als eine doppelt periodische Function mit den Perioden $4K'$ und $2K' + 2Ki$; das Verhältniss der Werthe an den Doppelpunkten, die um die Hälfte der complexen Periode von einander abstehen, ist dann $\frac{-ik}{k'}$. Bezeichnet also $C(u)$ eine doppelt periodische Function zweiter Ordnung, welche die eben genannten Eigenschaften hat, und für $u = o$ den Werth *Eins* annimmt, so ist:

$$C(u) = F(x, y, k') + \Phi(x, y, k'),$$

wo $F(x, y, k')$ und $\Phi(x, y, k')$ die Functionen sind, welche aus $F(x, y)$ und $\Phi(x, y)$ entstehen, wenn man K und K' gegen einander vertauscht; und dabei ist

$$M(x + yi) = -\frac{ik'}{k} C(y - K' + (K - x)i),$$

mithin

$$F(x, y, k) + i\,\Phi(x, y, k) = \frac{-ik'}{k} F(y - K', K - x, k') + \frac{k'}{k} \Phi(y - K', K - x, k'),$$

also

$$F(x, y, k) = \frac{k'}{k} \Phi(y - K', K - x, k'),$$

$$\Phi(x, y, k) = \frac{-k'}{k} F(y - K', K - x, k'),$$

also stimmt die reelle Fläche von $M(u)$ überein mit der imaginären für eine Function derselben Art, welche aber die Perioden $4K'$ und $2K' + 2Ki$ hat, wofern man die z Coordinaten der letzteren im Verhältniss von $\frac{k'}{k}$ verjüngt. Die eben bewiesenen Behäuptungen folgen auch aus den bekannten Formeln:

$$cos\ am\ (u + iK') = -\frac{ik'}{k\ cos\ co\ am\ u}$$

und

$$cos\ am\ (iu, k) = sec\ am\ (u, k').$$

Hiernach besteht also auch die reelle Fläche aus Feldern, welche zu Grundflächen Rechtecke mit den Seiten $2K$ und $2K'$ haben; aber die Begrenzungslinien dieser Felder liegen um ungerade Vielfache von K von der x Axe, und um ungerade Vielfache von K' von der y Axe ab; oder: die Begrenzungslinien der reellen Fläche theilen die Felder der imaginären Fläche in symmetrische Theile, und ebenso theilen die Begrenzungslinien der Felder der imaginären Fläche die Felder der reellen Fläche in symmetrische Theile.

22. Längsschnitte der reellen und Querschnitte der imaginären Fläche. Wir betrachten nun, um positive z zu haben, das Feld der reellen Fläche über $EE_1E_3E_4$ und das Feld der imaginären Fläche D_1HD_2F. Der Abfall der reellen Fläche zu der Linie EE_1 hin wird von E nach O zu immer steiler und umgekehrt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von O nach E_1 wieder flacher werden; von der unendlich hohen Spitze über O muss die Fläche nach MA_2 allmählig abfallen, und dann, bevor sie die xy Ebene erreicht hat, nach O_2 wieder steigen. Da sich nun die Fläche auch nach EE_4 und EE_3 abdacht, so werden sich die höchsten Punkte der Längsschnitte wieder in einer Curve projiciren, die von O aus in zwei, zur Linie OO_2 symmetrischen, Zweigen ausgeht. Analoges gilt von den höchsten Punkten der, durch die imaginäre Fläche gelegten, Querschnitte. Die Curve, in welcher sich die letztgenannten Punkte projiciren, ist aber identisch mit der ersten Curve; es kann also von zwei Fällen nur einer eintreten: entweder haben alle Längsschnitte der reellen Fläche Maxima der genannten Art, dann muss die Curve die Linien EM und E_1A_2 schneiden, so dass nicht alle Querschnitte der imaginären Fläche dergleichen Maxima haben können; oder umgekehrt: nicht alle Längsschnitte der reellen Fläche haben solche Maxima, dann schneidet die Curve die Linie MA_2 in zwei zu H symmetrisch liegenden Punkten, und folglich haben dann alle Querschnitte der reellen Fläche Maxima. Der erste Fall tritt ein, wenn $k^2 < \frac{1}{2}$ oder $K < K'$ ist, und der zweite, wenn $k^2 > \frac{1}{2}$ oder $K > K'$ ist. In der That genügt $M(u)$, wofür wir wieder μ schreiben können, der Differential-Gleichung:

$$\mu'^2 = (1-\mu^2)(k'^2 + k^2\mu^2) = k'^2 - (1-2k^2)\mu^2 - k^2\mu^4;$$

setzt man nun:

$$\mu = P + Qi,$$

so ist

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + 2i\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} = k'^2 - (1-2k^2)(P^2-Q^2) - k^2(P^4+Q^4-6P^2Q^2)$$
$$- 2iPQ\left\{1 - 2k^2 + 2k^2(P^2-Q^2)\right\}. \qquad (1)$$

Wenn nun $\frac{\partial P}{\partial x}$ oder $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$ verschwinden soll, ohne dass P oder Q verschwindet, so muss

$$P^2 - Q^2 = \frac{2k^2-1}{2k^2} \qquad (2)$$

sein; da aber dann der reelle Theil auf der rechten Seite der Gleichung (1) positiv wird, so kann nur $\frac{\partial Q}{\partial x}$ oder $\frac{\partial P}{\partial y}$ verschwinden. Die Gleichung (2) ist also die Gleichung der in Rede stehenden Curve. Ist nun $k^2 < \frac{1}{2}$, so kann P den Werth *Null* auf ihr annehmen, und der Durchschnittspunkt der Curve mit der Linie E_1A_2 ist bestimmt durch

$$Q = \sqrt{\frac{1-2k^2}{2k^2}};$$

wenn dagegen $k^2 > \frac{1}{2}$ ist, so kann P nicht verschwinden, sondern muss mindestens gleich $\sqrt{\frac{2k^2-1}{2k^2}}$ sein; und dieser Werth bestimmt die Durchschnittspunkte der Curve (2) mit der Linie MA_2.

In dem Grenzfall $k^2 = \frac{1}{2}$, wird $P^2 = Q^2$, die reelle Fläche wird dann congruent der imaginären, und die Curve wird die gerade Linie OA_2.

Da auf der Curve (2)

$$P\frac{\partial P}{\partial x}dx + P\frac{\partial P}{\partial x}dy - Q\frac{\partial Q}{\partial x}dx - Q\frac{\partial Q}{\partial y}dy = o$$

ist, und $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = o, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x},$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so ist auf ihr

$$Pdx - Qdy = o \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q};$$

in dem Falle $k^2 < \frac{1}{2}$ wächst nun dieser Bruch mit wachsendem P und für positive Q, also in dem Achtel OHA_2E_1, von Null bis 1, die Curve schneidet also die Linie E_1A_2 parallel zur x Axe, wendet ihre concave Seite dieser Axe zu, und bildet in O einen Winkel von 45° mit ihr. Ist dagegen $k^2 > \frac{1}{2}$, so nimmt der Bruch mit wachsendem P ab von ∞ bis 1; die Curve schneidet also die Linie HA_2 parallel der y Axe, kehrt ihre convexe Seite der x Axe zu, und schneidet diese in O wieder unter 45°.

23. Charakteristische Kegelschnitte der reellen Fläche für *cos am u*. Die Verschiedenheit in der Formation der in Rede stehenden Fläche, je nachdem k^2 grösser oder kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, tritt nun auch in dem Verhalten der charakteristischen Kegelschnitte hervor. Längs der Linie EM sind dieselben gleichseitige Hyperbeln, deren eine Asymptote die Linie EM ist, und die im ersten Falle bis zum Punkte M hin so liegen, dass der Zweig oberhalb der xy Ebene seine Oeffnung stets der Linie MA_2 zukehrt. Wenn aber $k^2 < \frac{1}{2}$ ist, so behält dieser Zweig nur bis zu dem Punkte seine Richtung bei, wo

$$Q^2 = \frac{1 - 2k^2}{2k^2}$$

wird, d. h. wo die Curve (2) §. 22. die Linie EM trifft; von da ab nimmt er die entgegengesetzte Richtung an.

Längs der Linie MH sind die charakteristischen Kegelschnitte Hyperbeln, deren reelle Axe in dem Falle stets der y Axe parallel bleibt, wo $k^2 < \frac{1}{2}$ ist, im anderen Falle aber erst von dem Punkte an so gerichtet ist, in welchem $P^2 = \frac{2k^2 - 1}{2k^2}$ wird; hier schneidet dann auch die Curve (2) die Linie MH, und der Querschnitt durch MH hat hier einen Wendepunkt. Zwischen M und diesem Punkt ist dann die imaginäre Axe der Hyperbeln mit der Axe der y parallel.

24. Formeln. Diese Bemerkungen, sowie die Verificirung der ganzen Discussion mit Hülfe der Formeln, die den im §. 11. mitgetheilten entsprechen, ergeben sich so leicht, dass wir nur diese Formeln noch hinzuschreiben brauchen.
Es wird:

$$P = \frac{\mu\mu_,}{\mu_,^2 + k^2\lambda^2\lambda_,^2}, \qquad Q = -\frac{\lambda\lambda_,\nu\nu_,}{\mu_,^2 + k^2\lambda^2\lambda_,^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial u} = -\frac{\lambda\nu\mu_,\left\{\nu_,^2 + k^2\mu^2\lambda_,^2\right\}}{(\mu_,^2 + k^2\lambda^2\lambda_,^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\mu\lambda_,\nu_,\left\{k^2\lambda^2 - \nu^2\mu_,^2\right\}}{(\mu_,^2 + k^2\lambda^2\lambda_,^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \frac{\mu\mu_,\left\{(k^2\lambda^2 - \nu^2\mu_,^2)(\nu_,^2 + k^2\mu^2\lambda_,^2) + 4k^2\lambda^2\nu^2\lambda_,^2\nu_,^2\right\}}{(\mu_,^2 + k^2\lambda^2\lambda_,^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial u^2} = -\frac{\lambda\lambda_,\nu\nu_,\left\{(k^2\lambda^2 - \nu^2\mu_,^2)(\nu_,^2 + k^2\mu^2\lambda_,^2) - 4k^2\mu^2\mu_,^2\right\}}{(\mu_,^2 + k^2\lambda^2\lambda_,^2)^3}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichung der Curve (2) §. 22 ist:

$$k^2\lambda^2 = \nu^2\mu_{,}^2,$$

also z. B. für den Raum $EOHM$:

$$-k\lambda = \nu\mu_{,}$$

oder:

$$\mu\,(K+x) = \frac{K}{k}\,\mu_{,}\,(y).$$

Um die Gestaltung der Flächen an einem speciellen Beispiele übersehen zu können, sind Zeichnungen für die reelle und die imaginäre Fläche von *sin am u*, und die reelle Fläche von *cos am u* entworfen. Der Modul k ist gleich *sin* 15° gesetzt, und für jede der drei Flächen sind die 16^2 Ordinaten berechnet, welche den Werthen von x entsprechen, die der Reihe 0, $^1/_{15}K$, $^2/_{15}K$, ... K angehören, und den Werthen von y aus der Reihe 0, $^1/_{15}K'$, $^2/_{15}K'$, ... K'. Diese Ordinaten sind in den unten stehenden drei Tafeln enthalten.

In Fig 5. sind von der reellen Fläche für *sin am u* die 16 Querschnitte gezeichnet, welche in dem Achtel BE (Fig 1.) den angegebenen Werthen von y entsprechen. Aus ihnen konnten die Niveaulinien des betreffenden Flächentheiles abgeleitet werden, wie sie Fig. 6. zeigt. Die durch die Höhen $z = 5$ bis $z = 10$ gehenden sind dabei freilich nur durch einzelne Punkte bestimmt.

In Fig. 7. sind von der imaginären Fläche für *sin am u* die 16 Längsschnitte gezeichnet, welche den angenommenen Werthen von x entsprechen, und in Fig. 8. die daraus abgeleiteten Niveaulinien.

Fig. 9. zeigt die Längsschnitte, welche durch das Feld $DAEN$ der reellen Fläche von *cos am u* gehen, und Fig. 10. stellt wieder die Niveaulinien derselben Fläche dar.

Diese Figuren verdanke ich Herrn Bergexpectanten Mellin, bei den numerischen Rechnungen bin ich durch Herrn Cand. Quidde wesentlich unterstützt worden.

Berlin, im Januar 1861. **Heinr. Bertram.**

Druckfehler.

Pag. 10. Z. 21 l. jeder beliebige reelle Werth von X etc.
Pag. 11. Z. 20 l. y statt x.
Pag. 15. Z. 5 v. u. l. $>$ statt $<$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 1

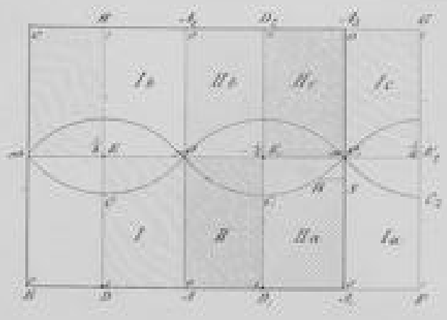


Fig. 2

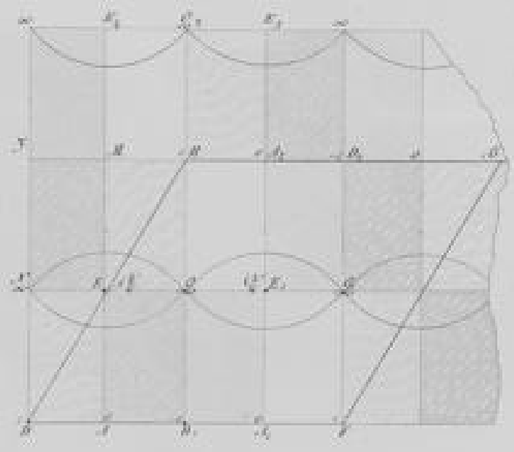


Fig. 6

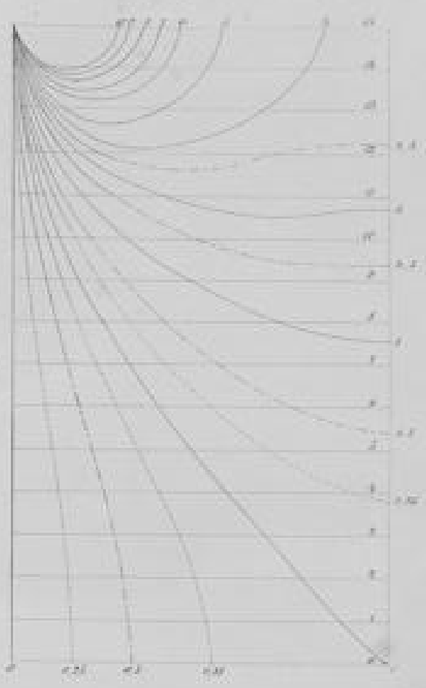
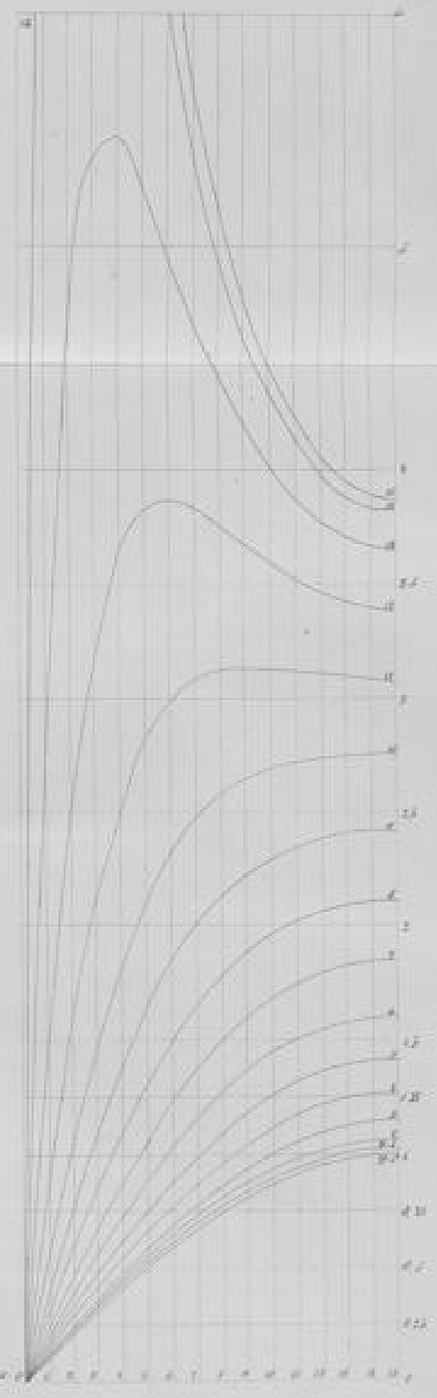


Fig. 5



Maßstab für die Fig. 3–10

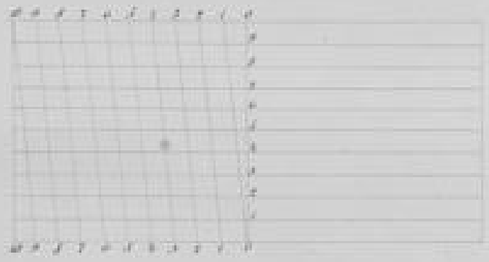


Fig. 3

Fig. 4

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also

oder

nen,
reell
für
x e
von
steh

net,
Aus
wie
frei

gez
die

vor

Re

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 8.

Fig. 10.

Fig. 7.

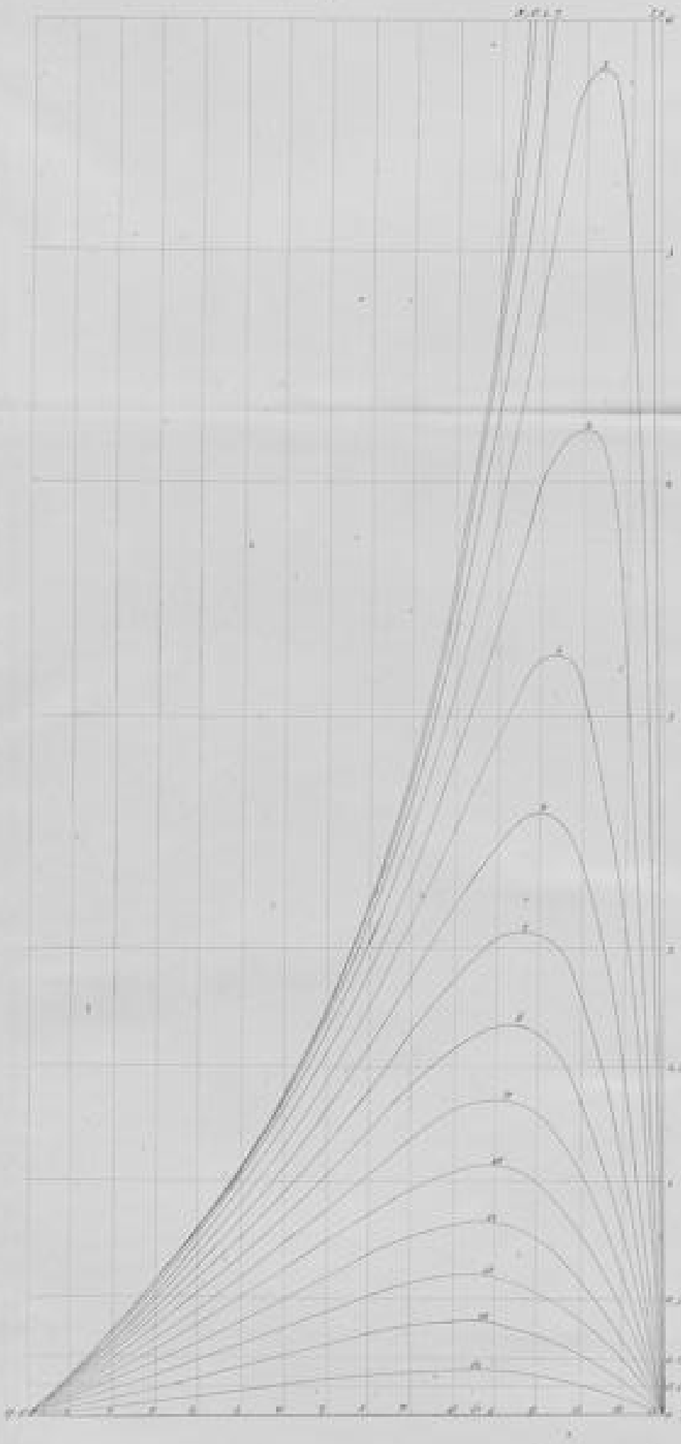


Fig. 9.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also

oder

ner
ree
für
x
vor
ste

ne
Au
wi
fre

ge
di

vo

R

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tafel I.

	0	$\frac{1}{15}K'$
0	0	0
$\frac{1}{15}K$	0,1063	0,1083
$\frac{2}{15}K$	0,2114	0,2152

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Tafel I. Werthe von: $\frac{\sin am\,(x,k)\,\Delta\,am\,(y,k')}{1-(\Delta\,am\,(x,k)\,\sin am\,(y,k'))^2}$. $k = \sin 15°$.

	0	$\frac{1}{16}K'$	$\frac{2}{16}K'$	$\frac{3}{16}K'$	$\frac{4}{16}K'$	$\frac{5}{16}K'$	$\frac{6}{16}K'$	$\frac{7}{16}K'$	$\frac{8}{16}K'$	$\frac{9}{16}K'$	$\frac{10}{16}K'$	$\frac{11}{16}K'$	$\frac{12}{16}K'$	$\frac{13}{16}K'$	$\frac{14}{16}K'$	K'
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	∞
$\frac{1}{16}K$	0,1063	0,1083	0,1142	0,1245	0,1400	0,1619	0,1922	0,2347	0,2958	0,3878	0,5368	0,8049	1,3029	2,5602	9,1346	36,338
$\frac{2}{16}K$	0,2114	0,2152	0,2270	0,2474	0,2779	0,3209	0,3805	0,4634	0,5816	0,7578	1,0374	1,5229	2,4755	4,6749	16,505	18,279
$\frac{3}{16}K$	0,3139	0,3196	0,3369	0,3669	0,4117	0,4746	0,5612	0,6807	0,8496	1,0950	1,4744	2,1013	3,2265	5,3045	9,2854	12,310
$\frac{4}{16}K$	0,4129	0,4200	0,4425	0,4815	0,5395	0,6205	0,7311	0,8821	1,0913	1,3894	1,8332	2,5241	3,6473	5,4673	7,9049	9,9038
$\frac{5}{16}K$	0,5065	0,5154	0,5428	0,5899	0,6597	0,7567	0,8879	1,0646	1,3048	1,6380	2,1128	2,8073	3,8315	5,2617	6,8170	7,6282
$\frac{6}{16}K$	0,5944	0,6048	0,6364	0,6908	0,7710	0,8816	1,0297	1,2263	1,4879	1,8400	2,2503	2,9804	3,8704	4,9705	6,0296	6,4997
$\frac{7}{16}K$	0,6755	0,6871	0,7225	0,7832	0,8722	0,9941	1,1557	1,3665	1,6413	1,9998	2,4084	3,0751	3,8311	4,6783	5,4150	5,7197
$\frac{8}{16}K$	0,7489	0,7616	0,8002	0,8663	0,9626	1,0935	1,2652	1,4858	1,7670	2,1232	2,5508	3,1177	3,7555	4,4163	4,9103	5,1593
$\frac{9}{16}K$	0,8138	0,8274	0,8687	0,9392	1,0415	1,1796	1,3585	1,5852	1,8680	2,2161	2,6366	3,1283	3,6686	4,1943	4,5949	4,7476
$\frac{10}{16}K$	0,8697	0,8841	0,9276	1,0016	1,1086	1,2516	1,4350	1,6658	1,9471	2,2846	2,6790	3,1214	3,5846	4,0135	4,3263	4,4423
$\frac{11}{16}K$	0,9161	0,9311	0,9763	1,0531	1,1636	1,3107	1,4980	1,7292	2,0074	2,3320	2,7046	3,1064	3,5110	3,9709	4,1250	4,2174
$\frac{12}{16}K$	0,9526	0,9680	1,0145	1,0933	1,2063	1,3563	1,5455	1,7767	2,0516	2,3680	2,7194	3,0898	3,4516	3,7639	3,9788	4,0529
$\frac{13}{16}K$	0,9789	0,9946	1,0420	1,1222	1,2370	1,3885	1,5790	1,6096	2,0815	2,3901	2,7272	3,0755	3,4082	3,6893	3,8794	3,9471
$\frac{14}{16}K$	0,9947	1,0106	1,0585	1,1397	1,2553	1,4078	1,5988	1,8294	2,0959	2,4027	2,7311	3,0662	3,3744	3,6457	3,8220	3,8843
K	1	1,0159	1,0640	1,1453	1,2614	1,4142	1,6054	1,8359	2,1045	2,4067	2,7325	3,0629	3,3734	3,6312	3,8032	3,8637

Tafel II. Werthe von: $\frac{\cos am\,(x,k)\,\Delta\,am\,(x,k)\,\sin am\,(y,k')\,\cos am\,(y,k')}{1-(\Delta\,am\,(x,k)\,\sin am\,(y,k'))^2}$. $k = \sin 15°$.

	0	$\frac{1}{16}K'$	$\frac{2}{16}K'$	$\frac{3}{16}K'$	$\frac{4}{16}K'$	$\frac{5}{16}K'$	$\frac{6}{16}K'$	$\frac{7}{16}K'$	$\frac{8}{16}K'$	$\frac{9}{16}K'$	$\frac{10}{16}K'$	$\frac{11}{16}K'$	$\frac{12}{16}K'$	$\frac{13}{16}K'$	$\frac{14}{16}K'$	K'
0	0	0,1857	0,3781	0,5847	0,8135	1,0746	1,3807	1,7408	2,2081	2,7953	3,5250	4,7495	6,6081	10,218	20,869	∞
$\frac{1}{16}K$	0	0,1845	0,3758	0,5810	0,8082	1,0671	1,3704	1,7352	2,1967	2,7649	3,5292	4,6414	6,3580	9,4113	15,570	0
$\frac{2}{16}K$	0	0,1812	0,3689	0,5700	0,7924	1,0451	1,3390	1,6922	2,1210	2,6084	3,3753	4,3421	5,7038	7,5986	8,8447	0
$\frac{3}{16}K$	0	0,1757	0,3575	0,5520	0,7665	1,0092	1,2904	1,6231	2,0214	2,5180	3,1351	3,9122	4,8547	5,7250	5,1658	0
$\frac{4}{16}K$	0	0,1681	0,3419	0,5275	0,7313	0,9606	1,2229	1,5313	1,8945	2,3266	2,8380	3,4213	3,9052	4,2241	3,1734	0
$\frac{5}{16}K$	0	0,1586	0,3224	0,4963	0,6876	0,9007	1,1428	1,4209	1,7416	2,1063	2,5147	2,9257	3,2270	3,1257	2,1071	0
$\frac{6}{16}K$	0	0,1474	0,2994	0,4608	0,6364	0,8311	1,0497	1,2961	1,5729	1,8757	2,1874	2,4601	2,5818	2,3386	1,4696	0
$\frac{7}{16}K$	0	0,1347	0,2733	0,4201	0,5789	0,7535	0,9472	1,1616	1,3952	1,6392	1,8710	2,0469	2,0548	1,7698	1,0612	0
$\frac{8}{16}K$	0	0,1206	0,2445	0,3753	0,5161	0,6696	0,8377	1,0202	1,2133	1,4058	1,5734	1,6714	1,6270	1,3495	0,7835	0
$\frac{9}{16}K$	0	0,1053	0,2135	0,3272	0,4489	0,5807	0,7232	0,8752	1,0313	1,1797	1,2981	1,3485	1,2779	1,0305	0,5849	0
$\frac{10}{16}K$	0	0,0891	0,1805	0,2763	0,3785	0,4881	0,6054	0,7284	0,8514	0,9633	1,0446	1,0656	0,9890	0,7810	0,4361	0
$\frac{11}{16}K$	0	0,0722	0,1461	0,2231	0,3054	0,3930	0,4850	0,5813	0,6749	0,7566	0,8109	0,8134	0,7448	0,5792	0,3197	0
$\frac{12}{16}K$	0	0,0546	0,1105	0,1688	0,2305	0,2960	0,3648	0,4349	0,5021	0,5569	0,5935	0,5905	0,5330	0,4100	0,2245	0
$\frac{13}{16}K$	0	0,0366	0,0741	0,1132	0,1544	0,1979	0,2433	0,2893	0,3327	0,3681	0,3887	0,3838	0,3437	0,2624	0,1429	0
$\frac{14}{16}K$	0	0,0181	0,0372	0,0568	0,0774	0,0991	0,1217	0,1444	0,1657	0,1829	0,1923	0,1890	0,1685	0,1281	0,0696	0
K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tafel. III. Werthe von: $\frac{\cos am\,(x,k)\,\cos am\,(y,k')}{1-(\Delta\,am\,(x,k)\,\sin am\,(y,k'))^2}$. $k = \sin 15°$.

	0	$\frac{1}{16}K'$	$\frac{2}{16}K'$	$\frac{3}{16}K'$	$\frac{4}{16}K'$	$\frac{5}{16}K'$	$\frac{6}{16}K'$	$\frac{7}{16}K'$	$\frac{8}{16}K'$	$\frac{9}{16}K'$	$\frac{10}{16}K'$	$\frac{11}{16}K'$	$\frac{12}{16}K'$	$\frac{13}{16}K'$	$\frac{14}{16}K'$	K'
0	1	1,0171	1,0691	1,1584	1,2891	1,4679	1,7048	2,0154	2,4240	2,9716	3,7320	4,8526	6,6836	10,267	20,833	∞
$\frac{1}{16}K$	0,9943	1,0113	1,0630	1,1515	1,2811	1,4583	1,6927	1,9991	2,4014	2,9373	3,6719	4,7450	6,4328	9,4599	15,594	0
$\frac{2}{16}K$	0,9774	0,9940	1,0445	1,1310	1,2575	1,4297	1,6569	1,9520	2,3351	2,8379	3,5118	4,4440	5,7775	7,6456	8,8682	0
$\frac{3}{16}K$	0,9495	0,9653	1,0141	1,0974	1,2186	1,3832	1,5986	1,8756	2,2297	2,6827	3,2619	4,0113	4,9262	5,7714	5,1276	0
$\frac{4}{16}K$	0,9100	0,9261	0,9723	1,0510	1,1654	1,3197	1,5199	1,7739	2,0917	2,4849	2,9627	3,5161	4,0639	4,2687	3,1954	0
$\frac{5}{16}K$	0,8622	0,8765	0,9196	0,9929	1,0990	1,2410	1,4233	1,6509	1,9285	2,2583	2,6329	3,0157	3,2921	3,1681	2,1279	0
$\frac{6}{16}K$	0,8041	0,8172	0,8568	0,9240	1,0206	1,1490	1,3117	1,5111	1,7475	2,0159	2,2978	2,5443	2,6426	2,3781	1,4890	0
$\frac{7}{16}K$	0,7374	0,7492	0,7849	0,8453	0,9317	1,0455	1,1878	1,3591	1,5555	1,7679	1,9724	2,1152	2,1107	1,9061	1,0790	0
$\frac{8}{16}K$	0,6627	0,6732	0,7047	0,7579	0,8336	0,9323	1,0544	1,1978	1,3577	1,5217	1,6647	1,7410	1,6774	1,3822	0,7095	0
$\frac{9}{16}K$	0,5811	0,5901	0,6174	0,6631	0,7277	0,8114	0,9134	1,0311	1,1581	1,2815	1,3782	1,4096	1,3221	1,0592	0,5090	0
$\frac{10}{16}K$	0,4935	0,5011	0,5238	0,5619	0,6155	0,6844	0,7672	0,8610	0,9592	1,0499	1,1128	1,1177	1,0266	0,8054	0,4481	0
$\frac{11}{16}K$	0,4009	0,4069	0,4251	0,4556	0,4982	0,5525	0,6172	0,6892	0,7626	0,8271	0,8663	0,8578	0,7754	0,5990	0,3295	0
$\frac{12}{16}K$	0,3042	0,3087	0,3224	0,3452	0,3770	0,4172	0,4647	0,5168	0,5688	0,6124	0,6357	0,6226	0,5563	0,4251	0,2319	0
$\frac{13}{16}K$	0,2045	0,2075	0,2166	0,2318	0,2529	0,2794	0,3106	0,3444	0,3775	0,4044	0,4170	0,4054	0,3593	0,2726	0,1479	0
$\frac{14}{16}K$	0,1027	0,1043	0,1088	0,1164	0,1269	0,1401	0,1555	0,1721	0,1882	0,2010	0,2065	0,1998	0,1763	0,1332	0,0721	0
K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tafel I. Werthe von: $\frac{\sin am\,(x, k)\,\Delta\,am\,(x', k')}{1 - (\Delta\,am\,(x, k)\,\sin am\,(x', k'))^2}$

	0	$\frac{1}{10}K'$	$\frac{2}{10}K'$	$\frac{3}{10}K'$	$\frac{4}{10}K'$	$\frac{5}{10}K'$	$\frac{6}{10}K'$	$\frac{7}{10}K'$	$\frac{8}{10}K'$	$\frac{9}{10}K'$	K'
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{10}K$	0,1053	0,1053	0,1142	0,1215	0,1309	0,1419	0,1522	0,2247	0,2805	0,3875	0,5
$\frac{2}{10}K$	0,2116	0,2122	0,2276	0,2414	0,2770	0,3290	0,3805	0,4834	0,5816	0,7175	1,0
$\frac{3}{10}K$	0,3125	0,3196	0,3398	0,3609	0,4117	0,4746	0,5012	0,6207	0,7390	0,9950	1,4
$\frac{4}{10}K$	0,4125	0,4290	0,4425	0,4815	0,5365	0,6206	0,7111	0,8521	1,0013	1,3504	1,5
$\frac{5}{10}K$	0,5065	0,5152	0,5125	0,5500	0,6207	0,7367	0,8579	1,0646	1,3015	1,6350	2,1
$\frac{6}{10}K$	0,6044	0,6015	0,6304	0,6005	0,7110	0,8516	1,0207	1,2205	1,4570	1,8100	2,3
$\frac{7}{10}K$	0,6755	0,6911	0,7224	0,7502	0,8722	0,9841	1,1527	1,3665	1,6113	1,9095	2,
$\frac{8}{10}K$	0,7455	0,7516	0,8002	0,8005	0,9258	1,0835	1,2602	1,4855	1,7076	2,1207	2,5
$\frac{9}{10}K$	0,8125	0,8274	0,8657	0,9063	1,0115	1,1706	1,3595	1,5852	1,8080	2,2161	2,6
K	1	1,0150	1,0610	1,1105	1,2514	1,4612	1,6954	1,8359	2,1015	2,4667	2,7

Tafel II. Werthe von: $\frac{\cos am\,(x, k)\,\Delta\,am\,(x, k)\,\sin am\,(x', k')\,\cos am\,(x', k')}{1 - (\Delta\,am\,(x, k)\,\sin am\,(x', k'))^2}$

	0	$\frac{1}{10}K'$	$\frac{2}{10}K'$	$\frac{3}{10}K'$	$\frac{4}{10}K'$	$\frac{5}{10}K'$	$\frac{6}{10}K'$	$\frac{7}{10}K'$	$\frac{8}{10}K'$	$\frac{9}{10}K'$	K'
0	0	0,1507	0,2751	0,3817	0,4766	1,0758	1,3507	1,7005	2,2051	2,7052	2,8
$\frac{1}{10}K$	0	0,1515	0,3155	0,4510	0,5052	1,0071	1,3164	1,7552	2,1507	2,7010	2,8
$\frac{2}{10}K$	0	0,1512	0,3050	0,4700	0,1921	1,0157	1,3000	1,0022	2,1230	2,6054	2,8
$\frac{3}{10}K$	0	0,1757	0,3575	0,5639	0,7005	1,0002	1,2904	1,0201	2,0244	2,5150	2,8
$\frac{4}{10}K$	0	0,1081	0,3110	0,5275	0,7415	0,9000	1,2230	1,5013	1,9015	2,3268	2,8
$\frac{5}{10}K$	0	0,1500	0,3224	0,1065	0,5576	0,0007	1,1125	1,4209	1,7410	2,1055	2,8
$\frac{6}{10}K$	0	0,1171	0,2904	0,4005	0,6054	0,5211	1,0107	1,2081	1,5757	1,9157	2,1
$\frac{7}{10}K$	0	0,1217	0,2723	0,1201	0,5750	0,7535	0,9172	1,1010	1,3002	1,7002	1,8
$\frac{8}{10}K$	0	0,1205	0,2115	0,3760	0,5101	0,6506	0,8177	1,0252	1,2135	1,1055	1,5
$\frac{9}{10}K$	0	0,1025	0,2135	0,3272	0,4450	0,5807	0,7252	0,8752	1,0010	1,1207	1,3
K	0	0,0521	0,1865	0,2760	0,3755	0,4551	0,5004	0,7201	0,8514	0,9055	1,0