XXXIV.

1. Sind mehrere Gleichungen aufzulösen, so bringe man dieselben vor Anwendung einer der gewöhnlichen oder eleganten Lösungsmethoden auf die einfachste Gestalt, z. B.:

2. I. $\frac{1+x}{y-1} = 2 . \frac{(m-n)^2 - 2n^2}{(m^2-n^2)(y-1)} + 1$

II. $m+n-mx = \frac{mn}{m+n} - ny + \frac{mn(3m+n)}{m^2-n^2}$

I. $x-y = -\frac{4mn}{m^2-n^2}$

II. $mx-ny = \frac{m^3-3m^2n-mn^2-n^3}{m^2-n^2}$; jetzt wende man eines der bekannten Verfahren, z. B. Substitution an.

2. Kommt in einer Gleichung die Unbekannte unter einem Wurzelzeichen vor, so potenziere man erst dann, wann keine Operation mehr behufs Reduktion möglich ist; z. B.:

3. $\frac{14\sqrt[3]{5x+8\frac{1}{2}}+1}{6\sqrt[3]{5x+8\frac{1}{2}}-1} - \frac{528}{1056} = \frac{726}{358}$; reduziere und erhalte:

$\sqrt[3]{5x+8\frac{1}{2}} = \frac{7}{2}$ ꝛc.

XXXV.

1. In manchen Gleichungen ist ein Ausdruck, in welchem die Unbekannte irgendwie vorkommt, vorläufig selbst als Unbekannte aufzufassen und zu berechnen, z. B.:

2. I. $2x+y = 26 - 7\sqrt{2x+y+4}$

II. $\frac{2x+\sqrt{y}}{2x-\sqrt{y}} = \frac{16}{15} + \frac{2x-\sqrt{y}}{2x+\sqrt{y}}$.

Addiere und subtrahiere in I links 4 und berechne die 2 Werte m und n der Unbekannten $\sqrt{2x+y+4}$. Desgleichen suche aus II

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die 2 Werte p und q der Unbekannten $\frac{2x+\sqrt{y}}{2x-\sqrt{y}}$, dann hat man folgende Gruppen aufzulösen:

1. $\sqrt{2x+y+4}=m$	1. $\sqrt{2x+y+4}=m$
2. $\frac{2x+\sqrt{y}}{2x-\sqrt{y}}=p$	2. $\frac{2x+\sqrt{y}}{2x-\sqrt{y}}=q$
1. $\sqrt{2x+y+4}=n$	1. $\sqrt{2x+y+4}=n$
2. $\frac{2x+\sqrt{y}}{2x-\sqrt{y}}=p$	2. $\frac{2x+\sqrt{y}}{2x-\sqrt{y}}=q$

3. $\sqrt[3]{\frac{x^2+a-1}{x^2-a+1}}+\sqrt[3]{\frac{x^2-a+1}{x^2+a-1}}=\frac{1+a^2}{a}$. Setze das 1. Glied $=y$; dann ist

$$y+\frac{1}{y}=a+\frac{1}{a};$$ daraus y_1 und y_2; dann x_1, x_2, x_3 und x_4.

4. $\sqrt{3x}-\sqrt{2x}+\sqrt{x}=2\sqrt{2}$. Betrachte zunächst $\sqrt{x}$ als Unbekannte.

5. $2x^2-2x-3=3\sqrt{x^2-x+1}$; daraus

$$x^2-x-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{x^2-x+1};$$ daraus

$$x^2-x+1-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{x^2-x+1}.$$ Betrachte nun $\sqrt{x^2-x+1}$ zunächst als Unbekannte; dann ist

$$y^2-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}y \text{ ꝛc.}$$

6. $\sqrt[3]{11-x}-\sqrt[3]{4-x}=1$; verteile die Wurzeln gleichheitlich auf beide Seiten, kubiere und setze $\sqrt[3]{4-x}$ gleich y ꝛc.

7. $16^{\cos^2 x+2\sin^2 x}+4^{2\cos^2 x}=40$

$16^{\cos^2 x+2-2\cos^2 x}+4^{2\cos^2 x}=40$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{256}{16^{\cos^2 x}} + 16^{\cos^2 x} = 40$$

$$\frac{256}{y} + y = 40\text{; daraus } \cos x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$x_1 = 30^0;\ x_2 = 330^0;\ x_3 = 150^0;\ x_4 = 210^0.$$

8. $7346 \,.\, 7^{\sec x} + 7^{1+\sec x} - 7010 \,.\, 7^{2\sec x} - 7^{3+2\sec x} + 3 \,.\, 7^{2+3\sec x} = 147$

9. $\sin^2 x + \cos^2 x + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + \sec^2 x + \mathrm{cosec}^2 x = 8.$

10. I. $x + \sqrt{x-y} = 6 + y$

II. $x^3 - y^3 = 208$

I. $x - y + \sqrt{x-y} - 6 = 0$; Unbekannte: $\sqrt{x-y}$. ꝛc.

XXXVI.

1. Wird eine Gleichung zum Zwecke der Vereinfachung mit einem Ausdrucke, der die Unbekannte irgendwie enthält, dividiert oder radiziert, überhaupt reduziert, so muß dieser Ausdruck $= 0$ gesetzt und diese neue Gleichung ebenfalls aufgelöst werden. [Das gilt auch für alle Gleichungen, die kein konstantes Glied haben.]

2. Löse folgende Gleichung auf: $\frac{2x + 3\sqrt{x}}{2x - 3\sqrt{x}} = \frac{x(4x-9)}{1225}$;

da der Zähler des 2. Bruches $= (2x + 3\sqrt{x}) \,.\, (2x - 3\sqrt{x})$ ist, so kann die Gleichung durch $2x + 3\sqrt{x}$ dividiert werden; man hat also die 2 Gleichungen $\frac{1}{2x - 3\sqrt{x}} = \frac{2x - 3\sqrt{x}}{1225}$ und $2x + 3\sqrt{x} = 0$;

diese letzte Gleichung kann aber selbst wieder durch $\sqrt{x}$ dividiert werden; also hat man die 3 Gleichungen:

$$\frac{1}{2x - 3\sqrt{x}} = \frac{2x - 3\sqrt{x}}{1225};\ 2\sqrt{x} + 3 = 0 \text{ u. } \sqrt{x} = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis: $\frac{2x+3\sqrt{x}}{2x-3\sqrt{x}} = \frac{x(4x-9)}{1225}$; oder

$$\frac{(2\sqrt{x}+3)\sqrt{x}}{2x-3\sqrt{x}} - \frac{(2\sqrt{x}+3)(2x-3\sqrt{x}).\sqrt{x}}{1525} = 0;$$

oder $(2\sqrt{x}+3).\sqrt{x}\left(\frac{1}{2x-3\sqrt{x}} - \frac{2x-3\sqrt{x}}{1225}\right) = 0$; nun wird dieses Produkt $= 0$, wenn $2\sqrt{x}+3 = 0$ ist,

oder $\sqrt{x} = 0$ „

oder $\frac{1}{2x-3\sqrt{x}} - \frac{2x-3\sqrt{x}}{1225} = 0$ ist.

3. $x^{\frac{5}{8}}\left(x^{\frac{1}{16}}+c\right)\left(x^{\frac{1}{16}}-c\right) = a\,x^{\frac{1}{8}}\left(2\,x^{\frac{9}{16}} - a\,x^{\frac{1}{2}}\right)$

$$- b\left(2\,x^{\frac{11}{16}} - 2\,a\,x^{\frac{5}{8}} + b\,x^{\frac{5}{8}}\right);$$

$$x^{\frac{5}{8}}.\left(x^{\frac{1}{8}} - c^2\right) = 2\,a\,x^{\frac{11}{16}} - a^2\,x^{\frac{5}{8}} - 2\,b\,x^{\frac{11}{16}} + 2\,ab\,x^{\frac{5}{8}} - b^2\,x^{\frac{5}{8}}$$

Dividiere durch $x^{\frac{5}{8}}$ $\left[\text{somit } x^{\frac{5}{8}} = 0;\ x_1 = 0\right]$, dann ist:

$x^{\frac{1}{8}} - 2\,(a-b)\,x^{\frac{1}{16}} + \left((a-b)^2 - c^2\right) = 0$. Unbekannte ist zunächst $x^{\frac{1}{16}}$; daraus $x_{2,3} = (a-b\pm c)^{16}$.

4. $\frac{ax-b^2}{b+\sqrt{ax}} = 1 - b\sqrt{ax}$;

$\frac{(\sqrt{ax})^2 - b^2}{\sqrt{ax}+b} = 1 - b\sqrt{ax}$; nach Reduktion des 1. Gliedes erhält man die zwei Gleichungen:

$\sqrt{ax} - b = 1 - b\sqrt{ax}$; daraus $x_1 = \frac{1}{a}$

u. $\sqrt{ax} + b = 0$; daraus $x_2 = \frac{b^2}{a}$.

Mache die Probe durch Substitution der für x gefundenen Werte und gieb an, warum hier $\sqrt{ax} = \sqrt{a.\frac{b^2}{a}} = \sqrt{b^2} = -b$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. Wann ist in einer Rechnung $\sqrt{16} = +4$, wann $= -4$, wann $= \pm 4$ zu nehmen?

XXXVII.

1. Substituiere $t.x$ für y in jeder homogenen Gleichung, z. B. $36y^2 = 25x^2 + 25xy$, sodann in solchen Gleichungen, in welchen alle Glieder mit den Unbekannten dieselbe Exponentensumme haben; z. B.

2. $\left.\begin{array}{l} \text{I.}\quad x^2 - 2xy + 2y^2 = 2 \\ \text{II.}\quad 2x^2 + 2xy + 3y^2 = 15 \end{array}\right\}$ setze $y = t.x$.

3. I. $\dfrac{x}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{(x+y)^{\frac{3}{2}}}{x} = \dfrac{97\,(x+y)^{\frac{1}{2}}}{36}$.

II. $2y^2 - 6\sqrt{2y^2 + 5x - 6} = 22 - 5x$.

Durch Reduktion der ersten Gleichung erhält man eine homogene Gleichung. Setze $y = tx$; dann $x_1 = \frac{4}{5}y$ und $x_2 = -\frac{9}{5}y$.

Die zweite Gleichung bringe auf die Form:

$(2y^2 + 5x - 6) - 6\sqrt{2y^2 + 5x - 6} - 16 = 0$; berechne die Unbekannte $\sqrt{2y^2 + 5x - 6}$. Nun sind folgende Gruppen aufzulösen:

1. $x = \frac{4}{5}y$	1. $x = \frac{4}{5}y$
2. $\sqrt{2y^2 + 5x - 6} = 8$.	2. $\sqrt{2y^2 + 5x - 6} = -2$.
1. $x = -\frac{9}{5}y$	1. $x = -\frac{9}{5}y$
2. $\sqrt{2y^2 + 5x - 6} = 8$.	2. $\sqrt{2y^2 + 5x - 6} = -2$.

Daraus 8 Wurzelpaare.

XXXVIII.

1. Sind beide Seiten einer Exponentialgleichung logarithmierbare Ausdrücke, so logarithmiere man. (Womöglich vorher reduzieren!)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Löse folgende Gleichung auf:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{2x-3} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{x-1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{x-2}.$$

Entweder: Logarithmiere.

Oder einfacher: Reduziere; dann ist $\left(\frac{12}{77}\right)^{x} = \left(\frac{12}{77}\right)^{2}$; also $x = 2$.

3. $\left(\frac{4}{5}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x-5} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{3x-8} = 7.$

Entweder: Logarithmiere.

Oder einfacher: Reduziere; dann ist $\left[5 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{3}\right]^{x-3} = 1$; also $x - 3 = 0$ [somit $x = 3$], denn soll eine Potenz, deren Dignand nicht 1 ist, $= 1$ sein, so muß ihr Exponent $= 0$ sein.

4. $(-1{,}23)^{x} = -2{,}8155$. Diese Gleichung ist nur möglich, wenn x eine ungerade Zahl ist; für diesen Fall ist $(-1{,}23)^{x} = -1{,}23^{x}$; die gegebene Gleichung geht über in $-1{,}23^{x} = -2{,}8155$ oder $1{,}23^{x} = 2{,}8155$ 2c.

5. $4^{x} = -16$ . . . unmöglich; warum?

6. $(-27)^{x} = -81$.

7. Löse folgende algebraische Geichung auf:

$$x^{\left(\frac{x}{x}\right)} = \left(\frac{x}{x}\right)^{x}; \; x_1 = ?; \; x_2 = ?$$

Anmerk. Wodurch unterscheidet sich eine analytische Gleichung von einer algebraischen?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XXXIX.

1. In einer Gleichung werden Klammern nur dann entfernt, wenn voraussichtlich hiedurch eine Vereinfachung der Gleichung erzielt wird, oder wenn der eingeschlossene Ausdruck irgendwie die Unbekannte enthält (ausgenommen, wenn der Klammerausdruck selbst zunächst als Unbekannte aufgefaßt werden kann).

2. Löse folgende Gleichung auf:

$$\frac{x}{abc} - \frac{1}{a-b-c} = abc - (a-b-c) \,.\, x.$$

3. Schreibe sofort die Lösung der folgenden Gleichung hin:

$$\left[\left(a + \frac{x-b}{c+d} \cdot e - f\right) : g + h\right] . \, i - k = 0.$$

XL.

1. $\lg^{b'} a = \frac{\lg^b a}{\lg^b b'}$; z. B. $\lg^5 6 = \frac{\lg 6}{\lg 5}$; $a = a \,.\, 1 = a \lg^b b = \lg^b (b^a)$;

z. B. $5 = 5 \,.\, 1 = \lg 10 = \lg 10^5 = \lg 100000$.

Kommen in einer Gleichung Logarithmen vor, so sorge man dafür, daß alle Glieder Logarithmen für dieselbe Basis werden; dann kann man beide Seiten der Gleichung als Aggregate von Logarithmen delogarithmieren.

2. $\frac{1}{5} \lg (18x^2 + 13x + 2) - 2 \lg \sqrt[5]{2x-3} = 0{,}04$; suche x!

Entweder: $\lg \sqrt[5]{18x^2 + 13x + 2} - \lg \sqrt[5]{(2x-3)^2} = \lg 1{,}09648$;

$$\frac{\sqrt[5]{18x^2 + 13x + 2}}{\sqrt[5]{(2x-3)^2}} = 1\ 09648;$$ daraus x_1 und x_2.

Oder: $\lg \sqrt[5]{18x^2 + 13x + 2} - \lg \sqrt[5]{(2x-3)^2} = \lg \sqrt[5]{\sqrt[5]{10}}$; denn $0{,}04$

$= 0{,}04 \,.\, 1 = 0{,}04 \lg 10 = \lg 10^{0{,}04} = \lg \sqrt[25]{10} = \lg \sqrt[5]{\sqrt[5]{10}}$

$$\sqrt[5]{\frac{18x^2 + 13x + 2}{(2x-3)^2}} = \sqrt[5]{\sqrt[5]{10}};$$ daraus x_1 und x_2.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Oder: Durch Multiplikation mit 5:

$$\lg(18x^2 + 13x + 2) - \lg(2x - 3)^2 = 0{,}2 \text{ ꝛc.}$$

3. $$\lg\left(1{,}5^{5\sqrt{64x^2+48x+9} - 14\sqrt[5]{8x+3}} - 3\right) = -0{,}42597;$$

$$\lg\left(1{,}5^{5\sqrt[5]{(8x+3)^2} - 14\sqrt[5]{8x+3}} - 3\right) = \lg 0{,}375;$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{5y^2 - 14y} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \text{ ꝛc.}$$

4. Jede zu delogarithmierende negative Zahl bringe man auf die Form 0, ... — n.

Kann eine negative Zahl für eine positive Basis logarithmiert werden?

5. $$\lg^x 1000 = \left(\lg^x 10\right)^2 + 2;$$

$$\frac{\lg 1000}{\lg x} = \left(\frac{\lg 10}{\lg x}\right)^2 + 2;$$ daraus die Unbekannte lg x u. dann x.

6. $$\lg^{x-1} x - \lg 6^{x-1} = 2;$$ suche x.

Entweder: $$\lg^{x-1} x - \lg^{x-1} 6 = \lg^{x-1}(x-1)^2;$$ denn $2 = 2 \,.\, 1 =$

$$2 \,.\, \lg^{x-1}(x-1) = \lg^{x-1}(x-1)^2;$$

$$\frac{x}{6} = (x-1)^2 \text{ ꝛc.}$$

Oder: $$\frac{\lg x}{\lg(x-1)} - \frac{\lg 6}{\lg(x-1)} = 2;$$

$$\lg x - \lg 6 = 2 \lg(x-1);$$

$$\frac{x}{6} = (x-1)^2 \text{ ꝛc.}$$

7. $$6 \lg 2 + \lg 4 = 0{,}69897 - \lg 20 + \lg 2^{\frac{4x^2+8x-1}{2}}$$

$$\lg 2^6 + \lg 4 - \lg 5 + \lg 20 = \lg 2^{\frac{4x^2+8x-1}{2}}$$

$$\frac{2^6 \,.\, 4 \,.\, 20}{5} = 2^{\frac{4x^2+8x-1}{2}} \text{ ꝛc.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

8. $\left(\frac{1}{x}\right)^{-\lg x} - 5\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{\lg x}{2}} = 24$. Betrachte zunächst $\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{\lg x}{2}}$

d. i. $x^{\frac{\lg x}{2}}$ als Unbekannte; dann x_1, x_2, x_3, x_4.

9. Berechne mit Hilfe der bekannten Logarithmen von 2, 3 und 10 den Logarithmus einer Zahl von der Form $2^\alpha . 3^\beta . 5^\gamma$ z. B. lg 75 $= \lg(3 . 5^2) = \lg 3 + 2 \lg \frac{10}{2} = \lg 3 + 2(\lg 10 - \lg 2) =$ ꝛc.

XLI.

1. Bei einfachen Zinsen ist: $Z = \frac{C}{100} . p . n$;

In Zinseszins- und Rentenrechnungen ist der Endwert eines Kapitals $= Ck^n$ und der Endwert einer Rente $= \frac{a(k^n - 1)}{k - 1}$ bzw. $\frac{ak(k^n - 1)}{k - 1}$. Der Barwert B einer Rente, d. h. dasjenige Kapital, welches auf Zinseszinsen ausgeliehen in n Jahren zu derselben Summe heranwächst, wie die Rente a, mit welchem also eine noch n Jahre laufende Rente a gekauft oder abgelöst werden kann, ist zu ermitteln aus: $Bk^n = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1}$

In den meisten Z.-Zins- und Rentenrechnungen gilt die Bestimmungsgleichung:

Endwert alles dessen, was ein Kontrahent bis zum Schlusse des ganzen Geschäftes empfangen hat, = Endwert alles dessen, was derselbe Kontrahent bis dahin geleistet hat.

2. Jemand, der zum Bezuge einer 15jährigen Rente von 500 ℳ. berechtigt ist, muß wie viele Jahre auf den Genuß derselben verzichten, um hernach eine 12jährige Rente von 700 ℳ. beziehen zu können? ($3^1/_2$ %). Die gesuchte Zeit sei x.

Für den Fall der Nichtverzichtleistung hat er am Ende des 15ten Jahres:

$$\frac{500\left(1{,}035^{15} - 1\right)}{0{,}035}$$

Für den Fall der Nichtverzichtleistung hat er am Ende des $x + 12^{ten}$ Jahres:

$$\frac{500\left(1{,}035^{15} - 1\right)}{0{,}035} \cdot 1{,}035^{x+12-15}$$

Für den Fall der Verzichtleistung hat er am Ende des $x + 12^{ten}$ Jahres:

$$\frac{700\left(1{,}035^{12} - 1\right)}{0{,}035}$$

In jedem Falle muß er am Ende des ganzen Geschäftes, also am Ende des $x + 12^{ten}$ Jahres gleichviel haben, also

$$\frac{500\left(1{,}035^{15} - 1\right)}{0{,}035} \cdot 1{,}035^{x-3} = \frac{700\left(1{,}035^{12} - 1\right)}{0{,}035};$$ daraus

die Unbekannte $1{,}035^{x-3}$; dann $x-3$; dann x.

3. Eine Schuld soll in den ersten 12 Jahren mit $3^1/_2$%, von da an mit $4^1/_2$% verzinst werden. Wenn nun von Anfang jährlich 5% des ursprünglichen Kapitals zur Zinszahlung und Amortisation (Tilgung) verwendet werden, in wie viel Jahren ist die ganze Schuld abgetragen? (Zinsfuß wie oben.)

Die Schuld C erreicht in 12 Jahren eine Höhe von $C \cdot 1{,}035^{12}$ und dieser Betrag wächst in den nächsten x Jahren heran zu $\left(C \cdot 1{,}035^{12}\right) \cdot 1{,}045^{x}$. Die ersten 12 Leistungen des Schuldners repräsentieren am Ende des 12. Jahres $\frac{\frac{C}{20}\left(1{,}035^{12} - 1\right)}{0{,}035}$ und dieser Betrag wächst bis zum Ende des letzten Jahres heran zu $\frac{\frac{C}{20}\left(1{,}035^{12} - 1\right)}{0{,}035} \cdot 1{,}045^{x}$. Die letzten x Leistungen des Schuldners dagegen haben am Schlusse des Geschäftes den Endwert $\frac{\frac{C}{20}\left(1{,}045^{x} - 1\right)}{0{,}045}$; somit

$$C \cdot 1{,}035^{12} \cdot 1{,}045^{x} = \frac{\frac{C}{20}\left(1{,}035^{12} - 1\right) \cdot 1{,}045^{x}}{0{,}035} + \frac{\frac{C}{20}\left(1{,}045^{x} - 1\right)}{0{,}045};$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$C \,.\, 1{,}035^{12} \,.\, 1{,}045^{x} = \frac{\left(1{,}035^{12} - 1\right) 1{,}045^{x}}{0{,}7} + \frac{1{,}045^{x} - 1}{0{,}9};$$

$$6{,}3 \,.\, 1{,}035^{12} \,.\, 1{,}045^{x} = 9\left(1{,}035^{12} - 1\right) .\, 1{,}045^{x} + 7 \,.\, 1{,}045^{x} - 7;$$

$$1{,}045^{x} = \frac{7}{-6{,}3 \,.\, 1{,}035^{12} + 9 \,.\, 1{,}035^{12} - 9 + 7} = \frac{7}{2{,}7 . 1{,}035^{12} - 2};$$

daraus $x = 27{,}57$.

Antwort 39,57 Jahre.

4. Jemand ist verpflichtet, von heute an n Jahre lang am Ende eines jeden Jahres den 3ten Teil der Zinsen eines Kapitals C und in weiteren n Jahren den 5ten Teil der Zinsen dieses Kapitals zu zahlen. Mit welcher Summe kann er heute diese Verpflichtungen ablösen? (5%)

Die in den ersten n Jahren zu zahlende Rente $\frac{1}{3} \cdot \frac{C}{100} \,.\, 5$ hat am Ende des n^{ten} Jahres den Wert: $\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{C}{100} \cdot 5\left(1{,}05^{n} - 1\right)}{0{,}05}$ und am Ende des letzten Jahres den Wert $\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{C}{100} \cdot 5\left(1{,}05^{n} - 1\right)}{0{,}05} \,.\, 105^{n}$; die in den letzten n Jahren zu leistende Rente $\frac{1}{5} \cdot \frac{C}{100} \cdot 5$ hat am Ende des letzten Jahres den Endwert: $\frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{C}{100} \cdot 5\left(1{,}05^{n} - 1\right)}{0{,}05}$; die Ablösungssumme x hat am Ende des letzten Jahres den Wert: $x \,.\, 1{,}05^{2n}$.

Somit:

$$x \,.\, 1{,}05^{2n} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{C}{100} \cdot 5\left(1{,}05^{n} - 1\right)}{0{,}05} \,.\, 1{,}05^{n} + \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{C}{100} \cdot 5\left(1{,}05^{n} - 1\right)}{0{,}05};$$

daraus: $$x = C \,.\, \left(1 - \frac{1}{1{,}05^{n}}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5 \,.\, 1{,}05^{n}}\right).$$

5. Der Staat hat die Baulast eines Pfründehauses zu übernehmen, wornach er nach 50 Jahren zu einem Neubau im Werte von 50000 ℳ., bis dahin jährlich zu 400 ℳ. und nachher jährlich zu 300 ℳ. Unter-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

haltungskosten verpflichtet ist. Durch welche jetzt zu leistende Summe könnte sich der Staat seiner Verpflichtung entledigen? (4%)

Mit der Barzahlung x kann der Staat sich von der Verpflichtung zum Neubau frei machen; $\left(x \text{ zu berechnen aus: } x \,.\, 1{,}04^{50} = 50000\right)$. Mit der Barzahlung y kann sich der Staat der Verpflichtung, jährlich von heute an in infinitum 300 ℳ. zu zahlen, entledigen $\left(y \text{ zu berechnen aus: } \mathfrak{Z} = \frac{C}{100} \,.\, \text{p. n.};\ 300 = \frac{y}{100} \,.\, 4\right)$. Mit der Barzahlung z befreit sich der Staat von der Verpflichtung 50 Jahre lang jährlich 100 ℳ. zu leisten. $\left(z \text{ zu berechnen aus: } z \,.\, 1{,}04^{50} = \frac{100\left(1{,}04^{50} - 1\right)}{0{,}04}\right)$.

Also Gesamtbarzahlung

$$x + y + z = \frac{50000}{1{,}04^{50}} + \frac{30000}{4} + \frac{100\left(1{,}04^{50} - 1\right)}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^{50}}$$

$$= 10000 + \frac{47500}{7{,}104} = 16686{,}37 \text{ ℳ.}$$

6. Voraussichtlich wird ein Wald am Ende des 10. Jahres haubar und wirft von da an jährlich 12 Jahre lang eine endschüssige Rente von 15000 ℳ. ab; hierauf wird er infolge veränderter Kultur dauernd jährlich 18000 ℳ. tragen. Welchen baren Wert x hat dieser Wald jetzt? ($3^1/_2$%)

Größe des Barwertes x nach 10 + 12 Jahren $= ? = S$.

Die 12jährige Rente hat einen Endwert (nach 22 J.) $= ? = S'$.

Der Wald hat am Ende des 22. Jahres einen Wert = welchem Kapital S", das jährlich 18000 ℳ. Zinsen trägt?

Bestimmungsgleichung: $S = S' + S''$.

7. Ist nach dem Zinsfuß p gefragt, so wird zunächst der Zinsfaktor k berechnet.

XLII.

1. Vor jeder Operation mit imaginären Wurzeln führe man das Symbol i statt $\sqrt{-1}$ ein, setze also z. B. $i\sqrt{a}$ statt $\sqrt{-a} = \sqrt{-1 \,.\, a} = \sqrt{-1} \,.\, \sqrt{a}$ und beachte: $i^2 = -1$

$i^3 = -i$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$i^4 = 1$$
$$i^{27} = i^{24} \,.\, i^3 = -i$$
$$i^{34} = i^{32} \,.\, i^2 = -1 \text{ ꝛc.}$$

2. Berechne: $\sqrt{1+4\sqrt{-3}} + \sqrt{1-4\sqrt{-3}}$!

Entweder: $x = \sqrt{1+4i\sqrt{3}} + \sqrt{1-4i\sqrt{3}}$;

$$x^2 = 1+4i\sqrt{3}+1-4i\sqrt{3}+2\sqrt{1+48} = 2+14 = 16;$$
$$x = \pm 4.$$

Oder: $\sqrt{1+4i\sqrt{3}} = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$;

$$1+4i\sqrt{3} = x - y + 2i\sqrt{xy};$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } x - y = 1 \\ \text{II. } 2i\sqrt{xy} = 4i\sqrt{3} \end{array}\right\} \text{daraus } x = 4;\ y = 3;\ \text{somit } \sqrt{1+4i\sqrt{3}} = \pm(2+i\sqrt{3});\ \sqrt{1-4i\sqrt{3}} = \pm(2-i\sqrt{3});$$

$$\sqrt{1+4i\sqrt{3}} + \sqrt{1-4i\sqrt{3}} = \pm 4$$

3. $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \pm(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. (Surdisches Binom.)

4. Beweise, daß die Grundlinie x eines gleichschenkeligen Dreieckes von der Seite a und dem Inhalte J gleich $\sqrt{a^2+2J} \pm \sqrt{a^2-2J}$ ist.

Lösung: Berechne x aus der Gleichung: $\frac{x \,.\, \sqrt{a^2-(\frac{x}{2})^2}}{2} = J$, und verwandle dann die für x gefundene Quadratwurzel aus einem Binom in das Binom zweier Quadratwurzeln.

5. $\sqrt[4]{-16} = \sqrt{\sqrt{-16}} = \sqrt{0+\sqrt{-16}} = \sqrt{0 \pm 4i} = \pm\sqrt{2}(1 \pm i)$;

aber es ist auch $\sqrt[4]{-16} = \sqrt{\sqrt{-16}} = \sqrt{4\sqrt{i}} = \pm 2\sqrt[4]{i}$.

6. $\left(-\sqrt[7]{-243}\right)^3 = ?$; $\left(-\sqrt[5]{-256}\right)^4 = ?$; $\left(\sqrt[5]{-343}\right)^4 = ?$

$\sqrt[3]{(-8)^5} = ?$; $\sqrt[5]{-32^3} = ?$; $-\sqrt[6]{(-729)^4} = ?$

$\sqrt[7]{(-512)^4} = ?$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XLIII.

1. $(a \pm b)^n = a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \pm \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots.$

In jedem Glied dieser Entwickelung kommt die Anzahl der vorausgehenden Glieder 3mal vor:

als untere Zahl des Symbols (des Koeffizienten),
als Subtrahend des ersten Exponenten und
als zweiter Exponent.

Ist diese Zahl ungerade, so hat das betreffende Glied das Vorzeichen —, wenn das Binom eine Differenz ist.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}. \quad \text{Beweis!}$$

2. Wie groß ist der Koeffizient von $x^{n-r} . y^r$ in der Entwickelung von $\left(x - \frac{1}{2} y\right)^n$, wenn n das dritte Glied einer geom. Progression von 6 Gliedern ist, in welcher die Summe der geraden Glieder 147, die Summe der ungeraden Glieder $73\frac{1}{2}$ beträgt, und wenn r die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Progression bedeutet, in welcher das 1. Glied 5, die Differenz 3 und die Summe 98 ist?

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } aq + aq^3 + aq^5 = 147 \\ \text{II. } a \;\; + aq^2 + aq^4 = 73{,}5 \end{array}\right\} \text{ daraus } a, q \text{ und } aq^2;$$

$\left(10 + (n-1)\,3\right)\frac{n}{2} = 98$; daraus n. Das $r + 1$. Glied, nach dessen Koeffizient gefragt ist, heißt: $\binom{n}{r} x^{n-r} . \left(\frac{1}{2} y\right)^r$ oder $\binom{n}{r} . \frac{1}{2^r} . x^{n-r} y^r$.

Der gesuchte Koeffizient ist: $\mp \binom{n}{r} . \left(\frac{1}{2}\right)^r$, je nachdem r gerad oder ungerad ist.

3. $\sqrt[5]{30}$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes auf 5 Dezimalen genau berechnen!

$$\sqrt[5]{30} = \sqrt[5]{32-2} = \sqrt[5]{32\left(1 - \tfrac{1}{16}\right)} = 2\sqrt[5]{1 - \tfrac{1}{16}} = 2\left(1 - \tfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}} = 2(1 - \ldots\ldots.).$$

Man verwandle den Radikanden in eine Summe oder Differenz, deren erstes Glied radikabel ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\sqrt{25{,}01} = \sqrt{25 + 0{,}01} = \sqrt{25\,(1 + \frac{1}{2500})} = 5\,(1 + \frac{1}{2500})^{\frac{1}{2}} =$ ꝛc.

Berechne diesen Wurzelausdruck außerdem noch auf 2 andere Arten.

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Gefäß mit n Kugeln durch einen Griff aufs Geratewol eine gerade Anzahl von Kugeln herauszuholen?

$$2^n = \left(1+1\right)^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}$$

$$0 = \left(1-1\right)^n = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \cdots \pm \binom{n}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{add. } \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \cdots = 2^{n-1} - 1 \\ \text{subtr. } \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1} \end{array}\right\} \text{Gesuchte Wahrscheinlich-}$$

$$\text{keit} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}}.$$

XLIV.

1. Sind a, b, c ... Primzahlen und α, β, γ ... ganze Zahlen, so hat die Zahl $a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \cdot d^\delta$ $(\alpha+1)\cdot(\beta+1)\cdot(\gamma+1)\cdot(\delta+1) - 2$ Teiler.

Beweis durch Induktion:

Die Zahl a^α hat die Teiler $a^1, a^2, a^3, \cdots a^{\alpha-1}$; also $\alpha - 1$ oder $(\alpha+1) - 2$ Teiler.

Die Zahl $a^\alpha \cdot b^\beta$ hat die Teiler $a^1, a^2, \cdots a^\alpha, b^1, b^2, \cdots b^\beta, a^1b^1, a^1b^2, \cdots a^\alpha \cdot b^{\beta-1}$; also $\alpha + \beta + \alpha\cdot\beta - 1$ oder $(\alpha+1)\cdot(\beta+1) - 2$ Teiler.

Die Zahl $a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$ hat analog welche und wie viele Teiler?

2. Beweise durch Induktion, daß in einem n-Eck die Anzahl der in das n-Eck fallenden Schnittpunkte der Diagonalen $= \binom{n}{4}$ ist, und beantworte dann folgende Fragen:

1. Wie viele Diagonalen hat ein n-Eck?
2. In wie vielen Punkten schneiden sich diese Diagonalen?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Wie viele davon fallen in die Ecken?
4. Wie viele in das n-Eck?
5. Wie viele liegen außerhalb?

XLV.

1. Stehen in einer Teilungsrechnung die Anteile in geometrischen Verhältnissen zu einander, so müssen alle Verhältniszahlen Glieder laufender Proportionen sein; man darf daher gleichzeitig alle Verhältniszahlen mit derselben Zahl multiplizieren oder dividieren.

2. Aufgabe: Die Peripherie eines Kreises mit dem Radius r ist so in 4 Teile a, b, c, d geteilt, daß sich $a:b = 1:5$, $a:c = 2:3$, $d:c = 5:2$ verhält. Wie groß ist der Flächeninhalt des durch die Teilpunkte bestimmten Sehnenviereckes?

Entweder: Die gegebenen Verhältniszahlen sind noch nicht Glieder laufender Proportionen. Verwandle daher vor allem die gegebenen Proportionen in laufende und beginne mit einer solchen Größe, die am wenigsten oft vorkommt, also entweder mit b oder d:

$$\left.\begin{array}{l} b:a = 5:1 = 20:\ 4 \\ a:c = 2:3 = \ \ 4:\ 6 \\ c:d = 2:5 = \ \ 6:15 \end{array}\right\} \text{ oder } a:b:c:d = 4:20:6:15, \text{ daher auch die zugehörigen Centriwinkel } \alpha:\beta:\gamma:\delta = 4:20:6:15.$$

Es ist somit
$$\begin{aligned} \angle\alpha &= \frac{360}{45}\cdot 4 = \ \ 32^0 \\ \angle\beta &= \ \ 8\cdot 20 = 160^0 \\ \angle\gamma &= \ \ 8\cdot\ \ 6 = \ \ 48^0 \\ \angle\delta &= \ \ 8\cdot 15 = 120^0 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 360^0 \end{aligned}$$

$$\text{Sehnenviereck} = \frac{r^2\sin 32^0}{2} + \frac{r^2\sin 160^0}{2} + \frac{r^2\sin 48^0}{2} + \frac{r^2\sin 120^0}{2}$$
$$= \frac{r^2}{2}\left(\sin 32^0 + \sin 20^0 + \sin 48^0 + \sin 60^0\right)$$
$$= \frac{r^2}{2}\cdot\left(\begin{array}{r} 0{,}5299193 \\ +\,0{,}3420201 \\ +\,0{,}7431448 \\ +\,0{,}8660254 \\ \hline 2{,}4811096 \end{array}\right) = 1{,}2405548\,r^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Oder: Da die Centriwinkel desselben Kreises oder gleichgroßer Kreise sich verhalten wie die zugehörigen Bogen, so ist

$a : b = \alpha : \beta = 1 : 5$; also $\beta = 5\alpha$;

$a : c = \alpha : \gamma = 2 : 3$; „ $\gamma = \frac{3}{2}\alpha$;

$d : c = \delta : \gamma = 5 : 2$; „ $\delta = \frac{5}{2}\gamma = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}\alpha = \frac{15}{4}\alpha$; somit

$$\alpha + 5\alpha + \frac{3}{2}\alpha + \frac{15}{4}\alpha = 360^0;\ \alpha = 32^0 \text{ ꝛc.} \ldots$$

Anmerk. Wie verhalten sich die Centriwinkel gleicher Bogen auf ungleichen Kreisen? (Foucault'scher Pendelversuch.)

3. Ist das laufende Verhältnis mehrerer Unbekannten, z. B. $m : n : p$ gegeben, so bezeichnet man dieselben am besten mit mx, nx, px; z. B.

4. Wie heißen die 3 Zahlen, die sich verhalten wie $2 : 3 : 5$, wenn die Summe ihrer Quadrate $= 152$ ist?

$(2x)^2 + (3x)^2 + (5x)^2 = 152$; also $= x = \pm 2$; die ges. Zahlen sind 4, 6, 10 oder -4, -6, -10.

5. Das Volumen eines abgekürzten Kegels ist $= V$ und das Verhältnis der Grundkreisradien und der Höhe $= m : n : p$.

Wie groß sind diese Strecken?

Dieselben seien mit mx, nx und px bezeichnet; dann ist

$$V = \frac{\pi \cdot px}{3}\left(m^2x^2 + n^2x^2 + mnx^2\right);\ \text{daraus } x;\ \text{ꝛc.}$$

XLVI.

1. Ist in einer Mischungs-(Alligations-)Rechnung nach der Quantität oder Qualität einer Sorte oder nach der Qualität der Mischung gefragt und bezeichnen a, b, c . . . die Quantitäten, α, β, γ . . . die Qualitäten der Sorten und μ die Qualität der Mischung, so dient zur Lösung die Gleichung:

Wert aller Sorten = Wert der Mischung

$$a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma + \cdots = (a + b + c + \cdots) \cdot \mu.$$

2. Ist nach den Quantitäten mehrerer Sorten, deren Qualitäten gegeben sind, gefragt, so suche man zuerst die Verhältniszahlen, nach

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welchen die Mischung vorzunehmen ist (oder wornach das Mischungsquantum auf die einzelnen Sorten zu verteilen ist, so daß man nur mehr eine Teilungsrechnung hat.

Zur Aufsuchung der Verhältniszahlen diene folgende Betrachtung:

Die Mischung kann immer aus einer der besseren und einer der geringeren Sorten hergestellt werden.

Es sei x die von der besseren Sorte und y die von der geringeren Sorte zu nehmende Quantität, und α sei die Qualität der besseren Sorte (oder Mehrpreis oder Wert der Quantitäts-Einheit der besseren Sorte) und β die Qualität der geringeren Sorte (oder Minderpreis oder Wert der Quantitäts-Einheit der geringeren Sorte). Jede Einheit, z. B. 1 Liter der besseren Sorte hat als Liter der Mischung nicht mehr den Wert α, sondern μ, hat also um $\alpha - \mu$ verloren. An sämtlichen x Einheiten der besseren Sorte verliert man also $x \cdot (\alpha - \mu)$. Analog gewinnt man an den y Einheiten der geringeren Sorte $y \cdot (\mu - \beta)$.

Nun muß nach der Mischung die Gleichung bestehen:

Verlust an der besseren Sorte = Gewinn an der geringeren Sorte

$$x \cdot (\alpha - \mu) = y \cdot (\mu - \beta) \text{ oder}$$

$x : y = (\mu - \beta) : (\alpha - \mu)$, d. h. die Verhältniszahl für die von der besseren Sorte zu nehmende Quantität ist der Unterschied zwischen dem Mischungs- und Minderpreis und die Verhältniszahl für die von der geringeren Sorte zu nehmende Quantität ist der Unterschied zwischen dem Mehr- und Mischungspreis, z. B.

Aus Wein zu 90 ₰ und zu 60 ₰ sollen 150 l zu 70 ₰ hergestellt werden.

		70	
Qualitäten		90	60
Quantitäten		x	y

Quantitäten:	Verhältniszahlen:	
x . .	70 − 60 = 10 . .	1
y . .	90 − 70 = 20 . .	2
		3

d. h. teile das Mischungsquantum 150 l im Verhältnis von 1 : 2, dann ist

$$x = 50 \text{ l}$$
$$y = 100 \text{ l.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sind mehr als 2 Sorten zu mischen, so mische man so oft eine bessere Sorte mit einer geringeren, bis jede Sorte in der Mischung vorkommt. Sollen die Resultate ganzzahlig sein, so sorge man durch Multiplikation eines Paares oder mehrerer Paare zusammengehöriger Verhältniszahlen mit passenden Zahlen dafür, daß die Summe aller Verhältniszahlen = dem gegebenen Mischungsquantum oder ein Teiler desselben wird z. B.

Aus reinem Silber von 0,990 und 0,860 Feingehalt und Kupfer sollen 81 Gramm (g) Legierung von 0,900 Feingehalt hergestellt werden. Wieviel Gramm können von jeder Sorte verwendet werden? (Ganzzahlige Resultate!)

		900		
Qualitäten . . .	1000	990	860	0
Quantitäten . . .	x	y	z	v

Erste Lösung:

Quantitäten:	Verhältniszahlen:		
x	900 . .	9	10
v	100 . .	1	
y	40 . .	4	13
z	90 . .	9	

Die Summe aller Verhältniszahlen soll = 81 oder ein Teiler von 81 sein. Nun giebt irgend ein Vielfaches von 10 + irgend ein Vielfaches 13 nicht 81 oder einen Teiler von 81. Diese Lösung giebt keine ganzzahligen Resultate.

Zweite Lösung:

Quantitäten:	Verhältniszahlen:		
x	40 . .	2 . .	20
z	100 . .	5 . .	50
y	900 . .	10 . .	10
v	90 . .	1 . .	1
			81

Nur durch Multiplikation des ersten Paares von Verhältniszahlen mit 10 wird die Summe aller Verhältniszahlen = 81. Teile also 81 g im Verhältnis von 20 : 50 : 10 : 1.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dritte Lösung:

Quantitäten:		Verhältniszahlen:	
x_1	2	7	8
z_1	5		20
x_2	9	10	36
v	1		4
y	4	13	4
z_2	9		9

Das 1. und 2. Paar ist mit 4 multipliziert worden. Teile also 81 g im Verhältnis von

$$\overset{44}{(8+36)} : 4 : \overset{29}{(20+9)} : 4.$$

Eine vierte Lösung erhält man, wenn man das 1. Paar mit 5, das 2. und 3. Paar mit 2 multipliziert.

Fünfte Lösung.

Quantitäten:	Verhältniszahlen:	
x_1	2	7
z_1	5	
x_2	9	10
v_1	1	
y_1	4	13
z_2	9	
y_2	10	11
v_2	1	

Multipliziere das 1. und 3. Paar mit 2 und das 2. mit 3.

Weitere Lösungen erhält man, wenn man das 1. und 3. Paar mit 3 oder das 2. Paar mit 5 multipliziert ꝛc.

Um alle möglichen ganzzahligen Resultate zu erhalten, müßte man die diophantische Gleichung $1000x + 990y + 860z + 0v = 900 \cdot 81$ auflösen.

XLVII.

1. Solange man in einer Aufgabe mit Logarithmen (fünfstelligen) rechnen muß, führe man in der Regel alle Operationen auf 5 Dezimalstellen genau aus. In der unmittelbar zum Endresultat führenden Ope-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ration jedoch erstrebe man diejenige Anzahl der Dezimalstellen, welche jenem seiner Natur nach zukommen. Ist hier eine abgekürzte Division vorzunehmen, (deren Wesen bekanntlich darin besteht, daß man statt den Restdividenden durch Herabholen einer weiteren Stelle aus dem Dividenden nahezu 10 mal größer zu machen, den zugehörigen Divisor durch Abschneiden einer Stelle rechts nahezu 10 mal kleiner macht), so beantworte man zu diesem Behufe folgende Fragen:

1. Wie viele ganze Ziffernstellen muß der Quotient bekommen?
2. Wie viele Dezimalstellen gemäß der Natur der Aufgabe?
3. Wie viele Stellen überhaupt? (d. h. wie oft muß überhaupt dividiert werden?)
4. Wie oft kann man abgekürzt dividieren, d. h. wie viele Stellen kann man vom Divisor rechts abschneiden?
5. Kann man die abgekürzte Division sofort beginnen oder muß man vor derselben noch einigemal dividieren wie gewöhnlich?

XLVIII.

1. $\frac{8}{4} = 8:4$ sagt, man soll eine Zahl suchen, welche mit dem Divisor 4 multipliziert den Dividenden 8 giebt. $\frac{0}{0}$ sagt, man soll eine Zahl suchen, welche mit dem Divisor 0 multipliziert den Dividenden 0 giebt. Es giebt aber jede Zahl mit 0 multipliziert 0, also kann $\frac{0}{0}$ jede Zahl bedeuten, ist also unbestimmt.

2. Wird der Dividend und Divisor irgend eines Quotienten mit $a \mp b$ aus multipliziert und hernach $b = \pm a$ genommen, so wird der Quotient $= \frac{0}{0}$. z. B. $\frac{x+21}{x+1} = \frac{(x+21)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x^2+24x+63}{x^2+4x+3}$

$$= \frac{0}{0} \text{ für } x = -3.$$

Umgekehrt, wird ein Quotient z. B.

$$\frac{3a^4 - 6a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 + b^4}{2a^4 - 5a^3b + 4a^2b^2 - ab^3} \left[\text{für } a = b\right] = \frac{0}{0},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so ist damit gesagt, daß im Dividend und Divisor der Faktor $a - b$ liegt, mit welchem Dividend und Divisor des ursprünglichen Quotienten multipliziert worden sind. Um also den letzteren zu erhalten, verwandle man den Dividenden und Divisor des gegebenen Quotienten in Produkte und vereinfache mit $a - b$.

$$\frac{3a^4 - 6a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 + b^4}{2a^4 - 5a^3b + 4a^2b^2 - ab^3} = \frac{(a-b)^2(4a^2 + b^2)}{a(a-b)^2 \cdot (2a-b)} = \frac{3a^2 + b^2}{a(2a-b)}$$

3. Welches ist der wahre Wert von $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ für $a = b$?

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})}{a - b}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots b^{n-1} = n \cdot a^{n-1} \text{ für } b = a.$$

4. Welchen Wert hat $\frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3-x}}{\sqrt{2} - \sqrt{3-x}}$ für $x = 1$?

$$\frac{2^{\frac{1}{3}} - (3-x)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}} - (3-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} - \left((3-x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{2}} - (3-x)^{\frac{1}{2}}} = n \cdot a^{n-1}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3} - 1}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2^{-\frac{1}{6}} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{1}{2}}.$$

5. $\frac{x^6 - (4a + b)x^5 + 4a(a+b)x^4 - 4a^2bx^3}{ax^6 - 8a^3x^4 + 16a^5x^2} = ?$ für $x = 2a$.

6. Wo liegt der Fehler in folgender Entwickelung?

I. $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x) \cdots$ Differenz zweier Quadrate;

II. $x^2 - x^2 = x(x - x)$;

comp. $x(x - x) = (x + x)(x - x)$; dividiere beiderseits mit $x - x$, dann ist: $x = x + x$;

$x = 2x$;

$1 = 2$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XLIX.

1. Wie groß sind die Winkel eines △, in welchen sich 2 Seiten wie 8 : 12 und ihre Gegenwinkel wie 1 : 2 verhalten?

2. Gegeben: $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = 3 : 4 : 5$; wie groß sind die Dreiecks-winkel α, β, γ?

Lösung: $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma) : 12 = \operatorname{tg}\alpha : 3$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma : 12 = \operatorname{tg}\alpha : 3$$

$$\text{I. } \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = 4$$

$$\text{II. } \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = 4 : 5$$

$$\text{mult. } \operatorname{tg}\beta = \pm\sqrt{3{,}2}$$

$$\text{div. } \operatorname{tg}\gamma = \pm\sqrt{5}.$$

$\beta = 60^0\ 47'\ 40''$

$\gamma = 65^0\ 54'\ 19''$ Warum nur eine Lösung?

$\alpha = 53^0\ 18'\ 1''$

L.

1. Unter dem specifischen Gewichte eines Körpers versteht man diejenige (unbenannte) Zahl, welche angiebt, wie viel mal so schwer ein Körper ist, als ein gleich großes Volumen chemisch reinen (destillierten) Wassers bei 4° C. in der Höhe und geogr. Breite der Sternwarte zu Paris.

Von solchem Wasser wiegt 1 l oder 1 cdm .... 1 kg
1 ml „ 1 ccm .... 1 g
1 kl „ 1 cbm .... 1 t (Tonne = 1000 kg).

Das specifische Gewicht des Bleies ist 11,35. Also sind 4 cdm Blei 11,35 mal so schwer als 4 cdm oder 4 l Wasser, somit 41,35 . 4 kg schwer.

Das specifische Gewicht der atmosphärischen Luft ist 0,001293. Also sind 4 kl oder 4 cbm Luft 0,001293 mal so schwer als 4 kl oder 4 cbm Wasser, somit 0,001293 . 4 t schwer. Allgemein:

Absolutes Gewicht = Kubikinhalt · specifisches Gewicht, in welcher Gleichung gleichzeitig nur l, cdm, kg oder ml, ccm, g, oder kl, cbm, t vorkommen dürfen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. In welchem Gewichtsverhältnis muß man Blei vom specifischen Gewicht $s_1 = 11{,}35$ mit Korkholz vom spec. Gewicht $s_2 = 0{,}24$ verbinden, damit diese Verbindung gerade noch in destilliertem Wasser schwimmen kann?

Bestimmungsgleichung: Gewicht eines schwimmenden Körpers = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

Das Gewicht des Bleies sei mit x, das des Korkes mit y bezeichnet; dann ist

Gew. des Bleies + Gew. des Korkes = Gewicht des verdrängten Wassers

$$x + y = \left(\frac{x}{s_1} + \frac{y}{s_2}\right) . 1; \text{ daraus}$$

$$\frac{x}{y} + 1 = \frac{x}{y . s_1} + \frac{1}{s_2}; \text{ daraus}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{(1 - s_2)s_1}{(s_1 - 1)s_2} = \frac{3{,}47}{1} = \frac{347}{100}.$$

3. Wie groß ist der Durchmesser 2 x eines kugelförmigen Luftballons zu nehmen, damit derselbe gerade noch schwebend in der Luft erhalten wird, wenn das specifische Gewicht der Luft = a, das des füllenden Gases = b und das Gewicht eines Quadratmeters der Hülle = c ist?

Lösung: Gewicht des schwimmenden Körpers d. h. Gewicht des Gases + und Gewicht der Hülle = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit (Luft).

$\frac{4}{3} x^3 \pi . b + 4 x^2 \pi c = \frac{4}{3} x^3 \pi . a$; daraus x, dann 2 x.

LI.

1. Seite des eingeschriebenen regulären Dreieckes $= r\sqrt{3}$ (halbiert den auf ihr $\perp$ stehenden Radius).

Seite des eingeschriebenen regulären Viereckes $= r\sqrt{2}$.

Seite des eingeschriebenen regulären Sechseckes = r.

Seite des eingeschriebenen regulären Zehneckes $= \frac{r}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$.

Seite b des eingeschr. regul. 2n-Eckes aus: $b^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Seite u des umgeschr. regul. n-Eckes aus: $u : e = r : \sqrt{r^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2}$.

Seite e des eingeschr. regul. n-Eckes aus: $e : u = r : \sqrt{r^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2}$.

Aus $\frac{r}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$, r und $r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$ (Fünfeckseite) läßt sich ein rechtwinkeliges Dreieck konstruieren. Beweis!

Die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes ist $= \frac{a}{2}\sqrt{3}$, der Inhalt $= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; wie wird $a\sqrt{3}$ am einfachsten konstruiert?

LII.

1. Länge eines Kreis-Bogens von 360^0 ist $2r\pi$.

" " " " 1^0 " $\frac{2r\pi}{360}$.

" " " " n^0 " $2r\pi \cdot \frac{n^0}{360^0}$.

Fläche " Kreis-Sektors " 360^0 " $r^2\pi$.

" " " " 1^0 " $\frac{r^2\pi}{360}$.

" " " " n^0 " $r^2\pi \cdot \frac{n^0}{360^0}$.

Fläche " Kugelzweiecks " 360^0 " $4r^2\pi$.

" " " " 1^0 " $\frac{4r^2\pi}{360}$.

" " " " n^0 " $4r^2\pi \cdot \frac{n^0}{360^0}$.

C-Inhalt " keilförm. Kug.-Ausschn. v. 360^0 ist $\frac{4}{3}r^3\pi$.

" " " " " 1^0 " $\frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{360}$.

" " " " " n^0 " $\frac{4}{3}r^3\pi \cdot \frac{n^0}{360^0}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

LIII.

1. Polygon A in ein Polygon X zu verwandeln, das dem Polygon B ähnlich ist.

$X : B = x^2 : b^2$, wenn x u. b ein par homologe Seiten in X u. B sind;

subst. $A : B = x^2 : b^2$, weil $A = X$ sein soll;

$\alpha^2 : \beta^2 = x^2 : b^2$, wenn A u. B in Quadrate mit den Seiten α u. β verwandelt sind;

$\alpha : \beta = x : b$.

Konstruiere nun x und errichte über x ein Polygon ähnl. Polygon B.

2. Verwandle ein Fünfeck A in ein reguläres Sechseck X.

Lösung. Zeichne ein beliebiges reguläres Sechseck B mit der Seite b; dann ist

$X : B = x^2 : b^2$

$A : B = x^2 : b^2$; verwandle nun A und B in Dreiecke, dann Rechtecke, dann Quadrate mit den Seiten α und β; dann ist:

$\alpha^2 : \beta^2 = x^2 : b^2$

$\alpha : \beta = x : b$; konstruiere x und dann ein reguläres Sechseck mit der Seite x.

LIV.

1. $$\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + 4a^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt[15]{a^8} + 4a^{\frac{9}{20}} + 4\sqrt[12]{a^7} + \sqrt[5]{a^2}} = ?$$

Ordne und beachte, daß man alle Glieder des Radikanden entweder als Potenzen mit gebrochenen Exponenten, oder noch besser als Wurzeln mit einem (dem kleinsten) gemeinschaftlichen Radikator anschreiben kann. Vollziehe die Radikation auf beide Arten.

2. Wie heißt die Kubikwurzel aus der 4ziffrigen radikabeln Zahl, die mit 6 anfängt und mit 9 endigt?

Wie heißt die Kubikwurzel aus der 5ziffrigen radikabeln Zahl, die mit 12 anfängt und mit 7 endigt?

Wie heißt die Kubikwurzel aus der 6ziffrigen radikabeln Zahl, die mit 110 anfängt und mit 2 endigt?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wie heißt die Kubikwurzel aus der 4ziffrigen radikabeln Zahl, die mit 4 anfängt und mit 3 endigt?

Wie heißt die Kubikwurzel aus der 5ziffrigen radikabeln Zahl, die mit 29 anfängt und mit 1 endigt?

Wie heißt die Kubikwurzel aus der 6ziffrigen radikabeln Zahl, die mit 405 anfängt und mit 4 endigt?

LV.

1. Ergiebt sich im Laufe einer Rechnung ein größerer Ausdruck, mit welchem (unverändert) weiter gearbeitet werden muß, so führe man für denselben eine Abreviatur ein.

2. I. $\frac{xyz}{x+y} = a$; II. $\frac{xyz}{x+y} = b$; III. $\frac{xyz}{x+y} = c$ oder

I. $xyz = ax + ay$; II. $xyz = bx + bz$; III. $xyz = cy + cz$ oder

I. $1 = \frac{a}{yz} + \frac{a}{xz}$; II. $1 = \frac{b}{yz} + \frac{b}{xy}$; III. $1 = \frac{c}{xz} + \frac{c}{xy}$.

Setzt man x_1 für $\frac{1}{yz}$, x_2 für $\frac{1}{xz}$ und x_3 für $\frac{1}{xy}$, so erhält man

I. $1 = ax_1 + ax_2$; II. $1 = bx_1 + bx_3$; III. $1 = cx_2 + cx_3$; daraus

$$x_1 = \frac{-ab + bc + ac}{2abc} = \frac{1}{A}; \text{ also } yz = A$$

$$x_2 = \frac{ab - ac + bc}{2abc} = \frac{1}{B}; \quad \text{„} \quad xz = B$$

$$x_3 = \frac{ac - bc + ab}{2abc} = \frac{1}{C}; \quad \text{„} \quad xy = C$$

$$\text{mult. } x^2y^2z^2 = ABC$$

$$xyz = \pm\sqrt{ABC}$$

$$yz = A$$

$$\text{div. } x = \pm\sqrt{\frac{BC}{A}}$$

$$= \pm\frac{1}{A}\sqrt{ABC}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$y = \pm\sqrt{\frac{AC}{B}}$$
$$= \pm\frac{1}{B}\sqrt{ABC}$$
$$z = \pm\sqrt{\frac{AB}{C}}$$
$$= \pm\frac{1}{C}\sqrt{ABC}.$$

3. Von welchen 2 Zahlen ist die Summe ihrer reciproken Werte $= a$, und die Summe ihrer Quadratwurzeln $= b$?

$$\text{I. } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a$$
$$\text{II. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = b.$$

$$\text{I. } x + y = axy$$
$$\text{II. } x + y = b^2 - 2\sqrt{xy}$$

$$\text{comp. } axy + 2\sqrt{xy} - b^2 = 0$$

$$\sqrt{xy} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + ab^2}}{a} = m\ (n)$$

$1.\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = b \ \ldots$	$\ldots\ 1.\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = b$
$2.\ \sqrt{xy} \qquad = m \ \ldots$	$\ldots\ 2.\ \sqrt{xy} \qquad = n$
$1.\ x + 2\sqrt{xy} + y = b^2$	
$2.\ \ -4\sqrt{xy} \qquad = -4m$	
$x - 2\sqrt{xy} + y = b^2 - 4m$	
$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \pm\sqrt{b^2 - 4m}$	
$\sqrt{x} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4m}}{2}$	
$\sqrt{y} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4m}}{2}$	
$x_1 = \frac{1}{4}\left(b + \sqrt{b^2 - 4m}\right)^2 \ldots$	$\ldots\ x_2 = \frac{1}{4}\left(b + \sqrt{b^2 - 4n}\right)^2$
$y_1 = \frac{1}{4}\left(b - \sqrt{b^2 - 4m}\right)^2 \ldots$	$\ldots\ y_2 = \frac{1}{4}\left(b - \sqrt{b^2 - 4n}\right)^2$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. I. $x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = a$

II. $x^2 + y^2 + xy \quad = b$

II. $x^2 + y^2 = b - xy$

II². $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = b^2 - 2bxy + x^2y^2$

subtr. $-x^2y^2 = b^2 - a - 2bxy + x^2y^2$

oder $2(xy)^2 - 2b(xy) + (b^2 - a) = o$

$$xy = \frac{b \pm \sqrt{2a - b^2}}{2} = m; \text{ bzw. } n;$$

1. $xy = m$	1. $xy = n$
2. $x^2 + y^2 = b - m$	2. $x^2 + y^2 = b - n$
etc.	etc.

Am Schlusse werden in den Resultaten die obigen Werte für m und n eingesetzt.

LVI.

1. Nicht blos jede gegebene Gleichung, sondern auch jede durch Vereinfachung aus ihr abgeleitete Gleichung werde dahin untersucht, ob sie nicht eine Eigentümlichkeit enthalte, welche einen Wink zur Lösung geben kann.

2. Ist in einer geometrischen Aufgabe das Verhältnis der Teile eines Ganzen $= m : n$ gegeben oder gesucht, so gestaltet sich in der Regel die Bestimmungsgleichung sofort einfacher, wenn man mit dem Verhältnis eines Teiles zum gegebenen Ganzen $= m : (m + n)$ rechnet. (z. B. ein Dreieck, Trapez durch eine Parallele zur Grundlinie, eine Pyramide, einen Kegel, einen Pyramidenstumpf, einen Kegelstumpf durch eine Ebene parallel zur Grundfläche in einem bestimmten Verhältnis teilen.)

3. Eine Kugel vom Radius r soll cylindrisch so ausgebohrt werden, daß die Achse des Cylinders mit einem Durchmesser der Kugel zusammenfällt und der durch Ausbohrung wegfallende Teil zum übrig gebliebenen sich wie $m : n$ verhält!

Zur Auflösung: Es sei der Grundkreisradius des Cylinders mit x und die Sagitte der beiden Kugelsegmente mit y bezeichnet, dann ist die Bestimmungsgleichung:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wegfallender Teil: Kugel $= m : (m + n)$

$$\text{I.}\ \left[x^2 \pi (2r - 2y) + 2 \cdot \frac{\pi y^2}{3}(3r - y)\right] : \frac{4}{3} r^3 \pi = m : (m + n),$$

$$\text{II.}\ x^2 = y(2r - y);$$

daraus: $y^3 - 3ry^2 + 3r^2 y = r^3 \cdot \frac{m}{m+n}$.

Die ersten 3 Glieder haben die Eigentümlichkeit, daß sie die ersten 3 Glieder der Entwickelung von $(y - r)^3$ sind. Man braucht daher nur beiderseits r^3 zu subtrahieren und bekommt:

$$y = r\left(1 - \sqrt[3]{\frac{n}{m+n}}\right) \text{ und als}$$

Bohrerweite: $2x = 2r\sqrt{1 - \sqrt[3]{\left(\frac{n}{m+n}\right)^2}}$.

4. $\sqrt{4} = \pm 2$; d. h. allgemein?

$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot -1} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2i$; d. h. allgemein?

$\sqrt[3]{27} = +3$; d. h. allgemein?

$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$; d. h. allgemein?

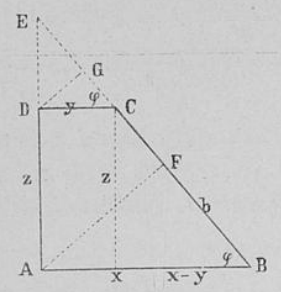
LVII.

1. Nach der Guldin'schen Regel ist die (der) durch Rotation erzeugte Fläche (Körper) gleich dem Produkte aus der erzeugenden Linie (Fläche) und dem Weg, den der Schwerpunkt der Erzeugenden während der Rotation beschreibt.

Zeige die Richtigkeit des Gesetzes in Bezug auf Cylinder- und Kegelmantel, Cylinder- und Kegeloberfläche, Kugeloberfläche, Cylinder-, Kegel- und Kugelinhalt, Kalotte und Kugelsektor.

2. Von dem bei A rechtwinkligen Trapeze ist die nicht parallele Seite $BC = b$, der Inhalt $= a^2$ und das Volumen des Rotationskörpers, welcher entsteht, wenn das Trapez um BC rotiert, gleich einer Kugel vom Radius r. Berechne die übrigen Seiten des Trapezes.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



I. $\frac{4}{3} r^3 \pi$ = Doppelkegel (durch Rotation von $\triangle ABE$ um BE) — Doppelkegel (durch Rotation von $\triangle DCE$ um CE)

II. $\frac{x+y}{2} \cdot z = a^2$

III. $b^2 = z^2 + (x - y)^2$

I. $\frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} x^3 \sin\varphi \operatorname{tg}\varphi \,.\, \pi - \frac{4}{3} y^3 \sin\varphi \operatorname{tg}\varphi \,.\, \pi$;

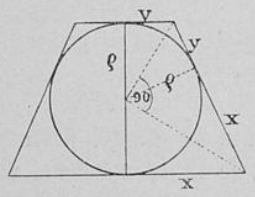
I. $4 r^3 = (x^3 - y^3) \cdot \frac{z^2}{b \,.\, (x - y)}$

I. $4 b r^3 = z^2 (x^2 + xy + y^2)$ ꝛc. (Eliminiere z, setze dann in einer der 2 resultierenden Gleichungen $y = t \,.\, x$.)

3. Gegeben sind der Inhalt eines Parallelogramms $= a^2$ und die Volumina V und V′, welche es bei der Rotation um die Seiten x und y beschreibt. Berechne x, y und den eingeschlossenen Winkel φ!

LVIII.

1. Ist einem gleichseitigen Trapez (Antiparallelogramm) ein Kreis mit dem Radius ϱ, einem abgekürzten geraden Kegel mit den Radien R und r eine Kugel mit dem Radius ϱ einbeschreibbar, so ist die nichtparallele Seite = halben Summe der beiden parallelen Seiten $= \frac{a+b}{2}$ bzw. die Mantellinie $= R + r$; außerdem $\varrho^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}$ bzw. $= R \,.\, r$; warum?



2. Wie groß sind die Grundkreisradien eines geraden abgestumpften Kegels, der doppelt so groß ist, als die eingeschriebene Kugel?

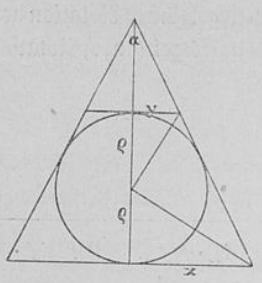
I. $\frac{\pi \,.\, 2\,\varrho}{3}\left(x^2 + xy + y^2\right) = 2 \,.\, \frac{4}{3} \varrho^3 \pi$

II. $\varrho^2 = x \,.\, y$

Welch bekannter Ausdruck begegnet uns im Resultat für y?

3. Ein gerader abgestumpfter Kegel, in welchen sich eine Kugel beschreiben läßt, ist ein Teil eines geraden Kegels, dessen Winkel an der Spitze α ist. In welchem Verhältnis steht das Volumen des abgest. Kegels zu dem der Kugel?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

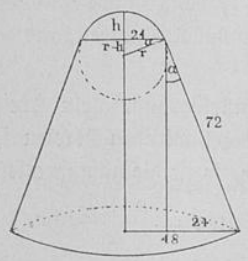


$$\frac{\text{Abgest. Kegel}}{\text{Kugel}} = \frac{\frac{\pi \cdot 2\varrho}{3}\left(x^2 + xy + y^2\right)}{\frac{4}{3}\varrho^3\pi};$$

Beachte nun, daß alle Winkel bekannt sind (wie groß ist jeder?) und drücke x und y durch ϱ und trigonometr. Funktionen dieser Winkel aus

4. Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck oder Trapez (Antiparallelogramm) oder in einem geraden Kegel oder Kegelstumpf ein Winkel direkt oder indirekt gegeben ist, so sind alle Winkel der Figur bekannt; z. B.

5. Ein Kessel besteht aus einem abgestutzten Kegel mit den Grundkreisradien 48 cm und 24 cm und der Mantellinie 72 cm und aus einer Kugelhaube (als Boden), an welche die Mantellinie Tangente ist. Suche Oberfläche und K.-Inhalt.



$\sin\alpha = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$; daraus α; nun sind alle Winkel bekannt; somit:

$$\frac{24}{r} = \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2};$$

daraus $r = 18\sqrt{2}$;

$$\frac{r - h}{r} = \sin\alpha = \frac{1}{3}; \text{ daraus } h = 12\sqrt{2}$$

Oberfl. = ?
K.-Inhalt = ?

LIX.

1. Sind in einer Aufgabe über Progressionen die Anzahl sowie die Summe oder das Produkt der Glieder gegeben, so ist es manchmal von Vorteil, in arithmetischen Progressionen, die mittleren Glieder (wenn nämlich die Anzahl n gerade ist) mit $x - y$ und $x + y$ (die Differenz also mit $2y$), und das mittlere Glied (wenn n ungerade ist) mit x, die benachbarten mit $x - y$ und $x + y$ (die Differenz also mit y) und in geom. Progr. die mittleren Glieder (wenn nämlich n gerade ist, mit $\frac{x}{y}$ und xy

(den Quotienten also mit y^2) und das mittlere Glied (wenn n gerade ist) mit x, die benachbarten mit $\frac{x}{y}$ und xy (den Quotienten also mit y) zu bezeichnen.

2. Vier Zahlen bilden eine arithmetische Progression. Ihre Summe ist 20 und die Summe ihrer reziproken Werte ist $\frac{25}{36}$. Wie heißen diese Zahlen?

I. $x - 3y + x - y + x + y + x + 3y = 20$ oder $x = 5$

II. $\frac{1}{x-3y} + \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+3y} = \frac{25}{36}$; schaffe, um II zu reduzieren, die Brüche weg, setze wiederholt gemeinschaftliche Faktoren heraus und entferne erst dann die Klammern.

3. Bestimme die Elemente einer arithmetischen Progression, von welcher die Summe des 5. und 8. Gliedes $= 21$ und die Summe der Kuben dieser 2 Glieder $= 2457$ ist.

Heiße das 6. Glied $x - y$, das 7. Glied $x + y$, dann ist das 5. Glied $x - 3y$ und das 8. Glied $x + 3y$, und die Bestimmungsgleichungen lauten:

I. $(x - 3y) + (x + 3y) = 21$ oder $x = \frac{21}{2}$

II. $(x - 3y)^3 + (x + 3y)^3 = 2457$ oder $2x^3 + 54xy^2 = 2457$ ꝛc.

4. Wie heißt die arithm. Prog. von 4 Gliedern, deren Differenz $= 6$ und deren Produkt $= 640$ ist?

I. $(x - 3y)(x - y)(x + y)(x + 3y) = 640$

II. $2y = 6$

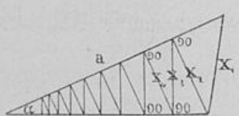
---

subst. $(x - 9)(x - 3)(x + 3)(x + 9) = 640$

$(x^2 - 81)(x^2 - 9) = 640$

$x^4 - 90x^2 + 89 = 0$; daraus x_1; x_2; x_3; x_4.

Würde man das 1. Glied mit v, das zweite mit $v + 6$ ꝛc. bezeichnen, so hätte man $v.(v + 6)(v + 12)(v + 18) = 640$ oder $v^4 + 36v^3 + 396v^2 + 1296v - 640 = 0$; die Wurzeln -8 und -10 lassen sich durch Versuche ermitteln.



5. $x_1 = ?$; $x_2 = ?$; $x_3 = ?$ u. s. f.; dann $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = ?$

Anmerk. $(\frac{5}{2})^\infty = 2{,}5^\infty = \infty$; dagegen $(\frac{2}{5})^\infty = \left(\frac{1}{2{,}5}\right)^\infty = \frac{1^\infty}{2{,}5^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$ d. h.?

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

6. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein Quadrat einbeschrieben; diesem ist wieder ein Kreis einbeschrieben; diesem ein Quadrat u. s. f. Wie groß ist die Summe aller Kreisflächen und wie groß die Summe aller Quadrate?

7. Angenommen Aschaffenburg und Würzburg (beide Orte als Punkte gedacht) seien genau 80 km von einander entfernt. Wie viele Tage würde ein Wanderer zu dieser Strecke brauchen, wenn er den 1. Tag 40 km, den 2. Tag 20 km, den 3. Tag 10 km u. s. f. zurücklegen würde?

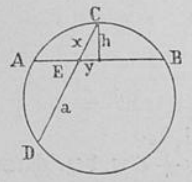
LX.

1. Soll in einer algebraisch-geometrischen Aufgabe die Unbekannte x einer gemischt quadratischen Gleichung konstruiert werden, so braucht man diese nicht aufzulösen, sobald sie von der Form

$x^2 \pm px - q^2 = 0$ ist; denn in diesem Falle ist $x(x \pm p) = q^2$

d. h. q ist Tangente an den Kreis mit dem Durchmesser p, und x ist die durch dessen Centrum gehende Sekante [wenn $-p$], bezw. deren äußeres Stück [wenn $+p$].

2. Durch den Halbierungspunkt C des Bogens über Sehne $AB = b$ die Sehne CD so ziehen, daß $DE = a$ wird.



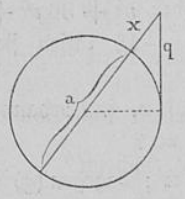
Analysis: I. $x^2 = y^2 + h^2$

II. $x \cdot a = \left(\frac{b}{2} + y\right) \cdot \left(\frac{b}{2} - y\right)$

$$x^2 + ax - \left[h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = 0$$

$$x^2 + ax - q = 0$$

$$x(x + a) = q^2$$



Konstruktion: Sehne $AC = q$; mache $CE = x$; dann CD.

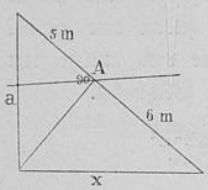
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

LXI.

1. Ist in einer Konstruktionsaufgabe das Verhältnis zweier Flächen $= a^2 : b^2$ gegeben, so beachte man, daß $a^2 : b^2$ durch $p : q$ zu ersetzen ist, wo p und q die Projektionen der Katheten a und b auf die Hypotenuse c sind.

Beweis für $a^2 : b^2 : c^2 = p : q : c$!

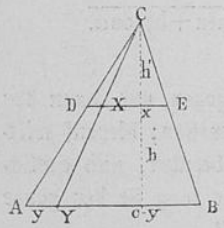
2. Ein Quadrat zu zeichnen, das zu dem Quadrat über a sich verhält wie $6 : 5$.



Entweder: Analysis: Da $x^2 : a^2 = 6 : 5$, so ist die gesuchte Quadratseite die eine Kathete eines rechtwinkeligen $\triangle$, dessen andere Kathete $= a$ und dessen Hypotenuse durch die zugehörige Höhe im Verhältnis von $6 : 5$ geteilt wird. Der Punkt A liegt 1. in einer Parallelen zu x, welche a im Verhältnis von $6 : 5$ teilt, 2. in der Peripherie des über a als Durchmesser konstruierten Halbkreises. Es sind also für den Punkt A zwei geometrische Örter gegeben.

Oder: $x^2 : a^2 = 6 : 5$; $x^2 = \frac{6}{5} a^2 = a \cdot \frac{6}{5} a$, d. h. ꝛc.

3. Suche einen solchen Punkt X in $DE \nparallel AB$, daß $\triangle XCE = \triangle ABY$ wird.



Anal. I. $x \cdot h' = y \cdot h$ oder $x : y = h : h'$

II. . . . . $(c - y : x = h : h'$

mult. $(c - y) : y = h^2 : h'^2 = p : q$

$$cq - yq = py$$

$$y = \frac{cq}{p + q} = 4.\text{geom.}$$

Proportionale zu $p + q$, c und q.

4. Den wievielten Teil des Himmelsgewölbes verdeckt die Sonne, wenn ihr Halbmesser unter einem Winkel von $\frac{\alpha}{2} = 16'$ erscheint?

Der von der Sonne verdeckte Teil des Himmels ist eine Calotte $= 2 r \pi h$.

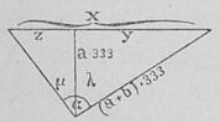
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{Calotte : Kugeloberfläche} = 2r\pi h : 4r^2\pi = h : 2r$$
$$= a^2 : (2r)^2 = \left(\frac{a}{2r}\right)^2$$
$$= \left(\sin\frac{\alpha}{4}\right)^2 : 1 = 1 : 184655.$$

5. Wie groß ist die geradlinige Bahn x eines Blitzes, welche unter einem Winkel α erblickt wird, wenn der Donner nach a Sekunden beginnt und b Sekunden lang dauert?

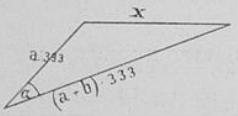
Bei der großen Geschwindigkeit des Blitzes (60 000 Meilen) kann man annehmen, daß in jedem Punkte der Blitzbahn gleichzeitig ein Schall durch den Blitz erzeugt wird. Der Beobachter hört zuerst den Schall von dem nächstgelegenen, $a \cdot 333$ m entfernten Punkte und zuletzt den Schall von dem $(a + b) \cdot 333$ m entfernten Punkte der Blitzbahn.

Entweder:



1. $y = \sqrt{333^2(a+b)^2 - 333^2a^2}$
$= 333\sqrt{(2a+b)\cdot b}$;
2. $\operatorname{ctg}\lambda = \frac{a}{a+b}$; daraus λ;
3. $\mu = \alpha - \lambda$;
4. $z = a \cdot 333 \cdot \operatorname{tg}\mu$;
5. $x = y + z$.

Oder:



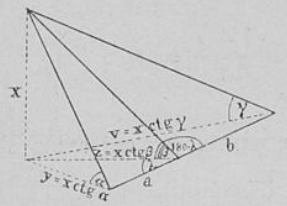
$$x^2 = a^2.333^2 + (a+b)^2.333^2 - 2.333^2a(a+b)\cos\alpha;$$
$$x = 333\sqrt{a^2 + (a+b)^2 - 2a(a+b)\cos\alpha}.$$

6. Eine Seerose wird senkrecht in die Höhe gezogen und dann der über das Wasser ragende Teil (AB) des Stengels gemessen; hierauf wird sie so angezogen, daß sie den Wasserspiegel (in C) berührt, und endlich wird noch die horizontale Strecke BC gemessen. Wie lang ist der ganze Stengel, wenn AB = 20 cm und BC = 40 cm ist?

LXII.

1. Sind in keinem der Dreiecke der Analysisfigur einer trigonometrischen Aufgabe mehr als 2 Stücke gegeben, so muß man mehrere Stücke als Unbekannte betrachten, also mehrere (mindestens 2) Gleichungen mit mehreren Unbekannten aufstellen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



2. Von den 3 Endpunkten der zwei anstoßenden und in einer Geraden liegenden Standlinien a und b erblickt man den Gipfel eines Berges unter den Elevationswinkeln α, β und γ. Wie hoch ist der Berg?

$$\text{I. } x^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = x^2 \operatorname{ctg}^2 \beta + a^2 - 2\,a\,x \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos \lambda \quad \text{(Kosinussatz)}$$

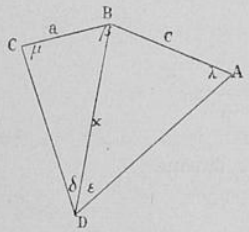
$$\text{II. } x^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma = x^2 \operatorname{ctg}^2 \beta + b^2 + 2\,b\,x \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos \lambda \quad (\quad \text{„} \quad)$$

$$2\,x \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos \lambda = \frac{x^2 \operatorname{ctg}^2 \beta + a^2 - x^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\alpha} = \frac{x^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma - x^2 \operatorname{ctg}^2 \beta - b^2}{b}$$

daraus $x = \sqrt{\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad}$

3. Gegeben A, B, C. Wie weit ist von B entfernt Punkt D, von welchem aus a und c unter den Winkeln δ und ε erscheinen (Pothenot'sche Aufgabe).

Entweder:



$$\text{I.} \quad \mu = 360 - \beta - \delta - \varepsilon - \lambda = \alpha - \lambda$$

$$\text{II. } x : c = \sin \lambda : \sin \varepsilon$$

$$\text{III. } a : x = \sin \delta : \sin(\alpha - \lambda)$$

$$\text{mult. } a : c = \sin \lambda \cdot \sin \delta : \sin \varepsilon \cdot \sin(\alpha - \lambda)$$

$$\text{oder: } \frac{a}{c} = \frac{\sin \lambda \cdot \sin \delta}{\sin \varepsilon\,(\sin \alpha \cos \lambda - \cos \alpha \sin \lambda)};$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \varepsilon\,(\sin \alpha \operatorname{ctg} \lambda - \cos \alpha)}{\sin \delta}; \text{ daraus } \lambda;$$

x wird nun mit dem Sinussatz berechnet.

Oder: $\text{I. } x : c = \sin \lambda : \sin \varepsilon$

$\text{II. } a : x = \sin \delta : \sin \mu$

$$\text{mult. } a : c = \sin \lambda \cdot \sin \delta : \sin \mu \cdot \sin \varepsilon$$

$$\text{oder } a \sin \varepsilon : c \sin \delta = \sin \lambda : \sin \mu$$

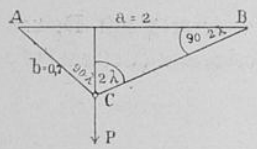
$$\frac{a \sin \varepsilon + c \sin \delta}{a \sin \varepsilon - c \sin \delta} = \frac{\sin \lambda + \sin \mu}{\sin \lambda - \sin \mu} = \frac{2 \sin \frac{\lambda + \mu}{2} \cos \frac{\lambda - \mu}{2}}{2 \cos \frac{\lambda + \mu}{2} \sin \frac{\lambda - \mu}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\lambda + \mu}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\lambda - \mu}{2}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

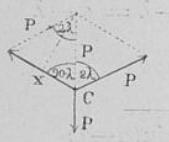
$$= \frac{\operatorname{tg}\frac{360-(\beta+\delta+\varepsilon)}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\lambda-\mu}{2}}; \quad \operatorname{tg}\frac{\lambda-\mu}{2} = \text{ꝛc.}$$

Constructione läßt sich Punkt D leicht ermitteln, da mit a und δ auch r und mit c und ε auch r′ ind. gegeben ist.

4. In zwei in gleicher Höhe über dem Horizont gelegenen Punkten A und B, deren Entfernung a = 2 m ist, werden zwei Seile befestigt; das eine von der Länge AC = b = 0,7 m trägt in C einen Ring, das andere geht durch den Ring in C und trägt an seinem Ende ein Gewicht P = 15 kg, welches die beiden Seile so spannt, daß ACB die Gestalt eines △ annimmt. Bestimme die Spannung S = x von AC und den ∠ λ, den AC mit AB bildet.



An Punkt C halten sich die Kräfte P, P und S das Gleichgewicht. Dies ist der Fall, wenn die 3 Kräfte in einer Ebene liegen, und eine derselben = der Resultante der beiden anderen ist, jedoch im entgegengesetzten Sinne von dieser wirkt.



I. $\frac{x}{2P} = \sin\lambda$

II. $2:0{,}7 = \sin(90+\lambda):\sin(90-2\lambda)$

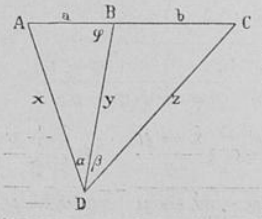
II. $20:7 = \cos\lambda:\cos 2\lambda$

$20:7 = \cos\lambda:(2\cos^2\lambda-1)$; daraus

$\cos\lambda = 0{,}8$; $\lambda = 36^0\ 52'\ 12''$;

sodann $x = 2P\sin\lambda = 18$ kg.

5. A, B, C liegen auf derselben Geraden; AB = a und BC = b werden von D aus unter den Winkeln α bzw. β gesehen. Suche AD, BD und CD.



Entweder: Suche zunächst einen der Winkel bei A, B oder C z. B. φ, dann sind von jedem Dreieck eine Seite und alle Winkel bekannt.

Zur Ermittelung von φ haben wir:

I. $a:y = \sin\alpha:\sin(\varphi+\alpha)$

II. $y:b = \sin(\varphi-\beta):\sin\beta$

mult. $a:b = \sin\alpha\,.\,\sin(\varphi-\beta):\sin\beta\,.\,\sin(\varphi+\alpha)$;

daraus $a\sin\beta\,.\,\sin(\varphi+\alpha) = b\,.\,\sin\alpha\,.\,\sin(\varphi-\beta)$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$a \sin\beta \sin\varphi \cos\alpha + a \sin\beta \cos\varphi \sin\alpha = b \sin\alpha \sin\varphi \cos\beta - b \sin\alpha \cos\varphi \,.\, \sin\beta.$

Nach Division durch $\cos\varphi$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\alpha \,.\, \sin\beta\,(a+b)}{b \sin\alpha \cos\beta - a \cos\alpha \sin\beta} = \frac{a+b}{b \operatorname{ctg}\beta - a \operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\text{"} \quad =^{*)} \frac{\sin\alpha \,.\, \sin\beta \,.\, (a+b)}{b \sin\alpha \left(\cos\beta - \dfrac{a \cos\alpha \sin\beta}{b \sin\alpha}\right)}; \text{ setze ich } \frac{a}{b} \,.\, \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi',$$

dann ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(a+b) \sin\beta \,.\, \cos\varphi'}{b \,.\, \cos(\varphi' + \beta)}; \text{ daraus } \varphi, \text{ dann } x, y \text{ und } z.$$

Oder: $\triangle ABD : \triangle BCD = a : b$ (gleiche Höhe)

$$\triangle ABD : \triangle BCD = \frac{x\,y \sin\alpha}{2} : \frac{y \,.\, z \sin\beta}{2} = x \sin\alpha : z \sin\beta$$

comp. $x \,.\, \sin\alpha : z \,.\, \sin\beta = a : b$

$z : x = \sin A : \sin C$ (Sinussatz)

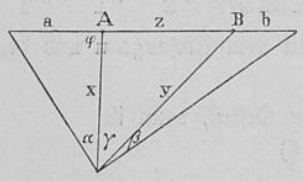
mult. $\sin A : \sin C = b \sin\alpha : a \sin\beta$

$$(b \sin\alpha + a \sin\beta) : (b \sin\alpha - a \sin\beta) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+C) : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-C)$$

$$\text{"} \quad : \quad \text{"} \quad = \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-C);$$

daraus $A-C$; aus $A+C = 180 - (\alpha+\beta)$ und $A-C$ erhält man $\angle A$ und $\angle C$. Von jedem Dreieck sind also bekannt eine Seite und alle Winkel 2c.

6. Gesucht AB. Gegeben a, b, α, β, γ.



Lösung: Entweder:

$a : x = \sin\alpha : \sin(\varphi + \alpha)$

$x : y = \sin(\varphi - \gamma) : \sin\varphi$

$y : b = \sin(\varphi - (\beta + \gamma)) : \sin\beta$

mult. $$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha \,.\, \sin(\varphi - \gamma) \,.\, \sin(\varphi - \delta)}{\sin\beta \,.\, \sin\varphi \,.\, \sin(\varphi + \alpha)};$$

daraus auf umständliche Weise φ; dann x; dann AB.

*) Lohnt sich hier die Verwandlung dieses Ausdruckes in einen logarithmierbaren?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Oder einfacher: $a:(a+z) = x \sin\alpha : y \sin(\alpha+\gamma)$

$b:(b+z) = y \sin\beta : x \sin(\beta+\gamma)$

mult. $(ab):(a+z)(b+z) = \sin\alpha \sin\beta : \sin(\alpha+\gamma) . \sin(\beta+\gamma)$;
daraus z d. h. AB.

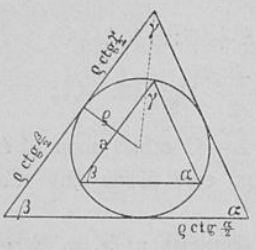
LXIII.

1. Beweise:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma &= 4\cos\frac{\alpha}{2} . \cos\frac{\beta}{2} . \cos\frac{\gamma}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &= 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2} . \sin\frac{\beta}{2} . \sin\frac{\gamma}{2} \\ \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma &= \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta . \operatorname{tg}\gamma \end{aligned}\right\} \text{für } \alpha+\beta+\gamma = 180^0$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha . \operatorname{ctg}\beta . \operatorname{ctg}\gamma \qquad \text{für } \alpha+\beta+\gamma = 90^0.$$

2. Berechne den Inhalt desjenigen Dreieckes, das dem einem gegebenen Dreiecke umgeschriebenen Kreise umgeschrieben und diesem Dreieck ähnlich ist!



$$a = 2\varrho \sin\alpha$$

$$\text{Gesuchte Fläche} = \varrho s = \varrho\left(\varrho \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \varrho \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \varrho \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= \varrho^2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= \varrho^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} . \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} . \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$= \left(\frac{a}{2\sin\alpha}\right)^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} . \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} . \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

3. Berechne eine Seite des Dreieckes mit dem Umfange u und den Winkeln α, β und γ.

Entweder: x, y, z seien die unbekannten Seiten, dann ist

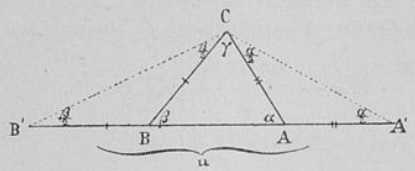
$x:y:z = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ (Sinussatz)

$$\overset{u}{(x+y+z)} : (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = x : \sin\alpha$$

$$x = \frac{u . 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{u . \sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Oder: Die Konstruktion des Dreieckes verlangt folgende Analysisfigur:

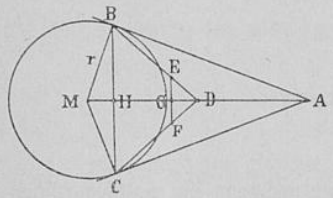


Berechne zuerst in dem großen Hilfsdreieck Seite A'C mit dem Sinussatz, sodann in dem gleichschenkligen △ A A'C (in welchem die Höhe gezogen wird) die Seite AC ꝛc.

LXIV.

1. Die Schwer- oder Mittellinie zur Hypotenuse c ist $= \frac{c}{2} = r$. Beweis!

2. Vom Punkt A sind an den Kreis M die beiden Tangenten AB und AC und zu diesen die zugehörigen Radien MB und MC gezogen. Wie weit ist der Schwerpunkt des Viereckes MBAC von M entfernt, wenn $AM = a$ und $MB = r$ ist?



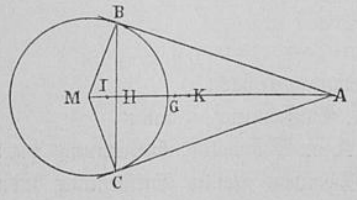
Entweder: E und F seien die Schwerpunkte der Dreiecke MBA und MCA und G sei der Schwerpunkt des Viereckes, dann ist $BD = \frac{a}{2}$; $DE = \frac{a}{6}$;

$r^2 = a \cdot MH$; daraus $MH = \frac{r^2}{a}$;

$BH^2 = r^2 - MH^2$ oder $BH^2 = MH \cdot (a - MH)$; daraus BH; $GE = \frac{1}{3} BH$;

$DG = \sqrt{DE^2 - GE^2}$; somit $GM = DM - DG = \frac{a^2 + r^2}{3a}$

$$= \frac{1}{3}\left(a + \frac{r^2}{a}\right) = \frac{1}{3}\left(MA + MH\right).$$



Oder: I und K seien die Schwerpunkte der Dreiecke MBC und ABC und G sei der Schwerpunkt des Viereckes, dann ist bezogen auf Punkt M:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Moment der Resultante = Summe der Momente der Kräfte, oder
Moment des Ganzen = Summe der Momente seiner Teile, oder
Moment des Viereckes = Summe der Momente der beiden Dreiecke
(das Gewicht der Flächeneinheit = 1 genommen)

$$\frac{BC \cdot a}{2} \cdot MG = \frac{BC \cdot MH}{2} \cdot MI + \frac{BC \cdot AH}{2} \cdot MK$$

$$a \cdot MG = MH \cdot \tfrac{2}{3} MH + AH \cdot (MH + \tfrac{1}{3} AH)$$

$$a \cdot MG = \frac{2}{3} \frac{r^4}{a^2} + \left[a - \frac{r^2}{a}\right] \left[\frac{r^2}{a} + \frac{1}{3}\left(a - \frac{r^2}{a}\right)\right]$$

$$MG = \frac{a^2 + r^2}{3a} = \frac{1}{3}\left(a + \frac{r^2}{a}\right) = \frac{1}{3}\left(MA + MH\right).$$

3. Es werde auf 3 Arten die Fallbeschleunigung in der geographischen Breite φ ermittelt.

Entweder: $g_\varphi = g_0 + a_0 \sin^2\varphi = 9{,}7806 + 0{,}0339 \sin^2\varphi$. (Siehe XXIV, 8.) (Hier ist die Kugelgestalt der Erde vorausgesetzt.)

Oder: Legen in der geographischen Breite φ die beiden Gewichte P und Q einer Atwood'schen Fallmaschine in der Zeit t den Weg s zurück, so ist nach XXIV, 11 und XVIII, 1

$$\left.\begin{aligned} &\text{I. } s = \frac{at^2}{2} \\ &\text{II. } a = g\frac{P-Q}{P+Q} \end{aligned}\right\} \text{ daraus g d. i. } g_\varphi = ?$$

Oder: Macht ein physisches Pendel, mit welchem ein mathematisches Pendel von der Länge l gleichmäßig schwingt, in t Sekunden n Schwingungen, so ist $\frac{t}{n} = \pi \sqrt{\frac{l}{g_\varphi}}$; daraus g_φ.

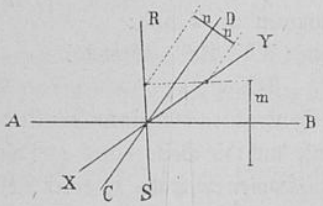
LXV.

Suche den geometrischen Ort

1. des Punktes, der von AB die Entfernung d hat;
2. „ „ , der vom Punkte M die Entfernung d hat;
3. „ „ , der von den Punkten A u. B dieselbe Entfernung hat;
4. „ „ , der von 2 parallelen Geraden gleiche Entfernung hat;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. des Punktes, dessen Entfernungen von 2 Parallelen zusammen = s sind; } Algebraisch-
6. „ „ , dessen Entfernungen von 2 Parallelen um d von einander verschieden sind; } geom. Lösung.
7. „ „ , der von 2 sich schneidenden Geraden dieselbe Entfernung hat;

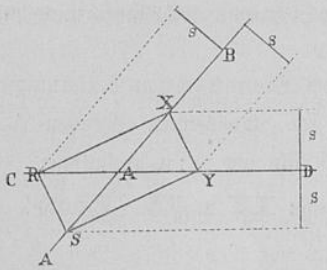


8. des Punktes, dessen Entfernungen von 2 sich schneidenden Geraden AB und CD sich wie m : n verhalten; Lösung: XY u. RS. Beweis!

9. des Scheitels von $\angle \alpha$, dessen Schenkel durch A und B gehen;
10. der Spitze eines Dreieckes mit der Grundlinie g und dem Gegen $\angle \gamma$; (d. h. des Punktes, von dem aus man die Strecke g unter dem $\angle \gamma$ erblickt);
11. der Spitze eines Dreieckes, das mit einem gegebenen Dreiecke gemeinsame Grundlinien und gleichen Inhalt hat;
12. der Spitze eines gleichschenkligen $\triangle$ über AB;
13. des Punktes, für welchen der Unterschied der Quadrate seinen Entfernungen von A u. B gleich d^2 ist. (Zerlege Strecke AB in x u. y so, daß $\begin{matrix} \text{I. } x + y = AB = a \\ \text{II. } x^2 - y^2 = d^2 \end{matrix}$ ist. Das Lot auf AB im Teilpunkte ist der gesuchte Ort. Beweis!)
14. des Punktes, für welchen die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von A u. B = $AB^2 = a^2$ ist;
15. der Spitze eines rechtwinkligen $\triangle$ über AB als Hypotenuse;
16. des Halbierungspunktes einer Sehne von der Länge l in einem gegebenen Kreis;
17. des Mittelpunktes eines Kreises, der durch A u. B geht;
18. des Punktes, der von der Peripherie eines geg. Kreises die Entfernung d hat;
19. des Mittelpunktes eines Kreises, der AB in M berührt;
20. des Mittelpunktes eines Kreises, der 2 parallele oder 2 sich schneidende Gerade berührt;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

21. des Halbierungspunktes einer durch einen gegebenen Punkt A auf der Peripherie eines Kreises gezogenen Sehne;



22. des Punktes, dessen Entfernungen von 2 sich schneidenden Geraden AB u. CD zusammen = s sind;

Lösung: XY, RS, RX u. SY. Beweis!

(Die Senkrechten von einem Punkte der Grundlinie auf die Seite eines gleichsch. △ sind zusammen = Höhe zu einer dieser Seiten.)

23. des Punktes, dessen Entfernungen von den Schenkeln des Winkels α den Unterschied d haben. (Ziehe zu dem einen Schenkel in der Entfernung d eine Parallele, welche also den anderen Schenkel unter einem Winkel = α schneidet. Die Halbierende dieses Winkels ist der gesuchte Ort.)

24. Suche einen Punkt, dessen Entfernungen von den Seiten eines △ sich verhalten wie l:m:n.

Lösung mit Nr. 8. Es gibt 4 solche Punkte.

Aufgabe: Konstruiere ein Dreieck aus γ, h_c und m_c.

Zur Analysis: Das Dreieck mit den Seiten h_c und m_c ist zunächst konstruierbar. Zieht man dann durch den Fußp. von m_c eine Parallele zu der einen Seite, so ergeben sich für den Halbierungspunkt der anderen Seite nach 1 und 10 zwei geometr. Örter.

LXVI.

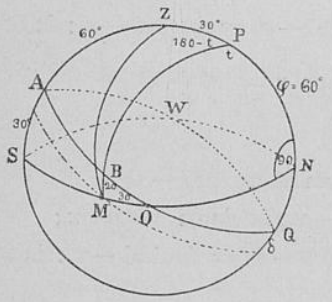
1. Da in einer solchen Aufgabe aus der mathematischen Geographie, in welcher sphärische Trigonometrie zur Anwendung kommt, in der Regel sofort die ganze zugehörige Figur mit den gegebenen und mit den zu berechnenden Größen gezeichnet werden kann, und also von jedem gesuchten Stück im voraus bekannt ist, ob es $\lesseqgtr 90^0$, 180^0, 270^0 ist, so ist die Lösung immer eindeutig; es ist daher angezeigt, den Sinus-Satz anzu-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenden, sobald mit dem Kosinus-Satz oder Kotangenten-Satz oder der Kotangenten-Formel ein 4. Stück berechnet worden ist.

Ferner stehen in solchen Aufgaben zur Berechnung der unbekannten Stücke immer mehrere Dreiecke zur Verfügung, darunter rechtwinkelige, sobald eine der gegebenen Koordinaten (Höhe, Azimut, Deklination, Rektascension, Breite, Länge) $= 0^0$ oder 90^0 oder 180^0 oder 270^0 ist; z. B.

2. Wie lange dauert der Tag in der geographischen Breite $\varphi = 60^0$ an einem solchen Tag, an dem die Deklination δ der Sonne $= -20^0$ ist?



Entweder: Im $\triangle$ MPN ist gegeben $\angle N = 90^0$, $PN = 60^0$, $PM = 110^0$, somit nach der Neper'schen Regel:

$\cos t = \operatorname{tg} 60^0 . \operatorname{ctg} 110^0$ oder

$\cos(180 - t) = \operatorname{tg} 60^0 . \operatorname{ctg} 70$; daraus

$180 - t$.

$$\text{Dauer des Tages} = \frac{2.(180 - t)}{15} \text{ Std.}$$

Oder: Im $\triangle$ MOB ist gegeben $\angle B = 90^0$, $\angle O = 30^0$, $BM = 20^0$, somit nach der Neper'schen Regel:

$$\sin BO = \operatorname{tg} 20^0 . \operatorname{ctg} 30^0.$$

$$\text{Dauer des Tages} = \frac{2.(180 - t)}{15} = \frac{2\,AB}{15} = \frac{2.(90 - BO)}{15} \text{ Std.}$$

Oder: Im $\triangle$ SPM ist gegeben $\angle S = 90^0$,

$PM = 110^0$, $PS = 120^0$, somit nach der

Neper'schen Regel: $\cos(180 - t) = \operatorname{ctg} 110^0 . \operatorname{tg} 120^0$ oder

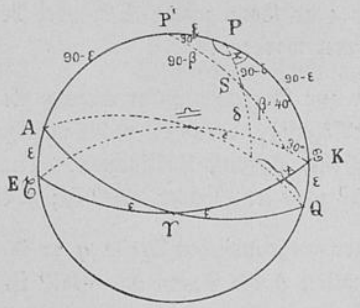
$$\cos(180 - t) = \operatorname{ctg} 70^0 . \operatorname{tg} 60^0.$$

Oder: Im $\triangle$ MZP ist gegeben $PZ = 90^0 - \varphi = 30^0$, $MZ = 90^0$, $PM = 110^0$, somit nach dem Kosinussatz:

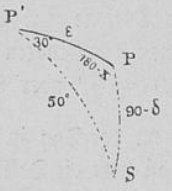
$\cos 90^0 = \cos 30^0 . \cos 110^0 + \sin 30^0 \sin 110^0 \cos(180 - t)$; daraus

$$\cos(180^0 - t) = \frac{-\cos 30^0 . \cos 110^0}{\sin 30^0 \sin 110^0} = \operatorname{ctg} 30^0 . \operatorname{ctg} 70^0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



3. Aus der Länge $\lambda = 120^0$ und der Breite $\beta = 40^0$ eines Sternes S die Rektascension r und Deklination δ desselben zu ermitteln.



Im $\triangle SPP'$ ist gegeben $\varepsilon = 23^0 27' 28''$, $\angle 30^0$, $\angle 50^0$, somit

Entweder: Nach dem Kosinussatze:

$$\cos(90 - \delta) = \cos 50^0 \cdot \cos\varepsilon + \sin 50^0 \cdot \sin\varepsilon \cdot \cos 30^0;$$ daraus δ;

sodann nach dem Sinussatze: $\sin 50^0 : \sin(90 - \delta) = \sin(180 - x) : \sin 30^0$;

daraus $\sin x = \dfrac{\sin 50^0}{2\cos\delta}$; hieraus x; sodann $r = 90 + x$.

Oder: Nach dem Kotangentensatze:

$$\operatorname{ctg} 50 \sin\varepsilon = \cos\varepsilon \cos 30 + \sin 30 \operatorname{ctg}(180 - x);$$

hieraus $\operatorname{ctg} x = 2(\cos 30 \cos\varepsilon - \operatorname{ctg} 50 \sin\varepsilon)$; daraus x;

sodann nach dem Sinussatze: $\sin 50 : \sin(90 - \delta) = \sin(180 - x) : \sin 30$;

hieraus $\cos\delta = \dfrac{\sin 50}{2\sin x}$; daraus δ.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Berichtigungen.

Seite 3, 6. Zeile von unten: kann statt können.
„ 9, 5. Zeile von unten, drittes Glied: x statt x^2.
„ 14, 5. Zeile von unten: $\sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos\alpha$ statt $\sin\beta \,.\, \sin\beta \,.\, \cos\alpha$.
„ 15, Nr. 6: XIII, 5 statt XII, 5.
„ 16, 12. Zeile von unten: · statt ?.
„ 25, zweite Figur: a statt z.
„ 28, 1. Zeile: 10,5 statt $10,^5$.
„ 32, in der Formel für J muß die letzte Klammer heißen: $(-m_a + m_b + m_c)$.
„ 33, letzte Zeile: 11 statt 11 x.
„ 36, in der Mitte: 16,7″ statt 167″.
„ 36, 3: $\angle(\lambda - \mu)$ statt $\angle\lambda - \mu$.
„ 36, 4. Zeile von unten: $\frac{1}{2}$ statt $\frac{1}{2}$.
„ 37, in der Mitte: $\frac{a}{2}$ statt $\frac{a}{2}$.
„ 39, Figur: $h = 176{,}4$ statt h 176.
„ 45, mittlere Figur: α_1 statt α_2.
„ 46, Nr. 4: $\sigma - \beta$, $\sigma - \gamma$ statt $s - \beta$, $s - \gamma$.
„ 46, Nr. 5: $\sigma - \alpha$, $\sigma - \beta$ statt $\sigma - a$, $\sigma - b$.
„ 52, Figur: OG muß eine Gerade sein.
„ 54, in der Mitte: Gravitation statt Granitation.
„ 55, Figur: Strecke a_0 muß $>$ Strecke a_φ sein.
„ 58, vorletzte Figur: die Parallele zu w_γ heißt EJ.
„ 58, letzte Figur: $\angle\delta$ bei C muß mit einem etwas größeren Bogen bezeichnet sein.
„ 59, Nr. 6: $\frac{\gamma}{2}$ statt γ.
„ 61, in der Mitte: auszuführen statt anzuführen.
„ 68, 1. Figur: D liegt nur zufällig auf der einen Kreis-Peripherie.
„ 69, 3. Zeile von unten: y^{15} statt x^{15}, und y^5 statt x^5.
„ 70, 2. Zeile von unten: Gliedern statt Glieder.
„ 71, 10. Zeile, 3. Glied in der Klammer: $3ab^2$ statt ab^2.
„ 72, in der Mitte: welcher statt welche; Schiffsrichtung statt Schiffrichtung.
„ 74, 2. Figur: L bezeichnet eine Ecke des Billards.
„ 75, 5. Zeile: $\overset{+}{(-)}$ statt $(\pm)$.
„ 75, letzte Zeile: $y \,.\, \sin\beta$ statt $y \,.\, \sin\alpha$.
„ 109, Figur: Auch das große $\triangle$ muß rechtwinkelig sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ber

Seite 3, 6. Zeile von unten: kann f
„ 9, 5. Zeile von unten, drittes
„ 14, 5. Zeile von unten: $\sin\beta$. s
„ 15, Nr. 6: XIII, 5 statt XII,
„ 16, 12. Zeile von unten: · sta
„ 25, zweite Figur: a statt z.
„ 28, 1. Zeile: 10,5 statt $10,^5$.
„ 32, in der Formel für J muß
„ 33, letzte Zeile: 11 statt 11 x.
„ 36, in der Mitte: 16,7″ statt 1
„ 36, 3: $\angle(\lambda - \mu)$ statt $\angle\lambda - \mu$
„ 36, 4. Zeile von unten: $\frac{1}{2}$ stat
„ 37, in der Mitte: $\frac{a}{2}$ statt $\frac{a}{2}$.
„ 39, Figur: h = 176,4 statt h
„ 45, mittlere Figur: α_1 statt α_2.
„ 46, Nr. 4: $\sigma - \beta$, $\sigma - \gamma$ statt s
„ 46, Nr. 5: $\sigma - \alpha$, $\sigma - \beta$ statt
„ 52, Figur: OG muß eine Gero
„ 54, in der Mitte: Gravitation
„ 55, Figur: Strecke a_0 muß >
„ 58, vorletzte Figur: die Paralle
„ 58, letzte Figur: $\angle\delta$ bei C m
„ 59, Nr. 6: $\frac{\gamma}{2}$ statt γ.
„ 61, in der Mitte: auszuführen
„ 68, 1. Figur: D liegt nur zu
„ 69, 3. Zeile von unten: y^{15} f
„ 70, 2. Zeile von unten: Glied
„ 71, 10. Zeile, 3. Glied in der
„ 72, in der Mitte: welcher statt
„ 74, 2. Figur: L bezeichnet ein
„ 75, 5. Zeile: $\frac{\perp}{(\cdot)}$ statt $(\perp)$.
„ 75, letzte Zeile: y . $\sin\beta$ statt
„ 109, Figur: Auch das große $\angle$

TIFFEN Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf