B. Die parabolischen Kurven auf den Flächen dritter Ordnung.

Herr Prof. Zeuthen hat in dem im vorangehenden Abschnitte mehrfach zitierten Aufsatze gezeigt, daß die parabol. Kurve auf der allgemeinen Fläche 3. Ordnung mit 27 reellen Geraden aus 10 räumlichen Ovalen besteht, welche innerhalb der 10 Dreiecke verlaufen, die den 10 Durchgängen gegenüberliegen, und daß jedes dieser Ovale die 3 Seiten eines Dreiecks in den Asymptotenpunkten berührt. Wir wollen nun mit Hilfe der im vorigen Abschnitte angewandten Abbildung untersuchen, welche gestaltlichen Veränderungen die parabol. Kurven erfahren, wenn wir die Flächen durch Deformation ihrer Umrißkurven, so wie dort geschehen, auseinander hervorgehen lassen. Insbesondere soll auch das Verhalten der parabol. Kurven in den vielfachen Punkten der Flächen untersucht werden.

Die Bilder dieser Flächen und ihrer parabol. Kurven sind auf den Tafeln 5, 6 und 7 in der Weise gezeichnet, daß die Geraden jeder Fläche, welche nicht in reellem Kontakt mit der parabol. Kurve stehen, der Einfachheit wegen fortgelassen sind. Die parabol. Kurven sind nur ihrem ungefähren Verlaufe nach ausgezeichnet und längs der positiv gekrümmten Seite der Fläche hin mit einem roten Streifen versehen, der, so weit die Kurve dem sichtbaren Blatte angehört, dunklere und, soweit sie ins unsichtbare Blatt entfällt, hellere Färbung zeigt. Die hier fehlenden Typen sind leicht aus den vorgeführten zu ergänzen, indem unschwer zu beurteilen ist, wie sich die Gestalt der parabol. Kurve mit der Deformation der Umrißkurve, welche eine Fläche in die benachbarte überführt, ändern wird.

1. Die parabolischen Kurven auf den Flächen ohne und mit reellen konischen Knoten.*)

Wenn eine exakt gezeichnete Umrißkurve einer Fläche 1_1 vorliegt, so brauchen wir nur die Doppelpunkte der Involutionen auf den Seiten der 10 obengenannten Dreiecke, die von den Geraden mit reellen Asymptotenpunkten gebildet werden, zu bestimmen und

*) Herr Prof. Dr. G. Bauer hat diese Kurven bereits zum Gegenstande einer Untersuchung in den Sitzungsberichten der math.-phys. Klasse der k. b. Academie der Wissenschaften (1883) gemacht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wir haben von der Kurve 12. Ordg. in unserem Bilde schon 30 Punkte nebst den Tangenten in diesen Punkten. Wenn wir nun auch dafür gesorgt haben, daß die Umrißkurve mit der Maximalzahl ihrer reellen Wendepunkte behaftet ist, so haben wir in diesen Wendepunkten noch weitere acht Punkte, in welchen die Abbildung der parabol. Kurve die Umrißkurve berührt und vom einen Blatt in das andere übertritt. Dieser Zusammenhang der Wendepunkte der Umrißkurve mit dem Bilde der parabol. Kurve leuchtet nach folgender Ueberlegung ein:

Die Umrißkurve ist die Projektion der Raumkurve 6. Ordg., in welcher der Tangentialkegel aus dem Projektionszentrum die Fläche berührt, und es ist nun klar, daß den Teilen der Raumkurve, in deren unmittelbaren Nähe die Fläche positive Krümmung zeigt, in der Umrißkurve nur solche Teile entsprechen, in welchen die Kurve dem unbedeckten Felde die konvexe Seite zuwendet, und daß den Teilen der R_6, längs welcher die Fläche negativ gekrümmt ist, in der Umrißkurve nur solche Teile entsprechen können, längs welchen diese dem unbedeckten Feld die konkave Seite zukehrt.

Daraus erhellt, daß den parabolisch gekrümmten Punkten auf der R_6 (den Schnittpunkten derselben mit der parabol. Kurve) die Wendepunkte der Umrißkurve entsprechen müssen.

Die Wahrheit des Gesagten leuchtet übrigens ohne weiters ein, wenn wir uns einen Punkt, in welchem parabol. Krümmung vorhanden ist, mit seiner Tangentialebene vergegenwärtigen.

Bekanntlich treten die Asymptotenkurven im allgemeinen in Spitzen an die parabol. Kurve heran. Die Tangentialebene, deren Schnittkurve ja im Berührpunkt die 2 Elemente die Asymptotenkurven in diesem Punkt enthält, schneidet in einem parabol. Punkt nach einer Kurve, welche im Berührpunkt eine Spitze zeigt. In nächster Nähe eines solchen Punktes befindet sich die Fläche zwischen den Ästen der Schnittkurve ganz auf der einen Seite der Tangentialebene, die übrige Fläche ganz auf der andern Seite derselben, und es ist nun klar, daß für den Tangentialkegel aus irgend einem Punkte der Tangentialebene gerade diese Ebene eine stationäre sein muß (mit Ausnahme der Punkte auf der Tangente im Rückkehrpunkt).

Da wir andrerseits wissen, daß die Kurve 4. Ordg. ohne vielfache Punkte höchstens 8 reelle Wendepunkte besitzen kann, so können wir daraus schließen, daß die R_6 die parabolische Kurve höchstens in 8 reellen Punkten überschreiten kann.

Die Fig. 1 auf Taf. 5 zeigt das Bild einer Fläche mit 27 reellen Geraden nebst ihrer parabol. Kurve, welche nach den erwähnten Gesichtspunkten eingezeichnet ist.

Entsteht jetzt ein konischer Knoten, so rücken die 12 Berührpunkte der 6 Ovale, welche 6 Gerade mit reellen Asymptotenpunkten berühren, in den Knoten hinein. Diese 6 Geraden gehören der Doppelsechs an, welche durch jene Öffnung läuft, durch deren Zusammenziehung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der C_2 entsteht. Ziehen wir den Querschnitt 245 (Fig. 2, Taf. 1) zusammen, so vereinigen sich die Ovale 1, 2, 3, 4, 5, 6 zu einem paren Kurvenzug mit sechsfachem Punkt im Knoten. Indem so die Fig. 2 aus Fig. 1 durch allmähliche Deformation entsteht, bemerken wir, daß zunächst die 3 Ovale 1, 2, 3 durch Punkte (Ovalpunkte vom Typus α) hindurchgehen und sich dann mit den eingeschlossenen, positiv gekrümmten Flächenteilen nach der andern Seite ihrer Tritangentialebene durchbiegen.

Die 6 Äste der parabol. Kurve im Knoten berühren die 6 Knotenstrahlen zweipunktig.

Dies erhellt sofort, wenn wir beachten, daß jeder Kurvenzweig in der Nähe des Knotens auf derselben Seite seiner Tangente verläuft, und wenn wir die Schnittpunkte einer durch den Knoten gehenden Dreiecksebene mit der parabol. Kurve vor und nach der Entstehung des C_2 abzählen. Eine derartige Ebene enthält außer den beiden Knotengeraden noch eine unäre Gerade, auf welcher 2 Berührpunkte mit der parabol. Kurve liegen; es schneidet also diese Dreiecksebene die parabol. Kurve zunächst in $6 + 2 \cdot 2 = 10$ Punkten, so daß für jede der gleichberechtigten Knotengeraden nur noch ein dem sechsfachen Punkt konsekutiver Punkt übrig bleibt.

Es seien $U^{(2)}$, $V^{(3)}$ homogene Funktionen in x_1, x_2, x_3 vom bezw. 2. und 3. Grad; dann läßt sich die Gleichung einer Fläche mit einem C_2 in folgender Form schreiben:

$$1) \qquad F^{(3)} \equiv x_4\, U^{(2)} + V^{(3)} = 0\,.$$

Die zugehörige Hesse'sche Fläche wird dementsprechend durch folgende Gleichung dargestellt:

$$2) \quad H \equiv -16\, x_4^2 .\, \Delta .\, U^{(2)} + x_4 (48\, \Delta .\, V^{(3)} - 8\, U^{(2)}\, U^{(1)}) + 24\, U^{(1)}\, V^{(3)} - 4\, U^{(2)}\, W^{(2)} - 16\, W^{(4)} = 0\,,$$

worin $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, wenn $U^{(2)} \equiv \sum\limits_{i=1,\,k=1}^{i=3,\,k=3} a_{ik}\, x_i\, x_k$

und

$$U^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$W^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$W^{(4)} = \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} V_1 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} V_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} V_3,$$

worin $V_i = \dfrac{\partial V^{(3)}}{\partial x_i}$ und $V_{ik} = \dfrac{\partial^2 V^{(3)}}{\partial x_i\, \partial x_k}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Hesse'sche Fläche einer Fläche 3. Ordg. besitzt also im konischen Knoten der Fläche auch einen konischen Knoten und sie hat dort denselben Tangentialkegel wie die Fläche 3. Ordg.

Daß die parabol. Kurve im C_2 einen sechsfachen Punkt besitzt, ist ebenfalls aus den Gleichungen ersichtlich. Durch Elimination von x_4 aus (1) und (2) ergibt sich nämlich die Gleichung des Kegels, welcher die parabol. Kurve aus dem 6fachen Punkte projiziert:

$$3) \quad K \equiv -16 \Delta V^{(3)2} + 2 U^{(2)} U^{(1)} V^{(3)} + U^{(2)} (6 U^{(1)} V^{(3)} - U^{(2)} W^{(2)} - 4 W^{(4)}) = 0,$$

welcher, wie wir sehen, vom 6. Grade ist. Aus den beiden Gleichungen (1) und (2) geht auch hervor, daß die 6 Knotenstrahlen

$$\left.\begin{aligned} U^{(2)} &= 0 \\ V^{(3)} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

die 6 Zweige der parabolischen Kurve im Knoten berühren.

Die parabolische Kurve hat im C_2 einen sechsfachen Punkt; aber da jeder Ast mit einem Knotenstrahl 2 konsekutive Punkte gemein hat, so können nur so viele Zweige der parabol. Kurve reell sein, als reelle Knotenstrahlen vorhanden sind.

Die Anordnung der positiv und negativ gekrümmten Flächenteile ist aus den Figuren ersichtlich. Wenn die 6 Knotenstrahlen reell sind, so teilen sie die Fläche in der Nähe des Knotens beiderseits in 6 Teile und diese zeigen abwechselnd positive und negative Krümmung — ersteres nur soweit die Schleifen reichen. (Vgl. Fig. 40, Taf. 4.)

Die positiv gekrümmten Teile in den Schleifen befinden sich offenbar innerhalb des Knotenkegels und kehren ihre konvexe Seite nach außen.

Wenn die Knotenstrahlen etwa gleiche Winkel mit einander bilden und auf einem Kreiskegel liegen, so erscheint die Fläche in nächster Nähe des Knotens auf der einen Seite desselben als das Spiegelbild der andern in bezug auf die im Knoten zur Kegelachse senkrechte Ebene, wobei sich die Schleifen 1,4; 2,5; 3,6 entsprechen. Die Fläche im Scheitelwinkel zu einer Schleife ist durchaus negativ gekrümmt.

Nachdem die Richtung der Krümmungsradien an den positiv gekrümmten Stellen in der Knotennähe erkannt ist, können wir uns leicht vorstellen, wie die positiv gekrümmten Teile in Fig. 1 gerichtet sind.

Die Fläche wendet innerhalb der Ovale 1, 5, 6, 7, 8, 10 dem Auge die konvexe Seite, in den übrigen 2, 3, 4, 9 die konkave Seite zu.

Bei 10 kommt es darauf an, ob das Oval erst noch durch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

einen isolierten Punkt hindurchgehen muß, bevor es in eine Schleife bei einem C_2 übergehen kann, oder ob dieser Durchgang schon erfolgt ist. Im ersteren Falle wendet die Fläche in diesem Oval dem Auge die konkave, im letzteren die konvexe Seite zu.

Bringen wir nun an dem konischen Knoten der Fläche 1_{II} (Fig. 2) den Prozeß des Trennens an, so fließen die drei Schleifen 1, 2, 3 einerseits und 4, 5, 6 andrerseits in je ein Oval zusammen, indem die benachbarten Äste auf beiden Seiten des C_2 die zwischenliegenden, negativ gekrümmten Partien zurückdrängen, so daß die parabol. Kurve auf der Fläche 2_I (Fig. 3) nur noch die 6 Ovale (123), (456), 7, 8, 9, 10 aufweist, von welchen jedes die 3 Seiten eines Dreiecks berührt. Die beiden ersten sind aber jetzt zweien Dreiecken in 2 von den 5 Tritang.-Ebenen einbeschrieben, welche bei der allg. Fläche die Durchgänge begrenzten (A). Diese 2 Dreiecke schloßen in unserem Falle die Wand der Öffnung 245 ab.

Vergleichen wir die Fig. 1, 2, 3, so bemerken wir, daß die Auflösung eines C_2 durch Verbindung ein Zurückdrängen der positiv gekrümmten Partien und die Auflösung durch Trennung ein Zurückdrängen der negativ gekrümmten Flächenteile in der Nähe der Auflösungsstelle zur Folge hat.

Lassen wir jetzt rechter Hand (Fig. 4) einen neuen C_2 entstehen, so schicken die Ovale (456), 8, 9, 10 je zwei Berührpunkte mit den Geraden, welche noch durch jenen Querschnitt liefen, in den C_2 hinein, und es entsteht die Fläche 2_{II}.

Die parabol. Kurve besteht bei dieser Fläche aus einem paren Zuge mit 6fachem Punkt, der aber nur 4 reelle Äste besitzt, welche 4 Schleifen bilden, und aus 2 Ovalen.

Trennen wir an diesem Knoten, so daß die Fläche 3_I erscheint, so fließen die Äste beiderseits des C_2 in der Weise zusammen, wie Fig. 5 zeigt. Die parabol. Kurve besteht hier nur mehr aus 4 Ovalen, wovon zwei, 7 und (123), die 3 Seiten von 2 Dreiecken berühren, während die beiden andern, (8 10) und (4569), nur mehr je 2 reelle Gerade berühren.

Entsteht nun linker Hand noch ein Knoten C_2, so daß die Fläche 3_{II} (Fig. 6) zum Vorschein kommt, so rücken noch je 2 Berührpunkte der beiden Ovale 7 und (4569) in den Knoten, und die parabol. Kurve besteht hier aus einem Oval, welches 3 Gerade berührt (123), aus einem, welches 2 berührt (8 10) und aus einem paren Kurvenzug mit sechsfachem Punkt, aber mit nur 2 reellen Ästen, wobei die eine Schleife noch eine dritte, unäre Gerade tangiert, die andere nicht. Bringen wir auch noch an diesem Knoten den Trennungsprozeß an, so entsteht die Fläche 4_I (Fig. 7), auf welcher die parabol. Kurve nur aus 4 Ovalen besteht; von diesen berührt das eine (123) drei Gerade, das andere (8 10) zwei Gerade, das dritte (7) eine Gerade und das vierte (4569) gar keine reelle Gerade mehr.

Rufen wir schließlich noch den letzten konischen Knoten hervor,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

indem wir den Querschnitt 135 zusammenziehen, so verschwindet im allgemeinen nur das Oval (4569), indem es sich auf einen Punkt in den Knoten hinein zusammenzieht, wohin seine Berührpunkte — die Wendepunkte der Umrißkurve — rücken. Die parabol. Kurve auf einer Fläche 4_{II} hat also im C_2, der ein sechsfacher Punkt ist, gar keinen reellen Ast mehr und besteht in ihrem reellen Teile nur aus den 3 Ovalen (123), (8 10) und 7, wie Fig. 7 erkennen läßt.

Trennen wir endlich an diesem letzten C_2, so daß die Fläche 5_I erscheint, so muß sich das Oval (4569), das auf einen Punkt zusammengeschrumpft war, ersichtlich in der Weise entwickeln, daß es auf den unparen Teil der Fläche übertritt. Denn die 2 reellen Wendepunkte, welche der Doppelpunkt der Umrißkurve vorhin absorbiert hatte, sind nun wieder reell und zwar befinden sie sich jetzt in dem äußern Zweig der Gürtelkurve, und Wendepunkte in der Umrißkurve entsprechen ja parabolischen Punkten der Fläche. Der rundliche Teil der Fläche, welcher sich in dem innern Oval der Gürtelkurve abbildet, muß offenbar durchaus positiv gekrümmt sein.

Verschwindet bei 5_I der isolierte pare Teil der Fläche, so daß die Fläche 5_{II} mit dem isolierten Knoten zum Vorschein kommt, so wird sich im allgemeinen keine wesentliche Veränderung des reellen Teils der parabol. Kurve ergeben.

Das Gleiche wird der Fall sein, wenn bei 4_{II} der pare Flächenteil zusammenschrumpft, so daß eine Fläche mit einem biplanaren Knoten B_3 mit konjug. imaginärer Ebenen entsteht (4_{III}).

Bei allen diesen Flächen (I u. II) ist die parabol. Kurve eine komplete Kurve 12. Ordg. Bei den Flächen mit mehr Knoten wird die parabol. Kurve degenerieren.

Da die Hesse'sche Fläche im konischen Knoten auch einen konischen Knoten mit demselben Tangentialkegel wie die ursprüngliche Fläche aufweist, so ist klar, daß sich beide Flächen längs einer Geraden durch 2 C_2 berühren, da sich ja die Knotenkegel längs der gemeinschaftlichen Erzeugenden berühren. Die Gerade durch die beiden C_2 scheidet sich also aus der parabol. Kurve ab und muß als Glied derselben zweifach gezählt werden.

Verfolgen wir dies in unserem Bilde, indem wir in Fig. 2 noch einen 2. Knoten entstehen lassen, so daß die Fläche 1_{IV} erzeugt wird (Fig. 8), so bemerken wir, daß die Gerade durch die 2 C_2 in der That 2 Äste der parabol. Kurve absorbiert. Sie trennt deshalb allenthalben nur gleichartig gekrümmte Flächengebiete.

Der übrige Teil der parabol. Kurve auf den Flächen mit 2 konischen Knoten ist eine Partialkurve von der 10. Ordnung, welche in jedem der beiden Knoten einen vierfachen Punkt besitzt.

Auf der Fläche 1_{IV} (Fig. 8) besteht die parabol. Kurve aus einem paren Zug mit 4 reellen Zweigen in jedem Knoten, welche auf der Fläche 6 schleifenartige (1, 2, 6, 7, 9, 10) und 2 lappenartige (4, 5), an den Knotengeraden hängende, positiv gekrümmte

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Flächenpartien einschließen, und einem Oval (8). Das Oval 3 der ursprünglichen Fläche steckt in der Geraden, welche durch die beiden Knoten läuft.

Fig. 9 zeigt das Bild einer Fläche 2_{IV}, wie es aus Fig. 4 dadurch hervorgeht, daß dort linker Hand ein zweiter C_2 entsteht.

Die parabol. Kurve auf dieser Fläche zeigt einen paren Zug mit 2 reellen Ästen in jedem Knoten, welcher 2 schleifenartige Teile (7, 8) und 2 lappenartige Partien [(456), 9] von positiver Krümmung umschließt, und einen Oval (123), welches einem Dreieck der 3 unären Geraden einbeschrieben ist. Hier ist das Oval 10 in der Knotengeraden zusammengedrückt.

Wie die parabol. Kurve auf der Fläche 3_{IV} beschaffen ist, ist aus Fig. 6 ersichtlich. Sobald hier durch Zuziehung des Querschnitts 135 noch ein 2. Knoten entsteht, zieht sich der aus den 2 Schleifen bestehende Teil in die Knotengerade hinein, so daß der reelle Teil der parabol. Kurve bei 3_{IV} außer der Knotengeraden nur aus 2 Ovalen besteht, von denen das eine (123) drei, das andere (8 10) zwei unäre Gerade berührt. Der pare Teil zwischen den 2 C_2 ist augenscheinlich durchaus von positiver Krümmung.

Auf den Flächen mit 3 konischen Knoten ist die parabolische Kurve eine Partialkurve 6. Ordnung, welche in den 3 Knoten Doppelpunkte aufweist. Der übrige Teil besteht aus den 3 je zweifach zu zählenden Geraden des Knotenpunktdreiecks.

Fig. 10, welche aus Fig. 8 dadurch hervorgeht, daß dort rechter Hand noch ein Knoten C_2 entsteht, zeigt das Bild einer Fläche 1_{VIII} nebst der parabol. Kurve auf derselben. Diese Kurve 6. Ordg. besteht hier aus einem paren Zuge, welcher durch jeden der 3 Knoten zwei reelle Äste schickt und so die drei schleifenartigen Teile 1, 7, 8 und die drei an den Knotengeraden zwischen den Knoten hängenden, positiv gekrümmten Lappen 5, 6, 9 umschließt. Das Dreieck 4 zwischen den 3 Knoten ist, wie ja aus dem Übergang aus Fig. 8 hervorgeht, durchaus positiv gekrümmt. Die Ovale 2, 3, 10 stecken hier in den 3 Knotengeraden, außerdem sind dorthin noch je 2 Äste von 4, 5; 4, 9; 4, 6 gerückt.

Erzeugen wir aus Fig. 9 das Bild einer Fläche 2_{VIII}, indem wir noch einen C_2 hervorrufen, so verschwindet dort der Kurvenzug durch die beiden C_2 in den 2 neuen Knotengeraden und die parabol. Kurve weist nur noch das eine Oval (123) auf.

Die parabolischen Kurven auf den inversen Flächen.

Die Fig. 11 stellt eine Fläche 2_I mit ihrer parabol. Kurve dar und ist nur deswegen in dieser Gestalt nochmal gegeben, um den Übergang zu den folgenden Flächen anschaulicher zu machen. Lassen wir aus dieser die inverse Fläche $1'_{VIII}$ mit 3 Knoten dadurch hervorgehen, daß wir noch 2 Knoten in der Weise entstehen lassen,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

daß nachher 3 Querschnitte, die an ein und demselben vierten hängen, zusammengezogen erscheinen, so entsteht ein Bild einer solchen Fläche $1'_{VIII}$, wie es Fig. 12 darstellt.

Die parabolische Kurve ist hier ebenfalls eine Partialkurve 6. Ordnung, welche in jedem Knoten Doppelpunkte aufweist und auch durch jeden derselben 2 reelle Äste schickt. Im übrigen aber ist ihr Typus ein wesentlich anderer als bei der entsprechenden Fläche 1_{VIII} (Fig. 10). Außer dem paren Zug mit den 3 Doppelpunkten in den C_2 ist hier noch ein einzelnes Oval (10) vorhanden, welches dort fehlt.

Ferner, der pare Kurvenzug begrenzt hier 6 positiv gekrümmte lappenartige Partien, welche zwischen den Knotenpunkten nach beiden Seiten an den Knotengeraden hängen, wie Fig. 12 sehr deutlich erkennen läßt, während dort nur 3 Lappen, außerdem aber auch 3 Schleifen vorhanden sind. Das durchaus positiv gekrümmte Dreieck der 3 Knotengeraden, das die Fläche 1_{VIII} besitzt, fehlt hier.

Die übrigen inversen Flächen mit konischen Knoten nebst ihren parabol. Kurven sind auf Taf. 7 in den Fig. 1—6 mit den die Übergänge herstellenden Flächen dargestellt.

Fig. 1 zeigt eine Fläche vom Typus 2_I, wie sie aus Fig. 11 der Taf. 5 nach Auflösung des Knotens durch Trennung hervorgeht. Die parabol. Kurve besteht wieder aus den 6 Dreiecken eingeschriebenen 6 Ovalen (123), (456), 7, 8, 9, 10.

Entsteht rechter Hand ein Knoten C_2 (Fig. 2), so erhalten wir die bereits mit ihrer parobol. Kurve bekannte Fläche 2_{II} (Fig. 4, Taf. 5). Rufen wir linker Hand noch einen 2. Knoten hervor, so haben wir die inverse Fläche $2'_{IV}$ (Fig. 3). Die parabol. Kurve besteht aus der zweifach zu zählenden Knotengeraden und einer Partialkurve 10. Ordg., welche in den beiden konischen Knoten vierfache Punkte mit je zwei reellen Ästen aufweist. Der Typus dieser Kurve stimmt ersichtlich ganz mit dem auf der entsprechenden Fläche 2_{IV} (Fig. 9, Taf. 5) überein. Wir haben hier wie dort 2 Schleifen, 2 Lappen und 1 Oval. Jenes Oval ist aber einem Dreieck A *) einbeschrieben, während dieses einem Dreieck B einbeschrieben ist.

Bringen wir in Fig. 2 der Taf. 7 am C_2 den Trennungsprozeß an, so entsteht eine Fläche 3_I (Fig. 4). Vgl. Fig. 5 auf Taf. 5.

Ein hier linker Hand entstehender Knoten führt zu der inversen Fläche $3'_{II}$ (Fig. 5). Die parabol. Kurve ist jetzt wieder eine komplete Kurve 12. Ordg. Sie hat im C_2 einen 6fachen Punkt mit 2 reellen Ästen. Der pare Zug durch den Knoten besteht aus 2 Schleifen, von welchen die eine (123) noch eine unäre Gerade

*) pag. 14, I. Teil.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

berührt, die andere (78) nicht. Das eine Oval (10) ist einem Dreieck eingeschrieben, das andere (4569) berührt nur 2 Gerade, ganz wie bei der entsprechenden Fläche 3_{II} (Vgl. Fig. 6 auf Taf. 5); nur ist das eine Oval (10) bei $3'_{II}$ einem Dreieck B einbeschrieben, während das entsprechende Oval (123) bei 3_{II} einem Dreieck A einbeschrieben ist.

Trennen wir endlich auch noch an diesem Knoten, so entspringt die inverse Fläche $4'_{II}$ (Fig. 6). Die parabol. Kurve besteht hier in ihrem reellen Teile aus 4 Ovalen, die sich den reellen Geraden der Fläche gegenüber gerade so verhalten, wie die 4 Ovale auf 4_{I} (Fig. 7, Taf. 5). Das eine (10) berührt 3 Gerade, das andre (4569) berührt 2 Gerade, das dritte (123) berührt eine und das vierte (78) berührt gar keine Gerade mehr.

Wir sehen also, daß sich nur auf den Flächen 1_{VIII} und $1'_{VIII}$ ein wesentlicher Unterschied im Typus der parabol. Kurven geltend macht, daß aber auf den übrigen inversen Flächen die parabol. Kurven in ihrer Gestalt sowohl wie auch in ihrem Verhalten den reellen Geraden der Flächen gegenüber ganz mit denen auf den entsprechenden anderen Flächen übereinstimmen.

Bei einer Fläche mit 4 C_2 degeneriert die parabol. Kurve in die 6 je zweifach zählenden Kanten des Knotenpunkt-Tetraeders. Ein Blick auf Fig. 10 der Taf. 5 läßt noch erkennen, daß nach Entstehung eines 4. Knotens der pare, tetraedrale Teil durchaus positive Krümmung zeigt, während der unpare Teil allenthalben negativ gekrümmt ist.

2. Die parabolischen Kurven auf den Flächen mit einem biplanaren Knoten B_3.

In Fig. 11 auf Taf. 5 ist nicht eine Doppeltangente I. Spezies als Schnittlinie A_1 gewählt worden, wie bei Fig. 1 der Taf. 1, wodurch dort eine gewisse Symmetrie in der Anordnung der Geraden und Querschnitte erzielt wurde, sondern absichtlich eine Doppeltangente II. Spezies. Infolge dessen wird natürlich das Arrangement der Geraden und teilweise auch der 10 Querschnitte der allgemeinen Fläche ein anderes. Jedoch die Querschnitte: das Oval 135, die 3 Querschnitte, welche an diesem hängen, sowie das Oval 146 bleiben auch hier im Endlichen, und um deren Deformation wird es sich bei dieser Flächengruppe ausschließlich handeln. Diese Anordnung wurde deshalb getroffen, um in den folgenden Figuren eine anschaulichere Gruppierung der positiv gekrümmten Flächenpartien um den B_3 zu erzielen.

Ziehen wir also in Fig. 11, wo bereits der Querschnitt 156 zusammengezogen ist, auch noch den Querschnitt 146 zu, so daß eine Fläche 1_{III} mit einem B_3 erscheint, so bemerken wir, daß auch noch die Ovale 8 und 10 mit dem aus sechs Schleifen bestehenden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Teil der parabol. Kurve in Verbindung treten, indem je 2 Berührpunkte dieser Ovale mit den Geraden in den B_3 rücken.

Die parabol. Kurve erhält infolge dessen im biplanaren Knoten B_3 einen achtfachen Punkt (Fig. 13). Gleichzeitig aber bemerken wir noch, daß die Schleifen 1, 2, 4 und 5 jenes Kurvenzuges zusammenschrumpfen, wodurch natürlich an der Höhe die Ordnung des vielfachen Punktes nichts geändert wird, da sich ja ersichtlich nichts abscheidet.

Die parabolische Kurve schickt also nur vier reelle Zweige durch den B_3, welche einen aus vier Schleifen bestehenden Kurvenzug bilden. Die Ovale 7 und 9 bleiben bei dieser Deformation noch erhalten.

Daß die 4 reellen Äste der parabol. Kurve im B_3 die Knotenstrahlen nicht mehr berühren können, davon überzeugt sofort ein Blick auf unser Bild.

Betrachten wir die 9 Dreiecksebenen durch den Knoten, welche je 2 Knotenstrahlen und eine unäre Gerade enthalten, so hat jede derselben $8 + 2 . 2 = 12$ Punkte mit der parabol. Kurve gemein (die $2 . 2$ Punkte sind die 2 Berührpunkte der unären Geraden mit der parabol. Kurve), so daß für einen konsekutiven Punkt auf einem Knotenstrahl also nichts mehr übrig bleibt. Sobald also ein C_2 in einen B_3 übergeht, lösen sich sämtliche Berührungen der parabolischen Kurve mit den Knotengeraden auf.

Die 4 reellen Äste der parabol. Kurve im Knoten werden aber die Hauptebenen des Knotens berühren*); und da wir ferner bemerken, daß im letzten Moment die unendlich kleinen Schleifen 1 und 5 in die Hauptebene (a′, a″, a‴), 2 und 4 in die Hauptebene (b′, b″, b‴) fallen, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Die parabolische Kurve auf einer Fläche 3. Ordg. mit einem biplan. Knoten B_3 ist eine komplete Kurve 12. Ordg., welche im Knoten einen 8fachen Punkt mit 4 reellen Ästen besitzt, so daß in jeder Hauptebene 4 Tangenten an diese 4 Äste laufen, von welchen jedoch nur je 2 reell sind.

Wir werden sehen, daß, wenn wir die Fläche nach einander durch 2 weitere konische Knoten hindurch sich ändern lassen, die 4 reellen Äste der parabol. Kurve im B_3 immer erhalten bleiben.

Die reellen Tangenten an die parabol. Kurve im Knoten sind aber in keinem Falle identisch mit den 4 unter sich gleichwertigen und den beiden anderen Knotenstrahlen a″, b″ gegenüber ausgezeichneten Knotenstrahlen a′, a‴ b′, b‴.

Die Auszeichnung der 4 letzterwähnten Geraden gegenüber den beiden ersteren beruht auch in der Lagerung der Zweige der parabol. Kurven und der von ihnen begrenzten, positiv gekrümmten

*) Denn wir erkennen leicht, daß jeder reelle Ast in der Nähe des Knotens stets auf derselben Seite einer Hauptebene verläuft. (Vgl. Fig. 9 auf Taf. 7.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Partien in bezug auf diese Geraden. Ein Blick auf Fig. 13 läßt nämlich erkennen, daß die 4 Schleifen um den B_3 in den Gebieten zwischen den Knotengeraden a', a''', b', b''' verlaufen, wo diese nicht durch die beiden andern a'', b'' getrennt werden. Um von einem Punkt der Geraden a'', b'' aus in eines der positiv gekrümmten Flächengebiete zu gelangen, welche die vier Schleifen einschließen, müssen wir stets erst eine der vier andern Knotengeraden überschreiten.

Wir wollen die gefundenen Resultate auch auf dem Wege der Rechnung bestätigen:

Beim Auftreten des biplanaren Knotens zerfällt der Knotenkegel $U^{(2)} = 0$ in ein Ebenenpaar $V^{(1)} W^{(1)} = 0$, und es verschwindet außerdem in Gleichung (1) die Determinante Δ, so daß sich die Gleichung der Fläche in folgender Form darstellt:

$$4)\quad F^{(3)} \equiv x_4 \,.\, V^{(1)} W^{(1)} + V^{(3)} = 0,$$

und die der zugehörigen Hesse'schen Fläche:

$$5)\quad H \equiv -2\, U^{(1)} V^{(1)} W^{(1)} x_4 + 6\, V^{(3)} U^{(1)} - V^{(1)} W^{(1)} W^{(2)} - 4\, W^{(4)} = 0.$$

Die Gleichung (3) des Kegels, welcher die parabol. Kurve aus den biplan. Knoten projiziert, reduziert sich, da sich jetzt das Hauptebenenpaar abscheidet, auf den 4. Grad:

$$6)\quad K \equiv 8\, U^{(1)} V^{(3)} - V^{(1)} W^{(1)} W^{(2)} - 4\, W^{(4)} = 0,$$

woraus der 8fache Punkt der parabol. Kurve im B_3 erkannt wird.

Die Hesse'sche Fläche hat, wie Gleichung (5) zeigt, im biplan. Knoten B_3 einen triplanaren Knoten, und 2 der 3 Hauptebenen desselben sind die beiden Hauptebenen des biplan. Knotens B_3 der Fläche 3. Ordg.

Um die Tangenten im vielfachen Punkt an die parabol. Kurve zu untersuchen, bringen wir vorteilhaft noch folgende Vereinfachungen an:

Wir wählen die Hauptebenen $V^{(1)} = 0$, $W^{(1)} = 0$ als Koordinatenebenen x_1, x_2 und die Ebene, welche die 2 Knotenstrahlen enthält, die bei unseren Deformationen stets reell bleiben, als Ebene x_3; dann schreiben sich unsere Gleichungen folgendermaßen:

$$7)\quad F^{(3)} \equiv 2\, x_1\, x_2\, x_4 + V^{(3)} = 0, \text{ wobei}$$

$$V^{(3)} \equiv c_{333}\, x_3^3 + 3 \left\{ \begin{array}{l} c_{112}\, x_1^2\, x_2 + c_{122}\, x_1\, x_2^2 \\ + c_{113}\, x_1^2\, x_3 + c_{133}\, x_1\, x^2_3 \\ + c_{223}\, x_2^2\, x_3 + c_{233}\, x_2\, x^2_3 \end{array} \right\} + 6\, x_1\, x_2\, x_3$$

$$8)\quad H \equiv 2\, x_1\, x_2\, x_4\, U^{(1)} + 3\, U^{(1)} V^{(3)} - x_1\, x_2\, W^{(2)} - 2\, W^{(4)} = 0.$$

$$9)\quad K \equiv 4\, U^{(1)} V^{(3)} - x_1\, x_2\, W^{(2)} - 2\, W^{(4)} = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Knotengeraden in den Hauptebenen sind jetzt durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$10)\quad \begin{cases} x_1 = 0, & x_3 (3\, c_{223}\, x_2^2 + 3\, c_{233}\, x_2\, x_3 + c_{333}\, x_3^2) = 0\,; \\ x_2 = 0, & x_3 (3\, c_{113}\, x_1^2 + 3\, c_{133}\, x_1\, x_3 + c_{333}\, x_3^2) = 0\,. \end{cases}$$

Die Tangenten an die parabol. Kurve im Knoten bestimmen sich als Schnitt des Hauptebenenpaars mit dem Kegel K aus den folgenden Gleichungen:

$$11)\quad x_1\, x_2 = 0 \quad \text{und} \quad 2\, U^{(1)}\, V^{(3)} - W^{(4)} = 0\,.$$

Für die 4 Tangenten in der Ebene $x_1 = 0$ ergibt sich hiernach folgende Gleichung 4. Grades:

$$12)\quad 3\, c^2_{223}\, x_2^4 - 6\, c_{223}\, c_{333}\, x_2^2\, x_3^2 - 4\, c_{233}\, c_{333}\, x_2\, x_3^3 - c^2_{333}\, x_3^4 = 0\,.$$

Bilden wir zunächst, um die Wurzeln dieser Gleichung zu untersuchen, die Invarianten i und j für die links vom Gleichheitszeichen stehende biquadratische Form,*) so finden wir:

$$i = 0 \quad \text{und} \quad j = -2\, c^2_{223}\, c^2_{333}\, (9\, c^2_{233} - 12\, c_{223}\, c_{333}),$$

und die Diskriminante der Gleichung (12)

$$R = -\frac{6}{27}\, j^2$$

ist also stets negativ, so lange $j \gtrless 0$.

Wenn wir die Indizes 2 durch 1 ersetzen, so erhalten wir die entsprechenden Gleichungen für die 4 Tangenten an die parabol. Kurve in der Ebene $x_2 = 0$. Wir können demnach folgenden Satz aussprechen:

> Die vier Tangenten in jeder Hauptebene eines biplanaren Knotens B_3 einer Fläche 3. Ordg., welche keine weitern Singularitäten besitzt, haben aequianharmonische Lage; immer sind zwei davon reell und die beiden andern konjugiert imaginär.

Die parabol. Kurve hat also in einem B_3 einen 8fachen Punkt mit stets 4 reellen Ästen.

Die Klammerfaktoren der beiden Invarianten j stimmen ersichtlich mit den Diskriminanten der Gleichungen (10), welche die Knotenstrahlen festlegen, überein und jene Diskriminanten geben an, ob die beiden andern Knotenstrahlen reell, konsekutiv oder

*) Clebsch, „Theorie der binären Formen." — Nöther in Faa de Bruno „Theorie der binären Formen," übersetzt von Walther.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

imaginär sind, oder, was dasselbe ist, ob die beiden C_2, die noch hinzutreten können, vorhanden oder nach der einen oder andern Art aufgelöst sind.

Bei der Fläche 1_{III} (Fig. 13) sind beide j negativ. Die 4 reellen Äste der parabol. Kurve bilden 4 Schleifen, die im Knoten zusammenstoßen und sich auf die 4 Winkelräume der beiden Hauptebenen verteilen. Die Gruppierung der positiv gekrümmten Flächenteile, welche diese Schleifen einschließen, um den B_3 und in bezug auf die Knotenstrahlen ist ohne weiters aus unserem Bilde ablesbar. Die beiden Schleifen 3 und 6 liegen in 2 Scheitelwinkeln der Hauptebenen und die beiden andern Schleifen 8 und 10 verlaufen in den beiden andern Scheitelwinkeln derselben, so daß sich die von ihnen eingeschlossenen, positiv gekrümmten Flächenteile jedesmal die konvexen Seiten zukehren. Das Flächenstück in der Schleife 10 wendet dem Auge die konkave Seite zu; denn in Fig. 11 wendet das Oval 10 dem Auge ersichtlich die konvexe Seite zu, und bei dem Übergang von Fig. 11 zu Fig. 13 geht das Oval 10 einmal durch einen isolierten Punkt (Ovalpunkt) hindurch, wobei es sich nach der andern Seite durchbiegt. Der Flächenteil 8 wendet unten dem Auge die konkave Seite zu (man denke sich nur rechts oder links einen C_2 erzeugt, worauf dies sofort einleuchtet), oben bei der Schleife 10, nachdem er durch das Unendliche gegangen, natürlich die konvexe Seite. Wenn wir etwa der Fläche in der Nähe des Knotens eine regelmäßige Gestalt derart erteilt denken, daß die Hauptebenen aufeinander senkrecht stehen und die 4 Schleifen ungefähr kongruent ausfallen, so ist die Fläche in der Knotennähe in bezug auf die Halbierungsebenen der Winkel der Hauptebenen symmetrisch, und die beiden Schleifen 8 und 10 erscheinen als das Spiegelbild der um 90° um die Knotenachse gedrehten andern Schleifen 3 und 6 in bezug auf die senkrechte Ebene zur Knotenachse im B_3. Dadurch ist ungefähr die Gestalt der Fläche um den B_3 charakterisiert, wie sie aus den Figuren erkenntlich und in perspektivischer Ansicht auf Taf. 7 in Fig. 9 noch besonders dargestellt ist.

Außer dem vierschleifigen Kurvenzug im B_3 existieren auf der Fläche 1_{III} noch 2 Ovale, 7 und 9.

Erzeugen wir durch Zuziehen des Querschnitts 123 einen konischen Knoten, so werden die beiden isolierten Ovale 7 und 9 auch noch in Mitleidenschaft gezogen, indem je 2 ihrer Berührpunkte mit den Geraden in den C_2 hineinrücken, so daß diese Ovale sich dem übrigen Teil der parabol. Kurve als Schleifen anschließen, wie Fig. 14 zur Darstellung bringt. Da aber auch die 2 Berührpunkte der Schleifen 6 und 8 mit unären Geraden in den C_2 hineinrücken, so bemerken wir, daß ein Ast des Kurvenzuges durch den B_3 in die Gerade, welche durch die beiden Knoten geht, hineingedrängt wird. Daß in dieser Knotengeraden wirklich 3 Äste der parabol. Kurve liegen, davon überzeugt auch ein Blick auf die Fig. 12; denn sobald dort oben ein B_3 entsteht, wird der Ast, der den Lappen (4)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

umgrenzt, in die Knotengerade hineingedrückt. Wenn wir von Fig. 13 auf 14 übergehen, so ist zu beachten, daß die beiden von der Schleife 4 (Fig. 11) herrührenden Äste bei Fig. 13 bereits konjug. imag. sind und erst beim Erscheinen des C_2, in der Knotengeraden vereinigt, wieder reell werden. Die Hauptebene B berührt längs dieser Knotengeraden die Fläche, der Knotenkegel im C_2 oskuliert die Fläche längs derselben, was ja auch die 3 Äste von dieser Seite aus erkennen läßt, die hier beisammen liegen.

Eine Gerade, welche durch einen B_3 und einen C_2 geht, zählt also das Glied der parabol. Kurve dreifach und, während an eine Gerade durch 2 C_2 stets auf beiden Seiten gleichartig gekrümmte Flächenteile angrenzen, trennt jene Gerade in allen Teilen positiv und negativ gekrümmte Partien, was im Zusammenhalt mit der vorhergehenden Fig. 12 einleuchtet.

Der übrige Teil der parabol. Kurve auf dieser Fläche 1_{VI} ist eine Partialkurve 9. Ordg., welche im B_3 einen 5fachen Punkt mit 3 reellen Ästen und im C_2 einen 3fachen Punkt mit ebenfalls 3 reellen Zweigen aufweist und aus einem einzigen unparen Kurvenzug mit 4 Schleifen (3, 10, 7, 9) besteht, von welchen 2 an dem B_3 und 2 an dem C_2 hängen.

Beim Erscheinen des konischen Knotens verschwindet die entsprechende Diskriminante der Gleichung (10) und damit auch die Invariante j der zugehörigen Gleichung (12), welche die Tangenten in der Hauptebene B bestimmt, so daß die Gleichung (12), wenn etwa $x_2 = 0$ die Hauptebene B bezeichnet, folgende Gestalt annimmt:

$$13) \quad \frac{3}{16}(2\,c_{113}\,x_1 + c_{133}\,x_3)^3 \cdot (2\,c_{113}\,x_1 - 3\,c_{133}\,x_3) = 0,$$

nachdem berücksichtigt, daß

$$9\,c_{133}^2 - 12\,c_{113}\,c_{333}^2 = 0 \text{ ist.}$$

Der erste Faktor entspricht der Geraden durch die beiden Knoten und steht ganz im Einklang mit der entsprechenden Gleichung (10), wenn jene in 2 gleiche Faktoren zerfällt. Es fallen also in der Hauptebene B die 2 vorher konjug.-imag. Tangenten an die parabol. Kurve, nun mit einer reellen Tangente vereinigt, in die Knotengerade hinein; andererseits wissen wir aber, daß von Seite des C_2 auch 3 Tangenten dorthin entfallen, woraus die 3fache Zählung dieses Knotenstrahles als Glied der parabol. Kurve einleuchtet. Der zweite Faktor der Gleichung (13) entspricht der Tangente, welche zu dem einen reellen Ast gehört, der den Lappen 6 umgrenzt und noch die Ebene B im B_3 berührt.

Nehmen wir an dem C_2 den Prozeß des Trennens vor, so löst sich dort die parabol. Kurve in der Weise, wie es Fig. 15 zur Anschauung bringt. Die benachbarten Äste fließen auf beiden Seiten des Knotens über die negativ gekrümmten Partien hinweg

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zusammen. Von den 3 Ästen, die vorhin in der Knotengeraden beisammen lagen, bleibt natürlich einer reell, die beiden andern werden wieder imaginär. Wir erkennen dies am besten, wenn wir Fig. 15 aus Fig 12 dadurch ableiten, daß wir dort den Knoten linker Hand durch Verbindung, den Knoten rechter Hand durch Trennung lösen, und erst dann den B_3 durch Zuziehung der oberen Schleife entstehen lassen. Für die Ebene B dieser Fläche 2_{III} ist die Invariante j der entsprechenden Gleichung (12) positiv.

Die parabol. Kurve ist hier wieder eine komplete Kurve 12. Ordg., welche im B_3 einen 8fachen Punkt mit 4 reellen Ästen besitzt, und besteht aus einem einzigen paren Kurvenzug mit 4 Schleifen, von welchen jede noch eine der unären Geraden berührt.

Lassen wir bei der Fig. 15 linker Hand einen zweiten C_2 entstehen, so daß eine Fläche 2_{VI} zum Vorschein kommt (Fig. 16 auf Taf. 6), so rücken die 2 Berührpunkte der Schleifen 3 und (78) mit unären Geraden in den Knoten C_2. Die parabol. Kurve zerfällt hier wieder in die 3fache Gerade durch die beiden Knoten und in eine Partialkurve 9. Ordg., welche im B_5 einen 5fachen Punkt mit 3 reellen Ästen und im C_2 einen 3fachen Punkt mit einem reellen, den Knotenstrahl hier berührenden Ast besitzt. In diesem unparen Kurvenzuge treten nur die 2 Schleifen 10 und (69) auf, welche an dem B_3 hängen. Für die Ebene A ist die Invariante $j = 0$ und für die Ebene B ist sie positiv.

Trennen wir schließlich auch noch an diesem letzten Knoten C_2, so löst sich hier der vielfache Punkt der parabol. Kurve in der Weise, wie Fig. 17 zeigt. Aus dem Knotenstrahl durch die beiden Knoten scheidet sich wieder ein reeller Ast der parabol. Kurve ab und fließt mit dem reellen Zweig des C_2 beiderseits zusammen, so daß das negativ gekrümmte Gebiet, welches an den C_2 heranreichte, zurückgedrängt wird.

Die parabol. Kurve auf der Fläche 3_{III} ist also wieder eine komplete Kurve 12. Ordg., welche im B_3 einen 8fachen Punkt mit 4 reellen Ästen hat, welche einen einzigen paren Zug mit 4 Schleifen bilden. Diese Kurve stimmt also in ihrem Typus ganz mit der auf Fläche 2_{III} (Fig. 15, Taf. 5) überein; nur berühren dort die vier Schleifen noch reelle Gerade, während hier bloß mehr zwei Schleifen reelle Gerade der Fläche berühren.

Lassen wir in Fig. 14 der Taf. 5 linker Hand noch einen 2ten konischen Knoten entstehen, indem wir die beiden anderen beibehalten, so erscheint ein Bild der Fläche 1_{XIII} (Fig. 18, Taf. 6).

Indem dort das positiv gekrümmte Gebiet 8 sich zu einem vollständigen Dreieck erweitert, und die Berührpunkte der Schleifen 3 und 7 in den neuen C_2 rücken, degeneriert die parabol. Kurve in eine Raumkurve 4. Ordg., welche im B_3 einen Doppelpunkt besitzt und durch die beiden C_2, je einen Knotenstrahl dort berührend, einfach hindurchgeht, in die zwei dreifach zählenden Geraden durch den B_3 und die C_2 und in die zweifach zählende Gerade

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

durch die beiden C_2. Die beiden ersteren Geraden trennen allenthalben ungleichartig-, die letztere überall nur gleichartig gekrümmte Flächengebiete.

Wir haben hier ein durchaus positiv gekrümmtes Dreieck (78), drei Lappen 3, 6, 7 und eine Schleife 10.

3. Die parabolischen Kurven auf den Flächen mit einem biplanaren Knoten B_4.

Wenn wir die Fläche 1_V aus der Fläche 1_{IV} (Fig. 8, Taf. 5) durch Zusammenrücken der 2 konischen Knoten entstehen lassen, so bemerken wir, daß dort, wenn wir diese Deformation allmählich vor sich gehen lassen, die Schleifen 1, 2, 7, 10 sowie die Lappen 4 und 5 immer mehr verschwinden und schließlich, sobald der B_4 erscheint, auf Punkte zusammenschrumpfen.

Nur die beiden Schleifen 6 und 9 bleiben von dem paren Kurvenzug, der durch die konischen Knoten lief, erhalten und außerdem auch noch das von dieser Deformation im wesentlichen unberührt gebliebene, isolierte Oval 8.

Ein Blick auf die Fig. 19 der Taf. 6 belehrt, daß, nachdem alle die genannten, positiv gekrümmten Teile in den Knoten hinein verschwunden sind, die beiden Schleifen 6 und 9 auf gar keine andere Weise mit einander in Verbindung treten können, als daß sie die Knotenachse a im B_4 so berühren, wie es dort angegeben ist. Es wird aus diesem Übergange auch klar, daß die parabol. Kurve im B_4 nur einen sechsfachen Punkt erhalten kann.

Wir wollen dies gleich auf dem Wege der Rechnung bestätigen und zu diesem Zwecke mit Hilfe unserer Abbildung die Gleichung dieser Flächen in einfachster Gestalt aufzustellen versuchen, was leicht gelingt, da die gestaltlichen Verhältnisse dieser Flächen in unseren Figuren klar vor uns liegen.

Es seien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die beiden Hauptebenen, $x_3 = 0$ eine vorläufig noch beliebige Ebene durch den B_4 und $x_4 = 0$ die 4. Ebene unseres Koordinatentetraeders, die nur die Gerade b enthalten soll und sonst eine ganz beliebige Lage haben mag.

Die Gleichung der Flächen lautet dann zunächst:

$$14) \qquad x_1 \, x_2 \, x_4 + V^{(3)} = 0 ,$$

worin $V^{(3)}$ eine vollständige homogene Funktion 3ten Grades in den Variabelen x_1, x_2, x_3 vorstellt.

Das Vorhandensein eines B_4 ist bedingt durch das Fehlen des Gliedes x_3^3 in $V^{(3)}$; denn die Gerade $x_1 = x_2 = 0$, die Knotenachse, muß hier auf der Fläche selbst liegen. Da die Ebene (a b) die Fläche längs der Geraden a berührt, so muß, wenn $x_1 + \varkappa \, x_2 = 0$ die Gleichung dieser Ebene ist, $x_1 + \varkappa \, x_2$ notwendig ein Faktor von $V^{(3)}$ sein. Wir wollen nun die Koordination in solchen Richtungen messen, daß $\varkappa = 1$ gesetzt werden kann.

Wir haben ferner gesehen, daß zu einem B_4 nur noch auf eine

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

einzige Art 2 konische Knoten treten können, und daß, je nachdem diese auf die eine oder andere Art aufgelöst werden, die 2 Knotenstrahlen in jeder Hauptebene reell oder konjugiert imaginär ausfallen, woraus hervorgeht, daß in der Gleichung der Flächen mit einem B_4 nur noch 2 wesentliche Konstante auftreten können, 2 Konstante, welche definieren, ob jene 2 gleichartigen Knotenstrahlen in jeder Hauptebene reell, konsekutiv, oder konjugiert imaginär sind.

Nun denken wir uns noch die Ebene $x_3 = 0$ so gelegt, daß die erwähnten Knotenstrahlen sich in folgender Weise darstellen:

$$x_1 = 0, \quad x_3^2 + \beta x_2^2 = 0,$$
$$x_2 = 0, \quad x_3^2 + \alpha x_1^2 = 0;$$

dann erhält die Gleichung dieser Flächen die einfache Form:

$$15) \quad F^{(3)} \equiv x_1 x_2 x_4 + (x_1 + x_2)(x_3^2 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2) = 0.$$

Die Gleichung der entsprechenden Hesse'schen Fläche lautet:

$$16) \quad H \equiv x_1 x_2 (x_1 + x_2) x_4 + (x_1 - x_2)^2 x_3^2 + (x_1 + x_2) \cdot [-3\alpha x_1^3 + \alpha x_1^2 x_2 + \beta x_1 x_2^2 - 3\beta x_2^3] = 0.$$

Der Kegel, welcher die parabol. Kurve aus dem B_4 projiziert, hat die folgende Gleichung:

$$17) \quad K \equiv x_1 x_2 x_3^2 + (x_1 + x_2)(\alpha x_1^3 + \beta x_2^3) = 0.$$

Die Hesse'sche Fläche besitzt, wie Gleichung (16) zeigt, im B_4 einen triplanaren Punkt von der besonderen Gestalt, daß die 3 Hauptebenen durch eine Gerade, die Knotenachse des B_4, gehen; zwei von diesen sind die Hauptebenen selbst, die dritte ist die Ebene (a b), welche die Fläche 3. Ordg. längs der Knotenachse tangiert. Die Knotenachse a ist eine Doppelgerade der Hesse'schen Fläche.

Die parabol. Kurve hat, wie Gleichung (17) erkennen läßt, im B_4 einen 8fachen Punkt und nach Abscheidung der Knotenachse, welche als Glied der parabol. Kurve 2fach zu zählen ist, noch einen 6fachen Punkt; sie ist also eine Partialkurve 10. Ordnung.

Jede durch die Achse $x_1 = x_2 = 0$ gehende Ebene schneidet die Kurve außer im B_4 nur noch in 2 Punkten, so daß in den 6fachen Punkt im B_4 noch 2 weitere Schnittpunkte, also im ganzen 8, entfallen; denn schneiden wir den Kegel (17) durch die Ebene $x_1 = \lambda x_2$, so ergibt sich:

$$x_2^2 [\lambda x_3^2 + (1 + \lambda)(\alpha \lambda^2 + \beta) x_2^2] = 0,$$

woraus folgt, daß die beiden reellen Zweige die Knotenachse a im Knoten berühren müssen. Wird λ sehr klein, so nähert sich die Ebene $x_1 = \lambda x_2$ immer mehr der Ebene $x_1 = 0$, und wir haben in erster Annäherung:

$$18) \quad \frac{x_2}{x_3} = \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{\beta(1+\lambda)}}.$$

Wird endlich $\lambda = 0$, so rücken diese 2 Schnittpunkte auch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

noch in den Knoten hinein, und es ist also die Ebene $x_1 = 0$ Wendeberührebene der parabol. Kurve im Knoten. Da x_1 und x_2 in den Gleichungen vertauschbar sind, so können wir jetzt Folgendes aussagen:

Die parabolische Kurve auf den Flächen mit einem biplan. Knoten B_4 besteht aus der zweifach zu zählenden Knotenachse und aus einer Partialkurve 10. Ordnung, welche im B_4 einen 6fachen Punkt mit stets zwei reellen Ästen besitzt, welche die Knotenachse hier berühren und die Hauptebenen im Knoten zu Wendeberührungsebenen haben.

Solange α und β von 0 verschieden sind, sind die beiden Zweige durch den B_4, wie die angeführten Gleichungen zeigen, stets reell.

Fig. 19 entspricht einer Fläche 1_V. Der reelle Teil der parabol. Kurve besteht aus den 2 die Achse berührenden Schleifen 6 und 9, welche beide innerhalb eines einzigen Winkelraums der Hauptebenen auf dem zwischen diesen eingekeilten, rundlichen Teil der Fläche verlaufen. Bei ungefähr regelmäßiger Gestaltung erscheint die eine Schleife als das Spiegelbild der anderen in bezug auf die Ebene, welche im Knoten zur Achse senkrecht steht. Die von diesen Schleifen umschlossenen, positiv gekrümmten Flächenpartien kehren sich ersichtlich die konkaven Seiten zu. Außerdem ist noch das Oval (8) vorhanden. α und β sind für die Fläche 1_V negativ, weshalb λ in Gleichung (18) positiv sein muß, damit sich reelle Schnittpunkte der Ebene $x_1 = \lambda x_2$ mit dem durch den B_4 gehenden Kurvenzug ergeben.

Entsteht der eine oder der andere der noch möglichen 2 C_2 (Fig. 20), so haben wir eine Fläche 1_X. Das Oval (8) tritt mit dem andern Kurvenzug in Verbindung, indem 2 seiner Berührpunkte in den C_2 rücken, wohin auch die Berührpunkte der Schleifen 6 und 9 mit der unären Geraden entfallen, so daß ein Kurvenzug entsteht, wie ihn Fig. 20 zur Anschauung bringt.

Die eine Konstante (β) ist hier gleich Null, die andere (α) ist negativ, so daß die Gleichung dieser Fläche die Form:

$$19) \qquad x_1 x_2 x_4 + (x_1 + x_2)(x_3^2 + \alpha x_1^2) = 0$$

annimmt.

Die Gleichung des Kegels, welcher die parabol. Kurve aus dem B_4 projiziert, lautet jetzt:

$$20) \qquad x_1 [x_2 x_3^2 + (x_1 + x_2) \alpha x_1^2] = 0 .$$

Aus (19) und (20) folgt auch noch:

$$21) \qquad x_2 x_4 + x_3^2 = 0 ,$$

die Gleichung eines Kegels 2. Ordg., welcher die parabol. Kurve der Fläche ebenfalls enthält.

Die parabol. Kurve auf der Fläche 1_X zerfällt also in eine komplete Kurve 6. Ordg., welche im Knoten B_4

einen dreifachen Punkt mit einem die Knotenachse berührenden reellen Ast, und im Knoten C_2 einen Doppelpunkt mit 2 reellen Ästen aufweist und aus einem einzigen paren Zuge besteht (die eine Hauptebene $x_2 = 0$ ist Wendeberührebene des einen reellen Zweiges im B_4), in die zweifach zu zählende Knotenachse a und in die vierfach zu zählende Gerade durch die beiden Knoten.

Daß letztere vierfach zu zählen ist, erhellt sofort, wenn wir die Fläche 1_X durch Zusammenrücken von zwei C_2 der Fläche 1_{VIII} entstehen lassen. (Vgl. Fig. 10 auf Taf. 5.)

Trennen wir nun an dem so entstandenen C_2, so kommt die Fläche 2_V zum Vorschein und die parabol. Kurve löst sich in der Weise auf, wie Fig. 21 zeigt. Aus dem Knotenstrahl $B_4 - C_2$ entwickeln sich 2 reelle Äste, die einerseits mit den benachbarten Zweigen der Schleife 8, die negativ gekrümmten Flächenteile zurückdrängend, zusammenfließen und andererseits sich in einem Berührpunkt mit der Knotenachse vereinigen. Hier ist die Konstante α noch negativ, während β positiv geworden ist. Der Zweig, welcher die Ebene $x_2 = 0$ bei Fig. 19 und 20 zur Wendeberührebene im B_4 hatte, bleibt auf derselben Seite dieser Ebene wie dort liegen; das andere Oval, welches aus der Schleife 8 in Verbindung mit der Knotengeraden hervorgegangen ist, verläuft in der Knotennähe auf derselben Seite der Ebene $x_1 = 0$, auf der bei den 2 vorhergehenden Flächen der entsprechende Ast, welcher diese Ebene zur Wendeberührebene hatte, sich befand, was aus Gleichung (18) hervorgeht, wo wir jetzt λ negativ zu nehmen haben, um reelle Schnittpunkte der Ebene $x_1 = \lambda x_2$ (für kleine λ) mit diesem Zweig der parabol. Kurve zu erhalten. Der Teil dieses Ovals, der sich in unserer Figur rechter Hand darstellt, liegt, nachdem dasselbe das Unendliche passiert hat, natürlich auf der andern Seite der Ebene $x_1 = 0$. Der von diesem Oval eingeschlossene, positiv gekrümmte Teil der Fläche wendet in unserer Figur linker Hand dem Auge die konkave, rechter Hand die konvexe Seite zu.

Die parabol. Kurve auf der Fläche 2_V ist also wieder eine Partialkurve 10. Ordg., die nur aus 2 räumlichen Ovalen besteht, welche die Knotenachse im B_4 berühren und dort je eine Hauptebene als Wendeberührebene besitzen. Der vielfache Punkt der Kurve im B_4 ist ein 6facher; jede durch die Achse gehende Ebene schneidet dort in 8 Punkten. Die Ergänzung bildet die 2fach zu zählende Knotenachse.

Rufen wir jetzt auch noch den zweiten C_2 hervor, indem $\alpha = 0$ wird, während β positiv bleibt, so verschwindet das eine Oval, welches die Ebene $x_2 = 0$ zur Wendeberührebene hat, in der Geraden durch die beiden Knoten.

Die parabol. Kurve auf der so entstandenen Fläche 2_X (Fig. 22) ist demnach wieder eine komplete Kurve 6. Ordg., welche im B_4 einen dreifachen Punkt mit einem reellen Zweig, für den die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

eine Hauptebene $x_1 = 0$ Wendeberührebene ist, im C_2 einen Doppelpunkt mit imaginären Zweigen besitzt und nur aus einem einzigen Oval besteht. Die Ergänzung bildet wieder die zweifach zu zählende Knotenachse des B_4 und die 4fach zu zählende Knotengerade, welche durch den B_4 und den C_2 läuft.

Nehmen wir schließlich an diesen letzten Knoten C_2 auch noch den Trennungsprozeß vor, indem wir dem α einen positiven Wert geben, so daß nun die beiden Konstanten positiv sind, so löst sich die Gerade durch die beiden Knoten auf der unendlichen Strecke in 2 reelle Äste der parabol. Kurve in der Weise auf, wie Fig. 23 zeigt.

Die parabol. Kurve dieser Fläche 3_V ist wieder eine Partialkurve 10. Ordg., welche im B_4 einen 6fachen Punkt aufweist und durch denselben 2 reelle Zweige schickt, für welche die beiden Hauptebenen Wendeberührebenen sind. Diese Äste verlaufen zwar wie aus Gleichung (18) ersichtlich, worin jetzt in beiden Fällen λ negativ zu setzen ist, wenn wir reelle Schnittpunkte auf der parabol. Kurve durch die Ebenen $x_1 = \lambda x_2$ bezw. $x_2 = \lambda x_1$ in der Knotennähe treffen wollen, auf derselben Seite der resp. Hauptebenen wie bei Fig. 19, aber sie berühren die Knotenachse beide auf der andern Seite. Jede Ebene durch die Knotenachse schneidet die parabol. Kurve im Knoten in 8, jede Hauptebene in 10 Punkten. Die beiden Ovale verlaufen jetzt in den Nebenwinkelräumen zu dem Winkel der Hauptebenen, in welchem sie bei Fig. 19 verliefen. Links vom Knoten wendet in unserer Fig. 23 das Oval im sichtbaren Blatte dem Auge die konkave, das im unsichtbaren die konvexe Seite zu; auf den beiden andern Seiten findet bezw. das Umgekehrte statt.

Treten zu einem B_4 gleichzeitig 2 reelle C_2 (1_{XIII}), so degeneriert die parabol. Kurve in die 2fache Knotenachse, in die 2fache Gerade durch die beiden C_2 und in die je 4fach zu zählenden Geraden durch den B_4 und die beiden C_2. Der pare Teil zwischen den 3 Knoten zeigt durchaus positive, die übrige Fläche allenthalben negative Krümmung.

Die Gestalt der parabol. Kurve auf einer Fläche 4_V mit einem B_4 mit konjug. imag. Hauptebenen stimmt, abgesehen von dem vielfachen Punkt im Knoten, mit der auf einer Fläche 3_{IV} überein; denn durch das Zusammenrücken der Knoten und das damit verbundene Verschwinden des paren Flächenteils bei jener Fläche wird ersichtlich die Gestalt der parabol. Kurve nicht wesentlich verändert. Sie ist von der 10. Ordg., hat einen isolierten 6fachen Punkt an B_4 und besteht aus zwei Ovalen, von welchen das eine drei, das andere zwei reelle Gerade berührt. (Siehe Fig. 6 auf Taf. 5.)

4. Die parabolischen Kurven auf den Flächen mit zwei konjugiert imaginären C_2.

Lösen wir bei den eben betrachteten Flächen den B_4 in 2 konjug. imaginäre C_2 auf, so gelangen wir gleich zu den verschiedenen Formen der reellen Teile der parabol. Kurven auf den Flächen,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die solche Knoten besitzen. Die parabol. Kurve löst sich bei diesem Prozesse im B_4 in der Weise auf, wie Fig. 24 veranschaulicht. Es ist ja klar, daß hier die parabol. Kurve mit der Geraden a, auf welcher die beiden konjug. imag. C_2 liegen, keinen reellen Kontakt haben kann; die beiden in Fig. 19 sich berührenden Äste müssen sich notwendig in der Weise, wie Fig. 24 zeigt, von einander trennen, da ja nach der Trennung rechter Hand in der Nähe des aufgelösten B_4 ein positiv gekrümmter Flächenteil sich einstellen muß (weil die Umrißkurve dem unbedeckten Feld dort die konvexe Seite zukehrt).

Die parabol. Kurve besteht also auf einer Fläche 6_{V} in ihrem reellen Teile aus 2 Ovalen, von welchen das eine (8) einem Dreieck einbeschrieben ist, während das andere (69) nur 2 Gerade berührt (Fig. 24).

Tritt ein reeller C_2 hinzu, so daß die Fläche 3_{VIII} zum Vorschein kommt, so treten die beiden Ovale, indem sie je 2 Berührpunkte mit den Geraden in diesen Knoten hineinschicken, miteinander derart in Verbindung, daß sie 2 Schleifen bilden, deren Äste im C_2 die vorhandenen 2 reellen Knotenstrahlen berühren (Fig. 25).

Löst sich der eben entstandene Knoten durch Trennung, so fließen die beiden Äste beiderseits zusammen, so daß also die parabol. Kurve auf einer Fläche 5_{IV} (Fig. 26) aus 2 Ovalen besteht, von welchen nur das eine die noch vorhandene unäre Gerade berührt. Der andere Asymptotenpunkt auf dieser Geraden befindet sich im Schnittpunkt mit der Knotenachse a (Ovalpunkt vom Typus β).

Entsteht durch das Erscheinen eines weiteren C_2 die Fläche 4_{VIII} (Fig. 27), so schrumpft das Oval, welches gar keine reelle Gerade mehr berührte, auf einen Punkt in den Knoten hinein zusammen, denn seine Berührpunkte mit der Umrißkurve (zwei Wendepunkte derselben) entfallen dorthin.

Nehmen wir schließlich auch noch an diesem letzten Knoten die Trennung vor, so muß sich augenscheinlich das von dem Knoten absorbierte Oval wieder entwickeln, da sich in der Umrißkurve wieder zwei Wendepunkte einstellen, und zwar tritt es jetzt auf den unparen Teil der Fläche 4_{IV} über, wie Fig. 28 zeigt, da ja dort ein positiv gekrümmtes Flächenstück entsteht, was die Gestalt der Umrißkurve, welche dort dem unbedeckten Feld auf eine kurze Strecke die konvexe Seite zuwendet, bedingt.

Die parabol. Kurve ist im 1., 3. und 5. Falle eine Partialkurve 10. Grades, welche jedesmal aus zwei reellen Ovalen besteht; die Ergänzung auf den 12. Grad bildet die 2fach zu zählende Gerade a. Im 2. und 4. Falle haben wir eine Partialkurve 6. Ordg., die Ergänzung besteht aus den je zweifach zu zählenden Geraden durch je zwei Knoten. Die Kurve 6. Ordg. besitzt in den konischen Knoten Doppelpunkte; einer davon ist also reell, die beiden andern sind konjugiert imaginär.

Die Formen der parabol. Kurven auf den Flächen 2_{XIII} und 5_{VIII} stimmen, abgesehen von den vielfachen Punkten im reellen Knoten,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

mit denen auf 4_{VIII}, bezw. 4_{IV}, welche in den Fig. 27 und 28 dargestellt sind, überein, da ersichtlich die Ovale keine wesentliche Veränderung erfahren, wenn hier die positiv gekrümmten, paren Teile verschwinden.

Treten zu den 2 konjug. imaginären Knoten noch 2 reelle C_2, so degeneriert die parabol. Kurve wieder in die 6 je zweifach zu zählenden Kanten des Knotenpunkt-Tetraeders, von welchen hier natürlich nur 2 reell sind (Vgl. Fig. 25).

Der pare Teil ist bei dieser Fläche 2_{XVI} ganz positiv, der unpare ganz negativ gekrümmt. Rücken schließlich hier die beiden reellen C_2 in einen B_4 mit imag. Ebenen zusammen, so erhalten wir die Fläche 2_{XVIII}, welche also auch durchaus (abgesehen von den Knotenachsen) negativ gekrümmt ist. Dasselbe ist der Fall bei der Fläche 3_{XVI}, welche 4 imaginäre Knoten besitzt.

5. Die parabolischen Kurven auf den Flächen mit einem biplanaren Knoten B_5.

Wenn wir eine Fläche mit einem B_5 aus einer Fläche mit einem B_4 (Fig. 19) entstehen lassen, indem wir in der Umrißkurve die obere Schleife zuziehen, so bemerken wir, daß die obere Schleife (6) der parabol. Kurve auch noch verschwindet, während von dem Oval 8 zwei Berührpunkte in den entstehenden B_5 rücken, so daß dasselbe mit der Schleife 9 in Verbindung tritt, wie Fig. 29 zur Anschauung bringt. Da die beiden Äste der Schleife 6 vorher schon die Achse a berührten, so wird sich jetzt die Knotenachse als vierfach gezählt aus der parabol. Kurve abscheiden müssen, so daß diese nur mehr eine Partialkurve 8. Ordg. ist, welche im B_5 einen 4fachen Punkt besitzt.

Um den Kontakt der parabol. Kurve mit der Knotenachse und den Hauptebenen näher kennen zu lernen, bilden wir wieder mit Hilfe der aus unserem Bilde erkenntlichen Gestalt der Fläche und der Lage der Geraden die Gleichung der Fläche in einfachster Form, indem wir folgende Überlegung anstellen:

Da zu einem B_5 nur auf eine einzige Art noch ein konischer Knoten treten kann, so ist klar, daß in der Gleichung dieser Fläche nur noch eine einzige wesentliche Konstante auftreten kann, eine Konstante, welche definiert, ob dieser Knoten vorhanden oder in dem einen oder andern Sinne aufgelöst ist, oder, was dasselbe ausdrückt, welche angibt, ob die zwei gleichwertigen Knotenstrahlen, welche in der einen Hauptebene noch existieren, reell, konsekutiv oder konjug. imaginär sind.

Es sei $x_1 = 0$ die Hauptebene, welche die Fläche längs der Knotenachse a berührt, $x_2 = 0$ die andere, $x_3 = 0$ eine Ebene, welche durch den einen Knotenstrahl in der Ebene $x_1 = 0$ geht, $x_4 = 0$ eine beliebige andere Ebene, dann müssen, wenn wieder

$$x_1 \, x_2 \, x_4 + V^{(3)} = 0$$

die Gleichung einer Fläche mit biplanaren Knoten in allgemeiner

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Form vorstellt, zunächst in $V^{(3)}$ mit Ausnahme von $x_2^2 x_3$ alle Glieder fehlen, welche nicht x_1 als Faktor haben, und wenn wir die Ebene x_3 passend gelegt denken, so daß sich die Knotenstrahlen in folgender Weise darstellen:

$$x_1 = 0, \qquad x_2^2 x_3 = 0;$$
$$x_2 = 0, \qquad x_1 (x_3^2 + \alpha x_1^2) = 0,$$

kann die Gleichung der Fläche nur noch folgende Gestalt haben:

$$22) \quad F^{(3)} \equiv x_1 x_2 . x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + \alpha x_1^3 = 0.$$

Die entsprechende Hesse'sche Fläche bekommt dann die Gleichung:

$$23) \quad H \equiv x_1 (x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + \alpha x_1^3) - 4 \alpha x_1^4 - 4 x_1 x_2^2 x_3 + x_2^4 = 0$$
$$\equiv x_1 F^{(3)} - 4 \alpha x_1^4 - 4 x_1 x_2^2 x_3 + x_2^4 = 0.$$

Der Kegel, welcher die parabol. Kurve aus dem B_5 projiziert, wird hier durch folgende Gleichung dargestellt:

$$24) \quad K \equiv 4 \alpha x_1^4 + 4 x_1 x_2^2 x_3 - x_2^4 = 0.$$

Wir erkennen, daß der triplanare Punkt der Hesse'schen Fläche hier noch die speziellere Form hat, daß zwei seiner drei Hauptebenen zusammenfallen, nämlich in der Ebene $x_1 = 0$, während die dritte mit der anderen Hauptebene des B_5, $x_2 = 0$, identisch ist. Die Knotenachse ($x_1 = x_2 = 0$) ist eine Doppelgerade der Hesse'schen Fläche, woraus hervorgeht, daß die Knotenachse als Glied der parabol. Kurve 4fach gezählt werden muß.

Der übrige Teil der parabol. Kurve ist demnach noch eine Partialkurve 8. Ordg., welche im B_5 einen 4fachen Punkt aufweist.

Wir schneiden nun mit einer Ebene durch die Knotenachse, $x_1 = \lambda x_2$, den Kegel K und erhalten:

$$25) \quad x_2^3 [(4 \alpha \lambda^4 - 1) x_2 + 4 \lambda x_3] = 0.$$

Die parabol. Kurve wird demnach von jeder durch die Achse gehenden Ebene, außer den im Knoten beisammen liegenden Punkten, nur noch in einem einzigen Punkte getroffen, woraus folgt, daß die beiden Schleifen 8 und 9 in 2 Nebenwinkelräumen der Hauptebenen verlaufen müssen, wie es ja aus unserer Figur ohne weiteres ersichtlich ist. Jede solche Ebene hat also mit den 2 Zweigen noch 3 dem B_5 benachbarte Punkte gemein. Um zu untersuchen, wie sich diese verteilen, lassen wir λ unendlich klein werden, d. h., wir lassen die Ebene $x_1 = \lambda x$ der Ebene $x_1 = 0$ unendlich nahe kommen; dann erhalten wir in erster Annäherung für den 8. Schnittpunkt der Ebene mit der parabol. Kurve:

$$26) \quad x_2 - 4 \lambda x_3 = 0.$$

Daraus erhellt, daß der Schnittpunkt der Ebene $x_1 = \lambda x_2$ mit der parabol. Kurve in der Knotennähe von der einen Seite

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Ebene $x_1 = 0$ auf die andere tritt, wenn λ die Null passiert. Da nach Gleichung (24) die Knotenachse jeden Ast der parabol. Kurve berührt, so folgt, daß die Ebene $x_1 = 0$ Schmiegungsebene des einen Zweiges im Knoten ist.

Schneiden wir noch mit der Ebene $x_2 = \varkappa\, x_1$, worin $\varkappa$ sehr klein ist, so ergibt sich für einen dem B_5 sehr nahe gelegenen Schnittpunkt mit der parabol. Kurve

$$27) \qquad \alpha\, x_1 + \varkappa^2\, x_3 = 0,$$

woraus hervorgeht, daß der Schnittpunkt der Ebene $x_2 = \varkappa\, x_1$ mit der parabol. Kurve auf derselben Seite der Ebene $x_2 = 0$ bleibt, wenn $\varkappa$ durch Null hindurchgeht; auch leuchtet aus dieser Gleichung der innigere Kontakt der Knotenachse mit diesem Zweig der parabol. Kurve ein.

Die parabol. Kurve auf einer Fläche 3. Ordg. mit einem B_5 ist also eine Partialkurve 8. Ordg., welche im B_4 einen 4fachen Punkt mit 2 reellen, die Achse berührenden Ästen aufweist, welche 2 Schleifen bilden.

Die Hauptebene, welche die Fläche in der Knotenachse berührt, ist die Schmiegungsebene des einen Zweiges im Knoten, die andere ist Wendeberührebene für den zweiten Zweig, welcher mit der Knotenachse drei konsekutive Punkte gemein hat.

Von den drei dem Knoten unmittelbar benachbarten Schnittpunkten, welche jede durch die Achse gehende Ebene mit der parabol. Kurve gemein hat, trifft also einer auf den ersteren, und zwei entfallen auf den letzteren Zweig.

Die Flächenteile von positiver Krümmung, welche die beiden Schleifen einschließen, kehren der im Knoten zur Achse senkrechten Ebene die konkaven Seiten zu.

Für die Fläche 1_{VII} (Fig. 29) ist in Gleichung (22) α negativ zu setzen; wird $\alpha = 0$, so tritt ein konischer Knoten auf, und es erscheint die Fläche 1_{XVI} (Fig. 30). Der Ast der parabol. Kurve, welcher die Ebene $x_2 = 0$ zur Wendeberührebene hatte, entfällt in die durch die beiden Knoten gehende Gerade, längs welcher jetzt die Hauptebene x_2 die Fläche berührt. Diese Gerade (c) zählt als Glied der parabol. Kurve hier 5fach.

Der Kegel, welcher die parabol. Kurve aus dem B_5 projiziert, degeneriert hier in die Doppelebene $x_2 = 0$ und in einen Kegel zweiter Ordnung:

$$28) \qquad x_2^2\,(4\, x_1\, x_3 - x_2^2) = 0\,.$$

Letzterer berührt ersichtlich die Fläche in der Knotenachse und enthält auch noch die Gerade durch die beiden Knoten, längs welcher er die Ebene x_3 berührt.

Die parabolische Kurve auf einer Fläche 1_{XIV} besteht also aus der vierfach zu zählenden Knotenachse, der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

fünffach zu zählenden Geraden, welche durch die beiden Knoten läuft, und aus einer Kurve dritter Ordnung, welche im B_5 die Knotenachse berührt und dort die eine Hauptebene als Schmiegungsebene besitzt. Denn, schneiden wir wieder mit der Ebene $x_1 = \lambda x_2$, so erhalten wir:

$$29) \qquad x_2 (4 \lambda x_3 - x_2) = 0,$$

woraus das Gesagte erhellt.

Daß die Gerade durch die beiden Knoten in der That 5 Äste der parabol. Kurve absorbiert, wird in sehr anschaulicher Weise klar, wenn wir die Fläche 1_{XIV} aus einer Fläche mit 3 konischen Knoten vom Typus 1_{VIII} entstehen lassen (Vgl. Fig. 8 auf Taf. 5 — wir müssen dort zunächst unten noch einen C_2 entstehen lassen).

Die Gerade c trennt allenthalben ungleichartig gekrümmte Flächenpartien, so daß die Teile 8 und 9 positive Krümmung zeigen.

Wird α positiv, so löst sich der konische Knoten durch Trennung, und der vorher von der Geraden c absorbierte, reelle Ast der parabol. Kurve tritt wieder getrennt auf, indem er sich in bezug auf die Gerade c nach der andern Seite durchbiegt und mit den Zweigen der Kurve 3. Ordg. zu beiden Seiten des C_2 zusammenfließt, wie Fig. 31 zeigt. Die parabol. Kurve der Fläche 2_{VII} ist jetzt wieder vom gleichen Typus und von derselben Ordg. wie bei der Fläche 1_{VII}. Sie besteht aus 2 Schleifen, hat im B_5 einen 4fachen Punkt, die eine Hauptebene ist dort Schmiegungsebene, die andere Wendeberührebene, und der Ast, welcher die Ebene $x_2 = 0$ zur Wendeberührebene hat, hat wieder 3 konsekutive Punkte mit der Knotenachse gemein.

6. Die parabolischen Kurven auf den Flächen mit einem biplanaren Knoten B_6.

Um den Verlauf der parabol. Kurve auf einer derartigen Fläche kennen zu lernen, können wir etwa diese Fläche aus der Fläche 1_{VIII} (Fig. 10, Taf. 5) dadurch entstanden denken, daß wir dort die 3 Knoten zusammenrücken lassen. Wir bemerken, daß dabei die 3 Knotengeraden in die Achse des B_6 entfallen, so daß diese als Glied der parabol. Kurve nun 6fach zu zählen ist. Es rücken außerdem die 3 Doppelpunkte des andern Teils der parabol. Kurve, nämlich der Kurve 6. Ordg., in dem entstehenden B_6 derart zusammen, daß dieselbe dort einen 6fachen Punkt erhalten müßte, wodurch ein weiteres Zerfallen dieser Kurve veranlaßt wird. Es ist nun offenbar gar kein anderer Fall denkbar als der, daß die Kurve 6. Ordg. in 3 Kegelschnitte degeneriert, und da ersichtlich mit dem Erscheinen des B_6 alle positiv gekrümmten Flächenpartien, mit Ausnahme des Lappens 9, verschwinden, so ist klar, daß von diesen Kegelschnitten nur einer reell ausfallen kann und eine Lage einnehmen muß, wie Fig. 32 (1_{XI}) zeigt. Die beiden übrig gebliebenen Äste

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

vom Lappen 9 können sich im B_6 gar nicht anders vereinigen, als daß sie die Knotenachse berühren.

Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn wir die Fläche 1_{XI} aus einer Fäche 1_X (Fig. 20, Taf. 6) entstehen lassen.

Tritt ein konischer Knoten auf, so degeneriert der Kegelschnitt augenscheinlich in eine Doppelgerade. Er verschwindet auf der Strecke zwischen den beiden Knoten und entwickelt sich aus der unendlichen Strecke dieser Knotengeraden wieder, wenn wir den konischen Knoten durch Trennung auflösen, wie Fig. 33 zeigt, welche einer Fläche 2_{XI} entspricht. Der pare Teil, der an dem B_6 hängt, ist hier durchweg positiv gekrümmt.

Um diese Überlegung auch auf dem Wege der Rechnung zu bestätigen, bilden wir wieder, indem wir einen Blick auf Fig. 32 werfen, die Gleichung dieser Fläche. In derselben kann auch wieder nur eine wesentliche Konstante auftreten.

Diese Konstante definiert, ob die 2 Knotenstrahlen in der einen Hauptebene reell, konsekutiv oder konjug. imaginär sind, oder ob der eine noch mögliche C_2 durch Verbindung oder Trennung gelöst ist.

Es sei $x_1 = 0$ die Hauptebene, welche die Fläche in der Knotenachse oskuliert, $x_2 = 0$ die andere Hauptebene, $x_3 = 0$ eine dritte Ebene durch den Knoten, so gelegt, daß die Knotengeraden sich in folgender Weise darstellen:

$$x_1 = 0\,, \quad x_2^3 = 0\,;$$

bezw.

$$x_2 = 0\,, \quad x_1\,(x_3^2 + \alpha\, x_1^2) = 0\,,$$

und $x_4 = 0$ irgend eine vierte Ebene; dann erhalten die Gleichungen der $F^{(3)}$, H und K folgende einfache Formen:

$$30) \qquad F^{(3)} \equiv x_1\, x_2\, x_4 + x_1\, x_3^2 + x_2^3 + \alpha\, x_1^3 = 0\,,$$

$$31) \qquad H \equiv x_1\,(x_1\, x_2\, x_4 + x_1\, x_3^2 - 3\, x_2^3 - 3\,\alpha\, x_1^3) = 0\,,$$

$$32) \qquad K \equiv x_1\,(x_2^3 + \alpha\, x_1^3) = 0\,.$$

Die Hesse'sche Fläche degeneriert also für eine Fläche 3. Ordg. mit einem B_6 in eine Ebene und in eine Fläche 3. Ordg., die selbst wieder im B_6 einen B_6 mit den gleichen Hauptebenen aufweist, wie die gegebene Fläche 3. Ordg.

Der Projektionskegel der parabol. Kurve aus dem Knoten zerfällt ersichtlich in 4 Ebenen, von welchen stets zwei konjugiert imaginär sind und die beiden imaginären Kegelschnitte enthalten, während die eine von den beiden reellen Ebenen den reellen Kegelschnitt ausschneidet. Für den Fall $\alpha = 0$, welcher den Übergang zwischen den Flächen 1_{XI} und 2_{XI} herstellt, fallen 3 dieser Ebenen in die Hauptebene $x_2 = 0$.

Die Gerade durch die beiden Knoten zählt hier als Glied der parabol. Kurve ebenfalls 6fach.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

7. Die parabolischen Kurven auf den Flächen mit zwei biplanaren Knoten B_3.

Da die parabol. Kurve im B_3 einen 8fachen Punkt mit vier reellen Ästen aufweist, so ist klar, daß beim gleichzeitigen Auftreten von 2 B_3 diese Kurve degenerieren muß.

In welcher Weise diese Ausartung vor sich geht, und wie die einzelnen Teile nachher gelagert sind, wollen wir uns dadurch klar legen, daß wir erst durch allmähliche Veränderungen der Umrißkurve zu diesen Flächen mit 2 B_3 zu gelangen suchen. Wir wählen hier zweckmäßig Fig. 1 auf Taf. 1 als Ausgangslage, lassen die 2 B_3 nach einander entstehen und beobachten dabei die Deformationen, welche die parabol. Kurve erfährt.

So zeigt zunächst Fig. 34 auf Taf. 6 das Bild einer Fläche 1_{IV} (vgl. Fig. 8 auf Taf. 6), wie sie sich projiziert, wenn das Proj.-Zentr. innerhalb des einen Ovals (8) der parabol. Kurve, welches auf dieser Fläche noch vorhanden ist, gewählt wird. In diesem Bilde ist dies das Oval, welches dem Durchgang (135) gegenüberliegt, und der von ihm eingeschlossene, positiv gekrümmte Teil der Fläche bildet sich im sichtbaren Blatte in der Weise ab, daß die ganze Ebene außerhalb des roten Ovals, welches die 3 Geraden 14, 25, 36 berührt, von den Projektionen seiner Punkte bedeckt wird. Der übrige Teil der parabol. Kurve besteht aus der 2fachen Knotengeraden und dem paren Zug mit 6 Schleifen und 2 Lappen, wie wir ihn bereits kennen lernten.

Geht hier der C_2 linker Hand in einen B_3 über, so verschwinden an dieser Stelle 2 Schleifen der parabol Kurve, und das isolierte Oval tritt auch noch mit dem übrigen Kurvenzug in Verbindung in der Weise, wie Fig. 35 zeigt, welche einer Fläche 1_{VI} entspricht, auf der die parabol. Kurve aus der 3fach zu zählenden Knotengeraden und einer Partialkurve 9. Ordnung besteht, die nur einen einzigen unparen Zug aufweist (Vgl. Fig. 14 der Taf. 5).

Lassen wir jetzt den C_2 rechter Hand auch noch in einen B_3 übergehen, so rückt ersichtlich noch ein weiterer Ast der parabol. Kurve in die durch die beiden Knoten gehende Gerade, welche nun 4 Äste in sich vereinigt, deshalb als Glied der parabol. Kurve 4fach zu zählen ist und allenthalben nur gleichartig gekrümmte Flächengebiete trennt. Rechter Hand verschwinden auch noch die 2 Schleifen, die vorher am C_2 hingen, so daß nur noch die positiv gekrümmten Partien übrig bleiben, welche in Fig. 36, die das Bild einer Fläche 1_{IX} vorstellt, in bekannter Weise markiert sind. Der übrige Teil der parabol. Kurve ist von der 8. Ordg. und besitzt in jedem B_3, nach Abscheidung der Knotengeraden, noch einen 4fachen Punkt, wodurch ein Zerfallen der Kurve 8. Ordg. veranlaßt wird. Hier ist nun gar kein anderer Fall denkbar als der, daß die Kurve in 4 Kegelschnitte degeneriert, von welchen jeder

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

durch die 2 B_3 geht. Sie liegen also in 4 Ebenen, welche durch die Gerade laufen, auf welcher die beiden B_3 liegen.

Ebenso klar ist aus dem Übergang ersichtlich, daß nur zwei von diesen Kegelschnitten reell sein können; denn es bleiben für jeden Knoten nur zwei reelle Äste übrig.

Es folgt dies übrigens auch daraus, daß, wie wir im Abschnitt 2 pag. 14 gezeigt haben, in jeder Hauptebene eines biplan. Knotens B_3 vier Tangenten an die parabol. Kurve im Knoten existieren, von welchen stets nur zwei reell sind, sofern dieselben nicht ganz oder teilweise zusammenfallen, was ja hier in den zwei Hauptebenen nicht stattfindet, welche nur einem B_3 angehören.

Aus den Gleichungen (7) bis (12) ergibt sich dieses Resultat, wenn wir dort c_{223} und c_{233} auch noch gleich Null setzen, und wenn dabei

$$9\, c_{133}^2 - 12\, c_{113}\, c_{333} \gtrless 0 \quad \text{ist.}$$

Die Gleichung (12) ergibt für die 4 Tangenten durch den einen B_3 in der Ebene $x_1 = 0$, $x_3^4 = 0$, was natürlich auch für den zweiten B_3 gilt, da ja beide B_3 ganz gleichberechtigt sind. Daraus erhellt, daß die Gerade durch die beiden B_3 als Glied der parabol. Kurve in der That 4fach gezählt werden muß.

Für die beiden andern Hauptebenen gelten die entsprechenden Gleichungen (12) ohne Reduktion.

Der Kegel, welcher die parabol. Kurve aus dem einen B_3 projiziert und welcher durch Gleichung (9) dargestellt wird, zerfällt für diesen Fall in 4 Ebenen, von denen sich zeigen läßt, daß nur 2 davon reell sind, und daß sie äquianharmonische Lagen haben.

Die Hesse'sche Fläche, welche in Gleichung (8) gegeben ist, degeneriert für die Flächen mit zwei B_3 in die Ebene $x_1 = 0$ und in eine Fläche 3. Ordg., welche in den beiden B_3 auch wieder biplan. Knoten B_3 mit den gleichen Hauptebenen aufweist wie die ursprüngliche Fläche 3. Ordg.

Auf diesen Flächen sind nur die Partien innerhalb der beiden reellen Kegelschnitte positiv gekrümmt, alle andern Teile zeigen negative Krümmung. In unserem Bilde bedeckt der positiv gekrümmte Teil, welcher zwischen der Ellipse und der Knotengeraden liegt und in welchem das Proj.-Zentr. gewählt ist, das ganze sichtbare Blatt außerhalb der Ellipse bis zur Knotengeraden hin. Tritt noch ein konischer Knoten C_2 hinzu, wie Fig. 37 zeigt, so entsteht die Fläche 1_{XVII}, und es degeneriert einer von den beiden reellen Kegeschnitten in ein Geradenpaar.

Die parabol. Kurve besteht hier aus der 4fachen Geraden durch beide B_3, aus den 2 je 3fach zu zählenden Geraden, welche durch die B_3 und den C_2 laufen, und einem Kegelschnitt.

Für diese Fläche ist in Gleichung (7), außer $c_{223} = c_{233} = 0$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

auch noch die Diskriminiante $9\,c_{133}^2 - 12\,c_{113}\,c_{333} = 0$, und es zeigt sich aus Gleichung (9), daß in diesem Falle 3 der 4 Ebenen, in welche K zerfallen ist, in der Ebene, welche die 3 Knoten enthält, beisammen liegen, nämlich eine reelle und die beiden vorher konjugiert imaginären Ebenen.

Die beiden Geraden durch den C_2 und die B_3 enthalten je 3 Äste der parabol. Kurve und werden deshalb allenthalben ungleichartig gekrümmte Flächenpartien begrenzen.

Die Gleichung der Flächen mit 2 reellen B_1 kann in reduziertester Form offenbar nur mehr eine wesentliche Konstante enthalten, nämlich eine Konstante, welche definiert, ob der einzige noch mögliche reelle C_2 durch Verbindung oder Trennung gelöst ist. Sie lautet demnach:

$$33)\quad F^3 \equiv x_1\,x_2\,x_4 + x_1\,(x_1\,x_2 + x_2^2 + x_1\,x_3 + \alpha\,x_3^2 + x_2\,x_4) + x_3^3 = 0.$$

Der in Fig. 36 abgebildeten Fläche 1_{IX} entspricht ein $\alpha > 2$, für 1_{XVII} (Fig. 37) ist $\alpha = 2$ und für 2_{IX} (Fig. 38) ist $\alpha < 2$ zu setzen.

Nehmen wir jetzt an dem C_2 die Trennung vor, so erscheint die Fläche 2_{IX}, bei welcher der vorhin degenerierte Kegelschnitt in der Weise wieder erscheint, wie Fig. 38 zur Anschauung bringt.

Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Die parabol. Kurve auf den Flächen 3. Ordg. mit 2 reellen biplan. Knoten B_1 besteht aus der 4fachen Geraden durch beide Knoten und aus 4 Kegelschnitten, welche durch die 2 B_3 gehen und in 4 die Knotengerade enthaltenden Ebenen liegen. Diese 4 Ebenen haben äquianharmonische Lage; zwei davon sind stets reell und enthalten reelle Kegelschnitte, die beiden andern sind konjugiert imaginär*).

Geht in Fig. 37 der konische Knoten, dadurch daß sich auch noch die untere Schleife der Umrißkurve zusammenzieht, in einen B_3 über, so nähert sich der reelle Kegelschnitt immer mehr dem Geradenpaar, welches durch den C_2 und die beiden B_1 läuft, und wird schließlich bei dem Erscheinen des neuen B_3 von diesen Geraden auch noch absorbiert. Gleichzeitig bemerken wir, daß bei dieser Bewegung die noch vorhandenen negativ gekrümmten Partien vollends verdrängt werden, so daß die entstandene Fläche 1_{XXI} nun überall positive Krümmung zeigen muß, was wir früher schon aus einem anderen Grunde geschlossen haben**). In den Gleichungen (7)—(12) sind für diese Fläche die Konstanten c_{113}, c_{133}, c_{223}, c_{233} gleich Null zu setzen.

Die zugehörige Hesse'sche Fläche zerfällt in die 3 Haupt-

*) Dr. Schläfli, a. a. O.
**) I. Teil, pag. 51.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ebenen der Knoten und in die Ebene, welche durch die 3 Knoten geht; die parabol. Kurve besteht aus den drei je 4fach zu zählenden Knotengeraden.

8. Die parabolischen Kurven auf den Flächen mit einem uniplanaren Knoten.

Lassen wir in Fig. 12 auf Taf. 5 die drei konischen Knoten zusammenrücken, so entsteht aus der dort abgebildeten Fläche $1'_{VIII}$ die Fläche 1_{XII} mit einem uniplanaren Knoten U_6, durch welchen drei reelle Geraden laufen (Fig. 39 auf Taf. 6). Wir bemerken, daß bei dieser Deformation der pare Zug der parabol. Kurve, der drei Doppelpunkte in den konischen Knoten besaß, vollständig verschwindet, indem er in den U_6 hineingedrängt wird, und daß nur das eine isolierte Oval (10) übrig bleibt, in welchem die Fläche dem Auge die konkave Seite zukehrt. Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn bei einer Fläche 2_{VIII} die 3 C_2 dort zusammenrücken, so daß der positiv gekrümmte, pare Teil der Fläche, der zwischen ihnen hängt, verschwindet.

Die parabol. Kurve auf einer Fläche mit einem U_6 vom Typus 1_{XII} ist also eine Kurve 6. Ordg., welche nur ein reelles Oval aufweist, welches in dem Dreieck verläuft, das dem mittleren der 4 zur Erzeugung des U_6 zusammengezogenen Querschnitten gegenüberliegt, und sie besitzt außerdem im U_6 einen isolierten, vierfachen Punkt. Die Ergänzung bilden die drei je 2fach zu zählenden Knotengeraden.

Bezeichnet $x_1 = 0$ die Hauptebene eines uniplanaren Knotens, so läßt sich die Gleichung der Fläche in folgender Form geben:

$$34) \qquad x_1^2\, x_4 + V^{(3)} = 0\,.$$

Da nun in den Gleichungen (1) bis (3) nicht nur die Determinante Δ, sondern auch deren sämmtliche Unterdeterminanten verschwinden, so reduziert sich die Gleichung (2) der Hesse'schen Fläche für diesen Fall auf

$$35) \qquad x_1^2\, W^{(2)} = 0\,,$$

woraus hervorgeht, daß die parabol. Kurve aus einer kompleten Raumkurve 6. Ordg., welche von einem Kegel 2. Ordg. ausgeschnitten wird, und aus den 3 Geraden des Knotens besteht, welche je zweifach zu zählen sind. Ein Blick auf unser Bild (Fig. 39) überzeugt uns, daß dieser Kegel $W^{(2)} = 0$, der den einen Teil der Hesse'schen Fläche bildet, einem Dreikant der 3 Ebenen, welche die Fläche in den Knotenstrahlen berühren und noch je eine unäre Gerade enthalten, einbeschrieben ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die 3 Knotenstrahlen sind, wenn wir in Gleichung (34) $c_{222} = 0$ setzen, gegeben durch:

$$36)\quad x_1 = 0, \quad x_3 (3\, c_{223}\, x_2^2 + 3\, c_{233}\, x_2\, x_3 + c_{333}\, x_3^2) = 0,$$

und wir haben, je nachdem

$$9\, c_{233}^2 - 12\, c_{223}\, c_{333} \gtreqless 0 \quad \text{ist, bezw.}$$

eine Fläche mit einem U_6 vom Typus 1_{XII} (Fig. 39)

oder mit einem U_7 vom Typus XV (Fig. 40)

oder mit einem U_6 vom Typus 2_{XII} (Fig. 41).

Verschwindet in Fig. 39 die obere Schleife, so daß eine Fläche mit einem uniplanaren Knoten U_7 entsteht, so rücken zwei Berührpunkte des Ovals (10) mit den 2 unären Geraden in den Knoten hinein. Um nun zu erkennen, in welcher Weise hier der Kontakt eintreten muß, lassen wir Fig. 40 aus Fig. 18 der Tafel 6 entstehen. Wenn dort die beiden C_2 mit dem B_3 zusammenrücken, so verschwindet ersichtlich die untere Schleife der parabol. Kurve, und jene Raumkurve 4. Ordg. erhält eine Spitze in der Weise, wie Fig. 40 zeigt.

Die parabol. Kurve auf der Fläche XV mit einem uniplanaren Knoten U_7 ist also eine komplete Raumkurve 4. Ordg., welche aus einem einzigen paren Zuge mit einer im U_7 befindlichen Spitze besteht. Die Gerade, in der zwei Knotenstrahlen vereinigt sind, ist Tangente im Rückkehrpunkt. Den Rest bilden die beiden Knotengeraden, von welchen die Gerade, längs der die Hauptebene die Fläche berührt, 6fach, die andere 2fach zu zählen ist.

Wenn wir beachten, daß die Raumkurve 6. Ordg. bei Fig. 39 im U_6 einen vierfachen, isolierten Punkt besitzt, so wird das Erscheinen der Spitze auch aus dem Übergang von Fig. 39 auf 40 klar. Gleichzeitig bemerken wir noch, daß der Kegel 2. Ordg., welcher die parabol. Kurve aus dem U_6 projizierte, nunmehr die Hauptebene und damit die Fläche längs der Tangente des Rückkehrpunktes berührt, so daß also die Raumkurve 6. Ordg. in eine Raumkurve 4. Ordg. und in 2 konsekutive Gerade zerfallen muß.

Wir wollen diese Überlegungen auch wieder durch die Rechnung bestätigen. Wenn wir zu diesem Zwecke einen Blick auf Fig. 40 werfen, aus welcher ja die Gestalt der Fläche leicht erkenntlich ist, so werden wir im stande sein, die Gleichung der Fläche sofort in einfachster Form anschreiben zu können. Eine wesentliche Konstante kann in derselben nicht mehr auftreten, weil nur eine Spezies existiert. Wir wollen die Koordinaten-Ebenen so wählen, daß ihre Schnitte mit der Fläche sich folgendermaßen darstellen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$x_1 = 0, \qquad x_2^2\, x_3 = 0;$$
$$x_2 = 0, \qquad x_1\,(x_1\, x_4 + x_3^2) = 0;$$
$$x_3 = 0, \qquad x_1^2\, x_4 = 0;$$

dann lautet offenbar die Gleichung der Fläche 3. Ordg.:

$$37) \qquad F^{(3)} \equiv x_1^2\, x_4 + x_2^2\, x_3 + x_1\, x_3^2 = 0,$$

und die der zugehörigen Hesse'schen Fläche:

$$38) \qquad H \equiv x_1^2\,(x_1\, x_3 - x_2^2) = 0.$$

Die parabol. Kurve ergibt sich somit auch als Schnitt der beiden Kegel 2. Ordg.:

$$39) \qquad K \equiv x_1\, x_3 - x_2^2 = 0,$$
$$x_1\, x_4 + 2\, x_3^2 = 0,$$

womit dargelegt ist, daß sie eine komplete Kurve 4. Ordg. ist.

Die Spitze im U_7 wird erkenntlich, wenn wir die parabol. Kurve als Schnitt der beiden Kegelflächen:

$$40) \qquad x_2^2\, x_4 + x_3^3 = 0$$
$$\text{und } x_1\, x_4 + 2\, x_3^2 = 0 \text{ betrachten.}$$

Der Kegel 2. Ordg. (39), welcher die parabol. Kurve aus dem Knoten projiziert, berührt die Fläche längs der Geraden, in welcher die beiden Knotengeraden zusammengefallen sind, und diese ist augenscheinlich die Tangente im Rückkehrpunkt der Raumkurve 4. Ordg. Werden diese 2 Knotengeraden nun konjug. imaginär, so reißt der spitze Teil der Fläche im Knoten ab, wie Fig. 41 zeigt. Die Spitze der parabol. Kurve muß nun auch verschwinden.

Um den neuen Kontakt der parabol. Kurve mit der Knotengeraden klarer zu erkennen, lassen wir diese Fläche 2_{XII} aus der Fläche 3_V (Fig. 23) entstehen, indem wir dort den positiv gekrümmten, rundlichen Teil zum Verschwinden bringen, worauf die Hauptebenen zusammenfallen. Die Zweige der parabol. Kurve können dabei ersichtlich keine wesentlichen gestaltlichen Veränderungen erleiden.

Bei diesem Übergange geht die Partialkurve 10. Ordg. der in Fig. 23 dargestellten Fläche in eine komplete Raumkurve 6. Ordg. über, indem sich die zwei konjugiert imaginären Knotengeraden, welche je zweifach zu zählen sind, abscheiden. Die Hauptebenen müssen also aufhören Wendeberührebenen der parabol. Kurve im Knoten zu sein, sobald das Zusammenfallen erfolgt ist. Die Hauptebene in diesem uniplanaren Knoten ist für jeden Ast der parabol. Kurve nur eine einfache Tangentialebene. Daß wir es wieder mit einer Raumkurve 6. Ordg. zu thun haben, sehen wir noch deutlicher aus dem Übergang von Fig. 40 auf 41, bei welchem die Tangente

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

im Rückkehrpunkt sich wieder der Raumkurve 4. Ordg. anschließt, indem sich aus ihr ein Oval entwickelt.

Die parabol. Kurve auf einer Fläche mit einem uniplanaren Knoten U_6 vom Typus 2_{XII} ist also eine Kurve 6. Ordg., welche in ihrem reellen Teile aus 2 Ovalen besteht, die beide den reellen Knotenstrahl im U_6 berühren, und von welchen das eine noch die einzige reelle unäre Gerade berührt.

Bei den beiden Flächen XII besitzt die Raumkurve 6. Ordg. im U_6 einen 4fachen Punkt.

Die Fläche XX mit einem U_8 (Fig. 42) erhalten wir aus Fig. 37, wenn wir dort die beiden B_3 mit dem C_2 zusammenrücken lassen.

Aus diesem Übergang wird klar, daß die Gerade auf der Fläche XX, in welcher die Hauptebene die Fläche oskuliert, als Glied der parabol. Kurve 10fach gezählt werden muß, und daß der übrige Teil dieser Kurve ein reeller Kegelschnitt ist, welcher diese Gerade im Knoten berührt. Der Kegel 4. Ordg. (K), welcher die parabol. Kurve aus dem Knoten projiziert, zerfällt hier in 4 Ebenen, von welchen 3 in der Hauptebene beisammen liegen, während die vierte den reellen Kegelschnitt ausschneidet. Das Gebiet innerhalb des Kegelschnitts auf der Fläche, welches im Bilde das ganze sichtbare Blatt außerhalb des Kegelschnitts überdeckt, zeigt positive Krümmung. In unserem Falle ist in diesem Gebiete das Proj.-Zentrum gewählt.

9. Die parabolischen Kurven auf den Flächen mit zwei konjugiert imaginären biplanaren Knoten.

Die Fläche XX bildet den Übergang von den Flächen mit 2 reellen zu den Flächen mit 2 konjug. imaginären biplanaren Knoten B_3. Nehmen wir mit der Umrißkurve die entsprechende Deformation vor, so gelangen wir zunächst zur Fläche 3_{XVII} (Taf. 3). Dabei wird der Kegelschnitt natürlich nicht ohne weiteres verschwinden, sondern er wird isoliert von der sich abstoßenden Geraden und von der Umrißkurve im sichtbaren Blatte verlaufen. Die reelle Gerade zählt als Glied der parabol. Kurve jetzt nur mehr 4fach, die zwei konjug. imaginären Geraden durch den isolierten C_2 und die imaginäre B_3 je 3fach. Entwickelt sich auch der ins Innere der Umrißkurve sich abstoßende, isolierte Punkt (das Bild des reellen, isolierten C_2) zu einem Oval, so daß die Fläche 3_{IX} entsteht, so wird der Kegelschnitt immer noch keine wesentliche Veränderung erleiden. Es zerfällt dabei nur die Ebene, welche durch die Knotenachse und den C_2 geht, in eine reelle Ebene und in 2 konjug. imaginäre Ebenen. Tritt das innere Oval der Umrißkurve der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fläche 3_{IX} mit dem äußeren dadurch in Verbindung, daß sich ein Doppelpunkt einstellt, so haben wir die Umrißkurve der Fläche 2_{XVII}; hier fallen die 3 erwähnten Ebenen wieder zusammen. Bevor dies aber eintreten kann, müssen auf dem äußeren Zweige reelle Wendepunkte erscheinen, so daß A_1 jetzt reell berührt. Das Proj.-Zentrum hat dabei die parabol. Kurve, den reellen Kegelschnitt, überschritten.

Der Kegelschnitt muß unterdessen die Umrißkurve in den entstehenden reellen Wendepunkten berühren. Sobald jetzt der konische Knoten erscheint, so zieht sich der Kegelschnitt, welcher auf dem unparen Teil der Fläche das positiv gekrümmte Gebiet abgrenzte, auf einen Punkt zusammen in den Knoten hinein; denn die Wendepunkte unserer Umrißkurve werden von dem entstehenden Doppelpunkt absorbiert. Es ist ja auch klar, daß ein konischer Knoten, wie der bei der Fläche 2_{XVII} nur dadurch entstehen kann, daß zwei positiv gekrümmte Flächenteile sich nähern. Sobald aber ein derartiger Knoten, bei dem alle Knotengeraden imaginär sind, entstanden ist, so ist der Teil innerhalb des Knotenkegels ringsum positiv gekrümmt, und der andere Teil außerhalb des Knotenkegels zeigt ringsum nur negative Krümmung.

Löst sich bei der Fläche 2_{XVII} der C_2 durch Verbindung, dann erscheint die Fläche 4_{IX}; es treten in der Umrißkurve die 2 Wendepunkte wieder auf, und aus dem Knoten heraus entwickelt sich wieder ein Kegelschnitt, so daß er im Bilde in den Wendepunkten die Umrißkurve berührt. Wir können also jetzt über die Flächen mit 2 konjug. imaginären B_3 im Zusammenhang mit den Verhältnissen bei den Flächen mit zwei reellen B_3 folgendes aussagen:

Die parabol. Kurve besteht außer der 4fach zu zählenden Knotengeraden aus 4 Kegelschnitten, welche von 4 durch die Knotengerade gehenden Ebenen ausgeschnitten werden. Von diesen Ebenen sind stets 2 reell und 2 konjug. imaginär; aber von den ersteren Ebenen schneidet nur die eine die Fläche nach einem reellen Kegelschnitt, die andere nicht.*)

Der Kegel 4. Ordg., welcher die parabol. Kurve aus dem einen Knoten projiziert, ist bei den Flächen mit zwei biplanaren Knoten in 4 Ebenen zerfallen, die bei den Flächen mit zwei konjug. imaginären B_3 das folgende Verhalten zeigen:

Auf der Fläche 3_{XVII} fallen in der Ebene, welche die 3 Knoten enthält, die 2 konjug. imaginären Ebenen mit einer reellen Ebene zusammen, die andere reelle Ebene trifft die Fläche in dem reellen Kegelschnitt.

---

*) Dr. Schläfli, a. a. O.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gehen wir von dieser zur Fläche 3_{IX} über, so zerfällt die Ebene, welche durch die 3 Knoten ging, in eine reelle Ebene, welche aber die Fläche in einem imaginären Kegelschnitt trifft, und in 2 konjug. imaginäre Ebenen. Auf der Fläche 2_{XVII} vereinigen sich dann in der Ebene durch die 3 Knoten die 2 konjug. imaginären Ebenen mit der reellen Ebene, die vorher einen reellen Kegelschnitt enthielt, während die andere reelle Ebene ihre Rolle beibehält. Entsteht aus der ebengenannten Fläche die Fläche 4_{IX}, so zerfällt die Ebene der drei Knoten in eine reelle Ebene, welche einen reellen Kegelschnitt ausschneidet und in 2 konjug. imaginäre Ebenen, während die andere reelle Ebene wieder nur einen imaginären Kegelschnitt mit der Fläche gemein hat.

Bezeichnen wir mit R_r die reelle Ebene, welche die Fläche in einem reellen Kegelschnitt schneidet, mit R_i die reelle Ebene, welche sie in einem imaginären Kegelschnitt trifft, mit J', J'' die beiden konjug. imaginären Ebenen, so erhalten wir folgende Zusammenstellung:

3_{XVII}	R_r	$(R_i$	J'	$J'')$
3_{IX}	R_r	R_i	J'	J''
2_{XVII}	$(R_r$	J'	$J'')$	R_i
2_{IX}	R_r	J'	J''	R_i

Die beiden reellen Ebenen R_r und R_i vertauschen also bei diesen Übergängen nur ihre Rollen in ihrem Verhalten gegen die imaginären Ebenen, während betreffs des reellen und imaginären Kegelschnitts keine Vertauschung eintritt.

Die Fläche 2_{XVII} zeigt nur auf dem paren Teile durchaus positive Krümmung, das ganze übrige Gebiet ist negativ gekrümmt.

Verschwindet der pare Teil, so gelangen wir zur Fläche 2_{XXI}, welche also in allen Teilen negative Krümmung zeigt; die oben erwähnten 4 Ebenen fallen hier in der Ebene durch die 3 B_3 zusammen. Die beiden Flächen 1_{XXI} und 2_{XXI} unterscheiden sich also auch dadurch von einander, daß die erstere durchaus positiv, die letztere durchaus negativ gekrümmt ist. Die parabol. Kurve besteht in jedem Falle aus den drei Knotengeraden, welche je 4fach zu zählen sind; bei 2_{XXI} sind zwei davon konjug. imaginär.

Das Verhalten der parabol. Kurven in den vielfachen Punkten der Flächen 3. Ordg. in bezug auf die Geraden, welche durch jene Singularitäten laufen, läßt sich folgendermaßen zusammenfassen:

Im konischen Knoten berühren die Äste der parabolischen Kurve die durchlaufenden reellen Knotengeraden, solange diese getrennt auftreten, und es sind auch stets soviele reelle Zweige vorhanden, als reelle Knotenstrahlen existieren. In den höheren Knoten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

findet keine Berührung der Zweige der parabolischen Kurven mit den Knotengeraden mehr statt; wenn aber die Knotenachse, die Schnittgerade der Hauptebenen, auf der Fläche selbst liegt, so gehen die parabolischen Kurven im Knoten mit dieser einen höheren Kontakt ein.

Auf der Tafel 7 sind in den Figuren 9 bis 12 Teile von Flächen 3. Ordg. mit biplanaren Knoten mit reellen Hauptebenen, jedesmal mit der Maximalzahl der möglichen reellen Knotengeraden behaftet, in perspektivischer Ansicht dargestellt.

In den Fig. 13 bis 16 sind in gleicher Weise die verschiedenen uniplanaren Knoten skizziert. Die Zweige der parabol. Kurven, die auf diesen Gebieten verlaufen, sind rot eingezeichnet. Die Hauptebenen sind in bläulichem Ton gehalten und als durchsichtig angesehen, während die Flächenteile als undurchsichtig behandelt sind.

Der Zusammenhang der Flächen in der Knotennähe läßt sich für die biplanaren Knoten ersichtlich auf folgende Art charakterisieren:

Eine um den Knoten beschriebene, genügend kleine Kugel schneidet auf den Flächen mit einem B_3, B_5.... ein einziges räumliches Oval aus, während sie die Flächen mit einem C_2, B_4, B_6,.... in zwei getrennten Ovalen trifft.

Diese Bemerkung hat übrigens auch für die Knotenpunkte mit konjug. imaginären Hauptebenen Geltung. Vergegenwärtigen wir uns hier auch nochmal die Thatsache, daß die B_3, B_5.... durch Zusammenziehung einer geraden Anzahl von Flächenquerschnitten, die nach Art der Glieder einer Kette zusammenhängen, entstehen, während die C_2, B_4, B_6.... eine ungerade Anzahl solcher Querschnitte beanspruchen.

Ein weiteres charakteristisches Merkmal der Flächengestalt in der Knotennähe läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Bei ungefähr regelmäßiger und symmetrischer Beschaffenheit der Fläche in der Nähe des Knotens findet beim C_2, B_4, B_6.... Symmetrie in bezug auf die im Knoten zu seiner Achse senkrechte Ebene statt, während bei den Flächen mit einem B_3, B_5,.... der untere Teil erst dann als das Spiegelbild des oberen in bezug auf jene Ebene erscheint, wenn der eine dieser Teile um 90^0 um die Knotenachse gedreht wird. (In letzterem Falle müssen wir uns natürlich die Hauptebenen aufeinander senkrecht denken.)

Fig. 13 gibt das Bild der Fläche in der Nähe eines uniplanaren Knotens U_6 mit drei reellen Geraden; Fig. 14 zeigt einen uniplanaren Knoten U_7, bei welchen zwei der 3 reellen Geraden des U_6 zusammenfallen, in Fig. 15 haben wir einen U_6, bei welchem zwei der drei Knotengeraden konjug. imaginär sind und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 16 zeigt schließlich noch das Bild eines uniplanaren Knotens U_8, bei welchem die drei Knotengeraden des U_6 vereinigt sind.

Abbildung von ebenen Kurven auf den Flächen 3. Ordnung in die Ebene.

Die Formen der Flächen an interessanten Stellen, z. B. in der Nähe von Singularitäten, sind wohl aus unsern Abbildungen leicht vorstellbar. Wir können jedoch die Gestalt einer Fläche an einer bestimmten Stelle der Anschauung nach näher bringen, wenn wir dort einige ebene Schnitte konstruieren, die etwa von einem Ebenenbüschel herrühren mögen, und wenn wir dann die erhaltenen Schnittkurven, soweit sie im unsichtbaren Blatte liegen, punktieren, und, soweit sie dem sichtbaren Blatte angehören, ausziehen.

Wie wir solche ebene Schnittkurven herzustellen vermögen, lehrt die folgende Überlegung:

Wir erläuterten eingangs, daß irgend eine Ebene eine Fläche 3. Ordg. nach einer Kurve 3. Ordg. A_3', den Tangentenkegel aus p in einer Kurve 4. Ordg. U_4' und die erste Polare P_2 des Proj.-Zentr. p in bezug auf die Fläche nach einem Kegelschnitte K_2' derart schneidet, daß die A_3' die U_4' in den 6 Punkten berührt, in welchen der K_2', der außerdem noch durch die Berührpunkte von A_1' mit U_4' geht, die Kurve U_4' schneidet. A_1' bezeichnete die Schnittlinie der Tangentialebene in p, welche auch Tangentialebene des Tangentenkegels aus p ist, mit der schneidenden Ebene. An diesem Zusammenhang der 3 Kurven A_3', U_4', K_2' und der Geraden A_1', wird offenbar nichts geändert, wenn wir sie aus p in eine andere Ebene durch Projektion abbilden.

Die Kurve U_4' bildet sich in unserer Bildebene in der Umrißkurve U_4, A_1' in A_1 ab, und dem Kegelschnitt K_2' entspricht ein Kegelschnitt, welcher durch die Berührpunkte von A_1 mit U_4 geht und die U_4 in noch weitern 6 Punkten schneidet, in welchen die Abbildung von A_3', die Umrißkurve berührend, von einem Blatt ins andere übertritt.

Führen wir umgekehrt in unserer Bildebene eine derartige Konstruktion aus, was ja immer möglich ist, da in dem Kurvenbüschel 4. Ordg., dessen eine Basiskurve U_4 selbst und dessen andere Basiskurve der willkürlich durch die beiden Berührpunkte von A_1 mit U_4 gelegte, doppelgezählte Kegelschnitt ist, stets eine Kurve 3. Ordg. von der verlangten Eigenschaft auftritt, so haben wir hier wirklich die Abbildung eines bestimmten Ebenenschnittes vor uns.

Denn der Kegelschnitt, den wir durch die Berührpunkte c, d von A_1 mit U_4 zu legen haben, ist eindeutig durch 3 beliebig angenommene Punkte α, β, γ bestimmt. Mit diesen drei Punkten ist also das ganze Schnittgebilde in der Bildebene festgelegt. Diese drei Punkte bestimmen aber auch eindeutig eine Ebene im Raume,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

deren Schnitten mit P_2 und $F^{(3)}$ die in der Bildebene in der angegebenen Weise konstruierten Kurven entsprechen müssen. Es ist dies nämlich die Ebene $(\alpha' \beta' \gamma')$, welche durch die Punkte α', β', γ' geht, in welchen die Strahlen $p\alpha$, $p\beta$, $p\gamma$ die Polare P_2 treffen.

In diesem Zusammenhange entsprechen den ∞^3 Ebenen des Raumes die ∞^3 Kegelschnitte, welche durch die Berührpunke c, d von A_1 mit U_4 gehen, welche also die Bilder der Schnitte jener Ebenen mit P_2 sind. Die Bildebene wird von den Projektionen der Punkte auf der Polarfläche in ihrer ganzen Ausdehnung einfach überdeckt.

Wählen wir also in der Bildebene irgend 2 Punkte a, b, so können wir diese als die Bilder von 2 Punkten a', b' ansehen, in welchen die Strahlen pa, pb die P_2 noch treffen. Die beiden Punkte a, b legen also eine Gerade a' b' im Raume fest.

Indem wir alle Kegelschnitte des Büschels (a b c d) konstruieren, erhalten wir die Bilder aller der Kegelschnitte, welche das Ebenenbüschel, dessen Achse die Gerade (a' b') ist, auf P_2 ausschneidet.

Diese Kegelschnitte bedecken die Ebene einfach. Jedem dieser Kegelschnitte entspricht in dem angegebenen Zusammenhang eine Kurve 3. Ordg. Diese Kurven 3. Ordg. sind die Bilder der Kurven, nach welchen das Ebenenbüschel (a' b') die Fläche schneidet; sie bedecken die Ebene doppelt. Wir können jetzt, indem wir vom Raum in die Ebene übergehen, für ebene Kurven 4. Ordg. folgenden Satz aussprechen:

Wenn wir durch die Berührpunkte einer Doppeltangente einer Kurve 4. Ordg. U_4 und irgend 2 andere Punkte der Ebene ein Kegelschnittsbüschel legen, so schneiden die Elemente desselben die Kurve 4. Ordg. in je 6 Punkten, in welchen jedesmal eine Kurve 3. Ordg. die U_4 berührt. Das System von Kurven 3. Ordg. bedeckt die Ebene doppelt, und diese Kurven schneiden sich in 3 Punkten auf der Geraden, welche durch die beiden willkürlich gewählten Basispunkte geht.

Wir können dies benützen, um einige ebene Schnittkurven, die von den Ebenen eines Ebenenbüschels herrühren, zu konstruieren, wodurch die Gestalt der Fläche an einer bestimmten Stelle erkennbar wird.

Allein, da es immer noch sehr umständlich ist, Kurven 3. Ordg. aus einer gegebenen Anzahl von Punkten zu konstruieren, so wollen wir statt einer beliebigen Geraden ab eine Gerade der Fläche auswählen, durch welche wir unser Ebenenbüschel legen. Die beiden Punkte a, b, welche den Schnittpunkten der Geraden mit der P_2 entsprechen, sind hier die Berührpunkte der Geraden mit der Kurve 4. Ordg. Nun haben wir bloß Kegelschnitte zu konstruieren, welche eine Kurve 4. Ordg. in 4 gegebenen Punkten berühren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der obige Satz lautet jetzt:

Wenn wir durch die 4 Berührpunkte von irgend 2 Doppeltangenten einer ebenen Kurve 4. Ordg. ein Kegelschnittbüschel legen, so schneidet jedes Element desselben die Kurve 4. Ordg. in 4 Punkten, in welchen sie ein Kegelschnitt berührt*).

Alle diese Kegelschnitte bedecken die Ebene doppelt. Jeder Kegelschnitt des Büschels (a b c d) ist bestimmt durch einen weitern Punkt, entsprechend dem Punkte im Raum, der die Ebene aus dem Büschel (a' b') festlegt.

In jedem solchen Kegelschnittsystem treten stets so viele Geradenpaare auf als an der Geraden a' b' reelle Tritangentialebenen hängen und außerdem noch das Geradenpaar a b, c d.

Bei einer Kurve 4. Ordg. mit 28 reellen Doppeltangenten treten in jedem solchen Kegelschnittsystem 6 Geradenpaare auf.

Nebenbei können wir hier auch die Zahl der Kegelschnittsysteme konstatieren, deren sämmtliche Kegelschnitte eine Kurve 4. Ordg. in 4 Punkten berühren. Es ist klar, daß an einem solchen Kegelschnittsystem sich nichts ändert, wenn A_1 und a b die Rollen vertauschen, obgleich dadurch die entsprechende Fläche 3. Ordg. eine andere wird und sich gleichzeitig damit die Schnitt- und Lagenverhältnisse der den Doppeltangenten entsprechenden Geraden im Raume verändern.

Es existierten demnach bei einer Kurve mit 28 reellen Doppeltangenten $\frac{28 \cdot 27}{2} = 378$ Systeme 4mal berührender Kegelschnitte. Nun ist aber zu bemerken, daß in jedem System 6 Geradenpaare auftreten, die, wie wir leicht einsehen, immer wieder zum Vorschein kommen, wenn wir die Rollen von A_1 und (a b) einem anderen der übrigen 5 Geradenpaare in demselben System übertragen, woraus folgt, daß dadurch das ganze System keine Änderung erleidet. Ein solches System

$$P + \lambda Q + \lambda^2 R = 0$$

ist schon durch 3 Geradenpaare $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ bestimmt. Die obige Zahl ist also für die Kurve mit 28 reellen Doppeltangenten noch mit 6 zu dividieren; wir finden dann die schon anderweitig öfters genannte Zahl 63**).

In gleicher Weise lassen sich die entsprechenden Zahlen auch für die übrigen Kurven 4. Ordg. bestimmen.

---

*) Hesse: Über Doppeltangenten der Kurven 4. Ordnung; Crelle, Band 49, §. 10.

**) Hesse, a. a. O. Seite 155. u. Klein: Über Abel'sche Integrale, Math. Annal. Bd. X u. XI.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auf der Taf. 7 sind 2 Beispiele, Fig. 7 und 8, nach den vorhin erwähnten Gesichtspunkten gegeben. Fig. 7 zeigt das Bild einer Fläche mit einem B_3 (1_{III}), Fig. 8 das einer Fläche mit einem B_4 (1_V). Um die Gestalt einer Fläche in der Nähe des Knotens zu ermitteln, sind durch die Gerade a b eine Reihe von Ebenen gelegt und die Kegelschnitte, welche diese auf der Fläche ausschneiden, annäherungsweise konstruiert.

Die schneidende Ebene durch a b durchläuft, in gleichem Sinne um a b gedreht, nacheinander die Schnitte 1, 2, 3, ... 10, worunter ein Geradenpaar (5) sich befindet. Die Gestalt der Flächen an diesen singulären Stellen springt nun aus den beiden Figuren ohne weiters in die Augen.

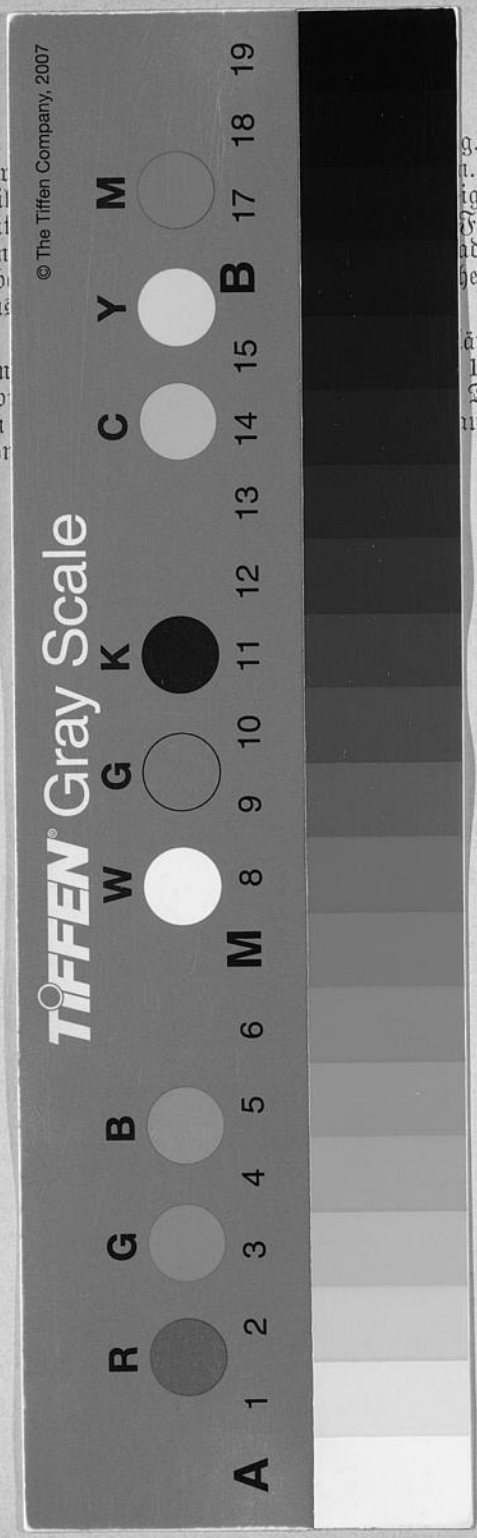
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

vor
Bil
mit
Kn
Eb
aus

um
wo
an
ohr

g. 7 und 8, nach den
n. Fig. 7 zeigt das
ig. 8 das einer Fläche
Fläche in der Nähe des
ade a b eine Reihe von
he diese auf der Fläche

läuft, in gleichem Sinne
1, 2, 3, ... 10,
Die Gestalt der Flächen
aus den beiden Figuren



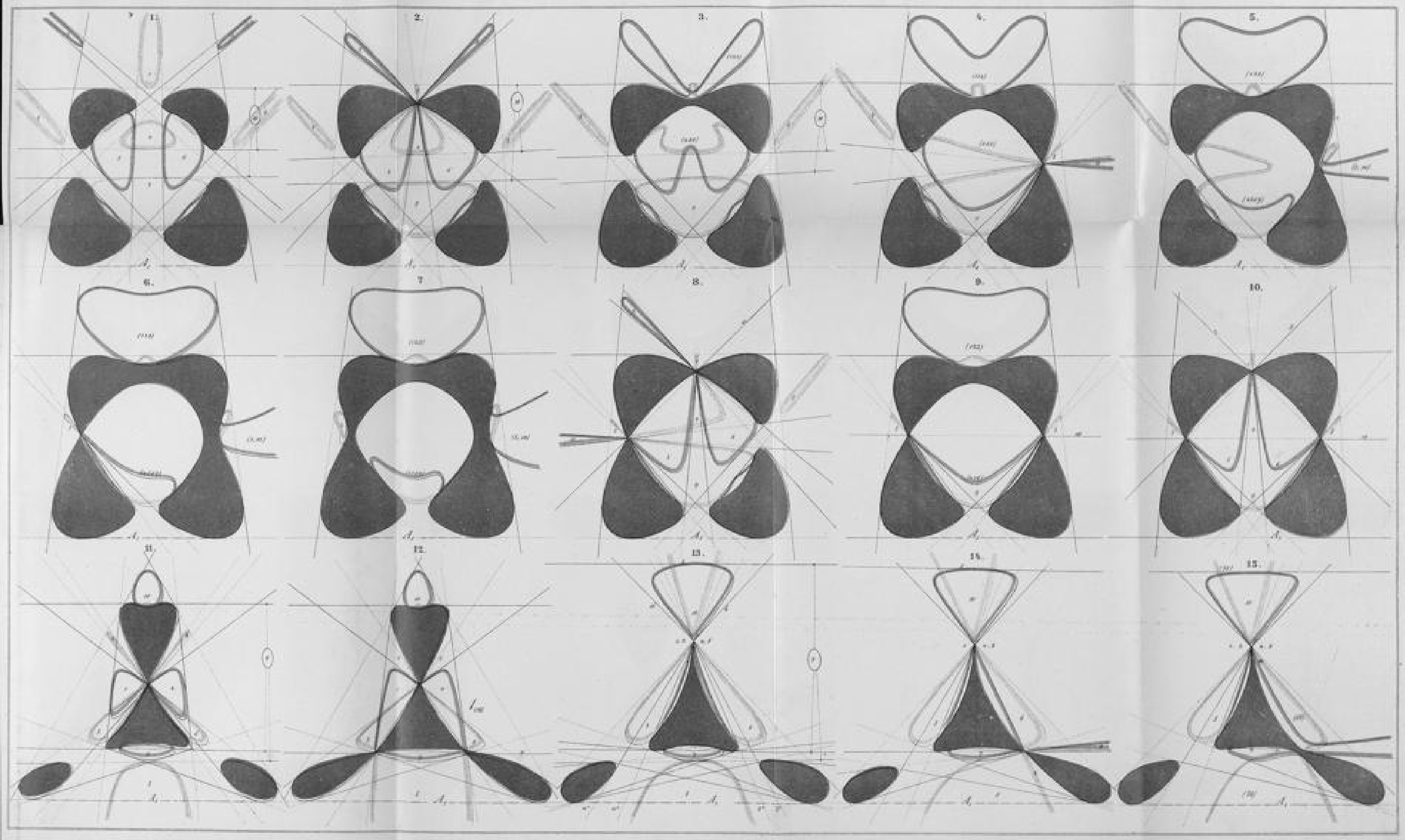
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

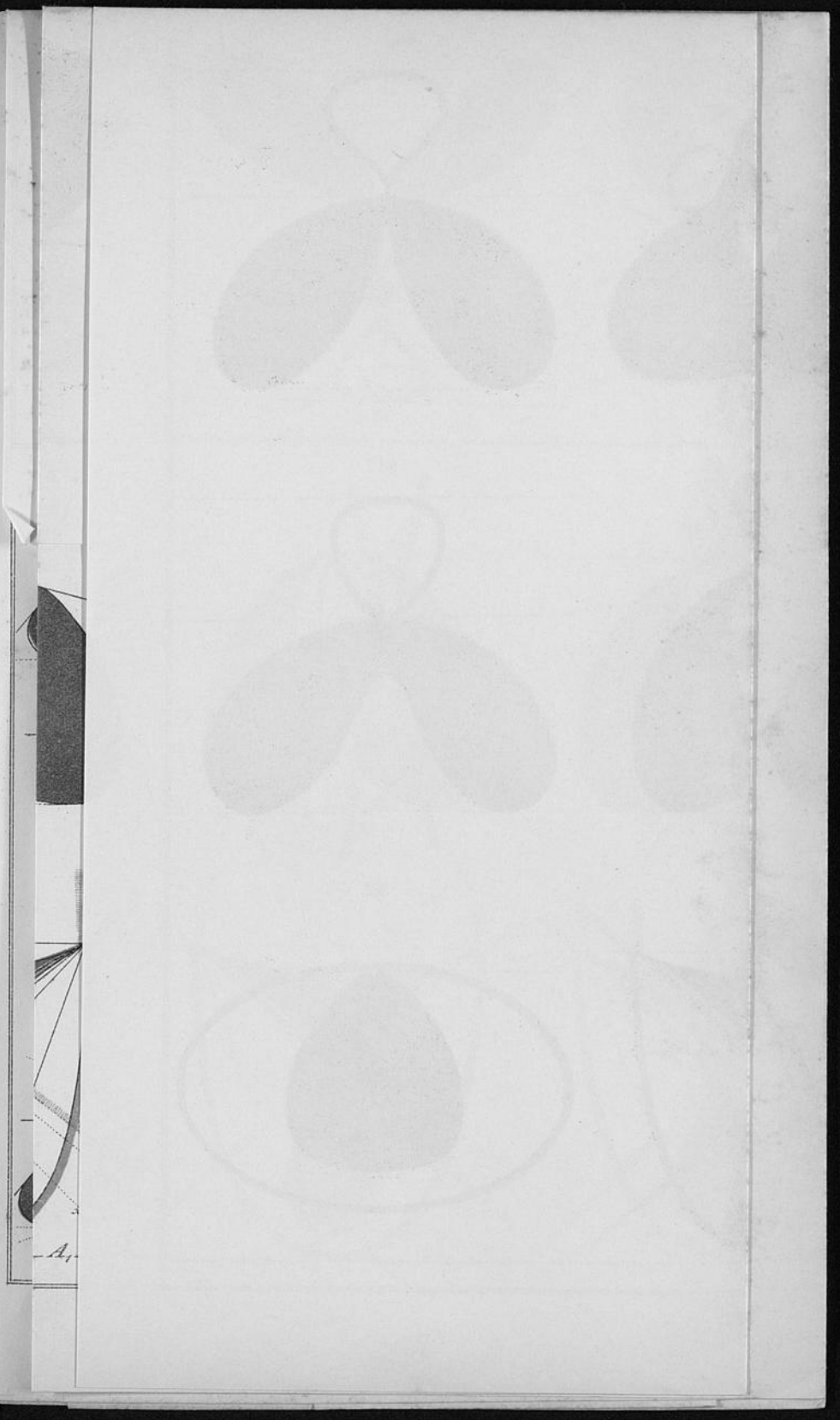
Tafel 5.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

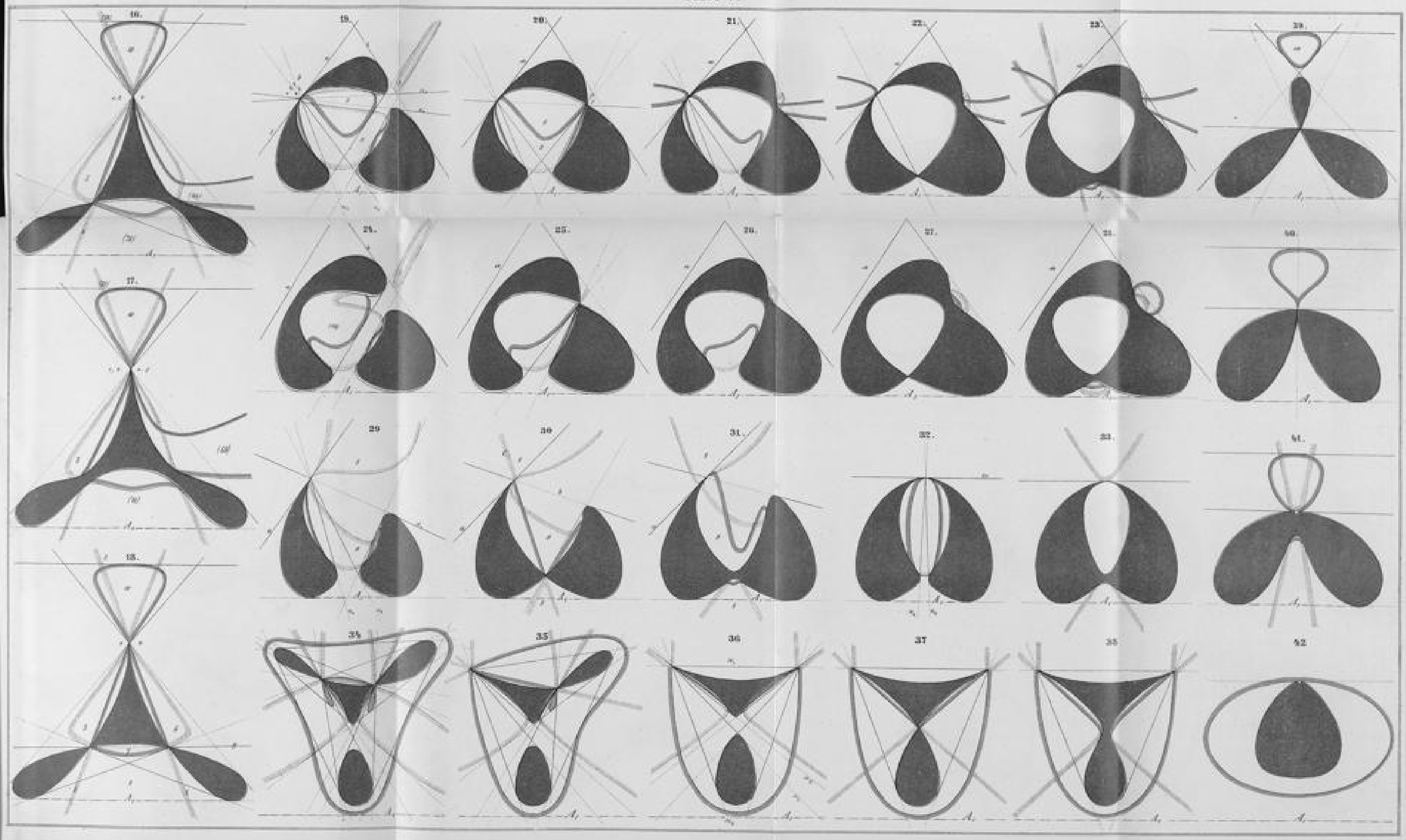
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

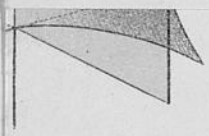
Tafel 6.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

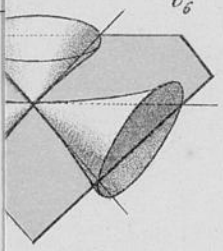
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

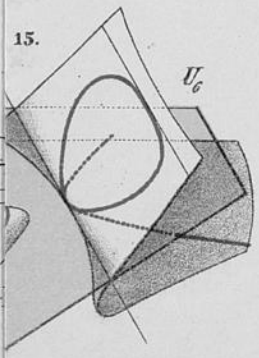


Die un

13.

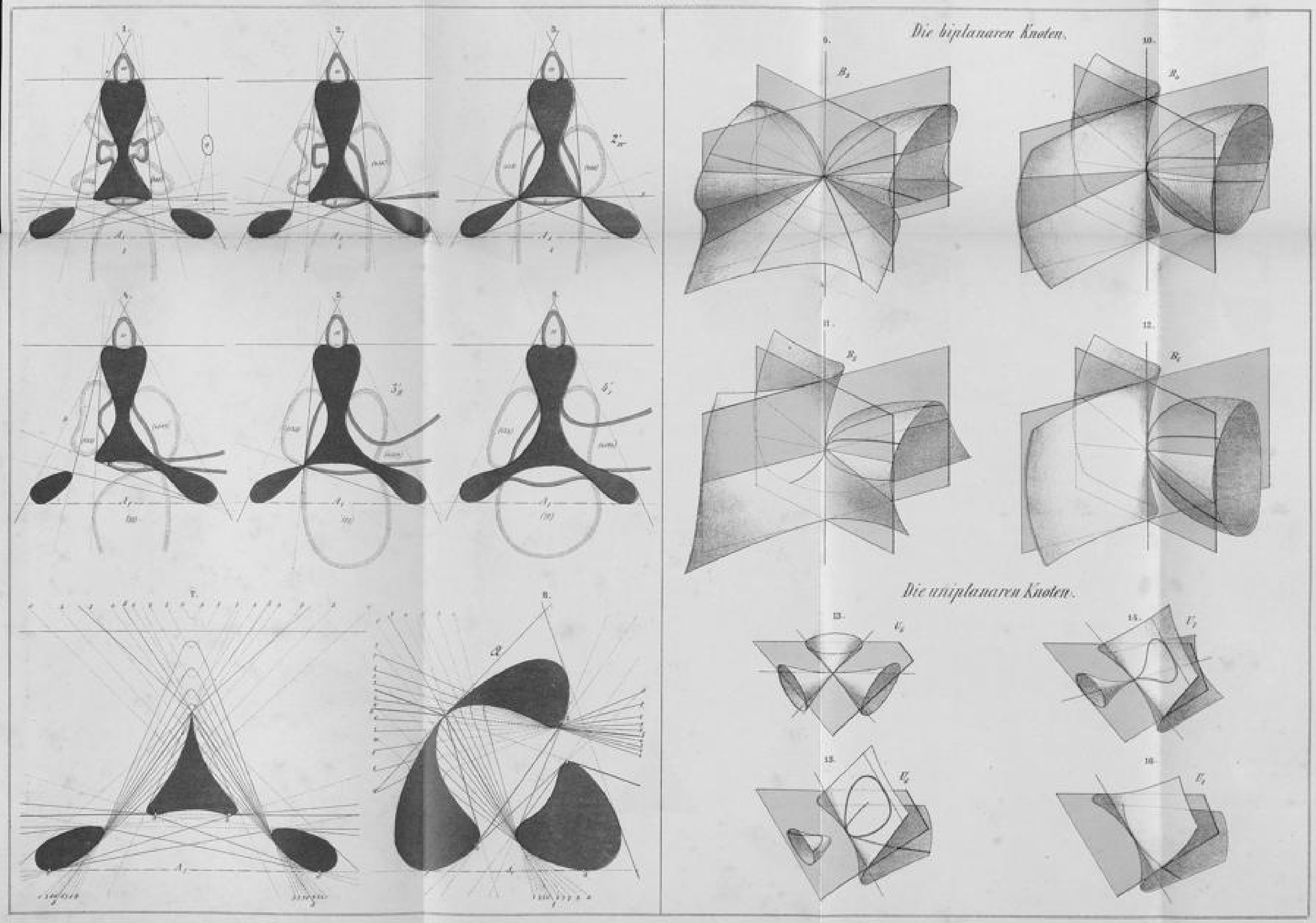


15.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tafel 7.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf