Über

die gestaltlichen Verhältnisse der Flächen dritter Ordnung und ihrer parabolischen Kurven.

Von

Dr. Gottlieb Herting.

Programm

zu dem

Jahresberichte der königl. Studienanstalt bei St. Anna

in Augsburg.

Augsburg.
Druck von Ph. J. Pfeiffer.
1887.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Einleitung.

Herr Geyser hat in einem Aufsatze im I. Bd. der Math. Annal.: „Über Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierten Grades" auf die interessanten Beziehungen zwischen den Geraden der Flächen dritter Ordnung und den Doppeltangenten der ebenen Kurven vierter Ordnung aufmerksam gemacht. Auf diesen Zusammenhang hat dann Herr Zeuthen die Resultate seiner Untersuchungen: „Sur les différentes formes des courbes du quatrième ordre," Math. Annal. Bd. VII, angewandt und gezeigt, daß den fünf Flächenspezies dritter Ordnung ohne Singularitäten mit bezw. 27, 15, 7, 3, 3 reellen Geraden die sechs Kurven vierter Ordnung ohne vielfache Punkte in der Weise entsprechen, daß den Flächen I., II., III. und IV. Spezies bezw. die vier-, drei-, zwei- und einteiligen Kurven und der V. Spezies die Gürtelkurven oder die imaginären Kurven vierter Ordnung zukommen.

Es stellen sich nämlich diese Kurven als Umrißkurven der genannten Flächen ein, wenn diese von beliebig auf ihnen gewählten Punkten aus in eine Ebene projiziert werden. Dabei ist die Schnittlinie der Tangentialebene der Fläche im Projektionszentrum mit der Bildebene eine Doppeltangente der Umrißkurve; alle übrigen Doppeltangenten entsprechen den geraden Linien auf der Fläche.

In einem sich an die obengenannte Arbeit anschließenden Aufsatze: „Etudes des propriétés de situation des surfaces cubiques," Math. Annal. Bd. VIII, legt dann Herr Zeuthen mit Hilfe der eben angedeuteten Abbildung der Flächen dritter Ordnung in die Doppelebene, die Schnitt- und Lagenverhältnisse der Geraden und Tritangentialebenen auf den bereits genannten fünf Flächenspezies 3. Ordg., sowie den Verlauf der parabolischen Kurven auf diesen Flächen in sehr anschaulicher Weise dar. In der vorliegenden Arbeit sollen nun vermittelst dieser Zeuthen'schen Abbildungsweise die gestaltlichen Verhältnisse aller Flächen 3. Ordg. studiert, und der Verlauf der parabolischen Kurven auf diesen sämtlichen Flächen, insbesondere auch das Verhalten dieser Kurven in den singulären Punkten der Flächen untersucht werden.

Bei dieser Abbildung entsprechen jeder Fläche, je nach der Lage des Projektionszentrums, einige wenige bestimmte Kurventypen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

vierter Ordnung als Umrißkurven. Umgekehrt aber entspricht jeder vorgegebenen Umrißkurve 4. Ordg., nachdem einmal die erwähnte Doppeltangente, welche eine eigentliche oder uneigentliche sein kann, gewählt ist, ein bestimmter Flächentypus 3. Ordg., der nun durch die Singularitäten der Umrißkurve, welchen gewisse Singularitäten der Fläche entsprechen, und durch die aus den eigentlichen und uneigentlichen Doppeltangenten der Umrißkurve sich ergebenden Geraden und Tritangentialebenen charakterisiert ist.

Es entspricht nämlich im allgemeinen einem konischen Knoten der Fläche ein Doppelpunkt, einem biplanaren Knoten B_3 eine Spitze erster Art, einem bipl. Knoten B_4 ein Selbstberührungspunkt, einem bipl. Knoten B_5 eine Spitze zweiter Art, einem bipl. Knoten B_6 ein Oskulationsknoten und einem uniplanaren Knoten ein dreifacher Punkt in der Umrißkurve und umgekehrt.*)

In dem ersten Abschnitt A, der die Ableitung der verschiedenen Flächen behandelt, werden wir die Flächen in der Weise auseinander hervorgehen lassen, daß wir die Umrißkurven auf alle möglichen Arten deformieren, daß wir denselben alle möglichen Singularitäten erteilen und diese ganz oder teilweise auf die eine oder andere Art auflösen.

Wir werden also die Deformationen, welche die Flächen ineinander überführen, an ebenen Kurven 4. Ordg. vor sich gehen lassen, indem wir stets in passender Weise Kurvenbüschel 4. Ordg. herstellen, in welchen die Umrißkurve die beabsichtigten Deformationen mit einer Aenderung des Parameters in der Kurvengleichung erfährt.

Wenn wir in den so entstandenen Bildern die Geraden und andere Linien auf der Fläche in der Weise einzeichnen, daß wir sie auf den Strecken, welche in's sichtbare Blatt entfallen, „auszieh en" und auf den Strecken, welche dem unsichtbaren Blatte angehören „punktieren", wie es in den beigegebenen Figurentafeln geschehen, so gelingt es leicht, eine klare Vorstellung von den gestaltlichen Verhältnissen einer Fläche, welche einer vorliegenden Umrißkurve entspricht, zu gewinnen, insbesonders wenn wir die Umrißkurve stets so wählen, daß gerade der interessantere Teil der Fläche in reeller Kontur erscheint.

Im zweiten Abschnitt B**) werden wir dann untersuchen, welche Veränderungen bei diesen Deformationen der Umrißkurve die parabolische Kurve auf der Fläche erfährt.

Wir werden, indem wir von der allgemeinsten Fläche 3. Ordg. ausgehen und immer mehr und mehr spezialisieren, in den Abbildungen das Verhalten der parabolischen Kurven bei den verschiedenen Uebergängen in sehr anschaulicher Weise verfolgen können,

*) Der bei diesen Knotenbezeichnungen angefügte Index gibt die Reduktion an, welche der Knoten auf die Klassenzahl der Fläche ausübt.

**) Dieser zweite Teil soll Gegenstand der nächstjährigen Programmarbeit werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so daß wir bei jeder Fläche den Verlauf der reellen Teile der parabolischen Kurve anzugeben im stande sein werden.

Wird die Untersuchung der parabolischen Kurve in den Singularitäten der Fläche die Aufstellung der Gleichung einer Fläche nötig erscheinen lassen, so wird ein Blick auf das Bild der betreffenden Fläche genügen, um sofort ihre Gleichung in reduziertester Form anschreiben zu können.

I. Methode der Abbildung.

Es bezeichne F_3 eine Fläche 3. Ordg.,
- p einen beliebigen Punkt auf derselben,
- P_2 die erste Polare des Punktes p in Bezug auf die Fläche,
- K_4 den Tangentialkegel von p aus an die Fläche,
- E eine beliebige Ebene,
- R_6 die Raumkurve 6. Ordg., nach welcher die P_2 die F_3 schneidet, od. auch, in welcher der K_4 die F_3 berührt,
- A_2 den Kegelschnitt, nach welchem die Ebene E die Polare P_2 schneidet,
- A_3 die Kurve 3. Ordg., welche die F_3 mit der Ebene E gemein hat,
- E' die Tangentialebene in p an die F_3 und
- A_1 die Schnittlinie von E' mit E.

Das sind die Gebilde, welche bei unserer Abbildung zur Sprache kommen.

Wir wählen nun den Punkt p als Projektionszentrum und die Ebene E als Projektionsebene, in welche die F_3 durch Projektion aus p abgebildet werden soll. Da auf jeden Projektionsstrahl durch p noch zwei weitere Schnittpunkte mit der F_3 liegen, so wird die Ebene E, soweit diese Schnittpunkte reell sind, mit deren Bildern doppelt bedeckt. Wenn wir auf jedem Projektionsstrahl in der Richtung gegen die Ebene E hin vorgehen und den Punkt, welchem wir hier zuerst begegnen, als sichtbar und den andern als unsichtbar bezeichnen, so entstehen in unserer Bildebene zwei übereinanderliegende Blätter, das sichtbare und das unsichtbare Blatt. Beide Blätter hängen ersichtlich längs der Kurve 4. Ordg. U_4 (Umrißkurve), nach welcher der Tangentialkegel K_4 die Bildebene E schneidet, zusammen. Jede durch p und eine Gerade der Fläche gelegte Ebene schneidet die F_3 noch in einem Kegelschnitt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und berührt die F_3 in jenen zwei Punkten, in welchen der Kegelschnitt die Gerade trifft. Eine solche Ebene ist also Bitangentialebene, sowohl der F_3 als auch des K_4, und somit entsprechen den Geraden der Fläche die Doppeltangenten der Umrißkurve U_4 als Projektionen. Die Raumkurve 6. Ordg., nach welcher der K_4 die F_3 berührt, besitzt in p einen Doppelpunkt mit reellen oder imaginären Aesten, je nachdem p an einer hyperbolisch oder elliptisch gekrümmten Stelle der Fläche gewählt wurde. Die Tangenten in diesem Punkt an die R_6 sind zugleich die Haupttangenten zur Fläche, und folglich ist die Ebene E' auch eine Doppeltangentialebene des K_4 und die Gerade A_1 eine Doppeltangente der Umrißkurve U_4. Die Berührpunkte von A_1 mit U_4 sind die Schnittpunkte der auch auf P_2 gelegenen, ebengenannten Haupttangenten mit der Bildebene.

Die ganz beliebig gewählte Bildebene E schneidet die R_6 in sechs Punkten, von welchen jeder gleichzeitig den drei Flächen F_3, P_2 und K_4 angehört. Da die Tangentialebene zur F_3 in einem solchen Punkt auch Tangentialebene des K_4 ist, so ist klar, daß in jedem dieser 6 Punkte die Kurve 3. Ordg. A_3, in welcher die F_3 von E geschnitten wird, die Umrißkurve U_4 berührt.

Irgend eine Ebene E schneidet also die F_3 nach einer Kurve 3. Ordg., welche die Umrißkurve in sechs Punkten berührt, die auf dem Kegelschnitt A_2 liegen, in welchem die Polare P_2 von E geschnitten wird, und der außerdem auch noch durch die Berührpunkte von A_1 mit U_4 gehen muß.

In diesem Zusammenhange entspricht also jeder Fläche 3. Ordg. eine Kurve 4. Ordg., und den Geraden auf der Fläche entsprechen die Doppeltangenten (eigentliche und uneigentliche) der Umrißkurve bis auf die eine Doppeltangente A_1, welche die bereits erwähnte, ausgezeichnete Rolle spielt.

Es ist aber nicht jeder Fläche ein bestimmter Kurventypus zugeordnet, sondern wir werden deren mehrere zu unterscheiden haben, je nachdem wir die Lage des Projektionszentrums p wählen. Umgekehrt aber entspricht jeder Kurve 4. Ordg. ein bestimmter Flächentypus 3. Ordg.*)

Wenn nämlich eine Kurve 4. Ordg. vorliegt, so weise man einer ihrer Doppeltangenten die Rolle der Geraden A_1 zu, lege durch die Berührpunke derselben einen sonst noch beliebigen Kegelschnitt A_2 : dann existiert sicher in dem Kurvenbüschel 4. Ordg.

$$U_4 + \lambda A_2^2 = 0$$

eine Kurve, welche in A_1 und in eine Kurve 3. Ordg. A_3 zerfällt; und die Kurve A_3 berührt in den übrigen 6 Schnittp. von A_2 mit U_4 die letztere Kurve. Nachdem so die 3 Kurven U_4, A_3, A_2

*) Geyser, Math. Annal. Bd. I.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bestimmt sind, welche in dem oben erläuterten Zusammenhang zu einander stehen, so wähle man einen beliebigen Punkt p im Raume, lege durch p und A_1 die Ebene E', ziehe die Verbindungsgeraden von p nach den Berührpunkten von A_1 und U_4 und konstruiere in E' eine Kurve 3. Ordg. A_3', welche in p einen Doppelpunkt aufweist, in diesem die eben gezogenen Geraden zu Tangenten hat und außerdem noch durch die drei Punkte geht, in welchen A_1 und A_3 sich schneiden. Nun verbinde man p mit irgend drei Berührpunkten von den Kurven A_3 und U_4 und markiere auf diesen Geraden je einen dem Berührpunkt unendlich nahe benachbarten Punkt: dann ist durch diese drei Punkte, durch A_3 und A_3' ein Flächenbüschel 3. Ordg. bestimmt, da diese Forderungen mit 18 Bedingungen äquivalent sind. Die Elemente dieses Büschels berühren sich längs A_3 und schneiden sich längs A_3'. Die Tangentenkegel aus p, wo alle diese Flächen die Ebene E' berühren, bilden ein hiezu projektivisches Kegelbüschel 4. Ordg. mit 16 Grundkanten, von welchen je zwei consekutiv sind. Letzteres wird von der Ebene E nach einem Kurvenbüschel 4. Ordg. ($U_4 + \lambda A_2^2 = 0$) geschnitten, in welchem jedenfalls die angenommene Umrißkurve U_1 enthalten ist, welcher somit eindeutig eine Fläche im Flächenbüschel 3. Ordg. entspricht.

Wir können also jeden Punkt des Raumes als Projektionszentrum p wählen, von dem aus eine Fläche 3. Ordg. projiziert ist, welche eine vorgegebene Kurve 4. Ordg. als Umrißkurve erhält. Wenn wir aber beachten, daß bei der Konstruktion der Kurve A_3' nur acht Bedingungen gegeben waren, so erkennen wir, daß jeder Umrißkurve, nachdem einmal p, A_1 u. A_2 gewählt sind, unendlich viele Flächen entsprechen. Aber alle diese Flächen gehören demselben Typus an, da sie ja gleichviele Gerade und gleichviel Singularitäten aufweisen.

Bilden wir eine allgemeine Fläche 3. Ordg. mit 27 reellen Geraden in der besprochenen Weise auf die Ebene E ab, indem wir das Projektionszentrum p an einer elliptisch gekrümmten Stelle der Fläche wählen, so werden wir als Umrißkurve eine Kurve 4. Ordg. erhalten, welche 4 reelle Zweige aufweist, und als Schnittlinie A_1 von E u. E' wird sich eine Doppeltangente I. Spezies*) ergeben; denn nur eine solche kann in konjugiert imaginären Punkten berühren.

Wir unterscheiden, wie es in den beigegebenen Figurentafeln geschehen, die abgebildeten Kurven und Geraden der Fläche, soweit sie dem sichtbaren und unsichtbaren Blatte angehören, bezw. durch

*) Herr Zeuthen hat (Math. Annal. Bd. VII.) gezeigt, daß unter den Doppeltangenten einer Kurve 4. Ordg. ohne vielfache Punkte stets vier existieren, die immer reell sind und ein und denselben Zweig in reellen oder konjugierten Punkten berühren (Doppeltangenten I. Spezies), während die übrigen stets zwei verschiedene Zweige berühren (Doppeltangenten II. Spezies), und daß die Kurve 4. Ordg. entweder in den 4 Dreiecken, oder in den drei Vierecken verläuft, in welche ihre Doppeltangenten I. Spezies die Ebene teilen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

„Ausziehen" und „Punktieren." Wenn eine Kurve auf der F_3 die R_6 überschreitet, so ist klar, daß diesem Schnittpunkt im Bilde ein Berührpunkt mit der U_4 entsprechen muß, und die abgebildete Kurve muß dort augenscheinlich von dem einen Blatt in das andere übertreten (sie bleibt im gleichen Blatt, wenn sie eine gerade Anzahl konsekutiver Punkte mit der R_6 gemein hat). Nur, wenn die Kurve auf der F_3 an jener Ueberschreitungsstelle der R_6 eine Erzeugende des Tangentialkegels K_4 berührt, tritt an Stelle eines Berührpunktes eine Spitze. Hat eine Kurve auf der F_3 n konsekutive Punkte mit der R_6 gemein, so berührt also ihr Bild die U_4 in 2 n konsekutiven Punkten.

Die 27 übrigen Doppeltangenten, welche die Bilder der Geraden auf der Fläche sind, treten also an jedem Berührpunkt mit U_4 von einem Blatt in das andere über. Da wir vorerst das Projektionszentrum an positiv gekrümmter Stelle gewählt haben, so entsprechen die in A_1 gelegenen Punkte, welche dem sichtbaren Blatte angehören, den dem Projektionszentrum unendlich nahe benachbarten Punkten der Fläche und diejenigen, welche in das unsichtbare Blatt entfallen, den übrigen Punkten der Kurve 3. Ordg., nach welcher die Tangentialebene E' in p die Fläche schneidet.

Alle Kurven auf der Fläche, die nicht durch p gehen, müssen folglich in der Abbildung dort, wo sie die Gerade A_1 überschreiten, im unsichtbaren Blatte liegen. Da der Übertritt von einem Blatt in das andere nur an der Berührstelle mit der U_4 stattfinden kann, so erhellt hieraus, welche Strecken auszuziehen sind und welche wir zu punktieren haben.

Wenn wir nach diesen Gesichtspunkten ein Bild einer Fläche mit 27 reellen Geraden herstellen (Tafel 1. Fig. 1.), und wenn wir beachten, daß nur solche Linien auf der Fläche sich schneiden können, welche an der Schnittstelle demselben Blatte angehören, so können wir die Schnittverhältnisse der Geraden auf der Fläche und die Lage der Tritangentialebenen in unserem Bilde in sehr anschaulicher Weise verfolgen.*)

Ein durch eine Gerade der Fläche gelegter Ebenenbüschel schneidet diese nach einem Kegelschnittssystem. Jede Ebene eines solchen Büschels berührt die Fläche in den zwei Punkten, in welchen der in ihr liegende Kegelschnitt die Gerade schneidet. Diese Bitangentialebenen berühren also die Fläche in einer zum Ebenenbüschel projektivischen Involution, deren Doppelpunkte augenscheinlich Punkte der parabolischen Kurve der Fläche sind, da ja die beiden Haupttangenten der Fläche in diesen Punkten zusammenfallen. In dem genannten Kegelschnittssystem treten 5 Geradenpaare auf, welche den 5 durch die Gerade gehenden Tritangentialebenen angehören, und da die Berührpunkte der Geraden im Bilde den Schnittpunkten der Geraden mit dem Kegelschnitt entsprechen, welcher von der

*) Zeuthen, Math. Annal. Bd. VIII.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

durch p und die Gerade der Fläche gehenden Ebene ausgeschnitten wird, so sind von der erwähnten Punktinvolution, deren Träger die Gerade ist, 6 Punktpaare bekannt, sobald eine exakt gezeichnete Kurve 4. Ordg. mit 28 Doppeltangenten vorliegt. Da es beim Studium der Schnitt- und Lagenverhältnisse der Geraden und Tritangentialebenen auf eine exakt gezeichnete Kurve 4. Ordg. aber gar nicht ankommt, so sind in unserem Bilde die 4 Ovale durch Kreise ersetzt, die in den 4 Dreiecken der Doppeltangenten I. Spezies (12, 34, 56, A_1) verlaufen.

Wir bemerken nun, daß die 3 Doppeltangenten I. Spezies (12, 34, 56) und die zwölf äußern Doppeltangenten II. Spezies Involutionen mit reellen Doppelpunkten aufweisen, während den 12 innern Doppeltangenten II. Spezies solche mit konjugiert-imaginären Doppelpunkten zukommen. Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn — wie in beiden Figuren auf Tafel 1 — die als A_1 gewählte Doppeltangente die Ovale der Umrißkurve nicht trennt. Wählen wir aber als A_1 eine Doppeltangente, sei sie I. oder II. Spezies, welche Zweige der U_4 voneinander trennt, so vertauscht sich die eben genannte Eigenschaft der äußern und innern Doppeltangenten II. Spezies an die Zweige, welche durch A_1 getrennt sind; für die durch A_1 nicht getrennten Zweige und für die Doppeltangenten I. Spezies bleibt es beim frühern.

Bei jeder Annahme sind aber 15 Gerade mit reellen und 12 Gerade mit konjugiert-imaginären Asymptotenpunkten vorhanden.

Erstere bilden unter sich 15 Dreiecke, unter welchen sich 10 befinden, auf deren Seiten die 30 Asymptotenpunkte liegen. Innerhalb dieser 10 Dreiecke verlaufen je eine Seite berührend die 10 Ovale der parabolischen Kurve. Diese 10 Dreiecke sind auf Tafel 1, soweit sie auf das Blatt fallen, „schraffiert."

Rückt nun das Projektionszentrum von seiner jetzigen Lage aus auf die parabolische Kurve, so vereinigen sich die vorher imaginären Berührpunkte auf A_1 in einem Undulationspunkt, entsprechend den in p zusammengefallenen, nun reellen Haupttangenten der Fläche.

Bewegt sich das Projektionszentrum auf die andere Seite der parabolischen Kurve, so löst sich der Undulationspunkt in zwei reelle, getrennte Berührpunkte auf und der betreffende Zweig der Umrißkurve erhält zwei reelle Wendepunkte. Die Berührpunkte von A_1 mit U_4 sind die Schnittpunkte der Haupttangenten in p mit der Bildebene. A_1 ist dabei immer noch Doppeltangente I. Spezies und p befindet sich noch innerhalb eines der genannten 10 Dreiecke. Rückt ferner p auf eine Gerade, so erhält die Umrißkurve einen Doppelpunkt mit reellen Ästen, welcher von einem scheinbaren Doppelpunkt der R_6 herrührt, indem diese bei der angenommenen Lage des Projektionszentrums die Gerade in den Asymptotenpunkten überschreitet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieser Doppelpunkt der U_4 liegt im Bilde auf A_1, und die übrigen 5 Tangenten, welche von ihm aus noch an die U_4 gehen, entsprechen den 5 Tritangentialebenen, die durch die Gerade gehen, auf welcher p liegt. Diese Gerade selbst bildet sich in diesem Doppelpunkt ab. In jeder der genannten 5 Tangenten liegen die Bilder von zwei Geraden übereinander; der Uebergang von einem Blatt in das andere findet für beide im Doppelpunkt und an dem Berührpunkt statt, der nun dem Schnittpunkt dieser zwei Geraden entspricht.

Rückt schließlich das Proj.-Zentr. auf eine Gerade mit imaginären Asymptotenpunkten, so muß die U_4 notwendig einen auf A_1 gelegenen isolierten Doppelpunkt annehmen, der augenscheinlich nur durch Zusammenziehung eines an A_1 gelegenen Ovals entstehen kann; denn die Tangenten im Doppelpunkt an die U_4, welche im vorigen Falle den stationären Tangentialebenen der Fläche in den Asymptotenpunkten der Geraden entsprachen, müssen jetzt konjugiert imaginär ausfallen. Daraus geht ferner hervor, daß, während p die Gerade mit reellen Asymptotenpunkten überschritten hat, gleichzeitig die Schnittlinie A_1, die vorher Doppeltangente I. Spezies war, nun mit einer Doppeltangente II. Spezies ihre Rolle vertauscht hat. Die Anzahl der reellen Zweige der U_4 muß natürlich nach wie vor dieselbe sein.

Es erübrigt noch klarzulegen, in welcher Weise Kurven und Gerade der Fläche hinsichtlich der Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit in der Abbildung sich darstellen, wenn das Proj.-Zentr. an einer negativ gekrümmten Stelle der Fläche liegt.

Denken wir uns durch p auf der Fläche ein sehr kleines Oval verzeichnet, so überschreitet dasselbe die R_6, die in diesem Falle in p einen Doppelpunkt mit reellen Zweigen aufweist, welche dort die Haupttangenten der Fläche berühren, außer in p in noch 2 Punkten A und B. Da aber bei jeder Ueberschreitung der R_6 in unserem Bild ein Uebergang von dem einen Blatt in das andere stattfindet, so werden die Punkte des Ovals zwischen A und B in das eine, die auf A p B in das andere Blatt entfallen. Nun lassen wir das Oval zusammenschrumpfen und erhalten folgendes Resultat: Wenn das Proj.-Zentr. an einer negativ gekrümmten Stelle liegt, so fallen die dem Punkte p unendlich nahe gelegenen Punkte, soweit sie in dem einen Winkel der Haupttangenten in p liegen, ins sichtbare, soweit sie in dem andern Winkel derselben liegen, ins unsichtbare Blatt. Beide Teile sind im Bild markiert durch die nun reellen Berührpunkte der Doppeltangente A_1. In allen beigegebenen Figuren ist angenommen, daß die dem Proj.-Zentr. p unendlich nahen Punkte in der durch die Berührpunkte begrenzten, endlichen Strecke auf A_1 ins sichtbare Blatt fallen und auf der unendlichen Strecke ins unsichtbare Blatt zu liegen kommen. Alle Geraden und Kurven der Fläche, welche nicht durch p gehen, werden also in unserem Bilde dort, wo sie die erstere Strecke überschreiten, im

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

unsichtbaren Blatt liegen müssen und dort, wo sie die andere treffen, im sichtbaren Blatt verlaufen. Die übrigen Uebergänge finden an den vorhandenen Berührstellen mit U_4 statt.

II. Algebraische Betrachtung der Vorgänge bei unserer Abbildung.

Betrachten wir den Punkt p als einen Eckpunkt eines Koordinatentetraeders:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

und es sei die gegenüberliegende Ebene $x_4 = 0$ gleich unsere Bildebene. Die Gleichung einer Fläche 3. Ordg. läßt sich dann in folgender Form geben:

$$1) \qquad x_4^2 A_1 + 2 x_4 A_2 + A_3 = 0,$$

worin A_1, A_2, A_3 homogene Funktionen bezw. vom ersten, zweiten und dritten Grade in den Variabelen x_1, x_2, x_3 sind. — Die Gleichungen der ersten und zweiten Polaren des Punktes p in bezug auf die Fläche sind dann:

$$2) \qquad A_2 + x_4 A_1 = 0.$$

$$3) \qquad A_1 = 0.$$

Die geometrische Bedeutung der Funktionen A_1, A_2, A_3 ist nun ersichtlich:

$A_1 = 0$, Tangentialebene in p an die Fläche,
$A_2 = 0$, Kegel 2. Ordg. aus p über dem Kegelschnitt, nach welchem die Ebene x_4 die erste Polare schneidet,
$A_3 = 0$, Schnittkurve der Ebene x_4 mit der Fläche selbst.

Sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Koordinaten eines Punktes in der Ebene x_4 in bezug auf das Dreieck, nach welchem die Ebene $x_4 = 0$ von den drei andern Tetraederebenen geschnitten wird, so können wir, wenn x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordinaten eines Punktes im Raume sind, x_1, x_2, x_3 so bestimmt sein lassen, daß

$$4) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3.$$

Jedem durch p gehenden Strahl $x_1 : x_2 : x_3$ ist dann der Punkt $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ der Ebene zugeordnet, in welchem jener Strahl die Ebene trifft.

Haben wir nun bloß solche Punkte im Auge, welche auf der F_3 liegen, so entspricht jedem Punktepaar auf einem durch p gehenden Strahl ein Punkt der Ebene, und umgekehrt jedem Punkt (ξ) der Ebene $x_4 = 0$ entspricht vermöge Gleichung (1) ein Punktepaar auf der Fläche:

$$5) \qquad x_4 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - A_1 A_3}}{A_1}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichung unserer Umrißkurve ist also:

$$6) \qquad U_4 \equiv A_2^2 - A_1 A_3 = 0,$$

woraus erhellt, daß $A_1 = 0$ eine Doppeltangente der Kurve 4. Ordg. ist, durch deren Berührpunkte der Kegelschnitt $A_2 = 0$ geht, und daß die Schnittkurve $A_3 = 0$ die Kurve 4. Ordg. in den 6 Punkten berührt, in welchen der Kegelschnitt $A_2 = 0$ dieselbe außerdem noch schneidet.

Umgekehrt läßt sich auch bei vorgegebener Kurve 4. Ordg. $U_4 = 0$ die Gleichung der Fläche in obiger Form auf folgende einfache Art bilden:

Man nehme eine Doppeltangente $A_1 = 0$, lege durch ihre Berührpunkte irgend einen Kegelschnitt $A_2 = 0$; dann tritt sicher in dem Kurvenbüschel 4. Ordg.:

$$7) \qquad U_4 + \lambda A_2^2 = 0$$

eine Kurve auf, welche in A_1 und eine Kurve 3. Ordg. A_3 degeneriert.

Nun hat man die drei gewünschten Funktionen A_1, A_2, A_3, welche zur Bildung der Gleichung (1) notwendig sind.

Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, können wir übrigens den Kegelschnitt $A_2 = 0$ durch ein Geradenpaar ersetzen, welches durch die Berührpunkte von A_1 mit der Kurve geht, was nur der Annahme entspricht, daß $x_4 = 0$ eine Tangentialebene an die erste Polare P_2 ist. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der Berührpunkt.

Indem wir jetzt die Ebenen durch den Punkt p und diese beiden Geraden als bezw. $x_1 =$, $x_2 =$ Ebene nehmen und die Ebene $A_1 = 0$ als Ebene x_3 auffassen, vereinfachen sich unsere Gleichungen auf folgende Formen:

$$8) \qquad F_3 \equiv x_4^2 x_3 + 2 x_4 \cdot x_1 x_2 + A_3 = 0$$

$$9) \qquad P_2 \equiv x_1 x_2 + x_3 x_4 = 0$$

$$10) \qquad U_4 \equiv A_3 x_3 - x_1^2 x_2^2 = 0.$$

Liegt jetzt eine Umrißkurve U_4 vor, bezogen auf das Koordinaten-Dreieck (x_1, x_2, x_3) in der Ebene x_4, so hat sie unmittelbar die gewünschte Form (10), und man kann die zur Bildung der Flächengleichung nötige Funktion A_3 ohne weiteres aus U_4 entnehmen.

Fehlt in U_4 außer den bereits jetzt schon nicht mehr vorhandenen Gliedern x_1^4, x_2^4, $x_1^3 x_2$, $x_2^3 x_1$ auch der Term $x_2^3 x_3$, so ist $x_3 = 0$ eine uneigentliche Doppeltangente, sie geht durch den Doppelpunkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und berührt in dem Punkt $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Umrißkurve. In der Funktion A_3 fehlt dann ersichtlich das Glied mit x_2^3, und der Punkt p liegt notwendig auf der Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, welche nun der Fläche angehört.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fehlt also in U_4 das Glied $x_2^3 x_3$, so fehlt in A_3 das Glied x_2^3 und umgekehrt, was aussagt, daß einem auf A_1 gelegenen Doppelpunkt der Umrißkurve die Lage des Proj.-Zentr. p auf einer Geraden der Fläche entspricht und umgekehrt, daß eine solche Lage von p einen Doppelpunkt in der Umrißkurve bedingt, der aber auf A_1 gelegen ist.

Zu jeder Kurve 4. Ordg. läßt sich also eine entsprechende Fläche 3. Ordg. angeben, welche jene als Umrißkurve besitzt, mag man einer „eigentlichen" oder „uneigentlichen" Doppeltangente einer U_4 die Rolle der Schnittlinie A_1 zuweisen, und es ist klar, daß jeder andern eigentlichen oder uneigentlichen Doppeltangente der Kurve eine Gerade der Fläche entspricht; denn jede Ebene, welche durch das im Raum ganz beliebig wählbare Proj.-Zentr. und eine solche Gerade im Bilde geht, ist ersichtlich eine eigentliche oder uneigentliche Bitangentialebene der Fläche, muß also mindestens eine Gerade derselben enthalten.

Sobald die singuläre Doppeltangente A_1 gewählt ist, ist der Typus der Fläche bestimmt.

Da wir aber lt. Gleichung (4) in Gleichung (5) den x noch einen beliebigen Faktor beifügen können, was dem gleichkommt, daß wir die x_4 immer in anderer und anderer Richtung messen, so erkennen wir, daß einer geg. Umrißkurve bei gewähltem A_1 und p eine einfach unendliche Schaar von Flächen 3. Ordg. zukommt, von welchen allen sie die Umrißkurve ist.

Es steht dies im Zusammenhang mit der 9ten noch willkürlichen Bedingung bei der Konstr. der A_3' in E'.

III. Zusammenhang der Fläche 3. Ordnung mit 27 reellen Geraden und Gruppierung der Geraden.

Bevor wir durch Deformation der Umrißkurve einer allg. Fläche 3. Ordg. neue Flächen ableiten, erscheint es notwendig, noch einen Blick auf den Zusammenhang einer solchen Fläche und auf die Anordnung der Geraden auf ihr zu werfen. Diese Dinge können wir aus unsern schematischen Bildern Fig. 1 u. 2, Taf. 1, ohne weiteres ablesen.

Der bessern Übersichtlichkeit wegen sei festgesetzt, daß zunächst eine Lage des Proj.-Zentr. auf einer Geraden ausgeschlossen bleibt, so daß die Schnittlinie A_1 von E' und E immer eine eigentliche Doppeltangente der Kurve ist, und zwar soll sie stets so gewählt werden, daß sie keine Zweige der Umrißkurve trennt. Dann entsprechen nämlich stets den Doppeltangenten I. Spezies und den äußern Doppeltangenten II. Spezies der Zweige Involutionen mit reellen Asymptotenpunkten, während den innern Doppeltangenten solche mit konjugiert imaginären Asymptotenpunkten zukommen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In diesem Falle ist die Klasse der Fläche stets dieselbe wie die der Umrißkurve.

Die letztgenannten 12 Geraden bilden eine Doppelsechs (die „Fundamentaldoppelsechs")*), die in bekannter Weise folgendermaßen bezeichnet sei:

$$1)\qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6'. \end{matrix}$$

In jeder der übrigen 15 Geraden mit reellen Asymptotenpunkten schneiden sich zwei Tritangentialebenen, von welchen jede zwei Gerade aus der Fundamentaldoppelsechs enthält und zwar in folgender Art:

$$(\varkappa\lambda') \text{ und } (\varkappa'\lambda) \begin{cases} \varkappa = 1, 2 \ldots 6 \\ \lambda = 1, 2 \ldots 6. \end{cases}$$

Diese 15 Geraden sind deßhalb in entsprechender Weise mit 2 Ziffern $(\varkappa\lambda)$ versehen.

Nach dieser Bezeichnung existieren 20 Doppelsechsen von folgendem Typus:

$$2)\qquad \begin{matrix} \underline{\mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3}} & 56 & 46 & 45 \\ 23 \quad 13 \quad 12 & 4' & 5' & 6' \end{matrix}$$

und 15 nach folgendem Schema:

$$3)\qquad \begin{matrix} \underline{\mathbf{1} \quad \mathbf{1}'} & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 2 \quad 2' & 13 & 14 & 15 & 16. \end{matrix}$$

Unsere Fläche zeigt nun, wie aus Fig. 1 besonders deutlich erkennbar ist, zehn „Durchgänge" oder „Öffnungen", und unter der 2ten Gruppe der Doppelsechsen sind zehn dadurch ausgezeichnet, daß ihre sämtlichen Strahlen je durch eine solche Öffnung laufen. Die Wandung einer jeden solchen Öffnung wird abgeschlossen von 2 Tritangentialebenen, und zwischen denselben verlaufen nur die Geraden der betreffenden Doppelsechs auf dieser Wand.

Die 15 Tritangentialebenen, welche nur Gerade mit reellen Asymptotenpunkten enthalten (jede dieser Geraden ist bei Dreien beteiligt), zerfallen in folgende 2 Gruppen**): Zehn enthalten Dreiecke, welche die Zweige der parabolischen Kurve einschließen (B); jeder Öffnung liegt ein solches Dreieck gegenüber. Diese Dreiecke sind auf Tafel 1 im sichtbaren Blatt durch engere, im unsichtbaren Blatt durch weitere Schraffierung gekennzeichnet.

Die fünf übrigen Tritangentialebenen (A) schließen die Wandungen der 10 Durchgänge in der Weise ab, daß die Umfänge von

*) Klein, Über Flächen 3. Ordnung. Math. Annal. Bd. VI. und Zeuthen, ibid. Bd. VIII.

**) Zeuthen, a. a. O.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

je zwei der zwanzig Dreiecke, die in diesen 5 Ebenen liegen, eine Wandung begrenzen.*)

Um den Zusammenhang der Wandungen und deren Gruppierung besser zur Darstellung zu bringen, sind innerhalb der erwähnten Begrenzungen geschlossene Kurven auf den Wandungen der 10 Durchgänge so geführt, daß alle Geraden der durchlaufenden Doppelsechsen überschnitten werden. Wir wollen diese Kurven etwa immer an der engsten Stelle angebracht denken und sie als „Querschnitte" der Fläche bezeichnen. Jeder solche Querschnitt ist in unseren Figuren mit den charakteristischen Ziffern der ihn treffenden Doppelsechs bezeichnet, und das dieser Öffnung gegenüberliegende Dreieck mit den gleichen Ziffern in einer Klammer. In Fig. 1, wo das Proj.-Zentr. in dem Dreieck 14, 25, 36 liegt, welches im Bild außerhalb der 3 äußern Doppeltangenten im sichtbaren Blatt erscheint, sind die 4 Ovale der Umrißkurve selbst 4 Querschnitte; jedes derselben ist von einer Doppelsechs umhüllt; (wenn auch die Doppeltangenten I. Spezies reelle Berührpunkte haben, so sind diese bei diesen Doppelsechsen doch nicht beteiligt). Dem Dreieck 14, 25, 36, wo p liegt, liegt die Öffnung 135 gegenüber und die 10 Querschnitte gruppieren sich in folgender Weise:

146

156

124 346

135

345 123

245 526 236

In Fig. 2, wo das Proj.-Zentr. auf der Wand 345 gedacht ist, sind nur die beiden obern Ovale Querschnitte der Fläche, wenn die Doppeltangenten I. Spezies nicht reell berühren; die an A_1 gelegenen sind es nicht. Der Querschnitt 345 verläuft hier ganz im sichtbaren Blatt. Der Zusammenhang der 10 Querschnitte ist nun der, daß an jedem Querschnitt 3 andere nach Art der Glieder einer Kette hängen, so z. B.

an 135 die Querschnitte 156, 123, 345,
an 345 „ „ 135, 346, 245,
an 236 „ „ 123, 256, 346,
an 256 „ „ 245, 236, 156, u. s. w.

*) Bei der Diagonalfläche sind diese die 5 Pentaederebenen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es existieren 5 Gruppen von je 4 Querschnitten, von welchen keiner mit dem andern zusammenhängt:

135	146	236	245
135	124	346	256
345	156	236	124
345	123	146	256
156.	123.	245.	346.

Jeder der 10 Querschnitte ist bei 2 Gruppen beteiligt. Eine größere Zahl von nicht zusammenhängenden Querschnitten existiert nicht. Eine Gruppe von 3 Querschnitten, von denen keiner mit dem andern zusammenhängt, gehört entweder in eine der 5 letztangeführten Gruppen, oder die 3 Querschnitte hängen an ein und demselben vierten. Irgend 2 Querschnitte, die selbst nicht zusammenhängen, hängen immer an einem dritten, und gehören immer einer der 5 Gruppen an. Indem wir nun die Umrißkurve so deformieren, daß diese 10 Querschnitte in allen denkbar zulässigen Kombinationen sich auf Punkte zusammenziehen, erhalten wir alle Singularitäten, die bei Flächen 3. Ordnung auftreten können, und, indem wir dann die übrigen nicht damit zusammenhängenden Querschnitte durch den konischen Knoten hindurchführen, erhalten wir alle Flächen 3. Ordnung ohne und mit reellen Singularitäten. Die Flächen mit konjugiert imaginären Singularitäten erhalten wir aus den Flächen mit den entsprechenden reellen Singularitäten, indem wir die letzteren durch eine geeignete Deformation zum Zusammenrücken bringen, wodurch eine Fläche mit einer höheren Singularität entsteht, und diese letztere dann in die konjugiert imaginären Singularitäten auflösen. Alle diese Deformationen lassen sich mit Hilfe der Umrißkurve in sehr anschaulicher Weise durchführen, und es sind damit die Deformationen von Flächen 3. Ordnung, durch welche diese Flächen in einander übergeführt werden, auf die von ebenen Kurven 4. Ordnung übertragen.

IV. Darstellung der Singularitäten in der Umrißkurve.

Es ist ohne weiters klar, daß ein konischer Knoten, je nachdem das Proj.-Zentr. außerhalb oder innerhalb des Tangentialkegels im Knoten gewählt ist, sich als ein einfacher Doppelpunkt mit reellen oder imaginären Ästen in der Umrißkurve darstellen wird. Ein solcher Doppelpunkt, der das Bild eines konischen Knotens C_2 ist, kann nie auf A_1 gelegen sein (bei beliebiger Lage von p). Ein auf A_1 gelegener Doppelpunkt rührt ja, wie schon bemerkt, nur von einem scheinbaren Doppelpunkt der R_6 her, wenn p auf einer Geraden der Fläche liegt, und diesen Fall schließen wir zunächst aus.

Ein biplanarer Knoten, der dadurch entsteht, daß der erwähnte Tangentialkegel im Knoten in ein Ebenenpaar degeneriert, wird

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sich im allgemeinen als eine Spitze oder als ein Selbstberührpunkt repräsentieren (in letzterem Falle mit reellen oder imaginären Ästen).

Wenn wir die beiden Hauptebenen $x = 0$, $y = 0$ als Koordinaten-Ebenen wählen und den Knoten zum Koordinaten-Anfangspunkt machen, so läßt sich bekanntlich die Gleichung der Fläche in folgender Form geben:

$$1) \qquad x\,y + f^{(3)}(x\,y\,z) = 0\,.$$

Sind ξ, η, ζ die Koordinaten irgend eines Punktes im Raume, so stellt die Gleichung:

$$2) \qquad \xi\,y + \eta\,x = 0$$

die Tangentialebene im Knoten an die erste Polare des Punktes (ξ, η, ζ) in bezug auf die Fläche dar. Diese geht also stets durch die Schnittlinie der beiden „Hauptebenen" (die Achse des Knotens), woraus das oben Gesagte erhellt. Jeder Singularität der Fläche wird bei allgemeiner Lage des Proj.-Zentr. eine Singularität der Umrißkurve entsprechen, welche die Klassenzahl der Kurve um ebensoviel erniedrigt, wie jene die der Fläche, da ja die Klassenzahlen für beide Gebilde übereinstimmen. Die Tangente in dem vielfachen Punkt der Umrißkurve ist das Bild der Knotenachse $(x = 0,\ y = 0)$.

Entsteht also in der Umrißkurve ein Doppelpunkt, so erhält die entsprechende Fläche einen konischen Knoten C_2. Der konische Knoten entsteht dadurch, daß einer der 10 früher definierten Querschnitte auf einen Punkt zusammenschrumpft. Jeden Doppelpunkt in der Umrißkurve können wir in bekannter Weise durch eine Variation der Konstanten auf 2 Arten auflösen.

Hat der Doppelpunkt reelle Äste, und lösen wir ihn in der Weise auf, daß aus jeder der von ihm aus an die Kurve gehenden Tangenten zwei reelle Doppeltangenten hervorgehen, oder entwickelt sich ein isolierter Punkt zu einem kleinen Oval, wobei sich die durch ihn gehenden uneigentlichen Doppeltangenten in gleicher Weise auflösen, so löst sich in beiden Fällen der entsprechende konische Knoten der Fläche nach dem „Prozeß des Verbindens" (+). (Nach Art der Ableitung eines Hyperboloids I. Art aus einer Kegelfläche 2. Ordg.).

Löst sich aber der Doppelpunkt unserer Umrißkurve so, daß die durch ihn gehenden Tangenten an die Kurve in imaginäre Doppeltangenten zerfallen (der isolierte Punkt entwickelt sich zu einem imaginären Oval), so erzeugt diese Operation an dem entsprechenden konischen Knoten der Fläche den „Prozeß des Trennens" (—). (Nach Art der Ableitung eines Hyperboloids II. Art aus der Kegelfläche 2. Ordg.).

In den beigegebenen Figurentafeln ist dafür Sorge getragen, daß der bessern Anschaulichkeit wegen die Singularitäten und überhaupt die interessanteren Partien immer in reeller Kontur erscheinen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

So erhielten wir z. B., wenn wir die Fläche mit 4 konischen Knoten erzeugen wollen, indem wir die 4 Querschnitte 146, 236, 135, 245 zusammenschrumpfen lassen (Fig. 1), wobei die Umrißkurve aus 2 imaginären Kegelschnitten mit 4 reellen Schnittpunkten bestünde (Proj.-Zentr. auf dem positiv gekrümmten tetraedralen Teil), ein wenig anschauliches Bild von dieser Fläche.

Die Gestalt der Fläche springt aber sofort in die Augen, wenn wir in Fig. 2 die gleichbenannten Querschnitte zusammenziehen und die Geraden nach den entwickelten Regeln einzeichnen.*)

Nun liegt das Proj.-Zentr. auf dem negativ gekrümmten unparen Flächenteil und gerade der interessantere Teil erscheint jetzt in reeller Kontur, die in diesem Falle aus 2 reellen Kegelschnitten mit 4 reellen Schnittpunkten und 4 reellen gemeinschaftlichen Tangenten besteht.

Wir werden, indem wir immer von der allgemeinen Fläche ausgehen, bald die Fig. 1, bald Fig. 2 auf Taf. 1 zu Grunde legen, je nachdem es das Interesse der Anschaulichkeit wünschenswert erscheinen läßt.

Die hier angebrachten Bezeichnungen gelten für alle folgenden Figuren, wo sie der Kleinheit der Zeichnung wegen nicht angebracht werden konnten.

Die nicht mit reellen Punkten bedeckten Teile der Ebene sind bei allen folgenden Figuren grau angelegt.

Die Zahl der reellen Geraden, sowie deren Schnittverhältnisse können wir in jedem Falle aus unserer Figur ablesen.

Um nun stets auch die Zahl der punktiert imaginären und die der rein imaginären Geraden, oder was auf dasselbe hinausläuft, die Zahl der reellen Tritangentialebenen, die nur eine reelle Gerade enthalten, angeben zu können, sei noch folgende Überlegung vorausgeschickt:

Beim Erscheinen eines konischen Knotens werden in jedem Knotenstrahl zwei vorher windschiefe Gerade der Fläche konsekutiv, und in jeder Dreiecksebene durch den Knoten sind je zwei Tritangentialebenen der ursprünglichen Fläche zusammengefallen. Durch jede „unäre" Gerade der Fläche und einen konischen Knoten geht eine derartige Dreiecksebene. Die in ihr liegenden 2 Strahlen durch den Knoten sind entweder reell oder konjugiert imaginär. Beide Fälle sind getrennt durch das Zusammenfallen dieser zwei Knotenstrahlen, womit das Auftreten eines zweiten konischen Knotens verbunden sein wird, wie wir später zeigen werden.

1) Sind die 2 Knotenstrahlen in unserer Dreiecksebene durch den Knoten reell, und bringen wir an diesen Knoten den „Prozeß des Verbindens" an, so zerfällt die Dreiecksebene in zwei einfache reelle Tritangentialebenen mit reellen Geraden; bringen wir dagegen

*) Taf. 3. XVI$_1$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

den „Prozeß des Trennens" an, so löst sich die Dreiecksebene in 2 konjug. imaginäre Ebenen mit je 2 rein imaginären Geraden auf.

2) Sind die beiden Knotenstrahlen in der Dreiecksebene konjugiert imaginär, so gehen durch den „Prozeß des Verbindens" augenscheinlich konjugiert imaginäre Ebenen aus der Dreiecksebene hervor, durch den Prozeß des Trennens aber wird die Dreiecksebene in zwei reelle Tritangentialebenen zerfallen, und jede derselben enthält 2 punktierte, konjugiert imaginäre Gerade. Der dritte, reelle Berührpunkt ist der reelle Schnittpunkt dieser Geraden; die beiden auf der reellen Geraden liegenden Berührpunkte sind hier konjug. imaginär.

Wir werden sehen, daß eine Dreiecksebene der letztern Art erst dann auftreten kann, wenn vorher schon an mindestens einem Knoten der Trennungsprozeß durchgeführt worden ist, und daraus können wir dann weiter schließen: Es treten stets zwei reelle Tritangentialebenen mit je zwei punktiert imaginären Geraden auf, wenn gleichzeitig an zwei Knoten C_2 der Trennungsprozeß vollzogen wird.*)

Diese Bemerkungen werden genügen, um in allen Fällen mit einem Blick auf die vorhergehende Figur die gewünschten Zahlen zu finden.

A. Ableitung aller Flächen 3. Ordnung aus der Fläche mit 27 reellen Geraden.**)

I. Die Flächen ohne Singularitäten.

Tafel 2, I, Fig. 1—5.

Diese Flächen gehen aus der allgemeinen Fläche dadurch hervor, daß wir nacheinander konische Knoten erzeugen, indem wir Querschnitte auf Punkte zusammenziehen und an diesen den Trennungsprozeß anbringen. Es stehen zu diesem Zwecke 2 Gruppen von Querschnitten zur Verfügung:

1) 4 Querschnitte, von welchen keiner mit dem andern zusammenhängt,
2) 3 Querschnitte, die an ein und demselben vierten hängen.

Nehmen wir zuerst eine Gruppe der ersteren Art, etwa 146, 236, 245, 135, und bringen nacheinander bei diesen Querschnitten die eben besprochene Deformation an, so verschwinden, wenn wir etwa Fig. 1, Taf. 1 zu Grunde legen, nacheinander die 4 Ovale

*) Gerade, welche vorher windschief waren, werden beim Durchgang durch den konischen Knoten rein imaginär, und nur solche Gerade werden punktiert und konjugiert imaginär, welche schon vor diesen Deformationsprozessen einen reellen Schnittpunkt besaßen.

**) Wir halten uns dabei an den Art-Begriff wie ihn Herr Prof. Dr. F. Klein in seinem Aufsatze: „Ueber Flächen 3. Ordnung" Math. Annal. Bd. VI präzisiert hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dieser Umrißkurve. Anschaulichere Bilder erhalten wir aber, wenn wir den gleichen Prozeß an der Fig. 2, Taf. 1 bei den gleichbezeichneten Querschnitten vornehmen.

Die 4 Ovale der U_4 treten hier nacheinander durch Doppelpunkte mit reellen Zweigen in Verbindung, und es entstehen so die Fig. 1—5 auf Taf. 2.

Fig. 1 zeigt nochmals das Bild einer Fläche mit 27 reellen Geraden und 45 Tritangentialebenen.
15 Gerade haben reelle,
12 „ „ imaginäre Asymptotenpunkte.

An jeder Geraden hängen 5 Tritangentialebenen.

Fig. 2 gibt das Bild einer Fläche mit 15 reellen Geraden, 9 mit reellen, 6 mit imaginären Asymptotenpunkten.

An jeder Geraden hängen hier nur noch 3 Tritangentialebenen, so daß deren im Ganzen 15 vorhanden sind. Die 12 übrigen Geraden sind rein imaginär geworden, ebenso sind die 30 übrigen Tritangentialebenen zu je zweien konjugiert imaginär geworden.

Fig. 3 stellt das Bild einer Fläche mit 7 reellen Geraden vor; davon zeigen 5 reelle und 2 konjugierte Asymptotenpunkte. Während vorhin die 15 Geraden noch ganz gleichberechtigt auftraten, ist hier bereits eine vor den übrigen dadurch ausgezeichnet, daß sie von allen übrigen geschnitten wird. Durch diese Gerade b laufen ersichtlich 3 Tritangentialebenen mit reellen Geraden; dann gehen aber auch noch 2 Tritangentialebenen mit je 2 punktierten, konjug. imag. Geraden durch sie hindurch. Denn, wenn wir einen Blick auf die Übergangsfläche, (Fig. 2, II) werfen, so bemerken wir, daß die Ebene durch b und den konischen Knoten ersichtlich konjug. imag. Knotenstrahlen enthält, so daß sie durch den Prozeß des Trennens an diesem Knoten in 2 reelle Tritangentialebenen mit je 2 punktierten, konjug. imag. Geraden zerfallen muß, womit der auf pag. 19 vorausgeschickte Satz bestätigt ist. Bei dieser Fläche sind nur diese 5 durch b gehenden Tritangentialebenen reell.

Fig. 4 gibt das Bild einer Fläche mit 3 reellen Geraden, wie sie aus 1 hervorgeht, wenn wir dort bei den Querschnitten 135, 146, 236 gleichzeitig Knoten entstehen lassen und sie durch Trennung lösen. Wir erkennen so, daß durch jede der 3 reellen Geraden nach der eben gemachten Erörterung 2 reelle Tritangentialebenen mit punktierten, konjug. imag. Geraden laufen, so daß deren im ganzen 7 vorhanden sind.

Fig. 5 führt uns wieder eine Fläche mit 3 Geraden vor, die aber von der vorhergehenden sich wesentlich dadurch unterscheidet, daß sie aus 2 getrennten Teilen, einem positiv gekrümmten paren und aus einem unparen Mantel besteht. Denn den Punkten innerhalb des innern Ovals entsprechen wieder reelle Punkte der Fläche, da für diese Punkte die Funktion U_4 wieder positiv ist, und der von diesen Punkten erzeugte Flächenteil kann ersichtlich mit dem andern in keinem Zusammenhang stehen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Indem wir beachten, wie diese Fläche aus der allg. Fläche hervorgeht, bemerken wir, daß durch jede der 3 Geraden nun 4 reelle Tritangentialebenen mit je 2 punktierten, konjug. imag. Geraden laufen, so daß also diese Fläche 13 reelle Tritangentialebenen aufweist.

Ob wir von Fig. 1 od. 2 auf Taf. 1 ausgehen, immer entspricht der Fläche 1_I eine Umrißkurve aus 4 paren Zweigen,

" 2_I " " " 3 " "
" 3_I " " " 2 " "
" 4_I " " " 1 " "

Der letzteren Fläche 5_I entspricht in dem einen Fall die imag. Kurve 4. Ordg. (das Proj.-Zentr. liegt auf dem paren Teil) und in dem andern Fall die sog. Gürtelkurve als Umriß. (Das Proj.-Zentr. liegt hier auf dem unparen Teil.)

Wenn wir nun 3 Querschnitte verwenden, die an ein und demselben dritten hängen, so erhalten wir nach dem, was auf pag. 16 über den Zusammenhang derselben gesagt ist, nichts Neues, wenn wir an einem oder zweien derselben die Deformation durch den konischen Knoten hindurch vornehmen.

Ziehen wir aber 3 solche Querschnitte, etwa 123, 156, 345 auf Knoten zusammen und trennen an diesen, so erhalten wir die sog. „inverse" Fläche ohne Knoten, eine Fläche, die dieselbe Anzahl von Geraden und Tritangentialebenen aufweist wie 4_I und die, wie wir sehen werden, auch im Typus der parabolischen Kurve von jener keinen Unterschied erkennen läßt, weßhalb sie mit $4_I'$ bezeichnet sein soll (Taf. 4, Fig. 1). Sie unterscheidet sich jedoch darin von 4_I, daß die Tritangentialebene mit reellen Geraden, welche bei ihr noch vorhanden ist, eine von den 10 Tritangentialebenen (B) der ursprünglichen Fläche ist, welche dort die 10 Ovale der parab. Kurve durch ihre Geraden einschließen, während die Tritang.-Ebene mit reellen Geraden, die bei 4_I übrig blieb, eine jener andern 5 Tritang.-Ebenen (A) ist, bei welchen auch alle 3 Geraden reelle Asymptotenpunkte besitzen:

Fig. 1, Taf. 1	bei 4_I	die Ebene	12,	34,	56
	bei $4_I'$	" "	14,	25,	36.

Durch jede der 3 Geraden gehen hier wie dort noch 2 Tritang.-Ebenen mit punktierten Geraden.

(Im Übrigen siehe: Rodenberg, Math. Annal. Bd. XIV.)

Zusammenstellung:

1_I	27 reelle Gerade,		45	Tritang.-Ebenen.
2_I	15 " "		15	"
3_I	7 " "	$3 + 2^* = 5$		"
4_I u. $4_I'$.	3 " "	$1 + 3 . 2^* = 7$		"
5_I	3 " "	$1 + 3 . 4^* = 13$		"

Anm. Die Tritang.-Ebenen mit punktiert imaginären Geraden sind mit einem * versehen; die in Klammern beigefügten Zahlen geben an, wieviel unäre Gerade oder Tritang.-Ebenen in der betreffenden Geraden bezw. Tritang.-Ebene vereinigt sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der ganze Deformationsprozeß, welcher alle diese Flächen in einander überführt, vollzieht sich im allgem. an einer Umrißkurve, die in einem Kurvenbüschel 4. Ordg. von folgender Gestalt auftritt: Es seien $u_1 = 0$, $v_1 = 0$, $w_1 = 0$, $x_3 = 0$ 4 Gerade und $A_2 = 0$ ein Kegelschnitt, der die 4 Seiten eines aus diesen Geraden gebildeten Vierecks innerhalb der Eckpunkte schneidet, so stellt die Gleichung

$$1) \qquad \lambda\, u_1\, v_1\, w_1\, x_3 - A_2^2 = 0\,,$$

wenn der erste Term für die Punkte innerhalb jenes Vierecks positiv ist, für ein genügend kleines $+\lambda$ eine Kurve 4. Ordg. mit 4 Zweigen dar, wie sie der allgemeinen Fläche als Umrißkurve zukommt; bei wachsenden λ treten im allgemeinen nacheinander 4 Kurven mit je einem Doppelpunkt innerhalb des Vierecks auf und schließlich erscheint auch noch eine mit einem isolierten Punkt.

Darin sind also alle Kurven, welche den angeführten 5 Flächen entsprechen, enthalten und auch die den Flächen mit einem konischen Knoten zukommenden Umrißkurven, welche die Uebergänge vermitteln, so daß die Gleichung:

$$2) \qquad x_4^2 \cdot x_3 + 2\, x_4\, A_2 + \lambda\, u_1\, v_1\, w_1 = 0$$

für $\lambda = 0, \ldots + \infty$ alle Flächen der beiden Gruppen I und II enthält.

Wir können die den Flächen I entsprechenden Umrißkurven auch in der Weise erhalten, daß wir in passender Art Kurvenbüschel 4. Ordg. konstruieren, bei welchen ein reelles Kegelschnittpaar mit 4 reellen Schnittpunkten und 4 reellen gemeinschaftlichen Tangenten als die eine Basiskurve auftritt, und eine Gerade mit der zweifach gezählten, unendlich fernen Geraden und einer der Doppeltangenten die andere Basiskurve bildet. Dieser letzteren weisen wir die Rolle der A_1 zu, was sich deswegen empfiehlt, weil wir diese Doppeltangente auch bei der deformierten Kurve als A_1 beibehalten können und nicht erst nötig haben, eine solche für die Schnittlinie A_1 zu bestimmen.

Bei den vorzunehmenden Deformationen ändert sich dann in unserer Flächengleichung nur die Funktion A_3, während A_1 und A_2 ungeändert beibehalten werden können.

Sind $U_2 = 0$, $V_2 = 0$ zwei Kegelschnitte, welche den obigen Bedingungen genügen, und ist $A_1 = 0$ eine gemeinschaftliche Tangente und $B_1 = 0$ irgend eine Gerade, so stellt die Gleichung:

$$3) \qquad U_2\, V_2 - \lambda\, A_1\, B_1 = 0$$

die 5 gewünschten Umrißkurven bei verschiedenen Lagen von B_1 dar und zwar: 1., wenn B_1 die 4 Schnittpunkte der Kegelschnitte nicht trennt, für ein genügend kleines $\pm\lambda$ die vierteilige Kurve und die Gürtelkurve, 2., wenn B_1 einen Schnittpunkt von den 3 andern trennt, die einteilige und die dreiteilige, und 3., wenn

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

B_1 2 Schnittpunkte von den andern trennt, in beiden Fällen die zweiteilige Kurve 4. Ordg.

Es entspricht dieß der Ableitung dieser Flächen aus derjenigen mit 4 reellen konischen Knoten durch die Prozesse:

$$\begin{array}{ll} + + + + \ldots\ldots & 1_I \\ - - - - \ldots\ldots & 5_I \\ + + + - \ldots\ldots & 2_I \\ - - - + \ldots\ldots & 4_I \\ + + - - \ldots\ldots & \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} 3_I \,. \\ - - + + \ldots\ldots & \end{array}$$

Ist $U_4 = 0$ eine Kurve 4. Ordg., wie sie durch quadratische Transformation aus einem Kegelschnitte hervorgeht, der die Seiten des Fundamentaldreiecks innerhalb der Eckpunkte schneidet, so ist

$$U_4 + \lambda = 0$$

entweder die Umrißkurve einer Fläche 1_I oder $4_I'$.

II. Die Flächen mit einem konischen Knoten C_2.

Tafel 2, II, Fig. 1—5.

Diese bilden, wie schon bemerkt, die Uebergänge zwischen den 5 Spezies der ersten Gruppe. Wir sehen, daß mit der Entstehung eines Doppelpunktes in unserer Umrißkurve die Zusammenziehung eines Querschnitts der Fläche verbunden ist, wobei je 2 Gerade der Doppelsechs, welche durch diese Oeffnung läuft, zusammenfallen, und zwar in der Weise, daß stets 2 windschiefe Gerade konsekutiv werden, von denen der einen eine Involution mit reellen, der andern eine solche mit konjugierten Asymptotenpunkten zukam. Beide Involutionen vereinigen sich dabei in einer sog. parabolischen Involution, die Doppelpunkte entfallen in den Knoten. Es ist einleuchtend, daß in unserem Bilde jeder Knotenstrahl beim Doppelpunkt von einem Blatt in das andere treten muß, was man ja mit einem Blick auf die vorhergehende Figur (ohne Doppelpunkt) stets leicht erkennen kann.

Bei den Flächen, deren Bilder die Fig. 1—4 darstellen, ist der Tangentialkegel im Knoten reell, und es gehen durch den Knoten bezw. 6, 4, 2, 0 reelle Gerade. Die Fläche 5_{II} entsteht aus 5_I, indem dort der pare Teil auf einen Punkt zusammenschrumpft, was eintritt, wenn das innere Oval der Gürtelkurve in einen isolierten Punkt übergeht. Der Tangentialkegel ist hier imaginär. Diese Fläche kann auch aus 4_{II} dadurch entstanden gedacht werden, daß dort der konische Knoten durch die biplanare Form mit imaginären Hauptebenen hindurchgeht, was sich in der Umrißkurve dadurch geltend macht, daß die innere Schleife verschwindet, so daß eine

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nach innen gekehrte Spitze entsteht und sich bei weiterer Änderung der Konstanten in diesem Sinne ein isolierter Punkt abstößt.

Auch bei dieser Gruppe haben wir eine sog. inverse Fläche zu verzeichnen, eine Fläche, die entsteht, wenn wir 3 Querschnitte, die an demselben vierten hängen, zusammenziehen und zwei Knoten durch Trennung lösen. Andere Kombinationen liefern nichts Neues. Diese Fläche stimmt ebenfalls mit 3_{II} in der gleichen Zahl von Geraden und Tritang.-Ebenen überein und sei deßhalb mit $3_{II}'$ bezeichnet (Taf. 4, Fig. 2).

Indem wir jeden Knotenstrahl zweifach und jede Ebene durch 2 Knotenstrahlen für 2 Tritangentialebenen zählen, erhalten wir folgende Zusammenstellung:

	Gerade:	Tritang.-Ebenen:
1_{II}	$6 \,.\, (2) + 15 = 27.$	$15 \,.\, (2) + 15 = 45.$
2_{II}	$4\,(2) + 7 = 15.$	$1^*\,(2) + 6\,(2) + 3 = 17.$

Die Gerade b ist hier ersichtlich ausgezeichnet.

3_{II} u. $3_{II}'$	$2\,(2) + 3 = 7.$	$1\,(2) + 2^*\,(2) + 2^* + 1 = 9.$
4_{II}	$3.$	$3^*\,(2) + 3 \,.\, 2^* + 1 = 13.$
5_{II}	$3.$	$3^*\,(2) + 3 \,.\, 2^* + 1 = 13.$

Die Umrißkurven dieser 5 Flächen sind in dem Kurvenbüschel 4. Ordg. enthalten, welchen die Gleichung (1) darstellt.

Wollen wir sie aus einem Ellipsenpaare ableiten, so behalten wir einen Knoten bei und lösen die übrigen drei in entsprechender Weise auf.

Sind wieder $U_2 = 0$, $V_2 = 0$ zwei Kegelschnitte mit 4 reellen Schnittpunkten und 4 reellen gemeinschaftlichen Tangenten, $B_1 = 0$, $C_1 = 0$ zwei durch einen der 4 Schnittpunkte derselben gehende Gerade und $A_1 = 0$ eine gemeinschaftliche Tangente, so treten in der Gleichung:

$$4) \qquad U_2\, V_2 - \lambda\, A_1\, B_1\, C_1 = 0$$

für genügend kleine $\pm \lambda$ die Umrißkurven der Flächen mit 1 C_2 auf, und zwar, wenn die übrigen 3 Schnittpunkte im gleichen Winkelraum von B_1, C_1 liegen, die von 1_{II} und 4_{II} und, wenn die 3 Schnittpunkte sich auf die 2 Winkelräume verteilen, diejenigen, welche den Flächen 2_{II} und 3_{II} zukommen. Es entspricht dies den Auflösungsprozessen:

$$\begin{array}{l} + + + \ldots\ldots 1 \\ - - - \ldots\ldots 4 \\ \\ + + - \ldots\ldots 2 \\ - - + \ldots\ldots 3. \end{array}$$

Die Kurve für die Fläche 5_{II} tritt augenscheinlich in dem ersteren Büschel (4) auf, die innere Schleife geht allmälig in eine Spitze über,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und dann folgt der isolierte Doppelpunkt, was der Änderung des C_2 bei 4_{II} durch die biplanare Form mit konjugierten Hauptebenen hindurch entspricht.

Wir konstatieren hier, daß sich nichts Neues ergibt, wenn wir den einen Doppelpunkt unserer Umrißkurve vor und nach der Aenderung durch die Spitze in dem einen oder anderen Sinne lösen; in beiden Fällen kommen die Umrißkurven der Flächen 4_I und 5_I zum Vorschein.*) Die Umrißkurve für die inverse Fläche $3_{II}'$ erhalten wir wieder durch passende Auflösung von 2 Knoten einer rationalen Kurve 4. Ordnung, wie sie auf pag. 23 definiert wurde. Ist $U_4 = 0$ die Gleichung einer derartigen Kurve, $A_1 = 0$ die der isolierten Doppeltangente und $B_1 = 0$ die einer durch einen Doppelpunkt gehenden Geraden, so enthält das Büschel

$$5) \qquad U_4 + \lambda A_1 B_1^2 = 0$$

die gewünschte Kurve.

III. Die Flächen mit einem biplanaren Knoten B_3.

Tafel 2, III, Fig. 1—4.

Wir haben bereits bemerkt, daß dem biplanaren Knoten entweder eine Spitze oder ein Selbstberührpunkt in der Umrißkurve entspricht. Einem biplanaren Knoten B_3 wird eine Spitze I. Art zukommen müssen, da ja das Bild eines B_3 auf die Klassenzahl der Umrißkurve eine äquivalente Wirkung wie der B_3 auf die der Fläche ausüben muß. Mit der Entstehung einer Spitze in unserer Umrißkurve ist aber augenscheinlich die Zusammenziehung von 2 aneinanderhängenden Querschnitten verbunden.

Veranlassen wir also in Fig. 1, Taf. 1 die Zusammenziehung der beiden Querschnitte 146 und 156, indem wir etwa zuerst den einen zusammenziehen und dann durch Zusammenfallen der beiden Tangenten im Doppelpunkt auch das Verschwinden des andern bewirken, so bemerken wir zunächst, daß in jedem der sechs durch den Knoten gehenden Strahlen 3 vorher windschiefe Gerade koinzidieren. Aus Fig. 1, Gruppe III, Taf. 2 ist ersichtlich, daß einerseits die 3 Geraden a', a'', a''' in der einen und andererseits die 3 Geraden b', b'', b''' in der andern Hauptebene des Knotens liegen müssen.

Die beiden Hauptebenen seien bezw. mit A und B bezeichnet. Das Bild der Knotenachse ist die Tangente im Rückkehrpunkt der U_4. — Diese 6 Knotenstrahlen sind aber nicht mehr wie beim konischen Knoten als gleichwertig anzusehen, sondern wir bemerken, daß in a', a''', b', b''' je 2 Gerade mit reellen und eine Gerade mit imaginären Asymptotenpunkten konsekutiv geworden sind, während

*) Klein, a. a. O.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in a'' und b'' je eine Gerade mit reellen und 2 Gerade mit vorher imaginären Asymptotenpunkten zusammengerückt sind, ein Unterschied, der sich bei der Lagerung der Äste der parabolischen Kurve im Knoten gegenüber diesen 6 Geraden bemerkbar machen wird.

Die 9 Ebenen, welche durch je 2 Knotenstrahlen gehen, schneiden noch die 9 übrigen unären Geraden aus, wie unser Bild zeigt.

Jede solche Dreiecksebene enthält 3 Tritang.-Ebenen, und in jede Hauptebene sind deren 6 entfallen, was leicht erkenntlich ist, wenn wir die Fig. 1, Taf. 1 danebenhalten.

So fallen z. B. die 3 Ebenen $\left\{\begin{matrix} 36, & 3, & 6 \\ 36, & 24, & 15 \\ 36, & 25, & 14 \end{matrix}\right\}$ zusammen in 36, a', b' u. s. w.

Ebenso sehen wir dort, daß die 9 Geraden, welche in jede Hauptebene entfallen, 6 Tritang.-Ebenen bildeten.

Wenn wir noch konische Knoten erzeugen wollen, so stehen hiezu nur noch die Querschnitte $\begin{matrix} 345 \\ 245 \end{matrix}\Big\}\ \begin{matrix} 123 \\ 236 \end{matrix}\Big\}$ zur Verfügung.

Die beiden erstern und die beiden letztern hängen unter sich selbst wieder zusammen, aber die 4 andern Paare, die wir hier bilden können, haben eine derartige Lage, daß sie unter sich und mit den vorher zum B_3 verwendeten 146 und 156 nicht zusammenhängen, auch haben diese 4 Paare den letztgenannten gegenüber ersichtlich eine ganz gleichberechtigte Lage. Je 2 solche Querschnitte hängen nämlich mit einem derselben an ein und demselben vierten, und mit dem andern gehören sie nebst einem nun bestimmten vierten zu einer der oben erwähnten 5 Kombinationen zu je vieren, von welchen keiner mit dem andern zusammenhängt. Wir schließen daraus, daß die Flächentypen mit einem B_3 mit reellen Hauptebenen erschöpft sein werden, wenn wir irgend zwei der letzterwähnten Querschnitte nach einander zur Bildung von kon. Knoten verwenden und an diesen den Trennungsprozeß vornehmen.

Die Bilder der so entstehenden 2 neuen Flächentypen mit einem B_3 sind in den beiden Fig. 2 u. 3 zur Darstellung gebracht.

Bei 2 sind in der Ebene B die 2 Knotenstrahlen b'' b''' konjugiert imaginär geworden und die sämtlichen übrigen Geraden, die durch die Öffnung 123 liefen, sind nun rein imaginär.

Fig. 3 zeigt eine Fläche, bei welcher auch noch in der Ebene A die beiden Strahlen a'', a''' konjug. imag. sind und durch die einzige unäre Gerade außer der dreifachen Tritang.-Ebene (a' b') noch 2 reelle Tritang.-Ebenen mit je 2 punktierten, konjug. imag. Geraden laufen.

Die Fig. 4 zeigt uns das Bild einer Fläche mit einem B_3 mit konjug. imag. Hauptebenen. Diese bildet, wie bereits erwähnt, den Übergang zwischen den beiden Flächen 4 u. 5 der Gruppe II. Den Übergang durch die uniplanare Form (Zusammenfallen der Hauptebenen) werden wir später darlegen. Auf dieser Fläche liegen 3 unäre Gerade mit reellen Asymptotenpunkten. Von den 5 Tritang.-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ebenen, die durch jede gehen, fallen 3 durch den Knoten zusammen; eine enthält die 3 reellen Geraden, und die andere enthält 2 punktierte, konjug. imag. Gerade.

Die stets nach dem unbedeckten Teil der Bildebene hin gekehrte Spitze läßt erkennen, daß durch diesen Knoten weder reelle Gerade der F_3 denkbar sind, noch daß zu ihm weitere reelle konische Knoten hinzutreten können.

Zusammenstellung der reellen Geraden und Tritang.-Ebenen.

	Gerade:	Tritang.-Ebenen:
1_{III}	$6\,(3) + 9 = 27.$	$2\,(6) + 9\,(3) + 6 = 45.$
2_{II}	$4\,(3) + 3 = 15.$	$2\,(6) + 3\,(3) = 21.$
3_{III}	$2\,(3) + 1 = 7.$	$2\,(6) + 1\,(3) + 2^* = 17.$
4_{III}	$= 3.$	$3\,(3) + 3^* + 1 = 13.$

Die den 4 Flächen der Gruppe III entsprechenden Umrißkurven gewinnen wir auf folgende Weise: Es sei $U_4 = 0$ eine Kurve 4. Ordg., wie sie durch quadrat. Transformation aus einem Kegelschnitt hervorgeht, der 2 Seiten des Fundamentaldreiecks innerhalb der Eckpunkte überschneidet und die dritte berührt, $A_1 = 0$ eine Doppeltangente dieser Kurve, $B_1 = 0$ irgend eine Gerade und $R_1 = 0$ die Tangente im Rückkehrpunkt. Die Gleichung:

$$6) \qquad U_4 + \lambda\, A_1\, B_1\, R_1^2 = 0$$

stellt dann, wenn B_1 die beiden Doppelpunkte der U_4 nicht trennt, für ein genügend kleines $\pm\,\lambda$ die beiden Kurven dar, wie sie den Flächen 1_{III} und 3_{III} zukommen, und, wenn B_1 diese Doppelpunkte trennt, in beiden Fällen eine Kurve, wie sie der Fläche 2_{III} entspricht. Es lösen sich dabei die 2 C_2 nach folgender Weise:

$$\left.\begin{array}{ll} + + \;.\;.\;.\;.\; 1_{III} & + - \\ - - \;.\;.\;.\;.\; 3_{III} & - + \end{array}\right\} 2_{III}\,.$$

Die Umrißkurve von 4_{III} tritt in dem Kurvenbüschel auf, welches Gleichung (4) darstellt, wenn nämlich dort in ersterem Falle die beiden Tangenten im Doppelpunkt zusammenfallen.

Aus jeder dieser 4 Figuren erkennen wir die charakteristische Eigenschaft des bipl. Knotens B_3, daß nämlich eine um ihn beschriebene genügend kleine Kugel die Fläche nach einem einzigen Oval schneidet, während sie beim konischen Knoten in 2 getrennten Ovalen trifft. Die Gestalt des B_3 mit imaginären Ebenen ist ohne weiters erkenntlich, sie ist die eines Dornes.*)

Auch die des B_3 mit reellen Ebenen läßt sich leicht vorstellen, wenn wir beachten, daß die Fläche die Hauptebenen in den Knotenstrahlen a', a'', a''', b', b'', b''' durchdringt**).

*) Dr. Rohn: Ein Beitrag zur Theorie der bipl. und unipl. Knotenpunkte, Math. Annal. Bd. XXII.

**) Klein, a. a. O. (Figurentafeln).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir werden später eine in unserer Bildebene ausführbare Konstruktion kennen lernen, welche uns in den Stand setzt, in der Nähe des Knotens einige ebene Schnitte herzustellen, durch welche dann die Gestalt der Fläche an dieser Stelle in größter Deutlichkeit hervortritt.

IV. Die Flächen mit zwei konischen Knoten C_2.

Tafel 2, IV, Fig. 1—6.

Eine Fläche mit 2 reellen konischen Knoten, welche die größte Anzahl von reellen Geraden aufweist, erhalten wir, wenn wir bei der Fläche mit 27 Geraden irgend 2 nicht zusammenhängende Querschnitte zusammenziehen, wodurch unsere Umrißkurve 2 Doppelpunkte mit reellen oder imaginären Ästen annimmt.

Wählen wir beispielsweise die Querschnitte 146 und 245 (Fig. 1, Taf. 1), so stehen nur noch 3 weitere Querschnitte zur Verfügung, um neue Knoten zu erzeugen, nämlich 135, 123, 236. Von diesen können wir bei 135 und dann noch bei 236 die Änderung durch den konischen Knoten vornehmen, oder nur bei 123 allein. Die ersteren zwei gehören mit 146 und 245 zu einer der 5 Gruppen von je 4 nicht zusammenhängenden Querschnitten, und der letztere hängt mit jenen an ein und demselben 4. Querschnitt, nämlich an 124.

Damit sind dann die Flächen mit 2 reellen C_2 wieder erschöpft; der erste Fall ergibt die Typen 1, 2 und 3 der Gruppe IV und der letzte die sog. inverse Fläche mit 2 Knoten, welche, da sie ebensoviele reelle Gerade und Tritang.-Ebenen aufweist wie 2_{IV}, mit $2_{IV}'$ bezeichnet sein soll. (Tafel 4, Fig. 3). Wir wollen aber, damit die konischen Knoten in reeller Kontur erscheinen, für die erstern 3 Flächen unser Schema 2 auf Taf. 1 zu Grunde legen.

Ziehen wir dort die Querschnitte 236 und 245 zusammen, so entsteht die Fläche 1_{IV}, wobei wir bemerken, daß in die Gerade a durch die beiden C_2 4 Gerade entfallen, und zwar werden hier zweimal zwei solche Gerade, welche vorher einen reellen Schnittpunkt besaßen und welche in 2 durch die nun ausgezeichnete Gerade b gehenden Tritang.-Ebenen lagen, konsekutiv. Die Ebene (ab), welche diese beiden Tritang.-Ebenen vereinigt, berührt deshalb augenscheinlich die Fläche längs der Geraden a. Diese berührende Ebene ist bei allen Flächen mit 2 C_2 vorhanden.

An der Knotenachse a hängen 4 Dreiecksebenen, in welchen je 4 einfache Tritang.-Ebenen zusammengefallen sind. Durch die Gerade b gehen außer den beiden Tritang.-Ebenen, welche in (ab) koinzidieren, noch 3 weitere. Wir können die 3 Flächen, welche in Fig. 1, 2 und 3 der Gruppe IV, Tafel 2 dargestellt sind, auch nach der Realität dieser 7 Ebenen charakterisieren:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bei 1_{IV} sind die 4 Dreiecksebenen durch a reell und die 3 Tritang.-Ebenen durch b,

bei 2_{IV} sind von den ersteren 2 reell und 2 konjugiert imaginär, von den letzteren 1 reell und die beiden andern konjugiert imaginär,

bei 3_{IV} sind die 4 Ebenen durch a zu je zweien konjugiert imaginär und die Tritang.-Ebenen durch b sind reell. Zwei der letzteren enthalten punktiert imaginäre Gerade.

Alles dies kann unmittelbar aus den Figuren abgelesen werden, wenn wir uns die 2 Flächen mit 3 Knoten hinzudenken, welche die Übergänge zwischen diesen 3 Flächen vermitteln, und die auf pag. 18 angestellte Überlegung beachten. Wir erkennen, daß die Fläche 3_{IV} einen paren positiv gekrümmten Flächenteil aufweist, der nur durch die beiden C_2 mit dem übrigen Mantel zusammenhängt.

Zusammenstellung:

	Gerade:	Tritang.-Ebenen:
1_{IV} . . .	$1(4)+8(2)+7=27$.	$4(4)+1(2)_{a,b}+12(2)+3 = 45$.
2_{IV} u. $2_{IV}'$	$1(4)\quad 4(2)+3=15$.	$2(4)+1(2)+2(2)+2^*(2)+1 = 19$.
3_{IV}	$1(4)+3=7$.	$1(2)+4^*(2)+\underbrace{2^*+1}_{b}=13$.

Die 2 konischen Knoten können nun auch konj. imag. ausfallen. In unserer Umrißkurve stellt sich der Übergang dadurch her, daß zuerst die beiden Doppelpunkte zusammenrücken, wodurch ein Selbstberührpunkt entsteht, und dann konjug. imag. werden, wobei sich die Tangente im Selbstberührpunkt abstößt. Dem Selbstberührpunkt entspricht auf der Fläche ein biplanarer Knoten B_4.

Indem wir diese Deformation mit der Umrißkurve durchführen, gehen auf der Fläche die beiden konischen Knoten C_2 durch den biplanaren Knoten B_4 hindurch.

Die Ebene ab berührt auch hier die Fläche längs der Geraden a, auf welcher sich die imag. Knoten befinden; denn die Gerade a verliert bei diesem Übergang an ihrem Wert nichts.

Ein durch a gelegtes Ebenenbüschel wird die Fläche nach einem Kegelschnittsystem schneiden, von welchem kein Kegelschnitt die Gerade a in reellen Punkten trifft, woraus erhellt, daß längs der Geraden a bis zur Geraden b hin die Fläche ganz auf derselben Seite der Ebene ab verläuft, während im Falle der reellen Knoten, bei den Knoten hinsichtlich dieses Verlaufs in der Nähe der Knotenachse a ein Wechsel stattfindet.

Auch hier können noch 2 reelle konische Knoten hinzutreten — aber nur diese 2 — und je nachdem wir an diesen die Prozesse (+ +; + −; − −) anbringen, erhalten wir 3 Flächen 4, 5, 6. Man vergl. die Fig. 2_{XVI}, 3_{VIII} und 4_{VIII}, Taf. 3.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch die Gerade a und jeden der beiden reellen Knoten C_2, die noch hinzutreten können, geht eine Dreiecksebene, welche 2 konjug. imag. Gerade enthält, die im reellen C_2 ihren reellen Schnittpunkt haben. Der Prozeß des Trennens läßt eine solche Ebene in reelle, der des Verbindens in 2 konjug. imaginäre Dreiecksebenen zerfallen. (In ersterem Falle mit punktiert imaginären Geraden).

Von den 3 Ebenen, die außer den in a b zusammengefallenen noch durch die unäre Gerade b laufen, ist eine natürlich immer reell. Sie rührt her von der Ebene (b m n) der Flächen mit 2 reellen C_2. Beim Erscheinen des B_4 entfallen die Geraden m und n in die Knotenachse, und nach der Auflösung des B_4 in die 2 konjug. imag. C_2, werden sie punktiert imaginär, welcher Übergang bei einer späteren Gelegenheit noch anschaulicher klargelegt werden wird. Wie die beiden andern Tritang.-Ebenen beschaffen sind, zeigt ein Blick auf die eben angeführten Übergangsflächen auf Taf. 3 mit Beachtung dessen, was auf pag. 18 auseinandergesetzt wurde.

Bei der Fläche 4_{IV} sind die 4 Dreiecksebenen durch a und die 3 Tritang.-Ebenen durch b reell; bei 5_{IV} sind von den Dreiecksebenen durch a 2 reell und 2 konjug. imag., von den Tritang.-Ebenen durch b ist 1 reell und die beiden andern sind konjugiert imaginär; bei der Fläche 6_{IV} sind die 4 Ebenen durch a imaginär, aber die 3 Tritang.-Ebenen durch b reell. In dieser Hinsicht entsprechen sich bezw. die Flächen 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6. — In der Fläche 4_{IV} erkennen wir wieder eine Fläche, welche aus 2 getrennten Teilen, einem positiv gekrümmten paren und einem unparen Teil, besteht.

	Gerade:	Tritang.-Ebenen:
4_{IV}	$1(4) + 1 = 5$.	$4^*(4) + 1(2) + 3^* = 21$.
5_{IV}	$1(4) + 1 = 5$.	$2^*(4) + 1(2) + 1^* = 11$.
6_{IV}	$1(4) + 5 = 9$.	$1(2) + 2 + 1^* = 5$.

Die diesen 6 Flächen entsprechenden Umrißkurven erhalten wir, wenn wir das eine Mal (1, 2, 3) zwei Kegelschnitte $U_2 = 0$, $V_2 = 0$ wählen, die 4 reelle Schnittpunkte und 4 reelle gemeinschaftliche Tangenten besitzen, das andere Mal (4, 5, 6) zwei Kegelschnitte annehmen, die nur 2 reelle Schnittpunkte aufweisen, und an 2 reellen Doppelpunkten die entsprechenden Auflösungen vornehmen. Es sei zu diesem Zweck $a = 0$ die Gerade, welche durch 2 reelle oder konjug. imag. Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte geht, $A_1 = 0$ eine gemeinschaftliche Tangente derselben und $B_1 = 0$ irgend eine Gerade, dann stellt die Gleichung:

$$7) \qquad U_2 \, V_2 + \lambda \, A_1 \, B_1 \, a^2 = 0$$

ein Kurvenbüschel 4. Ordg. dar, in welchem, wenn B_1 die beiden andern reellen Schnittpunkte der Kegelschnitte nicht trennt, im ersteren Fall für ein genügend kleines $\pm \lambda$ die Umrißkurven der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Flächen 1_{IV} und 3_{IV} und im andern Fall die von 4_{IV} und 6_{IV} auftreten; wenn aber B_1 die 2 reellen Schnittpunkte trennt, so erhalten wir im ersteren Falle beide Male ($\pm \lambda$) die Umrißkurve einer Fläche 2_{IV} und im andern Falle die einer Fläche 5_{IV} zukommende Kurve.

Es entspricht dies den Auflösungsprozessen:

$$\begin{array}{ll} + + \ldots\ldots 1_{IV}, 6_{IV}. & + - \\ - - \ldots\ldots 3_{IV}, 4_{IV}. & - + \end{array} \Big\} \ldots 2_{IV}, 5_{IV}.$$

V. Die Flächen mit einem biplanaren Knoten B_4.

Tafel 2, V, Fig. 1—4.

Dem biplanaren Knoten B_4 entspricht in der Umrißkurve ein Selbstberührpunkt mit reellen oder imaginären Ästen. Er entsteht also, wenn 2 konische Knoten zusammenrücken, womit die Zusammenziehung von 3, nach Art der Glieder einer Kette aneinander hängenden Querschnitten verbunden ist.

Wählen wir hiezu, um den B_4 in reeller Kontur erscheinen zu lassen, die Querschnitte 245, 256, 236, so bemerken wir, daß in unserm Querschnittssystem nur noch die nicht zusammenhängenden Querschnitte 135 und 146 zur Erzeugung weiterer konischen Knoten verwendbar sind.

Hieraus erkennen wir auch, daß, während bei den F_3 mit 2 reellen C_2 noch über 3 Querschnitte zur Erzeugung konischer Knoten verfügt werden kann, bei den Flächen mit 2 imaginären C_2 nur noch 2 hiezu geeignete Querschnitte vorhanden sind, nämlich in unserm Fall die beiden letztgenannten. Einer der inversen Fläche $2_{IV}'$ entsprechende Fläche existiert also bei den mit einem B_4 oder mit 2 imaginären Knoten behafteten Flächen nicht. Je nachdem wir an den beiden Knoten C_2, die noch zu einem B_4 treten können, die Auflösungsprozesse ($+ +$; $+ -$; $- -$) anbringen, erhalten wir die 3 mit einem B_4 behafteten Flächen, deren Bilder in Fig. 1, 2, 3 der Gruppe V zur Darstellung gebracht sind.

Diese drei Flächen bilden die Übergänge zwischen den sechs Flächen der vorigen Gruppe. Indem wir sie aus den Flächen mit 2 reellen C_2 entstehen lassen, bemerken wir, daß mit der auf der Fläche liegenden Knotenachse des B_4 sich noch die beiden unären Geraden m und n vereinigen, so daß diese jetzt für 6 Gerade zählt, und in der längs a berührenden Ebene (a b) 3 Tritang.-Ebenen beisammen liegen. Die 4 Dreiecksebenen, die dort an a hängen, vereinigen sich hier zu je zweien in den beiden Hauptebenen, und außerdem entfallen auch noch dahin die zweimal 2 zusammengefallenen Tritang.-Ebenen, welche durch m und n liefen, so daß in jeder Hauptebene des B_4 12 Tritang.-Ebenen enthalten sind. Die Gerade a ist ersichtlich Schnittlinie der beiden Hauptebenen. Während beim B_3 die Achse nicht auf der Fläche liegt, ist sie jetzt in derselben enthalten, und es ist aus jeder Hauptebene des B_3 ein Knotenstrahl

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in die Achse gerückt. Wir können den B_4 auch aus einem B_3 entstehen lassen. Wenn wir z. B. bei der der Fläche 1_{III} entsprechenden Umrißkurve den Zweig, an welchem sich die dem B_3 entsprechende Spitze befindet, durch Änderung der Konstanten zum Verschwinden bringen, so tritt dieser Übergang klar zu Tage; die Knotenstrahlen a‴, b‴ vereinigen sich in der Knotenachse des B_4, dessen Bild hier imaginäre Äste aufweist (2 konsekutive isolierte Doppelpunkte). Mit a′ und b′ fällt dabei je eine unäre Gerade mit imaginären Asymptotenpunkten, mit a″ und b″ je eine mit reellen Asymptotenpunkten zusammen, so daß die 2 Knotenstrahlen, welche in jeder Hauptebene des B_4 liegen, nun wieder gleichwertig sind, da jetzt jeder 2 Gerade mit vorher reellen und 2 mit vorher konjug. imag. Asymptotenpunkten enthält, was übrigens auch aus der andern Entstehungsweise erkenntlich ist.

In Fig. 1 sind alle Knotenstrahlen reell.

Bei Fig. 2 sind bei der Aenderung durch den C_2 hindurch die beiden Knotenstrahlen der einen Hauptebene konjugiert imaginär geworden.

Bei der Fläche, deren Bild Fig. 3 gibt, ist dies auch bei der andern Hauptebene eingetreten. Diese Fläche zeigt wieder einen paren, positiv gekrümmten Teil, der nur im Knoten mit dem übrigen Mantel zusammenhängt und zwischen den Hauptebenen eingekeilt erscheint.

Für die Geraden und Tritang.-Ebenen ergeben sich folgende Zahlen:

	Gerade:	Tritang.-Ebenen:
1_V	$1(6) + 4(4) + 5 = 27.$	$2(12) + 4(4) + 1(3)_{ab} + 2 = 45.$
2_V	$1(6) + 2(4) + 1 = 15.$	$2(12) + 1(3) = 27.$
3_V	$1(6) + 1 = 7.$	$2(12) + 1(3) + 2^* = 29.$

In dem letztern Falle gehen durch die Gerade b außer den 3 Tritang.-Ebenen, welche in der Fläche längs a berührenden Ebene (a b) beisammenliegen, noch 2 weitere reelle Ebenen, die aber je 2 punktiert imaginäre Gerade aufweisen. Der dritte (reelle) Berührpunkt der einen liegt auf dem paren, der der andern auf dem unparen Teil der Fläche.

Außer diesen 3 Flächen mit einem B_4 mit reellen Hauptebenen existiert auch noch eine mit einem B_4', bei welchem die Hauptebenen konjugiert imaginär sind. Die beiden konischen Knoten der Fläche 3_{IV} können nämlich auf 2 Arten zum Zusammenfallen gebracht werden.

Entweder zieht sich der Querschnitt, an welchem die beiden C_2 liegen, zusammen, dann kommt die Fläche 3_V zum Vorschein, oder wir erhalten diesen Querschnitt und bringen den paren Teil zwischen den 2 Knoten C_2 zum Verschwinden, so entsteht die Fläche 4_V, welche mit einem B_4 mit imaginären Ebenen behaftet

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist. Die Gestalt der Fläche in der Nähe des Knotens springt unmittelbar in die Augen.

Von den 5 durch b gehenden Tritang.-Ebenen liegen 3 in der Ebene (a b), welche die Fläche längs der Knotenachse a berührt; die beiden andern sind ebenfalls reell, und die eine enthält noch 2 reelle Gerade (m, n), die andere 2 punktierte, konjug. imag. Gerade.

Die eine Ebene, welche bei der Fläche 3_{IV} durch b geht und den paren Teil berührt, fällt nämlich nach dem eben ausgeführten Deformationsprozeß mit (a b) zusammen, während die andere Ebene, welche 2 punktierte Gerade enthält, den unparen Teil berührt und so erhalten bleibt.

Das Verhalten der Hauptebenen tritt klarer zu Tage, wenn wir die Fläche mit einem B_4 mit imaginären Ebenen aus der Fläche 3_V dadurch hervorgehen lassen, daß wir, indem wir den zwischen den Hauptebenen eingezwängten paren Teil zum Verschwinden bringen, die beiden Hauptebenen zuerst zusammenfallen und dann imaginär werden lassen. In unserem Bilde vollziehen wir diesen Übergang durch die uniplanare Form hindurch, indem wir die Umrißkurve in einem geeigneten Kurvenbüschel in gewünschter Weise deformieren.

Es sei $U_4 = 0$ eine Kurve, welche der Fläche 3_V entspricht, $a = 0$ die Tangente im Selbstberührpunkt, $A_1 = 0$ eine der beiden reellen Doppeltangenten, dann vollzieht sich in dem Büschel:

$$8) \qquad U_4 + \lambda\, a^2\, A_1 = 0$$

die eben besprochene Deformation.

Das innere Oval verschwindet bei wachsendem λ immer mehr und mehr und entwickelt sich schließlich nach der andern Seite der Geraden a zu einem neuen Oval.

In der Umrißkurve unterscheidet sich also der B_4 mit reellen Ebenen von dem mit konjug. imag. Ebenen dadurch, daß bei ersterem die beiden Kurvenäste (wenn sie reell sind) auf derselben Seite der Tangente im Selbstberührpunkt verlaufen, während sie bei letzterem durch diese Tangente getrennt werden.

Die entsprechenden Kurven zu den letztbesprochenen 4 Flächen treten in folgendem Kurvenbüschel 4. Ordg. auf.

Es seien wieder $U_2 = 0$, $V_2 = 0$ 2 Kegelschnitte, welche sich in einem Punkt so berühren, daß beide auf derselben Seite der Tangente im Berührpunkt liegen, und welche sich außerdem noch in 2 reellen Punkten schneiden, $a = 0$ sei die Tangente im Selbstberührpunkt, $A_1 = 0$ eine der beiden reellen gemeinschaftlichen Tangenten, $B_1 = 0$ irgend eine Gerade, dann repräsentiert die Gleichung:

$$9) \qquad U_2\, V_2 + \lambda\, a^2\, B_1\, A_1 = 0,$$

wenn B_1 die beiden andern Schnittpunkte der Kegelschnitte nicht trennt, ein Kurvenbüschel, in welchem die Umrißkurven, welche den

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Flächen 1_V, 3_V, 4_V zukommen, auftreten, und, wenn B_1 jene Schnittpunkte trennt, Kurven, wie sie der Fläche 2_V entsprechen.

Daß zu einem B_4 mit konjug. imag. Hauptebenen kein weiterer Knoten C_2 mehr hinzutreten kann, ist zwar ohne weiteres evident, es folgt aber auch aus dem Typus der Umrißkurve der Fläche 4_V; denn sobald diese Kurve noch einen Doppelpunkt annimmt, existiert augenscheinlich keine eigentliche Doppeltangente mehr, welcher man die Rolle der A_1 zuweisen könnte.

Was die Gestalt des bipl. Knotens B_4 mit konjug. imag. Ebenen anbelangt, so erkennen wir aus unserer Abbildung, daß wir einen derartigen Knoten ungefähr erhalten, wenn wir ein Kurvenstück um eine Tangente rotieren lassen.

Wenn wir bei den ersten drei Flächen etwa solche im Auge haben, die von denjenigen, bei welchen die $2\,C_2$ noch vorhanden sind, nur wenig abweichen, so erkennen wir einen rundlichen Teil, der zwischen den Hauptebenen eingeklemmt gegen den B_4 hin keilartig zuläuft und sich jenseits des B_4 an die Hauptebenen anschmiegend keilartig fortsetzt.

Eine um den B_4 beschriebene genügend kleine Kugel schneidet ersichtlich in 2 getrennten, zusammengedrückten Ovalen.

VI. Die Flächen mit einem biplanaren Knoten B_3 und einem konischen Knoten C_2.

Taf. 2, VI, Fig. 1 u. 2.

Wenn in unserem Querschnittssystem 2 Querschnitte, welche aneinander hängen, zur Herstellung eines B_3 verwendet sind, so können wir nur noch über 4 Querschnitte verfügen, um einen konischen Knoten zu erzeugen. Diese 4 Querschnitte verhalten sich hinsichtlich des Zusammenhanges gegenüber den beiden zusammengezogenen ganz gleichwertig, weshalb es gleichgiltig ist, welchen von den vieren wir zur Erzeugung eines weiteren konischen Knotens zusammenziehen. Wir erhalten so eine Fläche, welche den Übergang zwischen 1_{III} und 2_{III} herstellt. Fig. 1 der Gruppe VI zeigt uns das Bild einer solchen Fläche.

Die eine Hauptebene A berührt die Fläche längs der Geraden durch beide Knoten, in welcher 2 Knotenstrahlen dieser Hauptebene koinzidieren. Von den 6 Knotenstrahlen des konischen Knotens sind 3 in jener Geraden konsekutiv geworden, so daß der Tangentialkegel des C_2 die Fläche längs derselben oskuliert.

Jede Dreiecksebene durch die beiden Knoten enthält 6 Tritang.-Ebenen.

Um nun noch weitere derartige Flächen zu gewinnen, müssen wir an etwa vorhandenen isolierten Querschnitten die Änderung durch den C_2 hindurch vornehmen.

Wir bemerken, daß nur noch 2 hiezu geeignete Querschnitte existieren. Da sich diese aber hinsichtlich Lage und Zusammenhang den bereits

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zusammengezogenen gegenüber ganz gleichwertig verhalten, so werden diese Flächen erschöpft sein, wenn wir einen davon zusammenziehen und an dem konischen Knoten den Trennungsprozeß vornehmen.

Fig. 2 der Gruppe 6 stellt eine solche Fläche dar. Zwei Knotenstrahlen in der Hauptebene b sind konjugiert imaginär.

	Gerade:	Tritang.-Ebenen:
1_{VI}	$4(3)+1(6)+3(2)+3=27.$	$2(6)+3(6)+3(3)+3(2)=45.$
2_{VI}	$1(6)+2(3)+1(2)+1=15.$	$2(6)+1(6)+1(3)+1^*(2)=23.$

Die letztere Fläche vermittelt den Übergang zwischen 2_{III} u. 3_{III}.

Die Umrißkurven, welche den Flächen entsprechen, treten in folgendem Büschel auf:

Es sei $U_4 = 0$ eine Kurve 4. Ordnung mit einer Spitze und 2 Doppelpunkten (wie auf Seite 27), $B_1 = 0$ eine durch den einen Doppelpunkt gehende Gerade, $R_1 = 0$ die Tangente im Rückkehrpunkt, dann treten in der Gleichung:

$$10) \qquad U_4 + \lambda R_1^2 B_1^2 = 0$$

für genügend kleine λ diese Kurven auf.

Bedeutet $U_4' = 0$ die Gleichung einer Kurve, wie sie einer Fläche 1_{III} entspricht und in dem Büschel auftritt, welches die Gleichung (6) darstellt, so vollzieht sich in dem Kurvenbüschel:

$$11) \qquad U_4' + \lambda A_1 R_1^2 = 0$$

im allgemeinen der Prozeß, welcher die entsprechenden Flächen 1_{III}, 1_{VI}, 2_{III}, 2_{VI}, 3_{III} in einander überführt.

VII. Die Flächen mit einem biplanaren Knoten B_5.

Taf. 2, VII, Fig. 1 u. 2.

Ein biplanarer Knoten B_5 wird sich nach den früheren Erwägungen als Spitze II. Art (Schnabelspitze) in der Umrißkurve repräsentieren. Damit die Umrißkurve eine derartige Singularität annimmt, müssen sich ersichtlich 4 aufeinanderfolgende Querschnitte gleichzeitig zusammenziehen. Benützen wir hiezu z. B. die Kette 236, 256, 245, 124 in Fig. 2, Taf. 1, so entstehen die beiden Fig. 1 u. 2 der Gruppe VII. Wir können diese beiden Flächen mit einem B_5 auch aus denen mit einem B_4 dadurch herleiten, daß wir in Fig. 1 u. 2 der Gruppe V die obern Schleifen zum Verschwinden bringen. Wir bemerken gleichzeitig, daß nur die beiden B_4 der Flächen 1_V u. 2_V in B_5 überführbar sind. Es kann also nur 2 Flächen geben, welche einen B_5 aufweisen. Wir erkennen dies auch, wenn wir einen Blick auf unser Querschnittssystem werfen; es bleibt nur noch ein einziger isolierter Querschnitt übrig, an welchem die Deformation durch den konischen Knoten hindurch vorgenommen werden kann, in unserm Fall 135. Indem wir den B_5

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

aus dem B_4 hervorgehen lassen, bemerken wir, daß sich nun die Hauptebenen nicht mehr gleichwertig verhalten; denn es rückt die eine vierwertige Gerade in der einen Hauptebene beim Zuziehen der obern Schleife in die Knotenachse, so daß diese nun zehnfach zählt, während die unäre Gerade b mit dem in dieser Ebene zurückgebliebenen Knotenstrahl konsekutiv wird. Diese nun ausgezeichnete Hauptebene (a b) berührt die Fläche längs der Knotenachse. Die 3 andern Knotenstrahlen vereinigen je 5 unäre Gerade. Bei 1_{VII} sind die 2 Knotenstrahlen in der andern Hauptebene reell, bei 2_{VII} sind sie konjug. imag. geworden, und wir erhalten für beide Flächen folgende Zahlenzusammenstellung:

	Gerade:	Tritang.-Ebenen:
1_{VII}	$1(10) + 3(5) + 2 = 27$.	$1(20) + 1(15) + 2(5) = 45$.
2_{VII}	$1(10) + 1(5) = 15$.	$1(20) + 1(15) = 35$.

In die Hauptebene, welche längs der Knotenachse berührt, entfallen 15, in die andere 20 Tritang.-Ebenen, wie man im Zusammenhalt mit 1_V leicht erkennt. Eine Dreiecksebene durch den Knoten, welche noch eine unäre Gerade enthält, absorbiert 5 einfache Tritang.-Ebenen. Die Gleichungen dieser Umrißkurven sind in der Gleichung (9) enthalten. Der Übergang des B_4 in den B_5 vollzieht sich in jenem Büschel, wenn wir im zweiten Falle noch dafür sorgen, daß auf der obern Schleife keine Grundpunkte liegen, so daß diese verschwinden kann.

Um die Kurven selbst zu bekommen, brauchen wir nur die Tangente vom Knoten aus an die obere Schleife zu bestimmen, was nur die Auflösung einer Gleichung 4ten Grades erfordert, und die Bedingung aufstellen, daß diese Tangente mit a zusammenfallen soll, woraus sich dann das λ für unsere Kurve ergibt. Es ist aus der Gestalt des Büschels und der Lage der Grundpunkte klar, daß das Oval und die andere Schleife nicht vorher schon verschwinden können.

VIII. Die Flächen mit drei konischen Knoten C_2.

Taf. 3, VIII, Fig. 1—5.

Eine Fläche mit 3 konischen Knoten erhalten wir, wenn wir 3 gegenseitig isolierte Querschnitte zusammenziehen. Unsere Umrißkurve erhält dann 3 Doppelpunkte. Hier sind nur 2 Fälle möglich: Entweder wir erteilen der Umrißkurve diese 3 Doppelpunkte in der Art, daß damit die Zusammenziehung von 3 Querschnitten, welche einer der 5 Gruppen von je 4 gegenseitig isolierten Querschnitten angehören (Fig. 1), verbunden ist, [in diesem Falle können wir noch an dem 4ten Querschnitt die Änderung durch den konischen Knoten hindurch vor sich gehen lassen, woraus eine zweite Fläche entspringt (Fig. 2)], oder wir erteilen der Umrißkurve

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3 Doppelpunkte in der Weise, daß dadurch 3 Querschnitte zusammengezogen erscheinen, die an ein und demselben vierten hängen. In diesem letzteren Falle (Fig. 3) kann kein weiterer konischer Knoten mehr hinzutreten; denn es ist, wie unser Querschnittssystem erkennen läßt, kein isolierter Querschnitt mehr vorhanden.

Damit sind die Flächen 3. Ordnung mit 3 reellen konischen Knoten erschöpft.

Wir bemerken aus unsern Figuren, daß die Fläche, welche auf die letzte Art erzeugt wird, gleichviele und gleichwertige Gerade und Tritang.-Ebenen besitzt, wie die erste Fläche; sie sei deshalb mit $1_{VIII}'$ (inverse Fläche) bezeichnet. Die Gestalt dieser Fläche ist aber von der jener wesentlich verschieden. Wir bemerken, daß bei 1_{VIII} die 3 Geraden, welche durch je 2 Knoten laufen, ein durchaus positiv gekrümmtes Dreieck begrenzen; ein solches Dreieck ist bei $1_{VIII}'$ gar nicht vorhanden. Insbesondere werden wir später sehen, daß die parabol. Kurven auf diesen beiden Flächen einen wesentlich verschiedenen Typus zeigen.

In den beiden ersten Fällen ist die Tritang.-Ebene, welche die einzigen 3 unären Geraden enthält, eine von jenen 5 Ebenen A *), deren 3 Gerade reelle Asymptotenpunkte haben, während im letzten Falle diese Ebene eine von jenen 10 Tritang.-Ebenen B ist, welche die Dreiecke enthalten, in welchen die 10 Zweige der parab. Kurve verlaufen. Bei der Fläche 2_{VIII} erkennen wir einen paren Teil von positiver Krümmung, der nur in den Knoten mit dem übrigen Mantel zusammenhängt.

Die Ebene durch die 3 Knoten enthält 8 Tritang.-Ebenen, jede Gerade durch 2 Knoten zählt vierfach, und längs jeder solchen Geraden berührt eine Ebene, die außerdem noch eine der 3 unären Geraden enthält, was alles im Zusammenhalt mit den vorhergehenden Fig. (IV) leicht ersichtlich ist.

	Gerade:	Tritang.-Ebenen:
1_{VIII} u. $1_{VIII}'$	$3(4)+6(2)+3=27.$	$1(8)+6(4)+3(2)+3(2)+1=45.$
2_{VIII}	$3(4)+3=15.$	$1(8)+3(2)+3^*(2)+1=21.$

Andere Flächentypen als diese 3 existieren nicht.

Herr Prof. Klein**) leitet aus der ersteren Fläche dadurch 3 neue ab, daß er die 3 konischen Knoten nacheinander durch die biplanare Form hindurch sich ändern läßt, und bezeichnet die so gewonnenen Flächen mit I, I', I'', I'''.

Wir können nun in unserer Umrißkurve diese Deformationsprozesse in ebenso einfacher als übersichtlicher Weise verfolgen und werden finden, daß die Flächen I, I'' und I', I''' den gleichen Typen angehören***).

*) Zeuthen a. a. O.
**) Math. Annal. Bd. VI.
***) Rodenberg, „Zur Klassifikation der Flächen 3. Ordg." Math. Annal. Bd. XIV.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Legen wir dieser Betrachtung das Schema 1 auf Taf. 1 zu Grunde, weil wir hier über die meisten im Endlichen verlaufenden Querschnitte verfügen können. Wir erhalten eine Umrißkurve für eine Fläche I, wenn sich hier die 3 Ovale 146, 236, 245 gleichzeitig auf Punkte zusammenziehen (das Proj.-Zentr. liegt dann in dem oben erwähnten positiv gekrümmten Dreieck der 3 Knoten), eine Kurve, welche durch quadrat. Transformation aus einem Kegelschnitt hervorgeht, welcher ganz innerhalb des Fundamentaldreiecks verläuft.

Bewegen wir diesen Kegelschnitt in der Weise, daß er nacheinander die Seiten des Fundamentaldreiecks berührt und schließlich in reellen Punkten schneidet, so vereinigen sich nacheinander die 3 isolierten Punkte in bekannter Weise durch Rückkehrpunkte hindurch mit dem reellen Teil der Kurve *).

Während die Umrißkurve diese Veränderung erfährt, ändern sich auf der entsprechenden Fläche die drei konischen Knoten 146, 236, 245 nach einander durch die biplanare Form eines B_3 hindurch. Dabei entwickeln sich die vorher zusammengezogenen Querschnitte wieder, und die 3 Querschnitte, welche daran hängen und den Querschnitt 135 treffen, ziehen sich zusammen. Bei I u. I'' sind schließlich 3 Querschnitte zusammengezogen, die einer der 5 Gruppen von je 4 isolierten Querschnitten angehören, nämlich:

146 236 245 . . . (135)
156 123 245 . . . . (346),

bei I' u. I''' sind je 3 Querschnitte zusammengeschrumpft, die an ein und demselben vierten hängen, nämlich bezw. an 256 u. 135.

Da die 10 Querschnitte unserer allg. Fläche sowohl in ihrem Zusammenhang, als auch hinsichtlich der 10 Doppelsechsen, welche sie je überschneiden (jede enthält 6 Gerade mit reellen und 6 mit konjug. imag. Asymptotenpunkten), gleichberechtigt sind, so erhellt die vollständige Übereinstimmung der Typen I, I'' einerseits und I', I''' andererseits.

Auch bei den übrigen Flächen mit reellen konischen Knoten läßt sich in gleicher Weise konstatieren, daß in allen Fällen, wo diese Änderung durch die biplanare Form zulässig ist, im allgemeinen nichts neues erhalten wird, und nur in den Fällen, wo eine entsprechende inverse Fläche existiert, führt diese Operation, wenn sie eine ungerade Anzahl mal vorgenommen wird, eben zu dieser inversen Fläche; wird sie aber eine gerade Anzahl mal durchgeführt, so ergibt sie auch hier nichts Neues.

Außer diesen 3 Flächen mit reellen konischen Knoten existieren noch 3 andere, bei welchen 2 Knoten konjugiert imag. sind.

Wir gelangen zu diesen, wenn wir bei den beiden Flächen 1_{VIII} u. 2_{VIII} die Änderung durch die biplanare Form B_4 hindurch vornehmen, und zwar in der Weise, daß wir den B_4 in imaginäre

*) Brill, „Über rationale Kurven 4. Ordg." Math. Annal. Bd. XI.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

C_2 auflösen. Wir erhalten so die beiden Flächen 3 u. 4 der Gruppe VIII. Die Fläche 4_{VIII} läßt einen paren, positiv gekrümmten Teil erkennen, der nur im reellen Knoten mit dem übrigen Mantel zusammenhängt. Wenn an dieser Umrißkurve die innere Schleife sich zusammenzieht und sich hernach ein isolierter Punkt abstößt, so vollzieht sich an der Fläche die Änderung durch die biplan. Form B_3 mit imag. Ebenen hindurch, und wir erhalten einen weitern Typus 5_{VIII}, bei welchem der reelle Knoten isoliert ist.

Die beiden Flächen 3_{VIII} u. 4_{VIII} bilden die Übergänge zwischen den 3 Flächen mit nur 2 konjug. imag. Knoten. (4_{IV}, 5_{IV}, 6_{IV}, Taf. 1).

Weitere Typen existieren nicht; denn bei $1_{VIII}'$ ist ein Übergang durch einen B_4 unmöglich. Bei 3_{VIII} sind von den 4 Dreiecksebenen durch a 2 konjug. imag. und 2 fallen in a C_2 zusammen. Von den 5 Ebenen durch b liegen 2 in der E. (a b), die längs a berührt, 2 in der E. (b C_2), und eine berührt den rundlichen Teil und enthält 2 punktierte, konjug. imag. Gerade; es ist dies die Ebene, welche bei 1_{VIII} die 3 reellen, unären Geraden enthielt.

Bei der Fläche 4_{VIII} sind 2 Ebenen durch a reell: die eine berührt den paren, die andere den unparen Teil, und 2 liegen in der E. (a C_2) beisammen; die Ebenen durch b liegen wie vorhin; ebenso bei 5_{VIII}. Der 3te Berührpunkt der unären Tritang.-Ebene ist beim Durchgang durch den B_3 auf den andern Teil übergegangen, ebenso der Berührpunkt der einen reellen Dreiecksebene durch a.

	Gerade:	Tritang.-Ebenen:
3_{VIII}	$1(4)+2(2)+1=9.$	$1^*(8)+1(2)+1(2)+1^*=13.$
4_{VIII}	$1(4)+1=5.$	$1^*(8)+2^*(4)+1(2)+1^*(2)+1^*=21.$
5_{VIII}	$1(4)+1=5.$	$1^*(8)+2^*(4)+1(2)+1^*(2)+1^*=21.$

Die Umrißkurven zu diesen Flächen erhalten wir in einem Kurvenbüschel 4. Ordg., welches in folgender Weise konstruiert ist: Es seien

$U_2 = 0$, $V_2 = 0$ 2 Kegelschnitte,
$A_1 = 0$ eine gemeinschaftliche Tangente,
$B_1 = 0$, $C_1 = 0$, $D_1 = 0$ die durch 3 Schnittpunkte der Kegelschnitte gelegten Geraden. Die Gleichung:

$$12) \qquad U_2 V_2 + \lambda A_1 B_1 C_1 D_1 = 0$$

enthält, wenn B_1 u. C_1 reell sind, Kurven, welche den Flächen 1_{VIII} u. 2_{VIII} entsprechen, und, wenn B_1 u. C_1 konjug. imag. sind, Kurven, welche den Flächen 3_{VIII} und 4_{VIII} zukommen. In dem letzteren Büschel findet auch der entsprechende Übergang von 4_{VIII} zu 5_{VIII} statt. Es entspricht dies den beiden Auflösungsprozessen, die an dem noch möglichen vierten Knoten angebracht werden können.

Spezielle Fälle dieser letztern Kurven ergeben sich auch aus der Transformation von Kegelschnitten mittelst reziproker Radienvektoren. D_1 ist dann die unendlich ferne Gerade der Ebene, und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die konjug. Doppelpunkte sind die unendlich fernen Kreispunkte. Im übrigen ergeben sich alle diese Kurven durch quadr. Transformation aus Kegelschnitten bei passender Wahl des Fundamentaldreiecks *).

IX. Die Flächen mit zwei biplanaren Knoten B_3.

Taf. 3, IX, Fig. 1—4.

Die beiden Flächen mit 2 reellen B_3 entstehen, wenn wir zweimal zwei zusammenhängende Querschnitte, die nicht eine fortlaufende Kette bilden, zusammenziehen, z. B. 245, 345 einerseits und 123, 236 andererseits. Es existieren davon isoliert dann noch 2 derartige Querschnitte, nämlich 146 u. 156. Jeder der letzteren hat in bezug auf die 4 ersteren gleichwertige Lage; er gehört zweimal mit zwei derselben zu einer Gruppe von 4 gegenseitig isolierten Querschnitten und hängt mit den 2 andern Kombinationen derselben zu je zweien an ein und demselben vierten, weshalb es gleichgiltig ist, welchen von den beiden letzteren wir wählen, um durch eine Deformation durch den konischen Knoten hindurch eine 2te Fläche zu gewinnen. Die beiden Fig. 1 und 2 der Gruppe IX stellen die Bilder dieser Flächen vor.

Die Gerade durch die beiden B_3 hat 9 Gerade der ursprünglichen Fläche absorbiert. Längs dieser Geraden oskuliert die den beiden Knoten gemeinschaftliche Hauptebene die Fläche, was schon aus dem Zusammenfallen von 3 Geraden, die vorher einer Tritang.-Ebene angehörten, folgt, was aber noch anschaulicher hervortritt, wenn wir die Fläche aus 1_{VI} entstehen lassen. In jeder der 3 Hauptebenen liegen 6 Tritang.-Ebenen beisammen, und jede Dreiecksebene durch die beiden B_3 enthält deren 9, so daß wir folgende Zahlen erhalten:

	Gerade:	Tritang.-Ebenen:
1_{IX}	$1(9) + 6(3) = 27.$	$3(6) + 3(9) = 45.$
2_{IX}	$1(9) + 2(3) = 15.$	$3(6) + 1(9) = 27.$

Von den 3 Dreiecksebenen, die an der 9fach zählenden Geraden hängen, sind im zweiten Fall 2 konjug. imag. geworden.

Wir erhalten die entsprechenden Umrißkurven, wenn wir zuerst eine rationale Kurve 4. Ordg. mit 2 Rückkehrpunkten herstellen, $U_4 = 0$. Sind $R_1 = 0$ und $S_1 = 0$ die Tangenten in den Rückkehrpunkten, so stellt die Gleichung:

$$13) \qquad U_4 + \lambda R_1^2 S_1^2 = 0$$

für ein genügend kleines $\pm \lambda$ die beiden gewünschten Kurven, entsprechend den beiden Auflösungsarten ($\pm$) des konischen Knotens, dar.

*) Brill, a. a. O.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die beiden B_3 können aber auch konjug. imag. ausfallen, und wir erhalten hier 2 neue Flächen. Den Übergang zu diesen führen wir in unserer Umrißkurve in folgender Weise aus:

Wir lassen bei der Kurve 4. Ordg. mit 2 Spitzen und einem Doppelpunkt diese 3 Singularitäten zunächst zusammenrücken, wobei eine sog. maskierte Singularität entsteht (Fig. XX). Ändern wir die Konstanten, welche dies bewerkstelligt haben, in diesem Sinne fort, so werden die beiden Spitzen konjug. imag., und der Doppelpunkt rückt in das Innere des Zweiges als isolierter Punkt. (Fig. 3_{XVII}). Löst sich dieser Doppelpunkt unter Beibehaltung der Spitzen in ein reelles Oval auf, so haben wir die Umrißkurve einer Fläche mit zwei imaginären B_3.

Fig. 3_{IX} gibt das Bild einer derartigen Fläche.

Diese Fläche besteht wieder aus zwei getrennten Teilen. Vereinigt sich schließlich das innere Oval mit dem äußern, indem die Kurve einen Doppelpunkt passiert, so erhalten wir eine 2te Fläche, deren Bild in Fig. 4_{IX} dargestellt ist. In beiden Flächen oskuliert die reelle gemeinschaftliche Hauptebene der beiden konjug. B_3 längs der einzigen Geraden, welche noch vorhanden ist, die Fläche; denn bei diesem Deformationsprozeß bleiben die 9 Geraden in der Verbindungslinie der beiden B_3 beisammen.

Bei 3_{IX} sind die 3 Dreiecksebenen durch die Gerade (9) reell, bei 4_{IX} sind 2 davon konjug. imag., was übrigens klarer zu Tage tritt, wenn wir den isolierten Knoten bei 3_{XVII} durch die biplanare Form B_3 mit konjug. Ebenen (Fig. 2_{XXI}) hindurch sich ändern lassen, so daß die Fläche 2_{XVII} entsteht, und an dem kon. Knoten dieser Fläche die Trennung und Verbindung vornehmen. In ersterem Falle zerfällt die Ebene, welche durch die Gerade und den reellen C läuft, in 2 reelle, im andern Falle in 2 konjug. imag. Dreiecksebenen.

X. Die Flächen mit einem B_4 und einem C_2.

Taf. 3, X, Fig. 1 u. 2.

Die beiden hier möglichen Flächenformen bilden die Übergänge zwischen den 3 Flächen mit einem B_4 ohne C_2 : 1, 2 und 3 der Gruppe V. Nachdem die Querschnitte 236, 256, 245 zur Erzeugung des B_4 und der Querschnitt 135 für den C_2 zusammengezogen sind, bleibt nur noch als einzig davon isolierter Querschnitt 146 übrig. Die Änderung durch einen zweiten konischen Knoten hindurch führt zur 2ten Fläche. In der einen Hauptebene werden die beiden vorher gleichwertigen Strahlen konsekutiv, weshalb diese Hauptebene die Fläche längs der 8fach zählenden Geraden durch die beiden Knoten berührt. Bei der Fläche 1_X sind die beiden Knotenstrahlen in der andern Ebene reell, bei 2_X sind sie konjug. imag. Die Ebene a b berührt in beiden Fällen längs der Knotenachse a. Die Verteilung der reellen Geraden und Tritang.-Ebenen ist die folgende:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1_X . . . . . $1(6) + 1(8) + 2(4) \quad 2(2) + 1 = 27$ Ger.
$2(12) + 1(3)_{a,b} + 1(2) + 2(8) = 45$ Trit.-Eb.
2_X . . . . . $1(6) + 1(8) + 1 = 15$ Ger.
$2(12) + 1(3)_{a,b} + 1^*(2) = 29$ Trit.-Eb.

Von den 5 Tritang.-Ebenen durch die unäre Gerade b liegen 3 in (a b) und 2 in (b C_2).

Die Umrißkurven für diese beiden Flächen treten in folgendem Kurvenbüschel auf:

$$14) \qquad U_2 V_2 + \lambda a A_1 B_1^2 = 0,$$

wenn $U_2 = 0$, $V_2 = 0$ 2 Kegelschnitte sind, welche sich in einem Punkt berühren und in 2 reellen Punkten schneiden, wenn ferner $A_1 = 0$ eine gemeinschaftliche Tangente, $a = 0$ die Tangente im Berührpunkt und $B_1 = 0$ die Gerade durch diesen und einen der reellen Schnittpunkte darstellt.

XI. Die Flächen mit einem biplanaren Knoten B_6.

Taf. 3, XI, Fig. 1 u. 2.

Der B_6 stellt sich in der Umrißkurve als Oskulationsknoten mit reellen oder imag. Ästen ein. Er entsteht durch Zusammenrücken von 3 konischen Knoten, aber in der Weise, daß schließlich 5 Querschnitte, welche eine fortlaufende Kette bilden, zusammengeschrumpft erscheinen. In unserm Falle sind hiezu die Querschnitte 236, 256, 245, 124, 146 beansprucht, so daß bei der Lage des Proj.-Zentr. nach Fig. 2 auf Taf. 1 der B_6 in reeller Kontur erscheinen muß. Die an dem einzigen isolierten Querschnitt 135 angebrachte Änderung durch den konischen Knoten hindurch läßt eine zweite Fläche entstehen.

Denken wir die beiden Fig. 1 u. 2 dieser beiden Flächen aus bezw. 1_{VIII} u. 2_{VIII} durch allmähliche Deformation entstanden, so bemerken wir, daß in der Knotenachse des B_6 15 unäre Gerade koinzidieren. Aus diesem Übergang wird ohne weiters klar, daß die eine Hauptebene des B_4 längs der Knotenachse die Fläche oskuliert. Die andere Hauptebene enthält noch 2 Gerade, in welchen je 6 Gerade der ursprünglichen Fläche vereinigt sind. In der oskulierenden Hauptebene liegen 15, in der andern 30 Tritang.-Ebenen beisammen, wie der erwähnte Übergang ebenfalls klarlegt. (Vergl. auch 1_X).

Die Umrißkurven für beide Flächen treten in dem Kurvenbüschel 4. Ordg.

$$15) \qquad U_2 V_2 + \lambda W_2^2 = 0$$

auf, wenn $U_2 = 0$, $V_2 = 0$, $W_2 = 0$ drei Kegelschnitte vorstellen, welche sich in demselben Punkte oskulieren. Für einen $\pm$ kleinen Wert von λ löst sich der vierte Schnittpunkt nach beiden Arten ($\pm$) auf.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XII. Die Flächen mit einem uniplanaren Knoten U_6.

Taf. 3, XII, Fig. 1 u. 2.

Die uniplanaren Knoten bilden die Übergänge zwischen den biplanaren Knoten mit reellen und denen mit konjug. imag. Hauptebenen. Die beiden Hauptebenen fallen hier zusammen.

Um die Hauptebenen bei einem B_3 zum Zusammenfallen zu bringen, wollen wir in Fig. 1, Taf. 1 die beiden Querschnitte 135 u. 156 zur Erzeugung eines B_3 verwenden. Wir erhalten dann die Fig. 4, Taf. 4. Die eine Hauptebene A enthält die 3 Knoten-Geraden a′, a″, a‴, die andere B die 3 Knotenstrahlen b′, b″, b‴.

Diese 6 Geraden fallen ersichtlich paarweise zusammen, sobald der Rückkehrpunkt in einen 3fachen Punkt übergeht, und zwar a′ mit b‴, a″ mit b″ und a‴ mit b′. Außerdem rücken in die Geraden (a′, b‴), (a‴, b′) je noch 2 unäre Gerade mit konjug. imag. Asymptotenpunkten und in die Gerade (a″, b″) zwei Gerade mit reellen Asymptotenpunkten. Diese 8fach zählenden Geraden sind gleichwertig (jede enthält schließlich 4 Gerade mit reellen und 4 mit konjug. imag. Asymptotenpunkten) und sind in der Abbildung die Tangenten im 3fachen Punkt der Umrißkurve. Es ziehen sich dabei noch die Querschnitte 345, 123 zusammen.

Stellen wir zuerst durch Zuziehung der Querschnitte 345, 135, 123 einen B_4, wie Fig. 5, Taf. 4 zeigt, her und lassen nun die beiden Hauptebenen (a, a′) und (b, b′) zusammenfallen, so kann dies nur in der Weise vor sich gehen, daß der Berührungsknoten unserer Umrißkurve in einen 3fachen Punkt übergeht. Dabei rücken dann die gleichwertigen, 4fach zählenden Geraden, a, b einerseits und a′, b′ andererseits, zusammen, und mit der 6fach zählenden Knotenachse des B_4 vereinigen sich noch 2 unäre Gerade mit konjug. imag. Asymptotenpunkten, so daß in jeder der 3 Tangenten im 3fachen Punkte 4 Gerade mit vorher reellen und 4 Gerade mit konjug. imag. Asymptotenpunkten enthalten sind.

In jedem Falle also repräsentiert sich der uniplanare Knoten in unserer Umrißkurve als 3facher Punkt, und es erscheinen dabei folgende Querschnitte zusammengezogen: 135, 156, 123, 345, ein Querschnitt nebst den 3 an ihm hängenden.

Außer den 3 Knoten-Geraden, welche sich als Tangenten im 3fachen Punkt der Umrißkurve abbilden, sind nur noch 3 unäre Gerade vorhanden. (Fig. 1_{XII}, Taf. 2).

Daß zu einem uniplanaren Knoten kein konischer mehr treten kann, ist nach dem Zusammenhang des Querschnittsystems evident.

Der Übergang zu den B_3 u. B_4 mit imaginären Hauptebenen geht in der Weise vor sich, daß sich das eine Mal von den im U_6 beisammenliegenden $3\,C_2$ zwei in der Weise lösen, daß eine nach innen gekehrte Spitze übrig bleibt, während sich im andern Falle nur einer dieser Knoten auflöst, so daß ein Selbstberührpunkt entsteht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieser Deformationsprozeß sei durch folgendes Beispiel illustriert:

Es sei $f \equiv x^4 + y^4 - 2ay^3 + 2bx^2y = 0$ (16)

die Gleichung einer Kurve mit 3fachem Punkt in $x = y = 0$, wie sie der Fläche 1_{XII} entspricht; dann geht mit der Kurve

17) $$f - \varepsilon x^2 = 0,$$

während ε die Null passiert, die Deformation vor, welche dem Übergang vom B_3 mit reellen Ebenen durch den U_6 zu den B_3 mit konjug. imag. Ebenen entspricht (Fig. 4, Taf. 4), und die Gleichung:

18) $$f - \varepsilon y^2 = 0$$

stellt eine Kurve dar, welche beim Durchgang des ε durch Null den Übergang des B_4 mit reellen Ebenen durch den U_6 hindurch zu dem B_4 mit konjug. imag. Ebenen in der Abbildung vermittelt. (Fig. 5, Taf. 4).

Die Fläche mit einem U_6, bei welchem die 3 Geraden in der Hauptebene reell sind, steht ersichtlich zwischen den beiden Flächen 2_{VIII} u. $1'_{VIII}$. (Bei 1_{VIII} wäre das Zusammenrücken der 3 C_2 in der hier geforderten Weise augenscheinlich unmöglich). Indem wir die Fläche so entstanden denken, bemerken wir, daß durch jede der 3 unären Geraden eine Ebene geht, welche die Fläche längs eines Knotenstrahls berührt, daß in jeder dieser Ebenen 4 Tritang.-Ebenen und in der Hauptebene 32 Tritang.-Ebenen der ursprünglichen Fläche koinzidieren. Wir zählen also

$$3(8) + 3 = 27 \text{ Ger.}$$

$$\text{und } 1(32) + 3(4) + 1 = 45 \text{ Tritang.-Eb.}$$

Nun können von den 3 Knotenstrahlen des U_6 2 konjug. imag. ausfallen, was zu einem 2ten Typus Veranlassung gibt. Fig. 2 stellt das Bild einer derartigen Fläche vor. Mit den beiden Knotenstrahlen sind auch 2 unäre, reelle Gerade verschwunden und gleichfalls punktiert und konjug. imag. geworden; die Ebene derselben bleibt jedoch reell. Dieser Übergang findet durch den U_7 (Fig. XV) hindurch statt und tritt in dem oben angeführten Beispiel ein, wenn in der Umrißkurve $f = 0$, die Konstante a die Null passiert und negativ wird.

In ersterem Falle (Fig. 1_{XII}) liegt das Proj.-Zentr. an negativ gekrümmter Stelle in dem Dreieck der 3 unären Geraden, in welchem ein Oval der parabol. Kurve verläuft.

Den Typus 2_{XII} können wir auch aus der Fläche 3_V mit einem B_4 erhalten, wenn wir dort durch Verschwinden des zwischen den Hauptebenen eingeklemmten paren Flächenteils die Hauptebenen zusammenklappen lassen, was eintritt, wenn das innere Oval auf einen Punkt zusammenschrumpft.

Die Gestalt der Fläche in der Nähe des U_6 ist aus unserm Bilde ohne weiters ersichtlich. Jede beliebige durch den U_6 geführte Ebene schneidet in einer Kurve mit Spitze (davon ausgenommen sind diejenigen Ebenen, welche Knotenstrahlen enthalten).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XIII. Die Flächen mit einem B_3 und zwei C_2.

Taf. 3, XIII, Fig. 1 u. 2.

Wir haben bereits bei den Flächen mit einem B_3 (III.) erörtert, daß noch auf 4 verschiedene Arten zwei reelle C_2 hinzutreten können, daß dabei aber immer wieder derselbe Flächentypus zum Vorschein kommt, weil die 4 Kombinationen der isolierten Querschnitte zu je zweien mit den zu dem B_3 verwendeten ganz gleichen Zusammenhang zeigen.

Ziehen wir zwei dieser Querschnitte zusammen, so entsteht eine Fläche, deren Bild die Fig. 1_{XIII} darstellt. Die beiden Hauptebenen des B_3 berühren längs der 6fach zählenden Geraden durch beide Knoten. Die beiden Tangentialkegel in den beiden C_2 oskulieren in diesen Geraden und berühren längs der Geraden durch die beiden C_2.

Die Verteilung der Geraden und Tritang.-Ebenen ist die folgende:

$$1_{XIII} \ldots 2(6) + 2(3) + 1(4) + 2(2) + 1 = 27 \text{ Ger.}$$

$$2(6) + 1(12) + 2(6) + 1(4) + 1(3) + 1(2) = 45 \text{ Trit.-Eb.}$$

Zu einem B_3 mit reellen Ebenen können in dieser Weise wohl zwei reelle C_2 treten, aber diese können nicht konjug. imag. werden; denn ein Übergang hiezu durch den B_1 ist, wie der Typus der Umrißkurve einer Fläche 1_{XIII} zeigt (welche Querschnitte man auch zur Erzeugung der 2 C_2 zusammenziehen mag) unmöglich, was übrigens auch aus dem Querschnittssystem der allgemeinen Fläche zur Evidenz hervorgeht.

Wenn sich etwa die untere Schleife bei Fig. 1_X zusammenzieht, so entsteht zwar eine Spitze, aber diese liegt auf A_1 und rührt davon her, daß das Proj.-Zentr. auf einem Knotenstrahl des C_2 liegt; sie bleibt nichtsdestoweniger also doch nur das Bild eines C_2.

Bei einer Kurve 4. Ordg. mit Spitze und Selbstberührpunkt existiert keine unäre Doppeltangente mehr, der man die Rolle der A_1 zuweisen könnte.

Dagegen können zu einem B_3 mit konjug. imag. Ebenen noch zwei konjug. imag. C_2 hinzutreten. Wir erhalten so eine Fläche, welche den Übergang zwischen den Spezies 4 u. 5 der Gruppe VIII herstellt. Von den 4 Dreiecksebenen durch a liegen 3 in $(a\,B_3)$, die 4te ist reell und enthält 2 punktierte, konjug. imag. Gerade; von den 5 Tritang.-Ebenen durch b liegen 3 in $(b\,B_3)$ und 2 in (a b), welch letztere längs a die Fläche tangiert.

Zu einem B_3 mit reellen Hauptebenen können also nur zwei reelle C_2 und zu einem B_3 mit konjug. imag. Hauptebenen nur 2 konjug. imag. C_2 hinzutreten.

XIV. Die Fläche mit einem B_5 und einem C_2.

Taf. 3, XIV, Fig. 1.

Zu einem B_5 kann nur noch ein einziger C_2 treten, da, nachdem eine Kette von 4 Querschnitten zum B_5 verwendet ist, nur

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

noch ein einziger hievon isolierter Querschnitt existiert. Diese Fläche, welche in Fig. 1_{XIV} zur Darstellung gebracht ist, bildet den Übergang zwischen den beiden Flächen mit nur einem B_5 (VII). Die eine Hauptebene berührt längs der 10fach zu zählenden Geraden c, die andere längs der Knotenachse a. In a c liegen 20, in a b 15 Tritangentialebenen beisammen.

$$1(10) + 1(10) + 1(5) + 1(2) = 27 \text{ Ger.}$$
$$1(20)_{ac} + 1(15)_{ab} + 1(10) = 45 \text{ Trit.-Eb.}$$

Die Umrißkurve zu dieser Fläche tritt in dem Büschel 4. Ordg. auf, welches Gleichung (14) darstellt, wenn dort die obere Schleife verschwindet.

XV. Die Fläche mit einem uniplanaren Knoten U_7.

Taf. 3, XV, Fig. 1.

Diese Fläche stellt den Übergang der beiden Flächen mit einem U_6 her (XII). Sie entsteht, wenn zwei der 3 Knotenstrahlen zusammenfallen. Der U_7 stellt sich also in der Umrißkurve als 3facher Punkt ein, in welchem 2 Äste einen Rückkehrpunkt bilden. Die Rückkehrtangente absorbiert 16, die andere Tangente im vielfachen Punkt 10 Gerade.

Die Hauptebene (16, 10) berührt die Fläche längs der Geraden (16), die Ebene (1,10) durch die einzige unäre Gerade berührt längs der Geraden (10).

Damit ein U_7 entsteht, müssen sich 4 Querschnitte zusammenziehen, die in einem Zusammenhange stehen, wie beispielsweise folgende Gruppe: 345, 123, 135, 156, 146.

Die Umrißkurve stellt die Gleichung (16) dar, wenn dort $a = 0$ gesetzt wird.

Die Gestalt des U_7 ist aus unserm Bild wieder leicht zu erkennen.

Alle Ebenen durch den U_7 mit Ausnahme derjenigen durch die Knotengeraden schneiden in einer Kurve mit Spitze im Knoten.

XVI. Die Flächen mit vier konischen Knoten.

Taf. 3, XVI, Fig. 1—3.

Hier erhalten wir nur die folgenden 3 Typen:

1) Alle Knoten sind reell,
2) 2 Knoten sind reell und 2 konjugiert imaginär,
3) alle Knoten sind konjugiert imaginär.

Die allgemeine Fläche geht in eine Fläche mit 4 reellen konischen Knoten über, wenn sich 4 gegenseitig isolierte Querschnitte gleichzeitig zusammenziehen.

Wählen wir zu diesem Zwecke die 4 Querschnitte

135, 236, 245, 146,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so ergeben sich, wenn wir von der Fig. 1, Taf. 1 ausgehen, zwei imaginäre Kegelschnitte, welche sich in 4 reellen Punkten schneiden und 4 reelle gemeinschaftliche Tangenten aufweisen, als Umrißkurve. Das Proj.-Zentr. liegt innerhalb der 4 Knotenkegel auf dem positiv gekrümmten tetraedralen Flächenteil. Nehmen wir aber bei der Fig. 2, Taf. 1, diese Deformation vor, so ergeben sich 2 reelle Kegelschnitte als Umrißkurve (Fig. 1_{XVI}). Eine der 4 gemeinschaftlichen Tangenten ist die Gerade A_1, die andern 3 entsprechen den noch vorhandenen 3 unären Geraden. Die Verteilung der Geraden und Dreiecksebenen ist die folgende:

$$6(4) + 3 = 27 \text{ Ger.}$$

$$4(8) + 3 \,.\, 2(2) + 1 = 45 \text{ Trit.-Eb.}$$

In jedem der 6 Knotenstrahlen liegen 4 Gerade, 2 mit vorher reellen und 2 mit konjug. imag. Asymptotenpunkten beisammen. In jede Dreiecksebene durch 3 Knoten entfallen 8 Tritang.-Ebenen, und durch jede unäre Gerade laufen 2 Ebenen, von welchen jede längs eines Knotenstrahls berührt und 2 Tritang.-Ebenen vereinigt. Die 2 Dreiecksebenen, welche bei der Fläche 1_{VIII} an jeder Geraden durch 2 C_2 hingen, vereinigen sich zu je zweien in den Tetraeder-Ebenen. Das Proj.-Zentr. liegt hier auf dem unparen Teil der Fläche.

Wir werden später sehen, daß der tetraedrale Teil durchaus positive, der übrige Teil der Fläche durchaus negative Krümmung zeigt (mit Ausnahme der Punkte längs der 6 Knotenstrahlen).

Die zweite Spezies mit 2 reellen konischen Knoten und 2 konjug. imag. C_2 geht aus dieser Fläche dadurch hervor, daß wir irgend 2 der 4 C_2 durch die bipl. Form B_4 hindurch gehen lassen, was wir in der Umrißkurve dadurch erreichen, daß wir 2 Schnittpunkte der 2 Kegelschnitte zuerst zusammenfallen und dann imag. werden lassen (Fig. 2). Von unserm Tetraeder sind nunmehr blos 2 Kanten reell: die Kante durch die reellen und die Kante durch die imag. Knoten. Längs derselben berühren 2 durch die einzige reelle unäre Gerade b gehende Ebenen. Die unäre Ebene (b m n) bleibt bei diesem Übergang reell, nur die beiden Geraden m und n werden punktiert konjug. imag. Diese Ebene berührt den zwischen den 2 reellen Knoten hängenden positiv gekrümmten, paren Teil der Fläche. Die 2 Tetraederebenen durch a′ sind konjug. imag., die durch a reell.

Die beiden bei 2_{XVI} noch vorhandenen reellen C_2 können nur mehr auf eine Art konsekutiv werden, nämlich in der Weise, daß der pare Flächenteil verschwindet, wodurch ein B_4 mit konjug. imag. Hauptebenen entsteht (Fig. 2_{XVIII}). Würden wir die beiden reellen Schnittpunkte bei Fig. 2_{XVI} noch auf die andere Art zusammenfallen lassen, so würden wir keine Fläche mit einem B_4 als entsprechende Fläche erhalten, sondern wieder dieselbe Fläche 2_{XVI}, wobei nur das Proj.-Zentr. auf die Gerade a′ zu liegen käme.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Werden schließlich auch diese letzten Schnittpunkte konjug. imag., so daß die Umrißkurve aus 2 reellen, getrennt liegenden Kegelschnitten besteht, so entspricht ihr die Fläche mit 4 konjug. imag. Knoten (Fig. 3). Die beiden Knotenstrahlen, welche die konjug. imag. Knoten enthalten, sind reell; längs derselben berühren 2 durch b gehende Ebenen die Fläche; 2 Tritang.-Eb. durch b liegen in (a b) und 2 in (a' b), die 5te (b m n) enthält nun wieder 3 reelle Gerade; die 4 Tetraederebenen sind imaginär.

Spezielle Formen dieser letzterwähnten Flächen

$$2_{XVI}, \quad 2_{XVIII}, \quad 3_{XVI}$$

sind die bekannten Dupin'schen Cykliden, Flächen 4. Ordg., bei welchen sich die unendlich ferne Ebene abgestoßen hat. Die Gerade b liegt dort im Unendlichen, a u. a' kreuzen sich rechtwinklig, und die Geraden m u. n schneiden sich ebenfalls rechtwinklig; ihre Ebene ist zu a u. a' parallel.

Zwei in einander liegende Kegelschnitte geben, da sie keine reelle gemeinschaftliche Tangente besitzen, der wir die Rolle der A_1 zuweisen könnten, zu keiner reellen Fläche Veranlassung.

XVII. Die Flächen mit zwei biplanaren Knoten B_3 und einem konischen Knoten C_2.

Taf. 3, XVII, Fig. 1—3.

Die erste dieser Flächen entsteht, wenn wir zuerst 2 B_3 erzeugen und dann noch irgend einen der 2 davon isolierten Querschnitte zusammenziehen. Wir haben bereits erörtert, daß jeder derselben gegenüber den zu den beiden B_3 verwendeten Querschnitten dieselbe Lage hat. Die so erhaltene Fläche (Fig. 1_{XVII}) steht zwischen den Flächen 1_{IX} u. 2_{IX}.

Die den beiden B_3 gemeinschaftliche Hauptebene oskuliert die Fläche, die beiden andern Hauptebenen berühren sie längs der Geraden, welche durch den C_2 und die B_3 laufen. Der Tangentialkegel im konischen Knoten oskuliert die Fläche in den ebenerwähnten Geraden. Die Verteilung der reellen Geraden und Tritang.-Ebenen ist hier die folgende:

$$1(9) + 2(6) + 2(3) = 27 \text{ Ger.}$$
$$1(6) + 2(6) + 1(18) + 1(9) = 45 \text{ Trit.-Eb.}$$

Die beiden andern Flächen 2_{XVII} u. 3_{XVII} gehen aus der Fläche 1_{XVII} dadurch hervor, daß diese durch die uniplanare Form U_8 hindurch geht (1_{XX}); dabei fallen die 3 Singularitäten zunächst zusammen, dann werden die beiden Spitzen konjug. imag. und der Doppelpunkt stößt sich als isolierter Punkt nach innen ab, so daß zunächst Fig. 3_{XVII} entspringt. Lassen wir hier den isolierten Knoten durch die biplanare Form B_3 mit konjug. imag. Ebenen hindurchgehen (2_{XXI}), so gelangen wir zur Fläche 2_{XVII}.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die 3 Dreiecksebenen durch die 9fach zählende Gerade, welche die beiden konjug. B_3 enthält, sind reell; 2 davon liegen in der Ebene durch diese Gerade und den reellen C_2 beisammen.

Bei 2_{XVII} berührt die dritte den positiv gekrümmten paren Teil, bei 3_{XVII} ist der Berührpunkt derselben beim Durchgang durch den B_3 auf den andern Mantel übergegangen. Die andern Geraden in diesen Ebenen sind alle punktiert imaginär, und es ist auf diesen beiden Flächen nur die eine reelle Gerade vorhanden, längs welcher die reell gebliebene Hauptebene durch die beiden B_3 die Flächen oskuliert.

XVIII. Die Flächen mit einem B_4 und zwei C_2.

Taf. 3, XVIII, Fig. 1 u. 2.

Zu einem B_4 mit reellen Hauptebenen können nur noch 2 bestimmte reelle konische Knoten treten, nicht aber ein zweiter B_4, was aus dem Zusammenhang unseres Querschnittssystems evident ist. Würden bei Fig. 1_{XVIII} doch die beiden Schnittpunkte zusammenrücken, so würde A_4 Tangente in dem 2ten Selbstberührpunkt werden, und der so gewählten Umrißkurve würde dieselbe Fläche 1_{XVIII} wieder entsprechen, wobei nur das Proj.-Zentr. auf die Gerade durch die beiden C_2 zu liegen käme.

Die beiden Flächen, welche wir von dieser Art erhalten, stellen die Übergänge zwischen den 3 Flächen der Gruppe XVI her.

Bei 1_{XVIII} berühren ersichtlich die beiden Hauptebenen die Fläche längs der je 8fach zählenden Geraden durch den B_4 und je einen C_2, was sofort erhellt, wenn wir einen Blick auf die Fläche 1_V werfen, aus welcher wir ja diese Fläche auch entstehen lassen können.

Die Fläche 1_{XVIII} enthält:

$$1(6) + 2(8) + 1(4) + 1 = 27 \text{ Ger. und}$$
$$2(12) + 1(16) + 1(3) + 1(2) = 45 \text{ Trit.-Eb.}$$

Bei der Fläche 2_{XVIII} sind die Hauptebenen konjug. imaginär. Sie entsteht aus 2_{XVI}, wenn dort die beiden C_2 derart zusammenrücken, daß der zwischen ihnen hängende, positiv gekrümmte Flächenteil verschwindet. Bei beiden Flächen gehen durch die unäre Gerade b 2 Ebenen, von welchen die eine längs der Achse a' des bipl. Knotens B_4 berührt und 3 Tritang.-Ebenen enthält und die andere längs der Geraden a (durch die beiden C_2) berührt und 2 Tritang.-Ebenen in sich vereinigt. Die 4 Dreiecksebenen durch die Achse a liegen in (a B_4) beisammen. Die Umrißkurve besteht aus zwei sich berührenden Kegelschnitten; in ersterem Falle sind die beiden andern Schnittpunkte derselben reell, in letzterem konjug. imag.

XIX. Die Fläche mit einem B_6 und einem C_2.

Taf. 3, XIX.

Zu einem B_6, der eine Kette von 5 Querschnitten absorbiert, kann nur noch ein einziger konischer Knoten treten. Die Umrißkurve besteht aus 2 sich oskulierenden Kegelschnitten, die reell sind,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn das Proj.-Zentr. auf dem unparen Teil liegt, und imaginär ausfallen, wenn es auf dem paren, positiv gekrümmten Teil gewählt wird. Fig. 1_{XIX} stellt den ersteren Fall dar. Die eine Hauptebene oskuliert die Fläche längs der Knotenachse und enthält 15 Tritang.-Ebenen. Die andere berührt die Fläche längs der durch die beiden Knoten gehenden Geraden und vereinigt 30 Tritang.-Ebenen der ursprünglichen Fläche.

Die Knotenachse enthält 15 und die Gerade durch beide Knoten 12 unäre Gerade.

Diese Fläche bildet den Übergang zwischen den beiden Flächen der Gruppe XI.

XX. Die Fläche mit einem uniplanaren Knoten U_8.

Taf. 3, XX, Fig. 1.

Diese Singularität entsteht, wenn die 3 Knotenstrahlen im U_6 zusammenfallen, was ersichtlich dann eintritt, wenn in der Umrißkurve dort 2 Schleifen zusammenschrumpfen. Im ganzen sind dann etwa folgende Querschnitte zusammengezogen: 245, 345, 135, 123, 236, 156.

Diese Fläche kann auch aus 1_{XVII} entstanden gedacht werden. Sie geht aus jener hervor, wenn dort die 3 Singularitäten zusammenrücken, und bildet den Übergang von 1_{XVII} zu 3_{XVII}. Wir können sie auch aus 2_{XI} hervorgehen lassen, wenn wir dort die beiden Hauptebenen in der Weise zusammenfallen lassen, daß der zwischen ihnen eingeklemmte, eiförmige Teil verschwindet.

In jedem Falle stellt sich der U_8 in der Umrißkurve als eine sog. maskierte Singularität dar, wie sie durch Zusammenrücken von 2 Spitzen und einem Doppelpunkt entsteht.

Nun sind alle Geraden der ursprünglichen Fläche in einer einzigen vereinigt, und ebenso liegen alle 45 Tritang.-Ebenen in der Hauptebene des U_8 beisammen. Die Hauptebene oskuliert die Fläche längs der 27fach zählenden Geraden.

Jede beliebige Ebene durch den U_8 schneidet in einer Kurve mit Spitze.

XXI. Die Flächen mit drei biplanaren Knoten B_3.

Taf. 3, XXI, Fig. 1 u. 2.

Die 3 konischen Knoten bei den Flächen 1_{VIII} und $1'_{VIII}$ (vergl. Taf. 1, Fig. 1) können augenscheinlich gleichzeitig in biplanare Knoten B_3 übergeführt werden. Die Umrißkurve erhält dann 3 Spitzen, und es erscheinen folgende Querschnitte zusammengezogen: 146, 156; 245, 345; 236, 123.

Die so entstandene Fläche (Fig. 1_{XXI}) stellt den Übergang zwischen den beiden ebengenannten Flächen 1_{VIII} u. $1'_{VIII}$ her.

In jeder der 3 Geraden liegen 9 unäre Gerade beisammen. Die 3 Hauptebenen der 3 B_3 oskulieren die Fläche in diesen 3 Ge-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

raden. Jede Hauptebene enthält 6 und die Ebene durch die 3 B_3 27 Tritang.-Ebenen der ursprünglichen Fläche.

Da jedem B_3 mit reellen Ebenen stets ein Rückkehrpunkt entspricht, und da wir andererseits wissen, daß die Kurve 4. Ordg. mit 3 Spitzen stets eine isolierte Doppeltangente besitzt, so ist der Schluß gestattet, daß die Fläche mit 3 reellen B_3 allenthalben positive Krümmung zeigen muß; denn die Schnittlinie der Tang.-Ebene im Proj.-Zentr. mit der Bildebene kann für jede Lage von p nur jene einzige isolierte Doppeltangente A_1 der betreffenden Umrißkurve sein.

Wie die Fläche 1_{XXI} aus 1_{XVII} dadurch hervorgeht, daß dort der konische Knoten noch in einen B_3 mit reellen Ebenen übergeht, so entspringt aus den beiden andern Flächen 2_{XVII} und 3_{XVII} eine zwischen ihnen stehende, wenn der C_2 in einen B_3 mit konjug. imag. Ebenen übergeht. Diese letztere Deformation führt zur Fläche 2_{XXI}.

Bei dieser Fläche 2_{XXI} sind 2 der 3 Hauptebenen konjug. imag. und die dritte, welche die beiden konjug. imag. B_3 enthält, oskuliert die Fläche in der 9fach zählenden, reellen Geraden, auf welcher die beiden konjug. B_3 liegen. Da in diesem Falle die Umrißkurve stets eine Doppeltangente mit reellen Berührpunkten aufweist, so schließen wir, daß diese Fläche durchaus negativ gekrümmt sein muß.

Daß zu einem B_3 mit reellen Ebenen keine konjug. imag. Knoten B_3 treten können, erhellt ohne weiters aus dem Typus der Umrißkurve von 1_{XXI}.

Damit sind die Flächen 3. Ordg. erschöpft.*)

Wir haben, von der allgemeinen Fläche ausgehend, durch Deformation der Umrißkurve bewirkt, daß die 10 Querschnitte in allen denkbar zulässigen Kombinationen sich zusammengezogen haben, und haben an den so entstandenen Knoten alle möglichen Auflösungen vorgenommen.

Aus den so gewonnenen Flächen haben wir da, wo sich pare Flächenteile zeigten, diese zum Verschwinden gebracht, woraus die Flächen mit B_3 und B_4 mit konjug. imag. Ebenen und die mit isolierten Knoten hervorgingen. Die reellen Knoten (C_2 u. B_3) ließen wir paarweise durch höhere Knoten hindurchgehen und erzeugten dadurch die Flächen mit konjugiert imaginären Knoten.

Weitere Deformationen, welche zu neuen Flächentypen führen könnten, sind nicht mehr möglich.

Wenn wir vorläufig das Proj.-Zentr. von der Lage auf Geraden der Flächen noch ausschließen, so bemerken wir, daß allen

*) Unsere Aufzählung deckt sich mit der des Herrn Dr. Schläfli: „On the Distribution of Surfaces of the third order into species etc.“ Philosophical Transactions, t. 153 (1863), pag. 103, bis auf die dort nicht weiter ausgeschiedenen inversen Flächen. Bezüglich der letzteren vergl. Prof. Dr. Rodenberg, „Zur Classifikation der Flächen III. Ordg. Math. Annal. Bd. XIV, mit dessen Aufzählung die vorliegende vollständig übereinstimmt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

vorgeführten Flächen nur Umrißkurven mit paren Zweigen entsprechen. Bei der Fläche der Gruppe I entspricht dann jeder Fläche nur ein bestimmter Kurventypus, mit Ausnahme der letzten, welcher 2 zukommen (Wendepunkte sind hiebei als Unterscheidungsmerkmale ausgeschlossen). Jeder Fläche der Gruppe II mit einem C_2 entsprechen schon 2 Kurventypen; denn je nachdem das Proj.-Zentr. innerhalb oder außerhalb des Tangentialkegels vom C_2 liegt, stellt sich der Knoten als isolierter Punkt oder als Doppelp. mit reellen Ästen in den Umrißkurven dar.

Bei den Flächen der Gruppen III mit 2 C_2 haben wir bei 1_{III} 4 Typen, bei 2_{III} 3 Typen und bei 3_{III} 2 Typen der Umrißkurve zu verzeichnen. U. s. w. Da wir aber, nachdem einmal ein Bild einer Fläche dargestellt ist, leicht unterscheiden können, welche Gebiete innerhalb und welche außerhalb des Tangentialkegels eines Knotens liegen, so können wir für jeden Punkt der Fläche den Typus der Umrißkurve leicht angeben. Es liegen stets die Teile zwischen zwei benachbarten Knotenstrahlen da, wo diese durch dieselbe Öffnung laufen, außerhalb des Knotenkegels, die andern Partien innerhalb desselben; in den Scheitelwinkeln hiezu findet das umgekehrte statt.

Der B_3 und der B_5 erscheinen immer in reeller Kontur, der B_4 und B_6 dagegen erscheinen für alle Punkte eines Winkelraums und des zugehörigen Scheitelwinkels der Hauptebenen in reeller Kontur und für alle Punkte der zwei Nebenwinkelräume hiezu als isolierte vielfache Punkte.

Nach diesen Gesichtspunkten ist es leicht, die wenigen Kurventypen aufzuzählen, die jeder Fläche als Umrißkurven entsprechen können, sowie die Flächenpartien anzugeben, von denen aus projiziert der Fläche ein bestimmter Kurventypus als Umrißkurve zukommt.*)

In den beigegebenen Figurentafeln sind, um die Gestalt der Flächen — wenigstens an den interessanteren Stellen — möglichst gut zur Anschauung zu bringen, die Kurven stets so gewählt, daß die Singularitäten in reeller Kontur erscheinen und so von dem Tangentialkegel K_4 aus dem Auge, welches in jeder Lage als Proj.-Zentr. gelten kann, bestrichen werden.

Es ist in der That nicht schwer, aus den so gewonnenen Bildern eine Vorstellung von den Formen der Flächen zu erlangen. Wir brauchen nur die beiden Blätter, die ja durch die ausgezogenen und punktierten Linien genügend markiert sind, auf dem Strahlenbündel durch das Auge ein wenig auseinandergezogen zu denken.

*) Die Kurventypen 4. Ordg., die einer Fläche 3. Ordg. als Umrißkurven entsprechen, wenn das Proj.-Zentr. auf keiner Geraden der Fläche liegt, stimmen jedenfalls darin überein, daß sie gleichviele gleichartige vielfache Punkte und gleichviele eigentliche und uneigentliche Doppeltangenten aufweisen, wobei nicht in Betracht kommt, ob die vielfachen Punkte auf reellen Ästen liegen, oder ob sie isoliert sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

V. Spezielle Lagen des Projectionszentrums. Degenerierte Umrißkurven und solche mit unparen Zweigen.

Wir haben bereits eingangs erwähnt, daß, wenn das Proj.-Zentr. auf einer unären Geraden der Fläche liegt, die Umrißkurve einen auf A_1 gelegenen Doppelpunkt annimmt, welcher dem scheinbaren Doppelpunkt der R_6 entspricht, die in diesem Falle die betreffende Gerade in den Asymptotenpunkten überschreitet. Wenn wir das durch Deformation der Umrißkurve erreichen wollen, so bemerken wir, daß sich dabei entweder ein an A_1 gelegenes Oval zusammenzieht, oder daß ein Querschnitt der beiden Blätter verschwindet, der 2 Zweige, welche durch A_1 getrennt werden, verbindet. Beide Querschnitte gehören aber dem oben erwähnten Querschnittssystem unserer Fläche nicht an. Die Zusammenziehung dieser Querschnitte wird nicht ausschließlich durch eine Deformation der Fläche, sondern in erster Linie durch Bewegung des Proj.-Zentr. bewirkt. Ein auf A_1 gelegenen Doppelpunkt besitzt reelle Äste oder ist ein isolierter Punkt, je nachdem die Gerade, auf welcher p liegt, reelle oder imaginäre Asymptotenpunkte aufweist.

Auf diese Weise fügen sich den Kurventypen, welche jeder Fläche 3. Ordg. entsprechen, noch einige andere an; bei diesen ist aber A_1 keine eigentliche unäre Doppel-Tangente mehr.

Wir können in dieser Weise bei allen Flächen, wo noch unäre Gerade vorhanden sind, die Umrißkurve noch mit einem oder 2 Doppelpunkten behaften und so ein Degenerieren derselben schon bei Flächen mit 2 C_2 veranlassen.

Aus unsern Abbildungen auf den Taf. 2 und 3 ist leicht abzusehen, welche Fälle bei jeder Fläche möglich sind, sofern wir uns jetzt noch betreffs der Lage des Proj.-Zentr. auf unäre Gerade beschränken, und es ist ebenso leicht erkenntlich, wie sich die übrigen Singularitäten bei jeder solchen Lage des Proj.-Zentr. darstellen, da leicht aus den Schnittpunkten der Geraden, auf der das Proj.-Zentr. gewählt wird, mit den Knotenstrahlen geschlossen werden kann, welche Strecke auf der Geraden innerhalb oder außerhalb eines Knotenkegels, in dem einen oder andern Winkelraum eines Hauptebenenpaars liegt.

In Taf. 4 stellt Fig. 6 das Bild einer Fläche 1_I dar, wobei das Proj.-Zentr. auf einer Geraden mit reellen Asymptotenpunkten gewählt ist, und Fig. 7 das einer gleichen Fläche, wenn das Proj.-Zentr. im Schnittpunkt von 2 derartigen Geraden angenommen ist.

Wenn wir uns das Bild einen Moment vor der Entstehung eines auf A_1 gelegenen Doppelpunktes vergegenwärtigen, so bemerken wir, daß, sobald dieser Knoten entsteht, in jeder der von ihm aus

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

an die übrigen Zweige gehenden Tangente (außer A_1) die Bilder von 2 Geraden in der Weise sich übereinander lagern, daß stets die Strecken zur Deckung gelangen, die verschiedenen Blättern angehören. Die Geraden der Fläche fallen also hier nicht in der Weise zusammen, wie bei der Entstehung eines C_2. Der Berührpunkt einer solchen uneigentlichen Doppeltangente entspricht dem Schnittpunkt der beiden Geraden. Der Übertritt von einem Blatt in das andere findet für jede der hier übereinander gelagerten Geraden an dem ebengenannten Berührpunkt und in dem Doppelpunkt auf A_1 statt.*)

In dieser Weise entsprechen den 5 Tangenten (Fig. 6) aus dem Doppelpunkt der Umrißkurve die 5 Tritang.-Ebenen durch die Gerade, auf welcher das Proj.-Zentr. liegt, und deren Bild eben der Doppelpunkt auf A_1 ist.

Bei der Lage des Proj.-Zentr., welcher die Fig. 7 entspricht, ist das Bild der Tritang.-Ebene durch die beiden ausgewählten Geraden die Linie A_1 selbst, in welcher sich die 3te Gerade dieser Tritang.-Ebene projiziert. Die 4 Tangenten durch jeden Knoten entsprechen den 4 andern Tritang.-Ebenen durch jede der beiden Geraden. Wir können nun das Proj.-Zentr. noch auf eine Gerade mit imag. Asymptotenp., in den Schnittp. einer solchen Geraden mit einer, welche reelle Asymptotenp. besitzt, und in den Schnittp. von 2 Geraden der erstern Art verlegen. Damit sind dann aber alle speziellen Lagen desselben und auch alle verschiedenen Typen der Umrißkurven für eine Fläche 1_1 erschöpft.

Dies läßt sich nun bei allen übrigen Flächen, sofern unäre Geraden vorhanden sind, durchführen, und es ist leicht, für jede spezielle Lage des Proj.-Zentr. in allen Fällen den Typus der Umrißkurve nach den bisherigen Erörterungen anzugeben.

Wir bemerken, daß derartige spezielle Lagen des Proj.-Zentr. zwar kein deutlicheres Bild für die Flächen ergeben, aber wir können um so anschaulicher das Verhalten der Tritang.-Ebenen, welche durch die Gerade gehen, auf welcher wir das Proj.-Zentr. wählen, beim Auftreten und beim Auflösen von Singularitäten verfolgen.

Eine bei vielen Flächen ausgezeichnete Gerade ist z. B. diejenige, welche wir durchgängig mit b bezeichnet haben, und es erscheinen für diese Flächen gerade die Tritang.-Ebenen durch diese ausgezeichnete Gerade charakteristisch, weshalb es sich empfiehlt, das Proj.-Zentr. auf dieser ebengenannten Geraden b zu wählen, wenn es sich darum handelt, das Verhalten der Tritang.-Ebenen, welche durch diese Gerade laufen, zu studieren.

Wir wollen nur noch kurz — da es sich hier gerade passend anreiht — den Fall betrachten, wo das Proj.-Zentr. auf einer Geraden liegt, welche durch $2\,C_2$ läuft.

---

*) Auf Taf. 4 sind solche übereinanderliegende Gerade stets nebeneinander gezeichnet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus unsern früheren Figuren ist erkenntlich, daß $2\,C_2$ gleichzeitig dann entstehen, wenn 2 Gerade, die einen reellen Schnittpunkt auf der Fläche haben, konsekutiv werden; es vereinigen sich dann in der Geraden durch die beiden C_2 noch 2 weitere derartige Gerade. Lassen wir also die beiden Geraden, in deren Schnittpunkt bei Fig. 7 das Proj.-Zentr. gewählt ist, zusammenrücken, so entstehen $2\,C_2$, und das Bild derselben ist ein an der Schnittlinie A_1 gelegener Berührungsknoten. Diese selbst ist das Bild der Ebene (a b), welche die Fläche längs der Geraden a berührt. Fig. 8. (Vergl. Fig. 1_{IV}, Taf. 3.)

Die 4 Tangenten durch den Selbstberührpunkt entsprechen den 4 Dreiecksebenen durch die Gerade a, deren Verhalten beim Auftreten und Lösen weiterer Singularitäten hier sehr klar zu Tage tritt.

Wählen wir beispielsweise 2 sich berührende Kegelschnitte und die Tangente im Berührpunkt als A_1, so entspricht

1) wenn A_1 die Kegelschnitte nicht trennt:

a) wenn die 2 Kegelschnitte sich in noch 2 reellen Punkten schneiden, die Fläche 1_{XVI},

b) wenn diese beiden Schnittpunkte konsekutiv werden, die Fläche 1_{XVIII} und

c) wenn sie konjug. imag. sind, die Fläche 2_{XVI}.

Lösen wir in dem Fall a die reellen Schnittpunkte nach den beiden Arten $\pm$, so erhalten wir folgende Flächen:

1_{IV}	bei	$+\ +$
2_{IV}	„	$+\ -$
3_{IV}	„	$-\ -$
1_{VIII}	„	$C_2\ +$
2_{VIII}	„	$C_2\ -$.

Zieht sich schließlich in Fig. 8 auf Taf. 4 das obere Oval zusammen, so entspricht $1'_{VIII}$ und beim Verschwinden des isolierten Punktes $2'_{IV}$.

2) Wenn A_1 die Kegelschnitte trennt, und wenn

a) die beiden andern Schnittpunkte reell sind, so entspricht die Fläche 2_{XVI},

b) wenn die beiden andern Schnittpunkte zusammenfallen, die Fläche 2_{XVIII} und

c) wenn sie konjug. imag. sind, die Fläche 3_{XVI}.

Die im Falle (a) an den beiden Schnittpunkten angebrachten Auflösungsprozesse ergeben:

$+\ +$ . . . . . 6_{IV},	$C_2\ +$ . . . . . 3_{VIII},
$+\ -$ . . . . . 5_{IV},	$C_2\ -$ . . . . . 4_{VIII}.
$-\ -$ . . . . . 4_{IV},	

Bei den unter (1) angeführten Flächen liegt das Proj.-Zentr. auf der Geraden durch die 2 reellen C_2, bei denen der Gruppe (2) auf der Geraden durch 2 konjug. imag. C_2. Dieser Unterschied macht

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sich also dadurch geltend, daß das eine Mal die Zweige durch A_1 nicht getrennt werden, während sie das andere Mal auf beiden Seiten von A_1 verlaufen.

Wählen wir schließlich eine durch 2 konjug. imag. Schnittpunkte gehende Gerade als A_1, so entspricht stets eine Fläche, wo das Proj.-Zentr. im reellen Schnittpunkte von 2 konjug. imag. Geraden liegt.

Wenn bei den Flächen 3_I u. 3_{II} das Proj.-Zentr. auf die dort ausgezeichnete Gerade b rückt, und bei den Flächen 4_I, 4_{II}, 5_I u. 5_{II} auf eine der 3 hier gleichberechtigten, unären Geraden zu liegen kommt, so müssen augenscheinlich die Umrißkurven in solche mit unparen Zweigen übergehen, bei welchen ein Doppelpunkt auf A_1 liegt. Denn da allen eigentlichen und uneigentlichen Doppeltangenten der Umrißkurve die Geraden der Fläche entsprechen, so können bei den Umrißkurven der eben angeführten Flächen, weil hier alle übrigen reellen Geraden die Gerade, auf der p gewählt ist, treffen, außer den Tangenten, die vom Doppelpunkt der Umrißkurve aus an diese gehen, keine weiteren Doppeltangenten auftreten, was nur bei Kurven 4. Ordg. mit unparen Zweigen der Fall ist.

Den Flächen 3, 4 u. 5 der Gruppen I u. II kommen die in Fig. 9, 10 u. 11, Taf. 4, dargestellten Kurventypen 4. Ordg. als Umrißkurven zu, wenn das Proj.-Zentr. die oben angegebene Lage einnimmt.

Während wir bei den Kurven mit paren Zweigen nur das eine von den beiden Gebieten, in welche die U_4 die Bildebene teilt (zu einem solchen Gebiet gehören alle Teile der Ebene, für deren Punkte die Funktion U_4 dasselbe Vorzeichen hat), mit den Bildern von reellen Punkten einer Fläche 3. Ordg. bedeckt sein lassen konnten, nämlich nur das Feld, in welchem A_1 verlief, können wir bei den Kurven mit unparen Zweigen abwechselnd das eine oder andere Feld mit reellen Punkten bedecken und zur Erzeugung einer Fläche 3. Ordg. verwenden. Es wird auch hier immer das Feld mit den Bildern von reellen Punkten bedeckt sein, in welchem die als A_1 gewählte uneigentliche Doppeltangente verläuft. Nur die Tangenten, die in diesem Felde verlaufen, sind Bilder von reellen Geraden der Fläche, während die Tangenten im andern Feld punktierten, konjug. imaginären Geraden in reellen Tritang.-Ebenen entsprechen. Der Berührpunkt dieser letzteren ist das Bild des reellen Schnittpunktes der beiden konjug. imag. Geraden oder des 3ten, reellen Berührpunktes der sie enthaltenden reellen Tritang.-Ebene.

Da wir die Zahl der reellen Tritang.-Ebenen überhaupt und auch die Zahl und Lage derjenigen mit punktierten imaginären Geraden bereits festgestellt haben, so sind wir im stande, einen Schluß auf die Lage der Kurvenzweige in bezug auf die Tan-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

genten durch den Doppelpunkt ziehen zu können: In den beiden durch das gleiche Vorzeichen von U_4 bestimmten Gebieten müssen entweder bezw. 4 u. 2, oder 2 u. 2 reelle Tangenten an die Kurven mit unparen Zweigen möglich sein.

In dieser Weise entspricht dem Typus Fig. 9, Taf. 4, wenn das weiße Feld zur Erzeugung der Fläche mit reellen Punkten bedeckt wird, indem wir A_1 als Schnittlinie wählen, die Fläche 3_I.

Die 3 Tangenten im weißen Feld außer A_1 entsprechen den 3 Tritang.-Ebenen durch b, welche 3 reelle Gerade aufweisen, und die beiden Tangenten im grauen Feld entsprechen den beiden andern reellen Tritang.-Ebenen mit je 2 punktierten Geraden, die noch durch b laufen.

Bedecken wir das graue Feld mit reellen Punkten, indem wir A'_1 als Schnittlinie wählen, so entspricht die Fläche 5_I, wobei dort das Proj.-Zentr. auf einer der 3 unären Geraden liegt.

Der 2ten Tangente im grauen Feld entspricht die Tritang.-Ebene, welche die 3 reellen Geraden enthält, während den 4 Tangenten im weißen Feld die 4 Tritang.-Ebenen entsprechen, welche punktierte Gerade enthalten und durch die Gerade laufen, deren Bild der Punkt b ist.

Zieht sich das Oval auf einen Punkt zusammen, so kommen bezw. die beiden Flächen $3'_{II}$ und 5_{II} zum Vorschein.

In gleicher Weise entspricht, wenn wir bei dem Kurventypus Fig. 10 das eine Mal das graue Feld, indem wir A'_1 als Schnittlinie wählen, mit reellen Punkten bedeckt sein lassen, die Fläche 4_{II}, und wenn wir ein anderes Mal das weiße Feld mit reellen Punkten bedeckt denken, die Fläche 3_{II}, wobei in letzterem Falle das Proj.-Zentr. auf b liegt.

Zieht sich die Schleife zusammen, so daß ein Rückkehrpunkt entsteht, so entspricht im ersteren Fall der Flächentypus 4_{II} und im letzteren 3_{III}, wobei p auf der unären Geraden liegt.

Ändert sich die Kurve in diesem Sinne fort, so daß sich ein isolierter Punkt abstößt, so erhalten wir bezw. 5_{II} u. $3'_{II}$.

Der Kurventypus Fig. 11 führt bei Benützung beider Felder jedesmal zu einer Fläche 4_I.

Würden wir bei der Kurve 10 die Gerade durch die beiden Doppelpunkte als A_1 wählen, so würde das bedeckte weiße Feld dem Fall entsprechen, wo bei einer Fläche 3_I das Proj.-Zentr. im Schnittpunkt einer Geraden mit reellen Asymptotenpunkten mit der Geraden b gewählt wäre, und wenn der Doppelpunkt an der Schleife isoliert wäre, so läge p in einem Schnittpunkt einer Geraden der andern Art mit b.

Die Umrißkurve einer Fläche 3. Ordg. kann auch in eine Gerade und eine Kurve 3. Ordg. degenerieren, und zwar können hier 2 Fälle eintreten:

1) Die Umrißkurve zerfällt in eine Kurve 3. Ordg. und eine Gerade in allen den Fällen, wo das Proj.-Zentr. auf eine

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gerade verlegt werden kann, durch die eine Ebene geht, welche längs einer 2ten Geraden die Fläche berührt.

Dies ist bei allen Flächen mit mindestens 2 reellen, 2 zusammenfallenden oder 2 konjug. imag. C_2 der Fall. Dabei erscheint dann eine durch einen Schnittpunkt der Geraden mit der Kurve 3. Ordg. an die letztere gezogene Tangente als Schnittlinie A_1.

Um hier nur einen Fall besonders hervorzuheben, so stellt die Fig. 12 das einer solchen Lage von p entsprechende Bild einer Fläche 1_{IV} dar, wobei p auf der dort ausgezeichneten Geraden b liegt. Die beiden andern Schnittpunkte entsprechen den 2 reellen C_2. a_1 ist das Bild der Geraden a. Rücken die beiden den $2\,C_2$ entsprechenden Schnittpunkte zusammen, so haben wir das Bild einer Fläche 1_V, und werden sie schließlich konjug. imag., so entspricht die Fläche 6_{IV}. Wir können bei diesem Übergange in sehr anschaulicher Weise das Verhalten der Tritang.-Ebene (b m n) verfolgen:

Zwei ihrer Geraden (m n) werden beim Durchgang durch den B_4 punktiert und konjug. imaginär, aber die Ebene bleibt reell.

Wenn wir in dieser Weise das eine Mal eine Kurve 3. Ordg. mit Oval, das andere Mal eine solche ohne Oval wählen und der Geraden a_1 in bezug auf die Kurve alle wesentlich verschiedenen Lagen erteilen, so erhalten wir als entsprechende Flächen die beiden Gruppen IV u. V.

Und, wenn wir der Kurve 3. Ordg. einen Doppelpunkt oder einen Rückkehrpunkt beilegen, so erhalten wir, wenn a_1 nicht durch diese Singularität geht, die Gruppen VIII, X u. XIII.

Lassen wir schließlich auch noch die Gerade a_1 durch den Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt selbst gehen, so haben wir im Falle des Doppelpunktes mit reellen Ästen die Fläche 1_{XII}, für den Fall der Spitze die Fläche 1_{XV} und für den Fall des isolierten Punktes die Fläche 2_{XII} als entsprechende Flächen.

Auf Taf. 4 ist in Fig. 13 das Bild einer Fläche 1_{XII} dargestellt, und indem wir den Übergang zu den beiden andern (Spitze, isolierter Punkt) verfolgen, bemerken wir, daß die einzige unäre Ebene b c d, welche hier vorhanden ist, reell bleibt, während die beiden Geraden c u. d punktiert und konjug. imag. werden.

2) Die Umrißkurve einer Fläche 3. Ordg. zerfällt auch dann in eine Kurve 3. Ordg. und eine Gerade, wenn die 3 Geraden einer Tritang.-Ebene durch einen Punkt gehen und dieser Punkt als Proj.-Zentr. gewählt wird.

Bei der allgemeinen Fläche mit 27 reellen Geraden sind 10 Tritang.-Ebenen vorhanden, welche dies gestatten können, nämlich jene 10, welche Dreiecke ausschneiden, denen die 10 Ovale der parabol. Kurve einbeschrieben sind. Das Oval ist dann auf einen Punkt zusammengeschrumpft („Ovalpunkt"). Wir haben in einem solchen Punkt eine singuläre Stelle der Fläche, indem durch einen derartigen Punkt drei Asymptotenkurven (die 3 Geraden) und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3 Krümmungslinien laufen. Wir müssen 3 verschiedene Formen solcher Ovalpunkte unterscheiden:

α) die 3 Geraden sind reell,
β) 2 der 3 Geraden fallen zusammen,
γ) 2 der 3 Geraden sind punktiert und konjugiert imaginär.

Jede andere Ebene schneidet die Fläche in einer Kurve, welche im Ovalpunkt einen Wendepunkt besitzt; jede Gerade durch einen Ovalpunkt, in der Tritang.-Ebene gelegen, hat mit der Fläche an dieser Stelle 3 konsekutive Punkte gemein. Die Tangential-Ebene im Ovalpunkt ist also selbst ein Teil des Tangentialkegels, der von diesem Punkte aus an die Fläche läuft, und deßhalb zerfällt die Umrißkurve in eine Kurve 3. Ordg. und eine Gerade, die Schnittlinie A_1, die hier also selbst ein Teil der Umrißkurve ist. Während nun in dem Falle (1) das Zerfallen der Umrißkurve eintritt, ohne daß die Flächen eine weitere Singularität annehmen, müssen wir bei den Flächen mit keinem und nur einem C_2 oder B_3 die Bedingung stellen, daß 3 Gerade durch einen Punkt gehen (was zwar die allgemeine Gestalt dieser Flächen nicht wesentlich beeinträchtigt), wenn die Umrißkurve in dieser 2ten Art in eine Kurve 3. Ordg. und eine Gerade degenerieren soll.

Bei allen andern Flächen aber sind Ovalpunkte vom Typus β vorhanden.

Wenn wir einer Geraden, welche gleichzeitig als Teil der Umrißkure und als Schnittlinie A_1 angesehen wird, mit allen Typen einer Kurve 3. Ordg. alle denkbar wesentlich verschiedenen Lagen erteilen, so werden wir alle diejenigen Flächen 3. Ordg. finden, welche mindestens einen Ovalpunkt aufweisen können.

Aus Gleichung (1) leuchtet ein, daß, wenn die Tangential-Ebene in p ($A_1 = 0$) die Fläche in 3 durch p gehenden Geraden schneiden soll, A_1 ein Faktor von A_2 sein muß, so daß

$$A_2 \equiv A_1 B_1 .$$

Aus der Gleichung (2) folgt dann weiter, daß unter dieser Bedingung die erste Polare des Punktes p in bezug auf die Fläche in das Ebenenpaar:

$$19) \qquad A_1 (B_1 + x_4) = 0$$

degeneriert.*)

Die Gleichung der Fläche lautet jetzt:

$$20) \qquad x_4^2 A_1 + 2 x_4 A_1 B_1 + A_3 = 0 .$$

Die 3 ausgezeichneten Geraden $A_1 = 0$, $A_3 = 0$ bilden sich in unserer Bildebene als Punkte ab. Die Umrißkurve ist durch die Gleichung:

*) Eckhardt: Über Flächen 3. Ordg., auf welchen sich 3 Grade in einem Punkt schneiden. Math. Annal. Bd. X.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

21) $$A_1\, C_3 \equiv A_1\, (A_1\, B_1^2 - A_3) = 0$$

dargestellt, woraus erhellt, daß die Umrißkurve 3. Ordg. C_3 durch die Schnittpunkte der Geraden A_1 mit der Kurve 3. Ordg. A_3, nach welcher die Fläche die Bildebene schneidet, geht und diese Kurve in den 3 Schnittpunkten mit B_1 berührt.

Die Raumkurve 6. Ordg. R_6 zerfällt hier in die 3 ausgezeichneten Geraden und in eine ebene Kurve 3. Ordg., welche die Ebene $B_1 + x_4 = 0$ ausschneidet. Wir erhalten hier ebenfalls wieder für jede Annahme von A_1 und der Kurve 3. Ord. C_3 2 Flächen, je nachdem wir das eine oder andere Feld, in welchem die Funktion $A_1\, C_3$ das gleiche Zeichen behält, mit reellen Punkten bedeckt sein lassen.

Auf Taf. 4 stellen die Fig. 14 bis 25 und 30 einige dieser Beispiele dar.

Angenommen, es sei $A_1\, C_3$ für die Punkte in den grauen Feldern negativ, dann stellt die Gleichung:

22) ... $$x_4^2\, A_1 + 2\, x_4\, A_1\, B_1 + A_1\, B_1^2 - C_3 = 0,$$

in welcher $C_3 = 0$ die angenommene Umrißkurve 3. Ordg. ist, eine Fläche dar, welche die weiß gebliebenen Teile mit reellen Punkten bedeckt, und

22a) .... $$x_4^2\, A_1 + 2\, x_4\, A_1\, B_1 + A_1\, B_1^2 + C_3 = 0$$

eine Fläche, welche die grauen Felder mit reellen Punkten ausfüllt.

Beide Flächen haben die Umrißkurve:

$$A_1\, C_3 = 0\,.$$

Die Fig. 14 auf Taf. 4 stellt, wenn das weiße Feld mit reellen Punkten bedeckt wird, das Bild einer Fläche mit 27 reellen Geraden dar, und wenn wir das graue Feld zur Erzeugung der Fläche verwenden, so kommt eine Fläche vom Typus 5_I zum Vorschein, wobei dort die 3 unären Geraden durch einen Punkt gehen. Die Bilder der 3 Geraden, in deren Schnittpunkt p liegt, sind die 3 Schnittpunkte von A_1 mit C_3. Die 4 Tangenten, die durch jeden solchen Schnittpunkt noch an die Kurve 3. Ordg. laufen, entsprechen im ersten Falle den 4 Tritang.-Ebenen, welche, außer der gemeinschaftlichen, noch durch jede der 3 ausgezeichneten Geraden laufen. Für die letztere Fläche sind es die 4 reellen Tritang.-Ebenen mit je 2 punktierten imaginären Geraden, welche bei 5_I noch durch jede der 3 reellen Geraden gehen*).

Nimmt die C_3 in Fig. 14 einen Doppelpunkt an, indem das Oval entweder verschwindet oder mit dem unparen Zweig in Verbindung tritt, so entspricht dem weißen Feld in beiden Fällen eine Fläche 1_{II}, wobei im Falle des isolierten Punktes die Öffnung zusammengezogen ist, welche der ausgezeichneten Tri-

*) Bei Fig. 14, Taf. 4 sind zwei Tangenten durch die 2 Schnittpunkte rechter Hand vergessen worden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

tangential-Ebene gegenüberliegt, während im andern Fall ein jener benachbarter Querschnitt sich zusammengezogen hat. Dem grauen Feld kommen bezw. die Typen 5_{II} und 4_{II} zu. Erhält die C_3 eine Spitze, so gibt das weiße Feld zu einer Fläche 1_{III}, und das graue zu einer Fläche 4_{III} Veranlassung.

Verschwindet schließlich das Oval der C_3, so repräsentiert das weiße Feld eine Fläche 2_I und das graue eine Fläche 4_I.

Fig. 15 führt bei bedecktem weißen Feld zu einer Fläche 3_I, wobei sich unter den 3 ausgezeichneten Geraden die Gerade b befindet, welcher der Schnittpunkt von A_1 mit dem unparen Zuge entspricht. A_1 und die 2 Tangenten im weißen Feld entsprechen den 3 Tritang.-Ebenen durch b mit reellen Geraden; den beiden Tangenten im grauen Feld entsprechen für diese Fläche die 2 weitern reellen Tritang.-Ebenen durch b mit je 2 punktierten imaginären Geraden. Bedecken wir auch das graue Feld mit reellen Punkten, so gelangen wir zu derselben Fläche 3_I.

Fig. 16 geht aus 14 durch Zusammenrücken von 2 Schnittpunkten der A_1 und C_3 hervor, was auf den entsprechenden Flächen das Zusammenfallen von 2 der 3 ausgezeichneten Geraden und damit das Auftreten von 2 C_2 bedingt. (Wir bemerkten bereits bei Fig. 8, daß 2 C_2 sich als Selbstberührpunkt in der Umrißkurve einstellen, wenn das Proj.-Zentr. auf der Geraden durch dieselben gewählt wird.)

Das Proj.-Zentr. liegt in den 4 Fällen: Fig. 16, 17, 18, 20, im Schnittpunkt von einer unären Geraden (b) mit einer Geraden (a) durch 2 C_2, also in einem Ovalpunkt vom Typus β.

Dem weißen Feld in Fig. 16 entspricht die Fläche 1_{IV}, dem grauen Feld die Fläche 4_{IV}. In beiden Fällen sind die 4 Dreiecksebenen durch a und die 3 Tritang.-Ebenen durch b reell; im letzteren Fall aber enthalten die Ebenen durch a und durch b je 2 punktierte imaginäre Gerade.

Fig. 17 stellt in ihrem weißen Feld das Bild einer Fläche 6_{IV} und im grauen Feld das einer Fläche vom Typus 3_{IV} dar. In beiden Fällen sind die 4 Dreiecksebenen durch a zu je zweien konjugiert imaginär, da durch den Punkt a, welcher das Bild der Achse der beiden C_2 ist, ersichtlich keine reellen Tangenten an die C_3 möglich sind. Die 3 Tritang.-Ebenen durch b sind in beiden Fällen reell; im ersten Fall enthält eine davon 2 punktierte imaginäre Gerade und die beiden andern zeigen reelle Gerade; im zweiten Falle findet das umgekehrte statt. Die beiden andern Tritang.-Ebenen durch b liegen in (a b) beisammen.

Fig. 18 gibt in ihrem weißen Feld das Bild einer Fläche 2_{IV} und im grauen Feld das einer Fläche 5_{IV}. Entsprechend den 2 reellen Tangenten durch a und der einen Tangente durch b sind in beiden Fällen von den Dreiecksebenen durch a nur 2 und von den Tritang.-Ebenen durch b nur eine reell. Diese Ebenen enthalten im ersten Falle nur reelle, im andern Falle außer a und b nur punktierte imag. Gerade.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 20 zeigt im weißen Feld das Bild einer Fläche 1_{VII}, bei isoliertem Doppelpunkt $1'_{VIII}$, bei einer Spitze 1_{XIII}, im grauen Feld das einer Fläche 4_{VIII}, bei isoliertem Doppelpunkt 5_{VIII} und bei einer Spitze 2_{XIII}.

Würden wir eine Tangente als A_1 gewählt haben, welche die obere Schleife der C_3 berührt, so würde dem weißen Feld eine Fläche 3_{VIII} und dem grauen eine Fläche 2_{VIII} zukommen.

Damit sind die verschiedenen Lagen einer A_1, welche ein C_3 berührt, erschöpft. Wir sehen, daß bei diesen Bildern gerade das Verhalten der Dreiecks- und Tritang.-Ebenen, welche durch die auf jenen Flächen ausgezeichneten Geraden a und b gehen, in sehr klarer Weise zur Darstellung gelangt. In allen diesen Fällen wurde die Fläche nicht weiter spezialisiert; denn ein Ovalpunkt vom Typus β war auf jeder dieser Flächen vorhanden. Werden aber 2 der 3 Schnittpunkte von A_1 mit C_3 konjugiert imaginär (Fig. 19), so werden damit 2 der 3 ausgezeichneten Geraden punktiert und konjug. imaginär, indem sich die beiden C_2 dem Prozeß des Trennens entsprechend gelöst haben.

Das Proj.-Zentr. befindet sich jetzt in einem Ovalpunkt von Typus γ.

Nun können wir einer derartigen Geraden A_1 wieder alle möglichen verschiedenen Lagen den sämtlichen Kurventypen 3. Ordg. gegenüber erteilen und würden so zu den Flächen geführt werden, welche mindestens einen Ovalpunkt vom Typus γ haben können. Es möge hier das eine Beispiel genügen, welches Fig. 19 zur Darstellung bringt.

Dem weißen Feld entspricht hier eine Fläche vom Typus 3_I, dem grauen eine solche vom Typus 5_I.

Wird A_1 Wendetangente einer Kurve 3. Ordg., so werden auf der Fläche die 3 Geraden einer Tritang.-Ebene konsekutiv, was ersichtlich (vergleiche Taf. 1) das Erscheinen von 2 B_3 zur Folge hat. Nehmen wir wieder alle möglichen Formen der C_3 mit A_1 zusammen, so kommen die Flächen IX, XVII, XXI zum Vorschein.

Es sei nur noch der eine spezielle Fall betrachtet, wo die Gerade A_1 durch den Doppelpunkt der C_3 geht. Bei den Flächen mit einem B_4 berühren die beiden Hauptebenen die Fläche im B_4, und die Ebene (a b) berührt die Fläche längs der Knotenachse a, woraus erhellt, daß, wenn wir das Proj.-Zentr. auf a wählen, der B_4 in der Umrißkurve als ein dreifacher Punkt erscheinen muß. Wählen wir aber noch den Ovalpunkt vom Typus β, nämlich den Schnittpunkt von a mit b zum Proj.-Zentr., so zerfällt die Umrißkurve augenscheinlich in eine C_3 mit Doppelpunkt und in eine durch diesen gehende Gerade A_1 (Fig. 21 und 22). Erstere stellt in ihrem weißen Felde das Bild einer Fläche 1_V und im grauen Feld das einer Fläche 3_V dar. Die Bilder der Hauptebenen sind die beiden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tangenten im Doppelpunkt der C_3. Im ersten Fall sind die Knotenstrahlen in den Hauptebenen reell und ebenso die Geraden in den 2 Tritang.-Ebenen durch die Gerade b; im andern Fall sind diese Ebenen zwar auch reell, aber die Geraden in ihnen sind punktiert imaginär.

Fig. 22 zeigt in beiden Feldern das Bild einer Fläche 2_V. Die Knotenstrahlen in der einen Hauptebene sind reell, die in der andern punktiert und konjug. imaginär, und die beiden Ebenen durch b sind hier ebenfalls konjug. imaginär, da ja von dem Punkt (b) aus keine reelle Tangente an die C_3 möglich ist.

In Fig. 21 können wir den Übergang von B_4 mit reellen Ebenen bei 1_V und 3_V durch den U_6 hindurch zum B_4 mit imaginären Hauptebenen in sehr anschaulicher Weise vor sich gehen lassen, indem wir die Schleife der C_3 zusammenziehen, was bei Fig. 22 (2_V) ersichtlich nicht möglich ist und andererseits darin seinen Grund hat, daß bei 2_V die Hauptebenen hinsichtlich ihrer Geraden nicht gleichberechtigt sind. Deformieren wir also die C_3 in dieser Weise, so entsteht Fig. 23, welche in ihrem weißen Felde eine Fläche 1_{XII} mit einem U_6 mit 3 reellen Knotenstrahlen repräsentiert und im grauen Felde das Bild einer Fläche 2_{XII} mit einem U_6 zeigt, der 1 reellen und 2 konjugiert imaginäre Knotenstrahlen aufweist. Die Tangente im Rückkehrpunkt ist das Bild der Hauptebene des U_6. Ändern wir die Konstanten in der Gleichung der C_3 in diesem Sinne fort, so stößt sich der isolierte Punkt ab, und wir haben in den beiden Feldern der Fig. 24 das Bild einer Fläche mit einem B_4, der konjugiert imaginäre Hauptebenen besitzt; denn die konjug. imag. Tangenten im isolierten Punkt sind die Bilder der Hauptebenen.

Der Übergang ist also der folgende:

$$\left.\begin{array}{llll} B_4 & \text{einer } 1_V & \text{in den } U_6 & \text{einer } 1_{XII} \\ B_4 & \text{„ } 3_V & \text{„ „ } U_6 & \text{„ } 2_{XII} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{und dann in den} \\ B_4 \text{ einer } 4_V. \end{array}$$

Die 2 Tritang.-Ebenen durch b sind, entsprechend den Tangenten durch den Bildpunkt von b an die C_3, reell, die eine derselben enthält aber ersichtlich 2 punktierte imaginäre Gerade.

Wird bei den Fig. 21 oder 22 A_1 zur Tangente im Doppelpunkt der C_3, so rückt b mit a zusammen, und die beiden Felder repräsentieren die beiden Flächen XI.

Nehmen wir die Tangente im Rückkehrpunkt einer C_3 als A_1, so entspricht den beiden Feldern eine Fläche XX.

Schließlich kann die Kurve 3. Ordg. auch noch weiter degenerieren, und hier gibt es wieder eine Reihe von Bildern, welche durch die verschiedenen Kombinationen betreffs der Lagenverhältnisse der einzelnen Teile der degenerierten Umrißkurve zusammengestellt werden können.

Jede derartige Figur entspricht einer Fläche 3. Ordg. bei irgend einer speziellen Lage des Proj.-Zentrums.

Dem weißen Feld der Fig. 25 entspricht eine Fläche 1_{IV} mit 2 C_2, bei welcher die 3 Geraden einer durch b gehenden Tritang.-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ebene durch einen Punkt gehen, das graue Feld führt zu einer Fläche 3_{IV}, bei welcher die 3 unären Geraden sich in einem Punkte schneiden.

Fig. 30, bei der die Umrißkurve in 4 Gerade ausgeartet ist, führt uns, wenn wir die 3 Vierecke mit reellen Punkten der Fläche bedeckt denken, zu einer Fläche $1'_{VIII}$, und wenn wir die 4 Dreiecke mit reellen Punkten ausfüllen, zu einer Fläche 2_{VIII}. Gehen die 3 Geraden (außer A_1) durch einen Punkt, so rücken die $3\,C_3$ zusammen, und es entspricht den beiden Feldern die Fläche 1_{XII} als Übergang zwischen $1'_{VIII}$ und 2_{VIII}.

In allen vorgeführten Beispielen gehen die 3 unären Geraden, welche auf jenen Flächen noch vorhanden sind, durch einen Punkt (Ovalpunkt vom Typus α), der als Proj.-Zentr. gewählt ist, und A_1 ist stets ein Teil der Umrißkurve.

In den früheren Fällen, wo die U_4 in 2 Kegelschnitte zerfiel, waren dieselben immer so gelegen, daß reelle gemeinschaftliche Tangenten existierten.

Fig. 26 stellt eine Lage vor, bei welcher dies nicht mehr stattfindet. Wir müssen deshalb einer uneigentlichen Doppeltangente dieser Umrißkurve die Rolle der A_1 zuweisen; dann begrenzt diese Umrißkurve das Bild einer Fläche 2_{IV}. Das Proj.-Zentr. liegt hier in dem Schnittpunkt der 2 Geraden mit reellen Asymptotenpunkten, welche die Gerade b schneiden.

In ähnlicher Weise zeigt Fig. 27 das Bild einer Fläche 3_{IV}, projiziert von einem Schnittpunkt der 3 unären Geraden aus.

Fig. 28 zeigt das Bild einer Fläche mit 4 reellen C_2, wenn das Proj.-Zentr. auf einer der 3 unären Geraden gewählt wird, und Fig. 29 das derselben Fläche, wenn das Proj.-Zentr. im Schnittpunkt von 2 solchen Geraden angenommen wird. Den beiden Geraden, welche sich in einem Punkt auf A_1 schneiden, entsprechen die beiden Ebenen, welche durch die unären Geraden gehen und die Fläche längs 2er Knotenkanten berühren; sie sind die Projektionen dieser Knotenkanten. Die R_6 zerfällt hier in 6 Gerade, nämlich in die 2 unären Geraden, in deren Schnittpunkt das Proj.-Zentr. gewählt ist, und in die 4 Knotenkanten, welche die ersteren zwei schneiden.

VI. Bewegung des Projektionszentrums über Knotenstrahlen hinweg.

Wenn das Proj.-Zentr. einem Knotenpunkt gegenüber eine allgemeine Lage hat, d. h. nicht auf einer Geraden, die durch diese Singularität geht, gewählt wird, so sahen wir, daß in unserm Bild

dem C_2 ein Doppelpunkt,
dem B_3 eine Spitze I. Art,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dem B_4 ein Selbstberührpunkt,
dem B_5 eine Spitze II. Art,
dem B_6 ein Oskulationsknoten,
dem U_6 ein dreifacher Punkt,
dem U_7 ein dreifacher Punkt mit Spitze,
und dem U_8 eine maskierte Singularität, welche mit 2 Rückkehrpunkten und 1 Doppelpunkt äquivalent ist,

entspricht *). Jedem Knotenpunkt der Fläche entspricht also ein vielfacher Punkt der Umrißkurve, welcher auf die Klassenzahl dieser Umrißkurve die gleiche Wirkung ausübt, wie jener auf die Klassenzahl der Fläche.

Wenn nun das Proj.-Zentr. auf eine Gerade rückt, welche durch einen vielfachen Punkt der Fläche läuft, so erhöht sich die entsprechende Singularität der Umrißkurve. In welcher Weise diese Erhöhung eintritt, werden wir gleich sehen.

Wir wollen zunächst das Proj.-Zentr. über eine unäre Gerade hinwegschicken und sehen, welche Veränderung die Umrißkurve dabei erfährt. Die Fig. 31, 32 u. 33 auf Taf. 4 markieren die 3 Stadien, wenn das Proj.-Zentr. eine Gerade mit imag. Asymptotenpunkten überschreitet. Je mehr sich p einer solchen Geraden nähert, desto kleiner wird ein an A_1 gelegenes Oval, rückt p auf die Gerade, so haben wir einen auf A_1 liegenden isolierten Punkt, auf welchen das Oval zusammengeschrumpft ist. Rückt jetzt das Proj.-Zentr. auf die andere Seite der Geraden, so entwickelt sich der isolierte Punkt wieder zu einem Oval, und zwar nach der andern Seite von A_1 hin.

Die Gerade A_1 hat nun ihre Lage gegen die beiden Ovale mit der Geraden 2′ vertauscht. Die Fig. 34, 35 u. 36 auf Taf. 4 bezeichnen die 3 Stadien, wenn das Proj.-Zentr. eine Gerade mit reellen Asymptotenpunkten passiert. Je mehr sich p einer solchen Geraden nähert, desto mehr nähern sich auch 2 Zweige der Umrißkurve. Rückt p auf die Gerade, so erhält die U_4 einen auf A_1 gelegenen Doppelpunkt, und bewegt sich schließlich p auf die andere Seite der Geraden, so löst sich der Doppelpunkt, der nur von einem scheinbaren Doppelpunkt der R_6 herrührte, wieder auf. Auch hiebei wechseln die Doppeltangenten A_1 und die in Rede stehende Gerade g ihre Rollen in bezug auf die Umrißkurve, in Übereinstimmung mit der bereits gemachten Bemerkung, daß, wenn 2 Zweige durch A_1 nicht getrennt werden, den äußern Doppeltangenten Involutionen mit reellen und den innern solche mit konjug. imag. Asymptotenpunkten entsprechen, und daß, wenn sie durch A_1 getrennt werden, das umgekehrte eintritt (den Doppeltangenten I. Spezies kommen unter allen Umständen reelle Asymptotenpunkte zu). Die Gerade 2′ hat bei 31 konjug. Asymptotenpunkte und die Gerade g bei 34 reelle

*) Dr. Rohn, „Ein Beitrag zur Theorie der bipl. und unipl. Knotenpunkte.“ Math. Annal. Bd. XXII.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Asymptotenpunkte, was natürlich mit 33 und 36 übereinstimmen muß.

Wir werden sehen, daß sich unsere Singularität stets nur um so viel erhöht, als durch Zuziehung einer an A_1 gelegenen Schleife bezw. eines an A_1 angrenzenden Querschnitts hinzukommt. Es ist klar, daß, wenn p eine durch einen C_2 laufende Gerade überschreitet, der Übergang vom Doppelpunkt mit reellen Ästen zum isolierten Punkt im Bilde durch einen auf A_1 gelegenen Rückkehrpunkt hindurch stattfinden muß.

Ziehen wir, um diesen Vorgang anschaulicher zu machen, in Fig. 2, Taf. 1 den Querschnitt 135 zusammen, so entsteht Fig. 37, Taf. 4. Das Proj.-Zentr. liegt in der Nähe des Knotenstrahls K_1 und außerhalb des Knotenkegels. Nähert sich nun das Proj.-Zentr. dem Knotenstrahl K_1, und rückt es schließlich auf ihn selbst hinauf, so verschwindet in unserer Umrißkurve die Schleife linker Hand immer mehr und geht schließlich in eine auf A_1 gelegene Spitze über (Fig. 38). Mit jedem Knotenstrahl kommt eine unäre Gerade, welche vorher die Schleife tangierte, zur Deckung, aber stets auf solchen Strecken, die nicht dem gleichen Blatte angehören. Rückt jetzt der Punkt p in dieser Richtung weiter, so dringt er in das Innere des Knotenkegels ein, und in der Umrißkurve muß sich nun das Bild von C_2 als isolierter Punkt abstoßen (Fig. 39). Die Fig. 40 zeigt ein Flächenstück auf der einen Seite eines Knotenpunktes nebst Knotenkegel. Die 3 Partien (n) können nur negativ gekrümmt sein, während in den 3 Gebieten (p) in der Nähe des Knotens teilweise positive Krümmung erkennbar ist. Bei Fig. 37 liegt das Proj.-Zentr. auf einem Gebiet (n), bei 38 auf einem Knotenstrahl und bei 39 in einem Gebiet (p), aber noch an negativ gekrümmter Stelle; daher ist hier A_1 eine Doppeltangente I. Spezies, die sich abstößt, sobald das Proj.-Zentr. die parabolische Kurve überschreitet.

So oft das Proj.-Zentr. einen Knotenstrahl durch einen C_2 überschreitet, findet eine Deformation der Umrißkurve in dem Sinne 37, 38, 39 oder umgekehrt statt.

Wir wollen jetzt noch das Proj.-Zentr. über eine Gerade durch einen B_3 sich hinwegbewegen lassen.

Fig. 41 sei das Bild einer Fläche mit einem B_3; a', a'', a''' liegen, wie wir leicht erkennen, wenn wir auch die übrigen Geraden eingezeichnet denken, in der einen Hauptebene A und b', b'', b''' in der andern Hauptebene B des B_3. In a', a''', b', b''' liegen je 2 Gerade mit vorher reellen und eine Gerade mit vorher imag. Asymptotenpunkten beisammen, in a'', b'' sind je 1 Gerade mit reellen und 2 mit imag. Asymptotenpunkten vereinigt.

Daß ein B_3 von irgend einem Punkt einer Hauptebene aus als Selbstberührungspunkt erscheint, geht ohne weiters aus Gleichung (2) pag. 17 hervor. Nähert sich das in der Nähe der Geraden b' befindliche Proj.-Zentr. dieser Geraden, und rückt es schließlich auf sie

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

selbst hinauf, so tritt in Fig. 41 der untere Zweig der Umrißkurve mit der Spitze in Verbindung, und es entsteht Fig. 42, wo sich der B_3 als auf A_1 liegender Selbstberührpunkt und die eine Hauptebene B als Tangente in diesem Punkt darstellt; dabei fällt, wie ja aus dem allmählichen Übergange aus Fig. 41 ersichtlich ist, die Gerade b'' ganz ins unsichtbare und b''' ganz ins sichtbare Blatt.

Bewegt sich das Proj.-Zentr. in diesem Sinne fort, so deformiert sich die Umrißkurve in der Weise, wie Fig. 43 zur Darstellung bringt. Mit dem Überschreiten von b' sind wir in einen andern Winkelraum der Hauptebenen übergetreten; deshalb zeigt der Rückkehrpunkt jetzt die entgegengesetzte Richtung und mußte in Folge dessen auf den untern Zweig übergehen. Die Gerade b' verhält sich ganz ähnlich, wie die Gerade g bei 34, 35 u. 36.

Nähert sich von hier aus das Proj.-Zentr. der Geraden b'', so zieht sich der Zweig mit der Spitze immer mehr zusammen, und wenn dasselbe auf b'' rückt, so entsteht ein Berührungsknoten mit imaginären Ästen (2 konsekutive isolierte Punkte), wie Fig. 44 zur Anschauung bringt. Die Tangente in diesem Selbstberührpunkt ist das Bild der Ebene B; b' entfällt ganz ins unsichtbare und b''' ganz ins sichtbare Blatt.

Überschreiten wir jetzt mit dem Proj.-Zentr. diesen Knotenstrahl b'', so gelangen wir wieder in einen andern Winkelraum, weshalb der sich entwickelnde Zweig mit dem Rückkehrpunkt seine Spitze nach der entgegengesetzten Seite wie bei Fig. 43 und in Übereinstimmung mit Fig. 41 kehren muß, wie Fig. 44 zeigt.

Ein bipl. Knoten B_3 erscheint also, von irgend einem Punkt aus gesehen, als Spitze I. Art, von einem Punkt eines Knotenstrahls aus (überhaupt von einem Punkt einer Hauptebene aus) repräsentiert er sich in der Umrißkurve als ein auf A_1 gelegener Selbstberührungspunkt. Dieser Selbstberührpunkt zeigt reelle Äste, wenn das Proj.-Zentr. auf einem Knotenstrahl liegt, der 2 Gerade mit reellen und eine Gerade mit imaginären Asymptotenpunkten vereinigt, und diese Äste sind imaginär, wenn das Proj.-Zentr. auf einem Knotenstrahl liegt, der eine Gerade mit reellen und zwei mit imaginären Asymptotenpunkten enthält.

Wenn wir ferner bei einer Fläche mit einem B_4 das Proj.-Zentr. auf einen Knotenstrahl rücken lassen, so erscheint der B_4 als eine auf A_1 gelegene Spitze II. Art, indem die an A_1 gelegene Schleife verschwindet.

Überschreitet das Proj.-Zentr. den Knotenstrahl, so tritt es in den andern Winkelraum der Hauptebenen über, und das Bild des B_4 stößt sich als Berührungsknoten mit imag. Ästen ab. (2 konsekutive isolierte Punkte). Von dieser Lage von p aus gehen also keine reellen Tangenten an die Fläche, die in unmittelbarer Nähe des Knotens berühren.

Ganz analoge Deformationen der Umrißkurve treten ein, wenn wir das Proj.-Zentr. auf einen Knotenstrahl des B_5 (in der Haupt-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ebene, die nicht längs der Knotenachse berührt) und auf einen Knotenstrahl des B_6 (in der Hauptebene, die nicht oskuliert) verlegen. Der B_5 repräsentiert sich als ein auf A_1 gelegener Oskulationsknoten und der B_6 als eine Oskulationsspitze.

Wir sehen also, daß durch die Lage des Proj.-Zentr. auf einem Knotenstrahl die Singularitäten der Umrißkurve, die bei beliebiger Lage den vielfachen Punkten der Fläche entsprechen, sich um soviel erhöhen, als die Zuziehung einer an jener Singularität gelegenen Schleife mit sich bringt; aber diese erhöhte Singularität muß auf A_1 liegen.

In ähnlicher Weise können wir leicht auch die Umrißkurven angeben, welche dann entsprechen, wenn das Proj.-Zentr. auf eine Gerade rückt, die durch 2 vielfache Punkte geht. Befindet sich p auf einer Geraden, die durch $2\,C_2$ läuft, so erscheinen diese als ein Selbstberührungspunkt, und A ist Tangente in dieser Singularität. Projizieren wir schließlich eine Fläche mit $2\,B_3$ von einem Punkte der Geraden aus, die beide enthält, so stellen sich die $2\,B_3$ als Wendepunkt in der Umrißkurve (C_3) dar, wobei A_1 Wendetangente wird; denn $2\,B_3$ treten auf, sobald die 3 Geraden einer Tritangentialebene konsekutiv werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ebene, die ... nd auf einen
Knotenstrah ... oskuliert) ver-
legen. Der ... egener Oskula-
tionsknoten ...

Wir sel ... ntr. auf einem
Knotenstrahl ... bei beliebiger
Lage den vi ... sich um soviel
erhöhen, als ... ität gelegenen
Schleife mit ... rität muß auf
A_1 liegen.

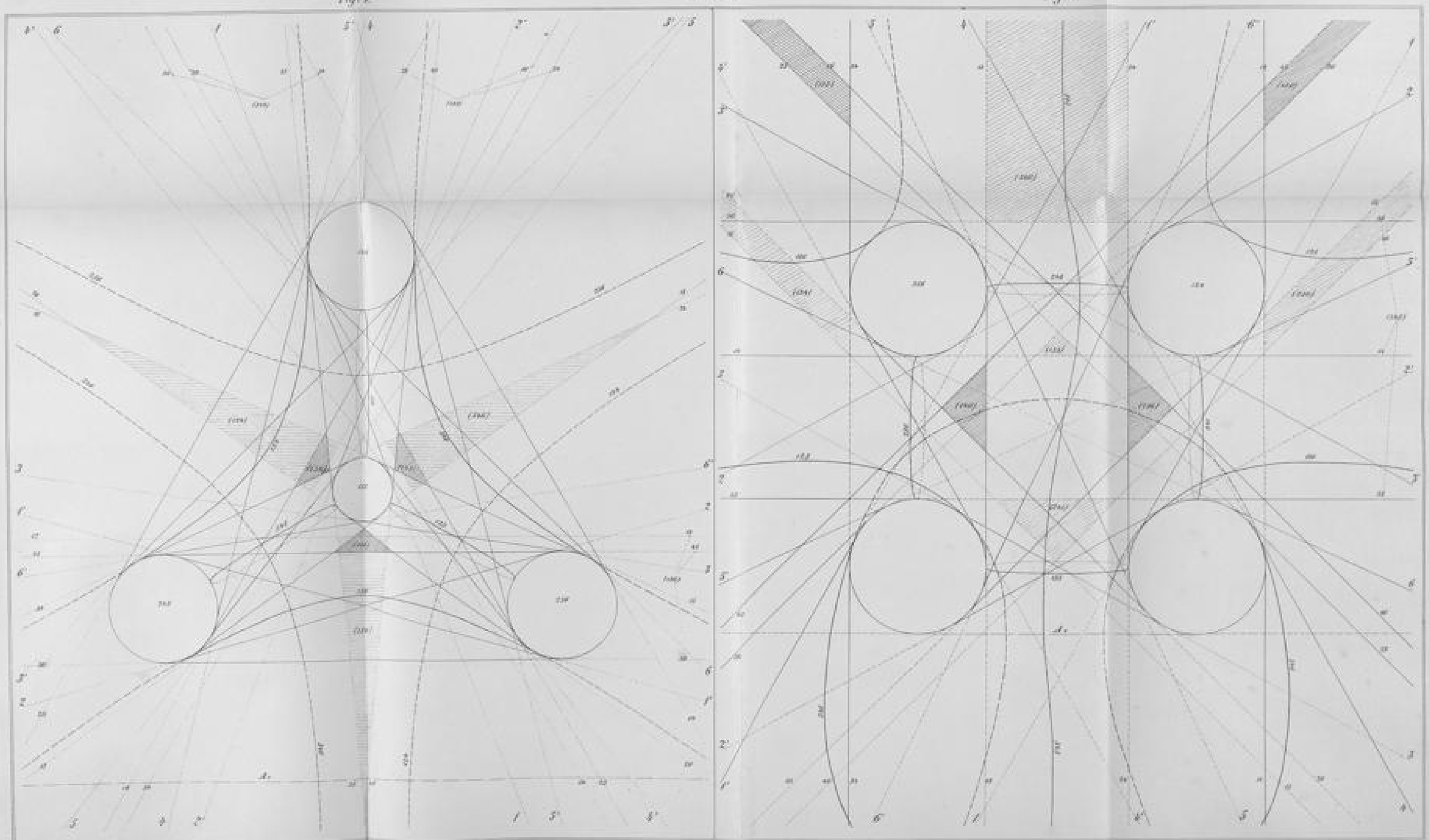
In ähn ... Umrißkurven
angeben, wel ... entr. auf eine
Gerade rückt ... Befindet sich p
auf einer Ge ... diese als ein
Selbstberühr ... Singularität.
Projizieren ... einem Punkte
der Geraden ... die $2B_3$ als
Wendepunkt ... Wendetangente
wird; denn ... n einer Tri-
tangentialebe ...

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN® Gray Scale
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
R G B W G K C Y M

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 1. **Tafel 1.** Fig. 2.



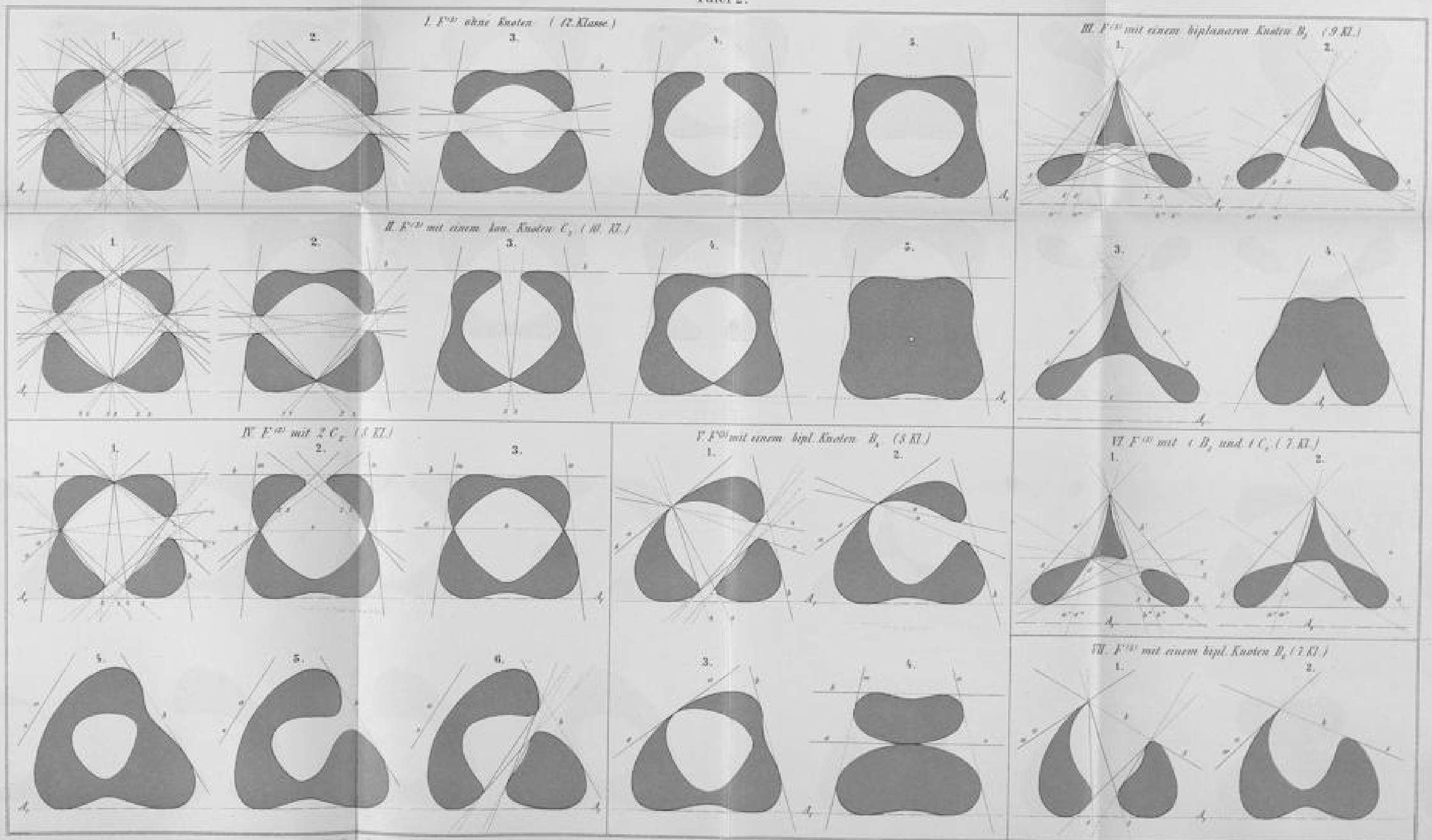
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tafel 2.



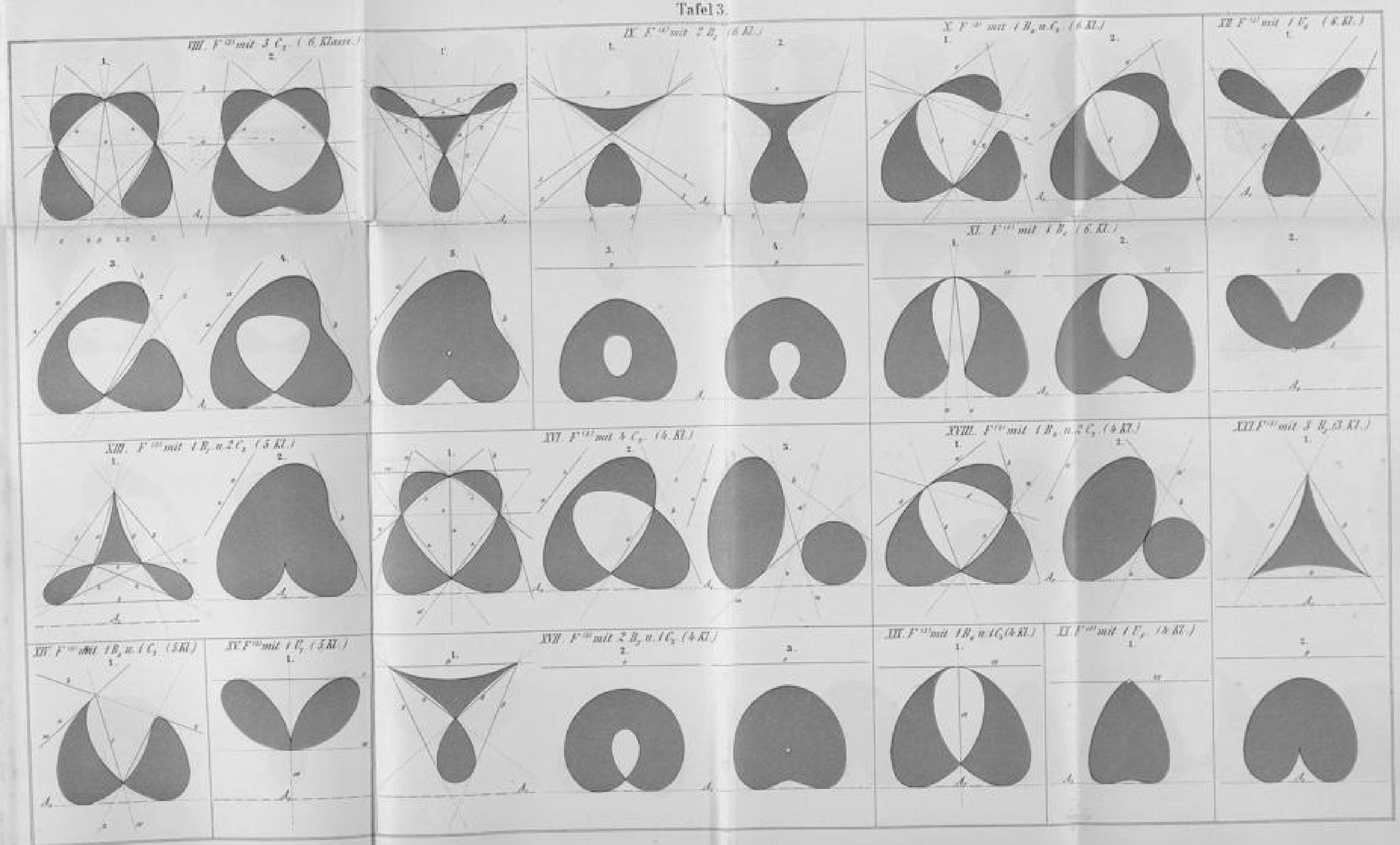
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tafel 3.

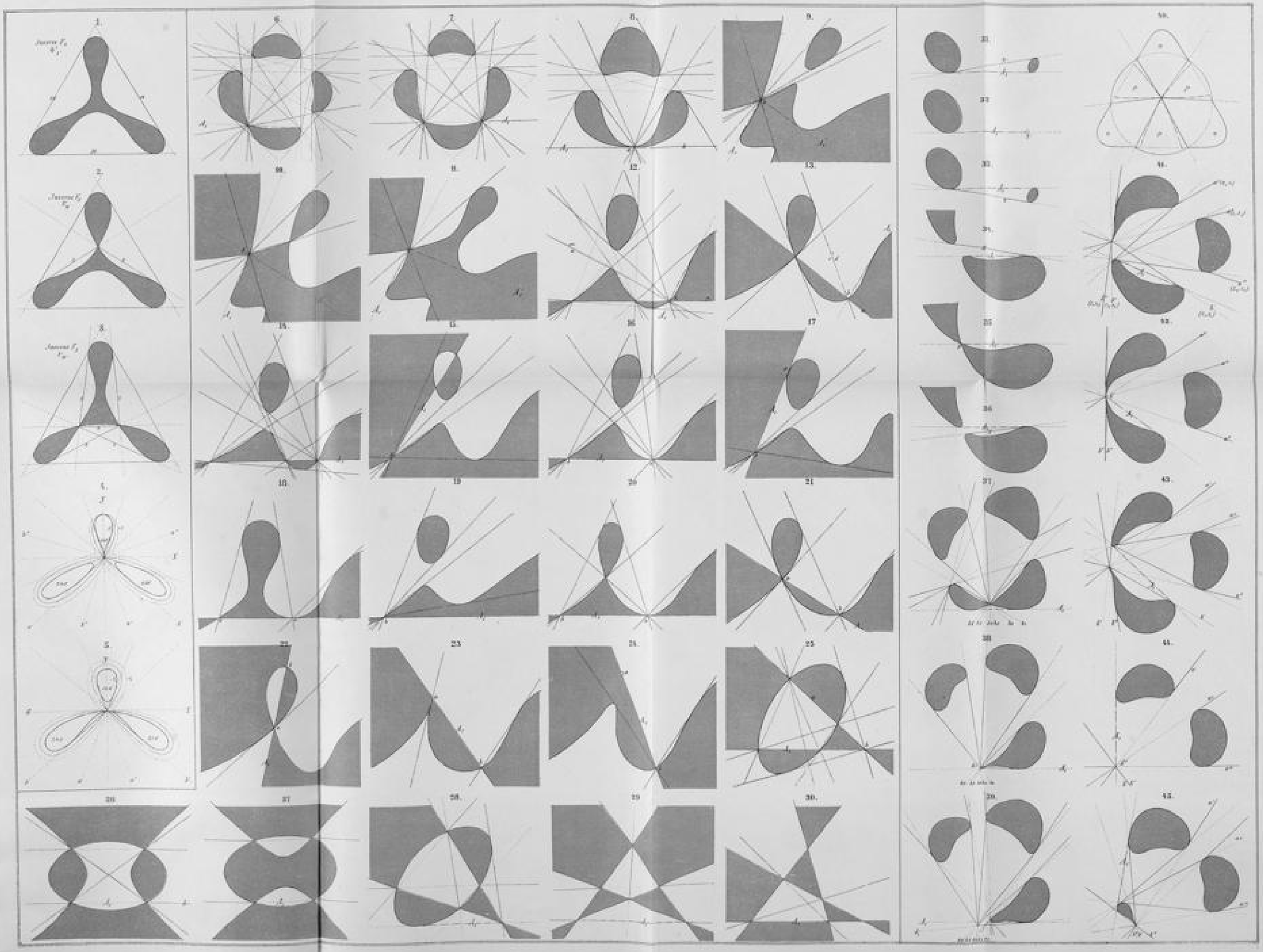


Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tafel IV.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf