# Dynamik.

## §. 52.

Wenn ein starres Punktesystem unter dem Einflusse von Kräften steht, welche sich nicht das Gleichgewicht halten, so findet Bewegung statt. Die Gesetze aufzufinden, nach welchen Bewegung erfolgt, ist Aufgabe der Dynamik, und man bezeichnet deßhalb dieselbe kurzweg als die Lehre von der Bewegung.

Wenn die Wirkung einer Kraft, die einen Körper in Bewegung setzt, nur so kurze Zeit dauert, daß während derselben in der Lage des Körpers eine merkliche Veränderung nicht wahrnehmbar ist, so nennt man die Kraft momentan, außerdem continuirlich. Bleibt die Stärke einer continuirlichen Kraft durch die ganze Zeit der Bewegung gleich groß, so heißt die Kraft constant.

Die Bewegung eines Körpers ist entweder

1) gleichförmig oder
2) ungleichförmig.

Die ungleichförmige Bewegung kann sein

a) gleichförmig =
b) ungleichförmig beschleunigt oder verzögert.

Die Bewegung heißt gleichförmig oder ungleichförmig, je nachdem die Geschwindigkeit während der ganzen Dauer der Bewegung constant ist oder nicht, d. h. je nachdem in gleichen Zeiteinheiten gleiche oder ungleiche Wege zurückgelegt werden.

Die ungleichförmige Bewegung nennt man beschleunigt oder verzögert, je nachdem die Geschwindigkeit in den einzelnen Zeittheilchen zu= oder abnimmt. Läßt sich für die Zu= oder Abnahme der Geschwindigkeit ein bestimmtes Gesetz aufstellen, so nennt man die ungleichförmige Bewegung gleichförmig beschleunigt oder verzögert, außerdem ungleichförmig beschleunigt oder verzögert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bei jeder Bewegung hat man die zwischen Raum, Zeit, Geschwindigkeit und Kraft bestehenden Beziehungen zu bestimmen.

## Gleichförmige Bewegung.

§. 53.

Die ganze Lehre der gleichförmigen Bewegung ist in der Gleichung enthalten

$$s = v \cdot t$$

worin s den in der Zeit t zurückgelegten Weg, v die constante Geschwindigkeit, d. i. den Weg bezeichnet, welchen der Körper in jeder Zeiteinheit zurücklegt.

Werden einem Körper mehrere Bewegungen nach verschiedenen Richtungen ertheilt, so hat, was in der Statik über Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte bewiesen wurde, auch seine Geltung in Bezug auf die Geschwindigkeiten, da sich die Geschwindigkeiten verhalten, wie die wirkenden Kräfte.

## Gleichförmig beschleunigte und verzögerte Bewegung.

§. 54.

Eine Kraft, welche stetig wirkt mit gleicher Intensität, erzeugt in jeder folgenden Zeiteinheit eine gleich große Zunahme an Geschwindigkeit und mithin eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit nennt man Beschleunigung.

Ist g die Beschleunigung, v die nach der Zeit t erlangte Geschwindigkeit, so ist, wenn der Körper vom Zustande der Ruhe ausgeht, die Geschwindigkeit nach der ersten Zeiteinheit (Sekunde) g, nach der zweiten Sekunde 2 g, nach 3 Sekunden 3 g, also nach t Sekunden gt; folglich ist

$$v = gt \quad \ldots\ldots \quad (1$$

$$t = \frac{v}{g} \quad \ldots\ldots \quad (2$$

$$g = \frac{v}{t} \quad \ldots\ldots \quad (3$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Besitzt der Körper, bevor die beschleunigende Kraft auf ihn einwirkt, in einer mit der Richtung der beschleunigenden Kraft übereinstimmenden Richtung die constante Geschwindigkeit a, so ist nach t Sekunden

$$v = a + gt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Um den in t Sekunden zurückgelegten Weg s zu finden, geht man von der Bestimmung des Weges in der ersten Sekunde aus. Denkt man sich die Sekunde in n gleiche Theile zerlegt und n möglichst groß, so kann man die Bewegung während dieser kleinsten Zeittheilchen um so mehr als gleichförmig betrachten, je größer man n nimmt. Bewegt sich nun der Körper in der ersten Sekunde mit einer constanten Geschwindigkeit, welche gleich ist dem arithmetischen Mittel aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit, so würde er in der ersten Hälfte der Sekunde gerade so viel Weg mehr zurücklegen, als er in der zweiten Hälfte weniger zurücklegt im Vergleich zu dem Weg, den er mit gleichförmiger Beschleunigung wirklich durchläuft. Der in der ersten Sekunde beschriebene Weg ist demnach bei einer Anfangsgeschwindigkeit Null $\frac{0+g}{2}$. Bestimmt man den Weg in den folgenden Sekunden in gleicher Weise und stellt die gewonnenen Resultate zusammen, so ist

$$s = \frac{0+g}{2} + \frac{g+2g}{2} + \frac{2g+3g}{2} + \ldots\ldots + \frac{(t-1)g+tg}{2}$$

$$= \frac{g}{2} + \frac{3g}{2} + \frac{5g}{2} + \ldots\ldots + \frac{(2t-1)g}{2}$$

$$= \frac{g}{2}\left(1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2t-1)\right)$$

$$s = \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

Hatte der Körper beim Beginne der Wirkung der continuirlichen Kraft bereits die Geschwindigkeit a, so durchläuft er vermöge der ersteren in t Sekunden den Weg $\frac{gt^2}{2}$, unter dem Einflusse der momentanen Kraft den Weg at, und ist, wenn die Richtungen beider Kräfte die gleichen sind,

$$s = at + \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bei der gleichförmig verzögerten Bewegung nimmt die Geschwindigkeit stetig ab. Betrachtet man diese Geschwindigkeitsabnahme als eine negative Zunahme, so erhält man, wenn in den Gleichungen (4) und (6) $-g$ statt $+g$ gesetzt wird, für diese Art der Bewegung

$$v = a - gt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7$$

$$s = at - \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8$$

## Freier Fall der Körper.

### §. 55.

Zu den gleichförmig beschleunigten Bewegungen wird der freie Fall der Körper gerechnet. Nimmt auch die Schwerkraft, die Ursache des Fallens, erfahrungsgemäß mit dem Quadrate der Entfernung vom Erdmittelpunkte ab, so sind doch die Wege, welche hier in Betracht kommen, verschwindend klein gegen die Größe des Erdhalbmessers, und kann man die Schwere als eine Kraft betrachten, welche continuirlich mit gleicher Stärke wirkt. Aus diesem Grunde sind auch die Gesetze des freien Falles in den beiden Gleichungen enthalten

$$v = gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$s = \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

und wird als Werth für g angenommen 9·81 m.

Verbindet man die Gleichungen (1) und (2), so erhält man

$$v = \sqrt{2gs} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

$$s = \frac{v^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Da für die Zeit $t_1$

$$s_1 = \frac{gt_1^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

so verhalten sich die Fallhöhen wie die Quadrate der Zeiten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

## Fall auf der schiefen Ebene.

§. 56.

Befindet sich ein Körper auf einer schiefen Ebene, so kann sich derselbe nicht in der Richtung der Schwerkraft bewegen; ein Theil seiner Schwere wird durch den Widerstand der Ebene aufgehoben, und erfolgt die Bewegung abwärts nur in Folge der Einwirkung des andern Theiles der Schwere, der, weil constant, stetig wirkt wie eine zur schiefen Ebene parallele Kraft. Wie aus der Statik bekannt, ist diese Kraft $P = L \sin \alpha$. Da die Kräfte proportional sind ihren Wirkungen, also auch den Beschleunigungen, welche sie den Körpern ertheilen, so ist

$$P : L = g_1 : g$$
$$\sin \alpha : 1 = g_1 : g$$
$$g_1 = g \sin \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

Setzt man nun in die für die gleichförmig beschleunigte Bewegung geltenden Gesetze $g \sin \alpha$ statt $g$, so wird

$$v = g \sin \alpha \,.\, t = gt \,.\, \sin \alpha \quad \ldots\ldots \quad (2$$

$$s = \frac{g \sin \alpha \, t^2}{2} = \frac{gt^2}{2} \sin \alpha \quad \ldots\ldots \quad (3$$

§. 57.

I. Wenn ein Körper auf einer schiefen Ebene von der Länge $l$ herabfällt, so ist seine Endgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g \,.\, \sin \alpha \,.\, l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

oder, wenn man für $\sin \alpha$ den trigonometrischen Werth $\frac{h}{l}$ einführt

$$v = \sqrt{2g \,.\, h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Aus Gleichung (2) folgt, daß ein Körper beim Falle auf einer schiefen Ebene eine Endgeschwindigkeit erlangt, welche gleich ist der Geschwindigkeit, welche er beim freien Falle erlangen würde, wenn die Fallhöhe gleich ist der Höhe der schiefen Ebene. Da ferner die Gleichung (2) unabhängig ist von dem Neigungswinkel, also auch von der Länge der schiefen Ebene, so erlangen die Körper auf schiefen Ebenen von beliebigen Längen und gleicher Höhe dieselbe Endgeschwindigkeit.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Ist ABC (Fig. 29) der normale Durchschnitt einer schiefen Ebene, AC die Länge, AB die Höhe derselben, und zieht man BD ⊥ AC, so ist, wenn t und $t_1$ die Zeit ist, innerhalb welcher ein Körper beziehungsweise von A bis B und D fällt

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot AD}{g \sin \alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4$$

und weil $AD = h \sin \alpha$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

also

$$t = t_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6$$

d. h. ein Körper durchläuft auf der schiefen Ebene in der nemlichen Zeit einen Weg gleich der Projektion der Höhe auf die schiefe Ebene, in der er beim freien Falle die Höhe zurücklegt.

III. Zieht man in einem Kreise (Fig. 30) von den Endpunkten A und B des vertikalen Durchmessers AB die Sehnen AC und BD, so kommt ein Körper ebenso schnell von A nach C und D nach B als von A nach B, weil AC und BD die Projektionen der Höhe AB sind beziehungsweise auf die schiefen Ebenen AE und FB. Da das Gleiche gilt für jede andere durch A oder B gezogene Sehne, so durchläuft ein Körper alle Sehnen, die durch die Endpunkte eines vertikalen Durchmessers gehen, in gleicher Zeit (isochron).

## Senkrechter Wurf.

### §. 58.

Wird ein Körper durch irgend eine momentan wirkende Kraft vertikal aufwärts geworfen, so wirkt auf ihn die Schwerkraft stetig ein in gleicher aber entgegengesetzter Richtung, und es entsteht deßhalb eine gleichförmig verzögerte Bewegung.

Bezeichnet man mit a die Anfangsgeschwindigkeit, so wird diese nach der ersten Sekunde nur noch $a - g$, nach der zweiten Sekunde $a - 2g$, also nach t Sekunden

$$v = a - gt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In t Sekunden hätte der Körper den Weg at zurückgelegt, wenn er allein der Wurfkraft hätte folgen können, allein vermöge der ihr entgegengesetzt wirkenden Anziehungskraft der Erde ist dieser Weg um $\frac{gt^2}{2}$ vermindert worden, so daß nach t Sekunden der wirklich zurückgelegte Weg

$$s = at - \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Der Körper bewegt sich so lange aufwärts, bis $v = 0$ wird, also

$$t = \frac{a}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Für diesen Werth von t wird

$$s_1 = \frac{a^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Von dem Augenblicke an, in welchem die Geschwindigkeit gleich Null geworden, wird der Körper anfangen zu fallen und hat nun den Weg $\frac{a^2}{2g}$ zurückzulegen. Dazu braucht er die Zeit

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{g}} = \sqrt{\frac{2a^2}{2g^2}} = \frac{a}{g} \quad \ldots\ldots \quad (5$$

und erlangt die Endgeschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{2g \cdot s_1} = \sqrt{2g \cdot \frac{a^2}{2g}} = a \quad \ldots \quad (6$$

d. h. ein Körper braucht ebenso lange zum Steigen als zum Fallen und erlangt beim freien Falle von einer bestimmten Höhe s genau wieder dieselbe Geschwindigkeit, welche ihm eine momentane Kraft ertheilen müßte, um die gleiche Höhe zu erreichen.

## Krummlinige Bewegung im Allgemeinen.

### §. 59.

Wirken auf einen Körper zwei momentane oder zwei continuirliche Kräfte, so wird sich derselbe in gerader Richtung bewegen, da man in beiden Fällen die Wirkung auf die einer einzigen Kraft zurückführen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

kann, welche immer nur eine geradlinige Bewegung verursacht. Soll Bewegung in einer krummen Linie erfolgen, so muß auf einen durch eine momentane Kraft in Bewegung gesetzten Körper eine stetige Kraft wirken und zwar in einer Richtung, welche von der Richtung der momentanen Kraft verschieden ist.

Hat nemlich ein Körper im Punkte A die Geschwindigkeit AB (Fig. 31) und zugleich in der Richtung AX die Geschwindigkeit AC, so kommt er in einer Sekunde nach D. In der nächsten Sekunde würde er wegen des Beharrungsvermögens in der Richtung von AD den Weg DE = AD zurücklegen. Wird ihm nun neuerdings im Punkte D in der Richtung von DY die Geschwindigkeit DF ertheilt, so ist er am Ende der zweiten Sekunde in G angelangt u. s. w. In Folge dessen wird der Körper die gebrochene Linie ADGK beschreiben. Nimmt man nun an, daß die zweite Kraft nicht stoßweise am Anfange einer jeden Sekunde, sondern continuirlich wirkt, so wird der Körper in jedem Augenblicke die Richtung ändern, welche er im unmittelbar vorausgehenden Augenblicke eingeschlagen hat, und der Weg eine krumme Linie werden.

Von dem Verhältnisse der momentanen und continuirlichen Kraft sowie von den Richtungen, in welchen sie wirken, wird die Beschaffenheit der krummen Linie abhängen.

## Horizontaler Wurf.

### §. 60.

Wird ein Körper in der Entfernung e von der Oberfläche der Erde in horizontaler Richtung abgeworfen (Fig. 32), so wirkt auf ihn ein 1) die Wurfkraft in der Richtung von AX, 2) die Schwerkraft in der Richtung von AY. Ist AB = BC = CD = u. s. w. die horizontale Geschwindigkeit, so wird sich der Körper nach Ablauf der einzelnen Sekunden nach und nach in b, c, d, welche beziehungsweise in vertikaler Richtung um $\frac{g}{2}$ unter B, um $\frac{g}{2} \cdot 2^2$ unter C, um $\frac{g}{2} \cdot 3^2$ unter D liegen, sich befinden, und seine Bahn die krumme Linie Abcd sein. Der Körper wird demnach nach der Seite hin, wohin ihn die Wurfkraft treibt, soweit gelangen, als er gekommen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wäre nur unter dem Einflusse der Wurfkraft, dabei aber so tief unter seine ursprüngliche Höhe herabsinken, als ob er allein der Einwirkung der Schwere folgen würde.

Bezeichnet man mit x den Weg, den der Körper in horizontaler Richtung, mit y den Weg, den er im freien Falle in der Zeit t zurücklegt, so kann man mit Hilfe der beiden Gleichungen

$$x = vt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$y = \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2$$

genau die Stelle der Bahn finden, in welcher der Körper sich in einer beliebigen Zeit t befindet.

Führt man aus Gleichung (2) den Werth von t in Gleichung (1) ein, so erhält man

$$x^2 = \frac{2v}{g} \cdot y \quad \ldots\ldots \quad (3$$

eine Gleichung, welche, unabhängig von t, die Gestalt der Bahn oder die Natur der krummen Linie erkennen läßt. Man nennt eine solche krummlinige Bahn eine Parabel.

## Schiefer Wurf.

### §. 61.

Wenn ein Körper in der Richtung AP, welche mit dem Horizont AX den Winkel $\alpha$ bildet, mit einer Anfangsgeschwindigkeit AB von A aus abgeworfen wird (Fig. 33), so würde er wegen der Trägheit den Weg ABCD .... beschreiben, allein in Folge der gleichzeitigen Einwirkung der Schwerkraft wird er sich am Ende der einzelnen Sekunden in b, c, d ... befinden, die vertikal um $\frac{g}{2}$ unter B, $\frac{g}{2} \cdot 2^2$ unter C u. s. w. liegen. Zerlegt man die Anfangsgeschwindigkeit AB = a in eine horizontale und vertikale Componente, welche beziehungsweise mit AX und AY zusammenfallen, so erhält man in

$$x = at\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$y = at\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \quad \ldots \quad (2$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Wege, welche der Körper in der Zeit t allein mit der horizontalen oder vertikalen Geschwindigkeit zurücklegen würde, und in

$$v = a \sin \alpha - gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

die Geschwindigkeit v, welche der Körper in der Zeit t in vertikaler Richtung besitzt.

Es wird nun ein Zeitpunkt eintreten, in welchem diese Geschwindigkeit gleich Null wird, also

$$a \sin \alpha = gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

und von diesem Augenblicke an wird der Körper vermöge der Schwere sich dem Horizonte wieder nähern. Der Punkt M, in welchem dieses geschieht, ist offenbar der höchste Punkt der Bahn, und seine senkrechte Entfernung von dem Horizonte nennt man die Wurfhöhe.

Erreicht der Körper in N den Horizont, so wird in diesem Augenblicke $y = 0$, also

$$at_1 \sin \alpha = \frac{gt_1{}^2}{2} \text{ oder}$$

$$2\,a \sin \alpha = gt_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

und nennt man die gerade Linie AN die Wurfweite.

Vergleicht man Gleichung (5) mit Gleichung (4), so erkennt man, daß die Zeit, welche der Körper braucht, um die ganze Bahn zu durchlaufen, doppelt so groß ist, als die Zeit, in der er die größte Entfernung vom Horizont erreicht.

Durch Verbindung der Gleichungen (1) und (5) erhält man die Wurfweite

$$x = a \,.\, \cos \alpha \,.\, \frac{2\,a \sin \alpha}{g} = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \ldots\ldots \quad (6$$

Durch Verbindung der Gleichungen (2) und (4) die Wurfhöhe

$$y = a \,.\, \sin \alpha \,.\, \frac{a \,.\, \sin \alpha}{g} - \frac{g}{2} \,.\, \left(\frac{a \sin \alpha}{g}\right)^2$$

$$y = \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{2\,g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7$$

Weil $\sin \alpha$ den größten Werth erhält, wenn $\alpha = 90^0$, so erreicht die Wurfweite ihren größten Werth, wenn $\alpha = 45^0$, die Wurfhöhe beim vertikalen Wurf. Berücksichtigt man ferner, daß $\sin(R + \beta)$ gleich $\sin(R - \beta)$, so ergibt sich, daß die Wurfweite die nemliche ist, ob $\alpha = 45^0 + \beta$ oder $45^0 - \beta$, daß man also bei Elevations-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

winkeln, welche sich zu einem R ergänzen, die gleiche Wurfweite erzielt. Durch Elimination von t aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man in

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2a^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8$$

die Gleichung der Bahn des geworfenen Körpers, und ist diese Bahn gleichfalls eine Parabel.

Anmerkung: Der Luftwiderstand, welcher bei Aufstellung der Gleichungen nicht berücksichtigt wurde, verändert die gewonnenen Resultate, da durch Einwirkung derselben die horizontale Geschwindigkeit beständig vermindert und ebenso die Bewegung in vertikaler Richtung verändert wird. Die Bahn des Körpers wird in der Wirklichkeit keine Parabel, sondern die sogenannte ballistische Kurve beschreiben, bei welcher der Theil der Bahn von der höchsten Höhe bis zum Horizont kürzer und steiler ist, als der Theil, in welchem der Körper aufsteigt.

## Centralbewegung und die Kepler'schen Gesetze.

### §. 62.

Wenn auf einen Körper, welcher sich in geradliniger Bewegung befindet, von einem festen Punkte aus, der nicht in der Richtung der momentanen Kraft liegt, welche jene Bewegung veranlaßte, eine Kraft continuirlich wirkt, so entsteht eine Centralbewegung. Beide Kräfte führen den Namen „Centralkräfte." Die momentane Kraft heißt auch Tangentialkraft, weil sie den Körper nach einer geraden Linie fortzubewegen sucht, welche eine Tangente der Bahn ist, die continuirlich wirkende Kraft Centripetalkraft. Ist O der anziehende Mittelpunkt der Centripetalkraft (Fig. 34) und in A ein beliebiger, angezogener Körper, so würde derselbe sehr bald mit dem Centralkörper sich vereinigen, wenn nicht die Tangentialkraft vorhanden wäre, welche ihn in der Richtung von AX zu bewegen suchte. In ähnlicher Weise, wie in vorausgehenden Paragraphen läßt sich darthun, daß der Körper die Bahn ADGK . . . . durchläuft, und daß diese Bahn eine krumme Linie sein muß.

Eine derartige Bewegung ist die Bewegung der Planeten um die Sonne, als deren Ursache zuerst Newton (1642—1727) die allgemeine Schwere nachgewiesen hat. Die Beobachtung, daß die Bahnen der Planeten Ellipsen sind, in deren einem Brennpunkte die Sonne



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

steht, verdanken wir Kepler (1571—1631); dieses ist das erste Kepler'sche Gesetz.

Das zweite Kepler'sche Gesetz: „Der Radius Vector (die Verbindungslinie des Centralpunktes mit einem Punkte der Bahn) legt in gleichen Zeiten gleiche Räume zurück", ergibt sich aus der Gleichheit der $\triangle\triangle$ AOD = DOE = DOG (gleiche Grundlinie und gleiche Höhe).

Um das dritte Kepler'sche Gesetz: „Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der mittleren Entfernungen von der Sonne", zu beweisen, nehmen wir an, daß die Bahnen der Planeten kreisförmig sind. In diesem Falle muß die Bewegung eine gleichförmige sein, weil die in den einzelnen Zeiteinheiten beschriebenen Kreisbögen sich verhalten wie die zu ihnen gehörigen Sektoren, also auch wie die Zeiten, so daß in gleichen Zeiten gleiche Bögen zurückgelegt werden.

Sind $r$ und $r_1$ die Entfernungen, $v$ und $v_1$ die Geschwindigkeiten, $t$ und $t_1$ die Umlaufszeiten zweier Planeten, so ist

$$vt = 2r\pi \text{ und } v_1 t_1 = 2r_1\pi,$$

also

$$t^2 = \frac{4r^2\pi^2}{v^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$t_1^2 = \frac{4r_1^2\pi^2}{v_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

$$t^2 : t_1^2 = \frac{r^2}{v^2} : \frac{r_1^2}{v_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Da nun durch Erfahrung und Rechnung nachgewiesen ist, daß die Quadrate der Geschwindigkeiten sich umgekehrt verhalten wie die Entfernungen, also

$$v^2 : v_1^2 = r_1 : r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

so erhält man durch Einführen des Werthes $\frac{v^2}{v_1^2}$ in Gleichung (3)

$$t^2 : t_1^2 = \frac{r^2}{r_1} : \frac{r_1^2}{r},$$

oder

$$t^2 : t_1^2 = r^3 : r_1^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

## Centrifugal- oder Schwungkraft bei der kreisförmigen Centralbewegung.

§. 63.

Ein jeder Körper erlangt bei der Bewegung um einen Centralkörper ein Bestreben, sich von demselben zu entfernen, und dieses Bestreben nennt man Centrifugal- oder Schwungkraft. Der Centrifugalkraft wirkt die Centripetalkraft entgegen und beide müssen bei der kreisförmigen Bewegung einander gleich sein.

Ist nemlich ACG die kreisförmige Bahn eines Körpers (Fig. 35), AB und AD die Geschwindigkeit beziehungsweise unter dem Einflusse der Tangential- und Centripetalkraft, so ist AC der Weg, den der Körper in der Zeiteinheit wirklich zurücklegt. Betrachtet man die Tangentialgeschwindigkeit AB als die Resultante der beiden Geschwindigkeiten AF und AC, von denen AF gleich und entgegengesetzt AD, so müssen AF und AD sich das Gleichgewicht halten. Die Geschwindigkeit AF läßt sich aber als die Wirkung einer besonderen Kraft auffassen, welche der Centripetalkraft gleich und entgegengesetzt ist, und nennt man diese Kraft Centrifugal- oder Schwungkraft.

Soll $P_1$, die Größe der Centrifugalkraft, bestimmt werden, so ergibt sich dieselbe aus

$$P_1 : P = g_1 : g$$

$$P_1 = g_1 \cdot \frac{P}{g} = g_1 \cdot M \quad \ldots \quad (1$$

weil der Druck $P_1$ den ein Körper vermöge der Centrifugalkraft ausübt, sich zum Gewichte des Körpers, welches in Bewegung gesetzt wird, verhält wie die Beschleunigungen, welche sie ertheilen, und weil $\frac{P}{g}$ gleich M, der Masse des Körpers, ist.

Da die Centrifugalkraft gleich ist der Centripetalkraft, und letztere continuirlich wirkt, so ist

$$g_1 = 2 \cdot AF \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

also $$P_1 = 2AF \cdot M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Nimmt man nun die Zeiteinheit möglichst klein an, so daß man die Sehne AC mit dem Bogen AC zusammenfallend und AF sowohl als



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

AD als gerade Linien betrachten kann, so ist, wenn man die Geschwindigkeit AC mit v bezeichnet,

$$AF = \frac{v^2}{2R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

und mithin

$$P_1 = \frac{M \cdot v^2}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

Die Centrifugal- und Centripetalkraft ist demnach der Masse des Körpers und dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt, dem Radius der Bahn indirekt proportional.

Ist t die Umlaufszeit des Körpers, also $v \cdot t = 2\pi \cdot R$, so wird, wenn man $v = \frac{2\pi \cdot R}{t}$ in die Gleichung (5) einführt

$$P_1 = \frac{4\pi^2 R}{t^2} \cdot M \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6$$

Schwingen zwei Körper von gleicher Masse und in derselben Zeit, aber mit verschiedenem Bahnradius, um denselben Mittelpunkt oder dieselbe Axe, so verhält sich

$$P : P_1 = R : R_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7$$

Dieser Fall tritt ein bei der Bewegung der Erde um ihre Axe und folgt aus Gleichung (7), daß die Centrifugalkraft vom Aequator gegen die Pole hin abnimmt.

## Das Pendel.

### §. 64.

Hängt man einen Körper mittelst einer Stange oder eines Fadens so auf, daß er sich in einer vertikalen Ebene bewegen kann, so nennt man eine derartige Vorrichtung ein Pendel. Kann man das Gewicht des Fadens als verschwindend klein betrachten, so nennt man das Pendel ein mathematisches, außerdem physisches Pendel. Die Entfernung des Aufhänge- oder Drehpunktes von dem schweren Punkte des mathematischen Pendels nennt man Länge des Pendels. So läßt sich z. B. eine kleine Kugel an einem sehr feinen Faden, dessen Länge den Durchmesser der Kugel bedeutend übertrifft, ohne merklichen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fehler als ein mathematisches Pendel ansehen. Die nachfolgenden Entwicklungen gelten zunächst nur für das mathematische Pendel.

Ist O der Aufhängepunkt, A der einzige schwere Punkt des mathematischen Pendels OA (Fig. 36), so wird im Zustande der Ruhe der Punkt A sich vertikal unter O befinden. Bringt man das Pendel aus der Gleichgewichtslage OA in die Lage OB, so wird es auf dem Kreisbogen BA herabgleiten und mit der in A erlangten Geschwindigkeit wegen des Beharrungsvermögens von A aus bis nach C sich weiter bewegen. Der Bogen AC muß aber gleich dem Bogen BA sein, weil auf dem Wege von A nach C die Geschwindigkeit durch die Schwere genau in umgekehrter Ordnung vermindert wird, wie sie durch dieselbe auf dem Wege von B nach A vermehrt wurde. Die Bewegung von B nach C heißt eine Schwingung oder Oscillation, der Winkel BOA der Ausschlagswinkel oder Amplitude; die Zeit, welche der Pendel zu einer ganzen Schwingung braucht, Schwingungsdauer oder Schwingungszeit.

## §. 65.

Hat ein Pendel den Ausschlagswinkel $BOA = 2\alpha$, und zerlegt man die Beschleunigung g der in B wirkenden Schwerkraft in die zwei Seitenkräfte BD und BE, von denen die erstere ihrer Richtung nach mit OB zusammenfällt, während letztere in der Richtung der Tangente in B wirkt, so wird die Wirkung von BD durch den Widerstand des Aufhängepunktes aufgehoben und bleibt nur $BE = g_1$ als wirkende Kraft übrig. Da Winkel BFE gleich $2\alpha$, so ist

$$BE = g_1 = g \sin 2\alpha.$$

Weil bei sehr kleinen Winkeln statt der Sinus die Bogen gesetzt werden können, also

$$g_1 = g \cdot 2\alpha \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

so läßt sich der Weg s, den das Pendel in dem sehr kleinen Zeittheilchen t zurücklegt, durch die Gleichung ausdrücken

$$s_1 = \frac{g \cdot 2\alpha}{2} \cdot t^2 \ldots\ldots \quad (2$$

Hat das Pendel den Ausschlagswinkel $\alpha$, so findet man für die Zeit t in analoger Weise

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$s_2 = \frac{g \cdot \alpha}{2} \cdot t^2 \ldots\ldots\ldots \quad (3$$

also $$s_1 = 2\, s_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Daraus folgt, daß für kleine Ausschlagswinkel (bis 4°) die Schwingungsdauer unabhängig ist von der Größe des Ausschlagswinkel.

## Schwingungsdauer des Pendels.

### §. 66.

Entwickelt man den Bogen BAC, den der schwere Punkt des Pendels in einer gewissen Zeit durchläuft, in die gerade Linie $B_1 A_1 C_1$ (Fig. 37ᵃ und 37ᵇ) und stellt sich vor, es bewege sich auf dieser geraden Linie ein Körper so, daß seine Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn gleich ist der Geschwindigkeit des schweren Punktes an der entsprechenden Stelle des Bogens BAC, so wird die Zeit, welche der Körper zu seiner Bewegung braucht, genau gleich sein der Oscillationsdauer des Pendels.

Um für diese Zeit einen bestimmten Werth zu erhalten, möge sich ein zweiter Körper auf dem Halbkreis über $B_1 A_1 C_1$ von $B_1$ nach $C_1$ mit einer constanten Geschwindigkeit bewegen. Wählt man diese constante Geschwindigkeit so, daß ihre horizontale Componente in einem beliebigen Punkte des Halbkreises übereinstimmt mit der Geschwindigkeit des ersten Körpers an der Stelle der geraden Linie $B_1 C_1 A_1$, welche mit der Projektion dieses Punktes zusammenfällt, so werden beide Körper, wenn sie gleichzeitig den Punkt $B_1$ verlassen, auch ihre Bahn gleichzeitig durchlaufen. Bestimmt man deßhalb die Zeit, in welcher der zweite Körper auf dem Halbkreis von $B_1$ nach $C_1$ kommt, so erhält man mit dieser Zeitdauer die Schwingungsdauer des Pendels.

Wenn das Pendel von B bis E herabfällt, so erlangt es eine Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g \cdot DF}$$

oder da $DF = AD - AF$

$$AD = \frac{AB^2}{2l} \text{ und } AF = \frac{AE^2}{2l}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$v = \sqrt{\frac{g}{l} \cdot (AB^2 - AE^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

wenn die Pendellänge OA gleich l gesetzt wird.

Nimmt man nun an, daß der Körper sich auf dem Halbkreise bewegt mit der Geschwindigkeit, welche der schwere Punkt auf dem Bogen BAC in A erreicht, nemlich $\sqrt{2g \cdot AD}$ oder $AB\sqrt{\frac{g}{l}}$, so ist im Punkte J seine Geschwindigkeit JG, und da diese der Annahme nach gleich $AB\sqrt{\frac{g}{l}}$, die horizontale Componente

$$JH = AB \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \sin JGH$$

$$= AB\sqrt{\frac{g}{l}} \sin JA_1E_1$$

$$= AB\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{JE_1}{A_1J}$$

$$= AB\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{\sqrt{A_1B_1{}^2 - A_1E_1{}^2}}{A_1B_1}$$

und, da $A_1B_1 = AB$ und $A_1E_1 = AE$

$$JH = AB \cdot \sqrt{\frac{g}{l}(AB^2 - AE^2)} \quad \ldots\ldots \quad (2$$

Weil $E_1$ die Projektion von J auf $B_1A_1C_1$ und $B_1E_1 = BE$, so folgt

$$JH = v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Ist t die Zeit, in welcher der Körper auf dem Halbkreis von $B_1$ nach $C_1$ kommt, so ist

$$t \cdot AB \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = AB \cdot \pi$$

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Die Schwingungsdauer des Pendels ist demnach $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mit Hilfe der höheren Mathematik findet man genauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \alpha^2\right) \ldots\ldots\ldots \quad (5$$

in welcher Gleichung $\alpha$ den Ausschlagswinkel bezeichnet.

Da für ein Pendel von der Länge $l_1$ die Schwingungsdauer

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6$$

so folgt

$$t^2 : t_1^2 = l : l_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7$$

d. h. die Quadrate der Schwingungszeiten verhalten sich wie die Pendellängen.

Macht das erste Pendel n Schwingungen in der Zeit T, das zweite Pendel $n_1$ Schwingungen in derselben Zeit T, ist also $t = \frac{T}{n}$ und $t_1 = \frac{T}{n_1}$, so ergibt sich

$$n_1^2 : n^2 = l : l_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8$$

d. h. die Quadrate der Schwingungszahlen verhalten sich umgekehrt wie die Pendellängen.

Mit Hilfe des Pendels erhält man mit großer Genauigkeit die Beschleunigung durch die Schwere.

Setzt man in Gleichung (4) $t = 1$, so erhält man die Länge des Sekundenpendels.

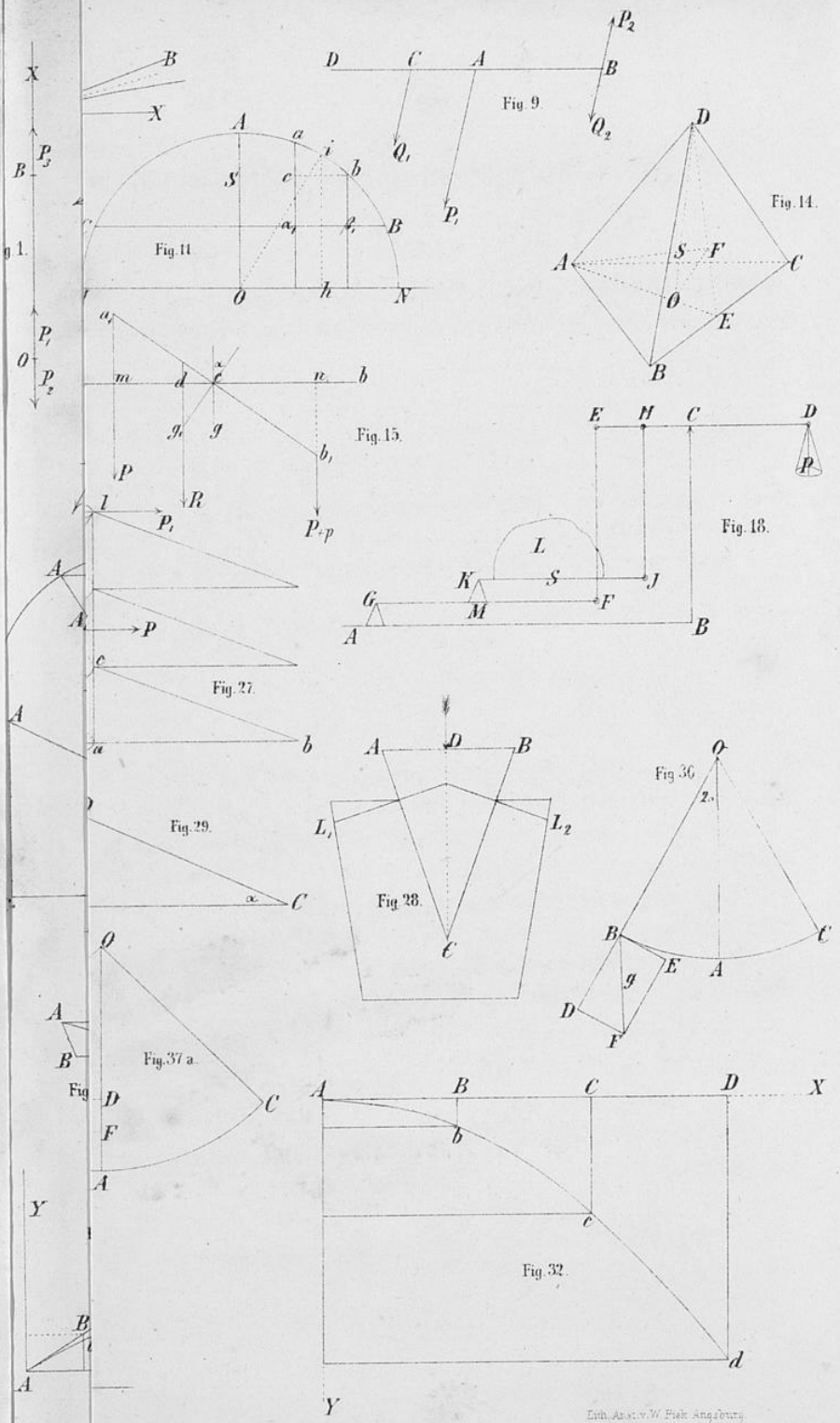
Hat ein Sekundenpendel an einem Orte der Erdoberfläche die Länge l, an einem andern Orte die Länge $l_1$, so folgt aus

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g_1}}$$

$$l : l_1 = g : g_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9$$

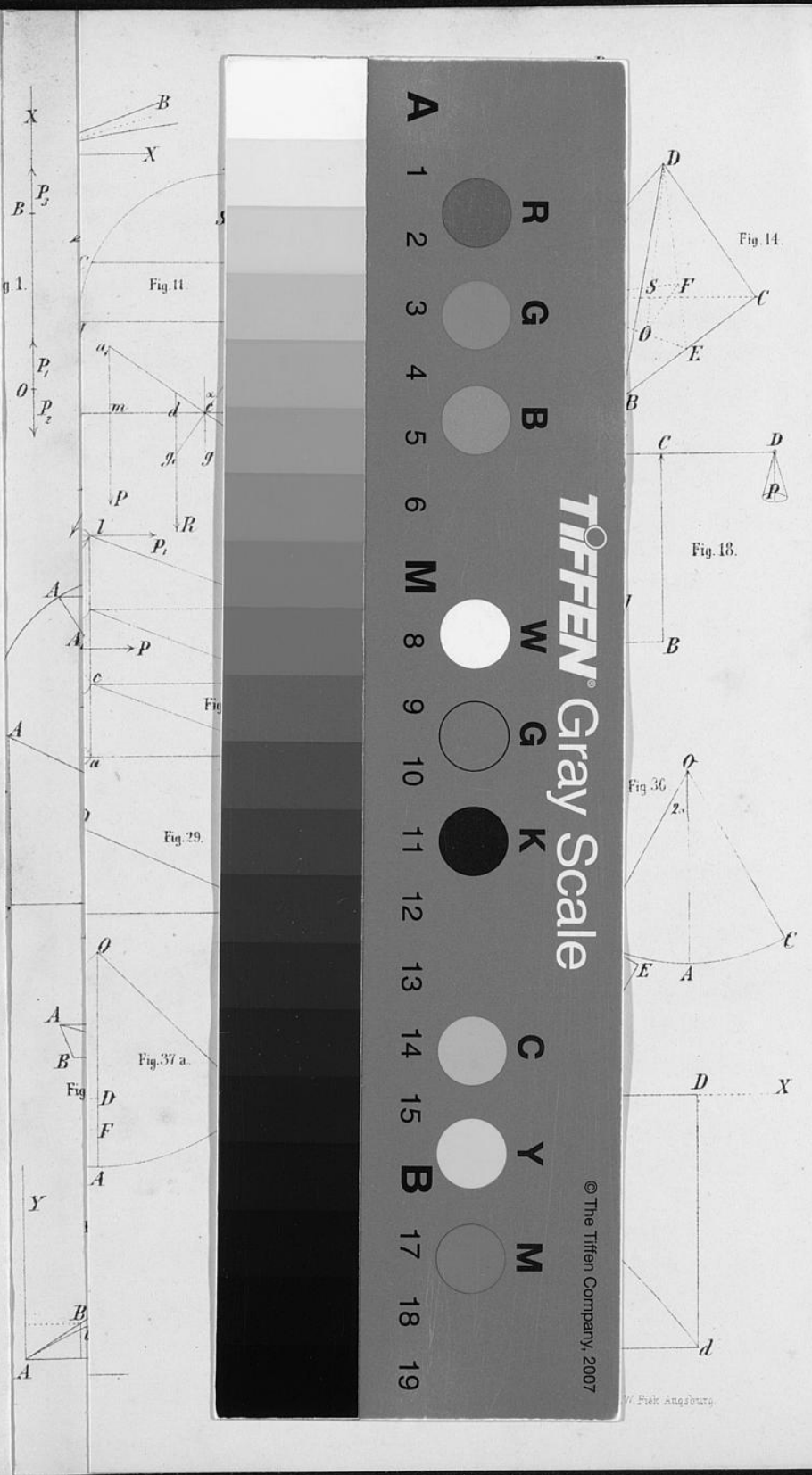
Die Länge des Sekundenpendels nimmt demnach mit der Beschleunigung in demselben Verhältnisse zu oder ab.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



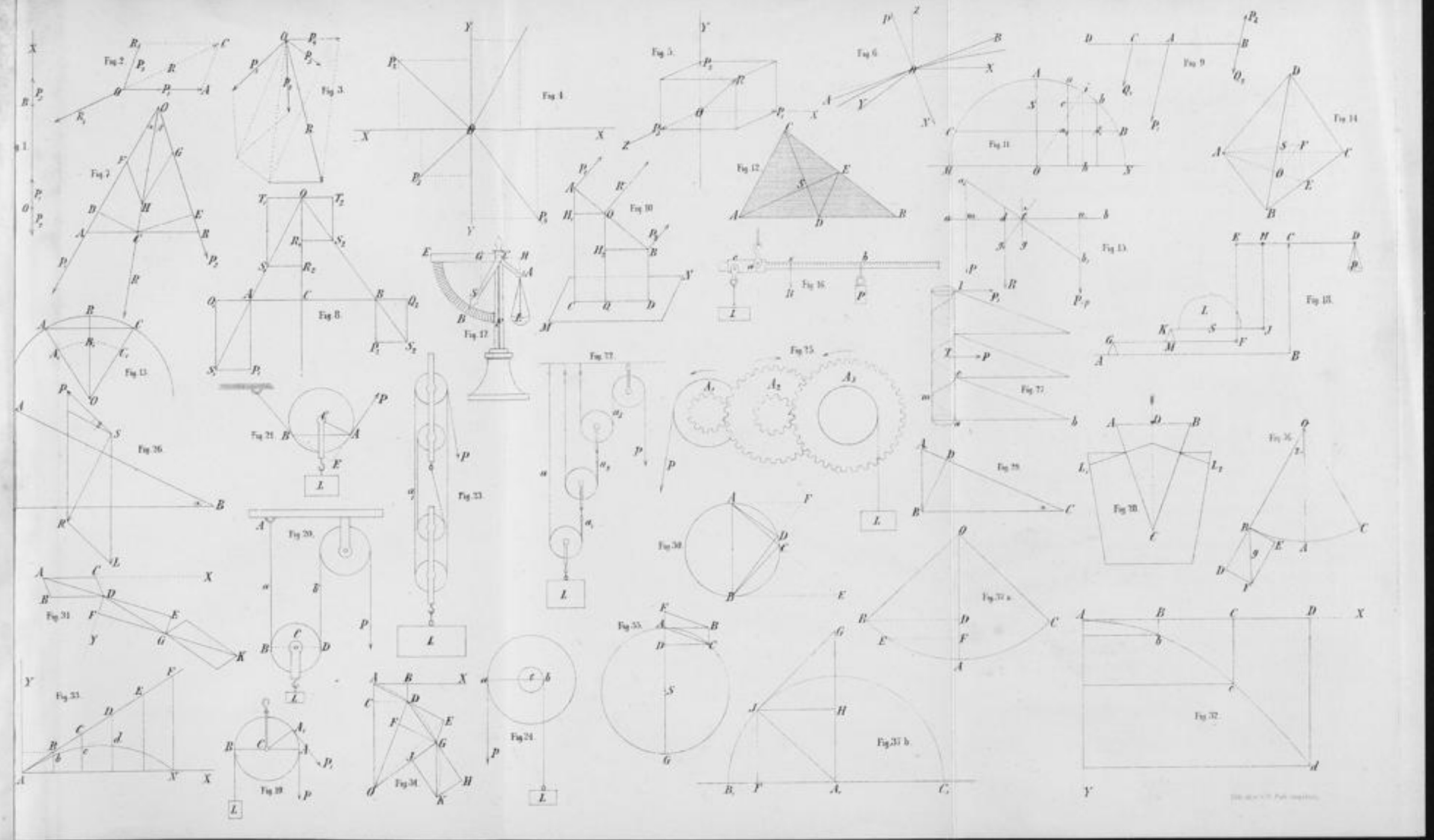

Lith. Anst. v. W. Fiek Augsburg

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf




TIFFEN® Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf