Elementar-Mechanik fester Körper,

für

die Schule bearbeitet.

Programm

der

königl. kathol. Studien-Anstalt bei St. Stephan in Augsburg

zum

Schlusse des Schuljahres 1874/75

von

P. Steph. Stengel,
Professor der Physik am königl. Lyceum.

Augsburg.
Druck von Ph. J. Pfeiffer.
1875.

AUGS
5 (1875)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Einleitung.

§. 1.

Mechanik ist die Lehre vom Gleichgewichte und der Bewegung der Körper.

§. 2.

Ein Körper befindet sich in Ruhe oder Bewegung, je nachdem er in allen seinen Theilen beständig denselben Raum einnimmt oder nicht. Wenn die einzelnen Theile des Körpers in Bezug auf andere in der Nähe befindlichen Gegenstände ihre Lage beibehalten, so befindet sich der Körper in relativer Ruhe, und es gibt, da alle auf der Erde ruhenden Körper sich mit der Erde bewegen, keinen Körper, welcher in absoluter Ruhe wäre. Jene Bewegung nennt man absolut, welche ein Körper wirklich im Raume hat, während ein Körper sich in relativer Bewegung befindet, wenn er in Bezug auf einen zweiten in Ruhe, in Bezug auf einen dritten in Bewegung ist.

§. 3.

Jeder Körper kann den einmal gewonnenen Zustand der Ruhe oder Bewegung ohne äußere Veranlassung nicht ändern; es ist also eine äußere Ursache nothwendig, vermöge der er von dem einen in den andern Zustand übergeht. Diese äußeren Ursachen nennt man Kräfte.

Da man das Wesen der Kräfte selbst nicht kennt, wohl aber ihre Wirkungen wahrnehmen und beobachten kann, so handelt es sich zu-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nächst darum, gewisse Größen aufzufinden, durch welche man in den Stand gesetzt wird, die Kräfte zu messen. Als solche dienen

1) Die Geschwindigkeit, d. i. der Weg, den ein Körper in einer bestimmten Zeiteinheit zurücklegt.

2) Die Masse, d. i. die Summe der materiellen Theilchen oder Punkte des Körpers, welche in Bewegung gesetzt wird.

3) Die Zeit, welche zur Leistung einer bestimmten Arbeit erforderlich ist.

§. 4.

Da man vom Wege, den ein Körper in einer bestimmten Zeiteinheit zurücklegt, auf die Größe der Kraft schließen kann, so sind die Kräfte graphisch darstellbar. Man trägt nemlich vom Angriffspunkte, d. i. von der Stelle eines Körpers aus, in welchem eine Kraft thätig wird, die Länge des Weges, den der Körper in der Zeiteinheit unter der Einwirkung der Kraft zurücklegt, auf der Geraden auf, welche mit der Richtung der Kraft zusammenfällt, und zwar in dem Sinne oder nach der Seite hin, nach welcher sie wirkt, und erhält in der Größe dieser Strecke ein Maß der Kraft. Es ist demnach eine Kraft durch den Angriffspunkt, ihre Größe, Richtung und Sinn der Richtung vollkommen bestimmt.

§. 5.

Wenn zwei oder mehrere Kräfte auf einen Körper wirken, so bleibt derselbe entweder in Ruhe, oder es erfolgt Bewegung. Im ersteren Falle sagt man, der Körper befindet sich im Gleichgewicht, oder die Kräfte halten sich das Gleichgewicht; im letzteren Falle wird der Körper nach irgend einer Richtung in Bewegung gesetzt, so daß die Wirkung dieselbe ist, als würde der Körper nur unter dem Einflusse einer einzigen Kraft stehen. Diese Kraft nennt man die Resultante oder Mittelkraft, die gegebenen Kräfte Componenten oder Seitenkräfte.

§. 6.

Wie jeder anderen mathematischen Wissenschaft, so liegen auch der Mechanik gewisse Axiomata zu Grunde, und sind die wichtigsten:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Jeder Körper hat ein Beharrungsvermögen, d. h. in der Natur tritt keine Aenderung ein ohne äußere Ursache.

2. Jede Kraft kommt zu ihrer Geltung, d. h. wenn mehrere Kräfte auf Körper einwirken, so befinden sich dieselben nach einer bestimmten Zeit gerade da, wohin sie gekommen wären, wenn sie die von den einzelnen Kräften bedingten Bewegungen nach und nach ausgeführt hätten. Jede Kraft wirkt also unabhängig von den übrigen.

3. Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich, d. h. dem Druck oder Zug, welchen eine Kraft auf irgend einen Körper ausübt, entspricht ein ebenso großer Gegendruck oder Gegenzug.

Anmerkung. Wenn die Wirkung gleich ist der Gegenwirkung, so ist es nicht so zu verstehen, als ob die eine Kraft durch die andere aufgehoben würde. Hebt Jemand z. B. eine Last auf, so verliert er so viel an Kraft, als zur Ueberwindung des Widerstandes nöthig ist, welchen die Last entgegensetzt, und entsteht Bewegung durch den Ueberschuß an Kraft.

§. 7.

Aus dem Bisherigen ergibt sich die Eintheilung der Mechanik 1) in die Statik, welche die Bedingungen untersucht, unter welchen sich die Kräfte das Gleichgewicht halten, 2) in die Dynamik, oder die Lehre von der Bewegung bei nicht bestehendem Gleichgewichte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Statik.

Die Lehre vom Gleichgewichte der Kräfte, welche auf einen einzigen vollkommen freien Punkt wirken.

§. 8.

Wirken auf einen materiellen Punkt, welcher vollkommen frei ist, d. h. nach jeder Richtung hin in Bewegung gesetzt werden kann, mehrere Kräfte, so fallen die Richtungen derselben entweder in dieselbe Gerade oder nicht.

§. 9.

Wird ein Punkt O von zwei Kräften P_1 und P_2 von gleicher Größe aber entgegengesetzter Richtung angegriffen (Fig. 1), so ist an sich klar, daß eine Bewegung weder nach der einen noch nach der andern Seite hin stattfinden kann. Dieses ist aber auch noch der Fall, wenn eine der beiden Kräfte oder beide Kräfte den Punkt O nicht unmittelbar angreifen, sondern einen andern in der ihrer Richtung entsprechenden Geraden liegenden Punkt zum Angriffspunkt haben, vorausgesetzt, daß der neue Angriffspunkt mit dem alten durch eine feste, starre Gerade verbunden ist.

Steht der Punkt O unter dem Einflusse der Kraft P_1 und fällt seine Richtung mit der starren Geraden OX zusammen, so wird, wenn man in O und B zwei Kräfte P_2 und P_3 von gleicher Größe aber entgegengesetzter Richtung wirken läßt, an dem Bewegungszustand der Geraden OB also auch jedes Punktes derselben nichts geändert, und es läßt sich die Wirkung der drei Kräfte auf die Wirkung der Kraft P_1 zurückführen. Ist nun $P_1 = P_2 = P_3$, so halten sich die Kräfte P_1 und P_2 das Gleichgewicht, und bleibt nur noch die Wirkung der Kraft P_3 übrig. Es ist mithin die Wirkung der Kraft P_1 gleich der Wirkung der Kraft P_3, und kann man den Angriffspunkt in der Richtung der Kraft beliebig verlegen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 10.

Wird ein Punkt von zwei Kräften von entgegengesetzter Richtung und ungleicher Größe angegriffen, so erfolgt, wie sich aus dem Vorhergehenden ergibt, Bewegung im Sinne der größeren Kraft.

§. 11.

Wirken auf einen Punkt beliebig viele Kräfte, und fallen die Richtungen sämmtlicher Kräfte in dieselbe Gerade, so kann man die Kräfte, welche im gleichen Sinne der Richtung wirken, in eine einzige Kraft vereinigen, und ist die Aufgabe auf den vorigen Fall zurückgeführt, in welchem ein Punkt unter dem Einflusse zweier Kräfte steht. Versieht man die Kräfte, welche in dem einen Sinne wirken mit dem Zeichen +, und jene, welche in dem andern Sinne wirken, mit dem Zeichen —, so erhält das gewonnene Resultat folgende Form: „Wirken beliebig viele Kräfte (Kräftesystem), deren Richtungen in dieselbe Gerade fallen, im beliebigen Sinne auf einen materiellen Punkt, so gibt die algebraische Summe derselben durch ihren absoluten Werth die Größe der Resultante, durch das Vorzeichen den Sinn ihrer Richtung." Ist die algebraische Summe gleich Null, d. h. gibt es keine Resultante, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht. Hat die Resultante einen von Null verschiedenen Werth, so kann man im Angriffspunkte eine der Resultante gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Kraft anbringen, welche der Resultante, also sämmtlichen Kräften das Gleichgewicht hält.

Das Aufsuchen der Resultante steht demnach im innigsten Zusammenhang mit dem Aufsuchen der Bedingungen des Gleichgewichtes.

Halten sich die gegebenen Kräfte das Gleichgewicht, so ist jede derselben gleich und entgegengesetzt der Resultante der übrigen.

Parallelogramm der Kräfte.

§. 12.

Wirken auf einen materiellen Punkt O (Fig. 2) gleichzeitig zwei Kräfte P_1 und P_2, deren Richtungen den Winkel $P_1 P_2$ bilden, und ist OA und OB beziehungsweise die Geschwindigkeit, welche ihm die Kraft P_1 und P_2 ertheilt, so kann die Resultante

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

weder in die Richtung der Kraft P_1 noch der Kraft P_2 fallen. Wäre nemlich die Kraft P_1 allein vorhanden, so würde der Punkt O in der Zeiteinheit den Weg OA zurücklegen; von dieser Richtung wird er aber durch die Kraft P_2 abgelenkt. Ebenso wird der Punkt O durch die Kraft P_1 von der Richtung OB abgelenkt. Soll deßhalb der Punkt O überhaupt sich bewegen, so muß die Resultante R ihrer Richtung nach zwischen OA und OB hineinfallen. Nun wird nach dem Grundsatze: „Jede Kraft kommt zu ihrer Geltung" der Punkt O unter gleichzeitiger Einwirkung der Kräfte P_1 und P_2 gerade da sich befinden, wohin er gelangen würde, wenn die Kräfte successive wirken, vorausgesetzt, daß die Zeit der Einwirkung, die Größe der Kräfte, sowie ihre Richtung nicht geändert wird. Sieht man daher vorläufig von der Kraft P_2 ganz ab, so kommt in der Zeiteinheit der Punkt O unter dem Einflusse der Kraft P_1 nach A, von A aus wird er unter der Einwirkung von P_2 in der nächsten Zeiteinheit den Punkt C erreichen. Nach C gelangt aber auch der Punkt, wenn man zuerst die Kraft P_2 und dann die Kraft P_1 wirken läßt, und hat die Kraft R, welche den Punkt O in der Zeiteinheit nach C bringt, denselben Einfluß, wie die Kräfte P_1 und P_2 zusammengenommen.

Die Resultante zweier unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt wirkenden Kräfte wird demnach nach Größe, Richtung und Sinn der Richtung dargestellt durch die Diagonale eines Parallelogramms, welches jene Kräfte nach Größe und Richtung zu anliegenden Seiten hat.

§. 13.

Der Lehrsatz von dem Kräfteparallelogramm kann auch analytisch dargestellt werden, d. h. es läßt sich die Resultante auch auf algebraischem Wege finden und vollkommen nach Größe und Richtung bestimmen.

Aus dem $\triangle BOC$ erhält man mittelst bekannter trigonometrischen Gesetze

$$P_1 : P_2 : R = \sin(P_2 R) : \sin(R P_1) : \sin(P_1 P_2) \quad \ldots \quad (1$$

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos(P_1 P_2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2$$

und ist die Resultante durch die Gleichungen (1) der Richtung, durch die Gleichung (2) der Größe nach vollkommen und unzweideutig bestimmt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus Gleichung (2) folgt, daß bei gegebenen Kräften die Größe der Resultante von der Größe des Winkels $P_1 P_2$ abhängt.

Ist der Winkel $P_1 P_2 = 180^0$ so wird

$$R^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2 - 2 P_1 P_2$$

$$R = P_1 - P_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Ist der Winkel $P_1 P_2 = 90^0$ so wird

$$R^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Ist der Winkel $P_1 P_2 = 0$ so wird

$$R^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2 P_1 P_2$$

$$R = P_1 + P_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5$$

Resultate, welche mit den auf rein mechanischem Wege erhaltenen vollkommen übereinstimmen.

§. 14.

Wird ein Punkt angegriffen von beliebig vielen Kräften (Fig. 3), deren Richtungen beliebige sind, jedoch in dieselbe Ebene fallen, so findet man die Resultante, indem man zuerst die Resultirende zwischen 2 Kräften, dann zwischen dieser und einer dritten Kraft aussucht u. s. w. und gelangt zu dem Resultat: „Die Resultante von n Kräften, welche einen Punkt angreifen und deren Richtungen sämmtlich in dieselbe Ebene fallen, wird nach Größe, Richtung und Sinn der Richtung durch die Schlußseite eines n Eckes dargestellt, dessen Seiten nach Größe, Richtung und Sinn der Richtung den gegebenen Kräften entsprechen.“ Die Ordnung, in der diese Kräfte an einander gereiht werden, ist dabei vollkommen gleichgiltig.

§. 15.

Will man in diesem Falle die Resultante auf analytischem Wege erhalten, so ziehe man (Fig. 4) durch den angegriffenen Punkt O zwei senkrecht zu einander stehende Gerade oder Axen, nenne die horizontale die X, die verticale die Y Axe und zerlege jede der gegebenen Kräfte in zwei rechtwinklige Componenten, welche der Richtung nach mit diesen Axen zusammenfallen. Sind nun α_1, α_2 α_3 . . . α_n die Winkel, welche die Kräfte $P_1 P_2 P_3$ . . . P_n mit der X Axe jedoch immer nach derselben Richtung hin bilden, $\Sigma(P \cos \alpha)$ und $\Sigma(P \sin \alpha)$ beziehungsweise die Resultanten der nach der X und Y Axe wirkenden Componenten, so ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\Sigma(P\cos\alpha) = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots + P_n\cos\alpha_n$$
$$\Sigma(P\sin\alpha) = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + \ldots + P_n\sin\alpha_n$$

und $$R^2 = [\Sigma(P\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(P\sin\alpha)]^2 \ldots \quad (1$$

Die Richtung der Resultante erhält man aus einer der drei Gleichungen

$$\sin\lambda = \frac{\Sigma(P\sin\alpha)}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

$$\cos\lambda = \frac{\Sigma(P\cos\alpha)}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\Sigma(P\sin\alpha)}{\Sigma(P\cos\alpha)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Soll Gleichgewicht bestehen, so muß, weil $R = 0$

$$[\Sigma(P\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(P\sin\alpha)]^2 = 0 \ldots \quad (5$$

sein, was nur möglich ist, wenn

$$\Sigma(P\cos\alpha) = 0 \text{ und}$$
$$\Sigma(P\sin\alpha) = 0$$

d. h. „Zum Gleichgewichte beliebig vieler einen Punkt angreifenden Kräfte, deren Richtungen in dieselbe Ebene fallen, ist erforderlich und hinreichend, daß die algebraischen Summen der Componenten nach den Axen einzeln gleich Null sind."

§. 16.

Wird ein Punkt von drei Kräften angegriffen, deren Richtungen auf einander senkrecht stehen (Fig. 5), so ist die Diagonale des aus den 3 Kräften als anstoßenden Kanten construirten Parallelepipedons die Resultante dieser Kräfte. Wirken nemlich die drei Kräfte P_1 P_2 P_3 auf den Punkt O, so bestimmt man zuerst die Resultante S zwischen P_1 und P_2, sodann die Resultante zwischen S und P_3 und ist dann die letztere die gesuchte Resultirende der drei Kräfte.

Aus der Gleichung

$$R^2 = S^2 + P_3{}^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2 + P_3{}^2 \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

ergibt sich die Größe der Resultante,

Aus einer der drei Gleichungen

$$P_1 = R\cos\alpha_1;\ P_2 = R\cos\alpha_2;\ P_3 = R\cos\alpha_3 \ldots\ldots \quad (2$$

die Richtung derselben, wobei α_1 α_2 α_3 die Winkel bezeichnen, welche die Resultante mit den Kräften P_1 P_2 P_3 beziehungsweise bilden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Quadrirt man die letzten drei Gleichungen und verbindet sie mit den vorigen Gleichungen, so ergibt sich

$$R^2 = R^2(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3)$$

$$1 = \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 \quad \ldots\ldots \quad (3$$

Aus Gleichung (3) folgt, daß wenn man zwei der Winkel beliebig angenommen hat, der dritte der Gleichung (3) genügen muß.

§. 17.

Sind der Kräfte, die einen Punkt angreifen, beliebig viele, und deren Richtungen beliebige, so zerlegt man analog dem Falle, in dem die Richtungen in derselben Ebene liegen, jede der gegebenen Kräfte in 3 Componenten, deren Richtungen mit drei durch den Angriffspunkt gehenden, gegenseitig zu einander senkrecht stehenden Geraden oder Axen beziehungsweise zusammenfallen, und auch in diesem Falle gelangt man zum Schlusse: „Zum Gleichgewicht beliebig vieler, beliebig gerichteter Kräfte im Raume, die einen Punkt angreifen, ist es erforderlich und hinreichend, daß die algebraischen Summen ihrer Componenten nach den drei Axen einzeln verschwinden."

Vom Gleichgewichte eines nicht mehr vollkommen freien Punktes.

§. 18.

Ist ein materieller Punkt nicht mehr vollkommen frei, so kann es der Bedingungen, denen er unterworfen ist, sehr verschiedene geben. Von diesen möge nur ein Fall hervorgehoben werden, der einen Maßstab für die Behandlung aller übrigen Fälle bieten wird. Es sei ein materieller Punkt genöthigt, auf einer krummen Oberfläche zu bleiben, so daß er sich nur innerhalb dieser bewegen kann.

§. 19.

Wird ein Punkt, welcher auf einer krummen Oberfläche zu verbleiben hat, von beliebig vielen Kräften angegriffen, so ist es zum Gleichgewichte desselben nicht nothwendig, daß die Resultante verschwindet, sondern erforderlich und hinreichend, daß die Resultante eine zur Oberfläche senkrechte Richtung hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist nemlich ein Punkt O (Fig. 6) unter dem Einfluß einer Kraft P_1, deren Richtung zur Oberfläche im Punkte O also zu dessen Tangentialebene senkrecht ist, und AB eine der vielen Tangenten, die im Punkte O an die Oberfläche gezogen werden können, so ist wegen der symmetrischen Lage der Kraft P in Bezug auf OA und OB kein Grund vorhanden, weßhalb der Punkt O sich lieber in der Richtung von OA als von OB bewegen sollte. Da der Punkt sich nicht nach beiden Richtungen zugleich bewegen kann, ferner dasselbe gilt bezüglich jeder andern Tangente im Punkte O, und endlich diese Tangenten die Richtungen angeben, in welchen der Punkt von der einen Stelle zur nächst gelegenen gelangen kann, so findet eine Bewegung des Punktes O überhaupt nicht statt. Da aber durch den Widerstand der Oberfläche die zu ihr senkrecht gerichtete Kraft P aufgehoben wird, oder mit andern Worten der Widerstand ihr das Gleichgewicht hält, so läßt sich dieser einer Kraft gleichsetzen, welcher der Kraft P gleich und entgegengesetzt ist.

Wird nun ein Punkt O, der sich nur auf einer Oberfläche bewegen kann, von den Kräften P_1, P_2 .... P_n angegriffen, so kann man von der Oberfläche ganz absehen und ihn unter der Voraussetzung als vollkommen frei betrachten, daß man zu den gegebenen Kräften eine neue der Größe nach noch unbestimmte Kraft N einführt, welche im angegriffenen Punkte zur Oberfläche senkrecht steht. Legt man sodann durch den Punkt O drei zu einander senkrechte Axen, OX, OY, OZ, bezeichnet mit ΣX, ΣY, ΣZ die nach diesen Axen wirkenden Componenten der gegebenen Kräfte, mit λ, μ, ν die Winkel der Kraft N beziehungsweise mit der X, Y und Z Axe, so wirken auf den nun als vollkommen frei zu betrachtenden Punkt

a) ΣX, ΣY, ΣZ

b) $N \cos \lambda$, $N \cos \mu$, $N \cos \nu$

und man erhält als Gleichgewichtsbedingungen

$$\Sigma X + N \cos \lambda = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$\Sigma Y + N \cos \mu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2$$

$$\Sigma Z + N \cos \nu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3$$

oder

$$-N = \frac{\Sigma X}{\cos \lambda} = \frac{\Sigma Y}{\cos \mu} = \frac{\Sigma Z}{\cos \nu} \quad \ldots \quad (4$$

Daraus folgt, daß im Falle des Gleichgewichtes die Summen der Componenten der gegebenen Kräfte nach den einzelnen Axen gleich und entgegengesetzt den Componenten des Widerstandes nach den nem-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

lichen Axen, oder proportional sein müssen den Cosinussen der Winkel, welche die Normalkraft im angegriffenen Punkte mit den positiven Axen bilden. Die Resultante muß demnach, weil gleich und entgegengesetzt der Normalkraft, senkrecht stehen zur Oberfläche.

Vom Gleichgewichte der Kräfte, welche auf ein starres Punktesystem wirken.

§. 20.

Wenn zwei Kräfte P_1 und P_2 an den Endpunkten einer starren Geraden AB unter einem beliebigen Winkel wirken (Fig. 7), und die Richtungen derselben mit der Geraden in die nemliche Ebene fallen, so verlegt man die Angriffspunkte A und B der Kräfte P_1 und P_2 in den Punkt O, den Schnittpunkt ihrer Richtungen, setzt die jetzt im Punkte O gemeinschaftlich angreifenden Kräfte zu einer Resultante zusammen und verlegt deren Angriffspunkt in den Punkt C, den Schnittpunkt ihrer Richtung mit der Geraden AB. Eine in diesem Punkte C angreifende Kraft R_1, welche der Kraft R gleich ist aber entgegengesetzt wirkt, hält dann den beiden Kräften das Gleichgewicht, und nennt man den Punkt C in Folge dessen den Stützpunkt.

Als Gleichgewichtsbedingung erhält man

$$P_1 : P_2 = \sin\beta : \sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

oder da $\sin\beta = \frac{CE}{OC}$ und $\sin\alpha = \frac{CD}{OC}$

$$P_1 : P_2 = CE : CD$$

mithin $$P_1 \,.\, CD = P_2 \,.\, CE \quad \ldots\ldots \quad (2$$

d. h. Gleichgewicht findet statt, wenn die Produkte der Kräfte in die Entfernung ihrer Richtungen vom Stützpunkt einander gleich sind. Da man das Produkt einer Kraft in die Entfernung ihrer Richtung von einem Punkt das Moment der Kraft in Bezug auf diesen Punkt nennt, und die Gleichheit der beiden Produkte $P_1 \,.\, CD$ und $P_2 \,.\, CE$ die Bedingung enthält, unter welchen eine Bewegung der Geraden AB nicht eintreten kann, so nennt man diese Produkte statische Momente, und läßt sich nun obige Gleichgewichtsbedingung in der Form geben: „Im Falle des Gleichgewichtes sind die statischen Momente der Kräfte einander gleich.“

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wie man auf geometrischem Wege den Angriffspunkt, die Größe und Richtung der Resultante erhalten hat, so läßt sich auch mit Hülfe der Rechnung die Lage des Stützpunktes und die Resultante nach Größe und Richtung bestimmen.

Bezeichnet man den Winkel der beiden Kräfte mit $P_1\ P_2$, den Winkel ihrer Richtungen mit der Geraden AB beziehungsweise mit P_1 und P_2, AB mit a und AC mit x, so geht die Gleichgewichtsbedingung

$$P_1\ EC = P_2\ DC \text{ über in}$$

$$P_1\, x \sin P_1 = P_2\,(a - x) \sin P_2 \quad \ldots\ldots \quad (3$$

also

$$x = \frac{a\, P_2 \sin P_2}{P_1 \sin P_1 + P_2 \sin P_2}$$

und ist durch Gl. (3) der Punkt C vollkommen bestimmt.

Die Größe der Resultante erhält man aus der Gleichung

$$R = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2\, P_1\, P_2 \cos P_1\, P_2} \quad \ldots \quad (4$$

und ihre Richtung aus der Gleichung

$$P_1{}^2 = P_2{}^2 + R^2 - 2\, P_2\, R \cos P_2\, R \quad \ldots\ldots \quad (5$$

oder

$$\cos P_2\, R = \frac{P_2{}^2 + R^2 - P_1{}^2}{2\, P_2\, R}.$$

Letztere Gleichung läßt sich auch auf die Form

$$\cos P_2\, R = \frac{P_2 + P_1 \cos P_1\, P_2}{R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6$$

bringen, wenn man in ihr für R^2 den Werth aus Gl. (4) einsetzt.

Liegen die Richtungen der beiden Kräfte P_1 und P_2 mit der Geraden AB nicht in einer und derselben Ebene, so lassen sie sich nicht zu einer Resultante vereinigen.

§. 21.

Wenn die beiden Kräfte P_1 und P_2, welche die starre Gerade AB angreifen, parallel sind und im gleichen Sinne wirken (Fig. 8), so kann man an den Punkten A und B zwei gleiche aber entgegengesetzt wirkende Kräfte Q_1 und Q_2 anbringen, deren Richtungen mit der Geraden AB zusammenfallen, ohne daß die Wirkung der Kräfte P_1 und P_2 eine Aenderung erleidet. Setzt man die Kräfte P_1 und Q_1, P_2 und Q_2 beziehungsweise zu den Resultanten S_1 und S_2 zusammen, verlegt deren Angriffspunkt an den

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Punkt O, den Schnittpunkt ihrer Richtungen, zerlegt S_1 und S_2 in je zwei Componenten T_1 und R_1, T_2 und R_2 so, daß $T_1 = T_2 = Q_1$, und T_1 sowohl als $T_2 \parallel AB$ wird, so ist, da T_1 und T_2 sich das Gleichgewicht halten, die Wirkung der Kräfte P_1 und P_2 auf die der Kräfte R_1 und R_2 zurückgeführt. Da $R_1 = P_1$ und $R_2 = P_2$ ist, und ihre Richtungen in dieselbe Gerade $OC \parallel P_1$ fallen, so ist eine Kraft $R = R_1 + R_2 = P_1 + P_2$ die Resultante der Kräfte P_1 und P_2, und diese schneidet die Gerade AB im Punkte C so, daß die Segmente sich umgekehrt verhalten, wie die anliegenden Kräfte. Letzteres ergibt sich aus der Aehnlichkeit der $\Delta\Delta$ $AS_1 Q_1$ und AOC, $BS_2 Q_2$ und BOC.

Zu den gleichen Resultaten wäre man gekommen, wenn man in der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos P_1 P_2}$$

den Winkel $P_1 P_2 = 0$ gesetzt, und den für R dadurch erhaltenen Werth $P_1 + P_2$ in die Gleichung

$$\cos P_2 R = \frac{P_2^2 + R^2 - P_1^2}{2 P_2 R}$$

für R eingeführt hätte.

Wie man die Wirkung zweier Parallelkräfte auf die einer einzigen Kraft zurückgeführt hat, so läßt sich auch eine einzige Kraft in zwei im gleichen Sinne parallele Kräfte zerlegen.

Soll nemlich die Kraft R in die beiden Parallelkräfte P_1 und P_2 zerlegt werden, so folgt aus

$$P_1 : P_2 = CB : CA$$
$$P_1 + P_2 : P_1 : P_2 = CB + CA : CB : CA$$
$$R : P_1 : P_2 = AB : CB : CA$$

und sind durch die Gleichungen

$$P_1 = R \cdot \frac{CB}{AB} \text{ und } P_2 = R \cdot \frac{CA}{AB}$$

die Componenten P_1 und P_2 vollständig bestimmt.

§. 22.

Sind die Kräfte P_1 und P_2, welche in den Punkten A und B der starren Geraden AB wirken, antiparallel (Fig. 9),

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

d. h. wirken die Kräfte in entgegengesetzter Richtung, und ist $P_1 > P_2$, so läßt sich P_1 in zwei im gleichen Sinne parallel wirkende Componenten Q_1 und Q_2 zerlegen, so daß Q_2 gleich und entgegengesetzt der Kraft P_2 im Punkte B wirkt, während $Q_1 = P_1 - P_2$ den aus der Gleichung

$$Q_1 : Q_2 = AB : CA$$

sich ergebenden Punkt C zum Angriffspunkt hat. Es ist somit, da P_2 und Q_2 sich das Gleichgewicht halten, Q_1 die Resultante der Kräfte P_1 und P_2 und wirkt dieselbe parallel den gegebenen Kräften im Sinne der größeren Kraft P_1.

Da $$AC = AB \cdot \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{AB \,.\, Q_2}{P_1 - P_2}$$

so folgt, daß AC einen endlichen Werth hat, solange $P_1 \gtrless P_2$ ist, daß es also in diesen Fällen eine Resultante gibt. Wird jedoch $P_1 = P_2$ so ist $AC = \infty$, und ist eine Resultante nicht möglich.

§. 23.

Wirken beliebig viele Parallelkräfte $P_1\, P_2 \ldots P_n$ im beliebigen Sinne auf die Punkte $A_1\, A_2 \ldots . A_n$ eines starren Punktesystems, so vereinigt man sowohl die in dem einen wie andern Sinne wirkenden Kräfte zu einer Mittelkraft, und ist die Endresultante gleich der Differenz der gesuchten Mittelkräfte. Um den Angriffspunkt dieser Endresultante, welchen man gewöhnlich den Mittelpunkt der Parallelkräfte nennt, zu erhalten, sucht man zuerst die Resultante zweier Kräfte, dann die Mittelkraft dieser Resultante und einer dritten Kraft u. s. w. Sollten die Kräfte nicht vertikal wirken, sondern in einer beliebigen Richtung, so ist es gerade so, als ob die Richtungen sämmtlicher Kräfte um den gleichen Winkel gedreht worden wären, und ist demnach die Lage des Angriffspunktes der Endresultante von der Lage der Kräfte gegen das Punktesystem unabhängig.

§. 24.

Wenn Parallelkräfte eine Resultante haben, so ist das Moment der Resultante in Bezug auf irgend eine Ebene (das Produkt der Kraft in die Entfernung ihres Angriffspunktes von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Ebene) gleich der algebraischen Summe der Momente ihrer Componenten in Bezug auf die nemliche Ebene (Fig. 10).

Sind P_1 und P_2 zwei Parallelkräfte, welche in den Punkten A und B im gleichen Sinne auf die starre Gerade AB wirken, ist R die Resultante derselben, O ihr Angriffspunkt, MN die gegebene Ebene, so sind die Momente von P_1, P_2 und R in Bezug auf diese Ebene beziehungsweise $P_1 . AC$, $P_2 . BD$ und $R . OQ$, während nach den Bedingungen des Gleichgewichtes

$$R = P_1 + P_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$P_1 . AO = P_2 . BO \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Zieht man von O aus $OH_1 \perp AC$ und von B aus $BH_2 \perp OQ$, so folgt aus der Aehnlichkeit der $\triangle\triangle\, AOH_1$ und BOH_2

$$AO : AH_1 = OB : OH_2$$

$$AO : (AC - OQ) = OB : (OQ - BD) \quad \ldots \quad (3$$

Verbindet man letztere Gleichung mit der Gleichung (2), so erhält man

$$P_1 (AC - OQ) = P_2 (OQ - BD)$$

$$(P_1 + P_2)\, OQ = P_1 . AC + P_2 . BD$$

$$R . OQ = P_1 . AC + P_2 . BD \quad \ldots \quad (4$$

Wirken die Kräfte P_1 und P_2 im entgegengesetzten Sinne, so ist

$$R . OQ = P_1 . AC - P_2 . BD \quad \ldots \quad (5$$

Von den Bedingungen des Gleichgewichtes eines starren Punktesystems unter dem alleinigen Einflusse der Schwerkraft.

§. 25.

Die Kraft, mit der erfahrungsgemäß jeder Körper sich selbst überlassen in vertikaler Richtung auf die Erdoberfläche zu fallen sucht, nennt man die Schwere oder die Schwerkraft. Betrachtet man jeden Körper als ein Aggregat materieller Punkte, so kann man die Schwerkraft als die Resultante von Kräften ansehen, welche an den einzelnen Punkten vertikal abwärts wirken. Die Richtungen dieser Kräfte laufen wegen der fast kugelförmigen Gestalt der Erde im Erdmittelpunkt zusammen, können jedoch, so lange die Dimensionen der Körper verschwindend klein sind im Verhältniß zu ihrer Entfernung vom Erdmittelpunkte, als parallel gelten. Die Größe der Resultante dieser Kräfte

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nennt man das Gewicht des Körpers oder seine Schwere; ihren Angriffspunkt, in welchem man nach dem Vorausgehenden das Gewicht des Körpers sich vereinigt denken kann, den Schwerpunkt des Körpers. Jede gerade Linie, welche durch den Schwerpunkt geht, heißt Schwerlinie, die Resultante zum Unterschiede von diesen die vertikale Schwerlinie.

Da die Schwere oder das Gewicht des Körpers sich mit dem Beobachtungsorte ändert, und zwar von den Polen gegen den Aequator hin nach dem Quadrate des Sinus der geographischen Breite abnimmt, so wird wohl die Größe der Resultante geändert, nicht aber die Lage des Schwerpunktes.

Aus dem Bisherigen ist ersichtlich, daß die in den früheren Paragraphen gefundenen Bedingungen des Gleichgewichtes auch auf schwere, feste Körper ihre Anwendung finden, wenn man zu den gegebenen Kräften eine neue Kraft einführt, welche dem Gewichte des Körpers gleich ist, den Schwerpunkt zum Angriffspunkt hat und vertikal wirkt.

§. 26.

Der Schwerpunkt eines Körpers kann durch Versuche oder durch Rechnung bestimmt werden. Im ersteren Falle hängt man den Körper mittelst eines möglichst feinen Fadens auf. Ist derselbe in Ruhe, so befindet sich der Schwerpunkt auf der Verlängerung des Fadens, weil Gleichgewicht nicht bestehen könnte, wenn nicht eine der Schwere gleiche und entgegengesetzte Kraft vorhanden wäre, nemlich der Widerstand des gespannten Fadens. Befestigt man den Faden an einem andern Punkte des Körpers, so liegt ebenfalls, sobald der Körper in Ruhe ist, der Schwerpunkt auf der Verlängerung des Fadens, und ist der Schnittpunkt der Verlängerung des Fadens in der einen und andern Lage des Körpers der gesuchte Schwerpunkt. Diesen Weg schlägt man ein bei Bestimmung des Schwerpunktes heterogener Körper, d. i. Körper, in denen gleichen Raumtheilen nicht gleich viel materielle Punkte entsprechen, und solcher homogener Körper, bei welchen die Bestimmung desselben aus der Figur zu großen Weitläufigkeiten führen würde.

Bei regulären Figuren ist natürlicher Weise der Mittelpunkt auch der Schwerpunkt, da sich zu jedem Punkte auf der einen Seite des-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

selben ein Punkt auf der andern Seite in gleichem Abstande vorfindet, derselbe somit symmetrisch liegt in Bezug auf alle übrigen Punkte. Was das Aufsuchen des Schwerpunktes von Linien und Flächen anlangt, so haben diese Aufgaben nur in sofern einen Sinn, als man bei den ersteren zwei, bei den letzteren eine Dimension als verschwindend klein gegen die gegebenen betrachtet, da mathematische Linien und Flächen, weil nichts Körperliches, kein Gewicht haben.

§. 27.

Der Schwerpunkt eines materiellen, homogenen Kreisbogens liegt auf dem Radius, welcher den Bogen halbirt, und ist sein Abstand vom Kreismittelpunkte die vierte geometrische Proportionale zum Bogen, zur zugehörigen Sehne und zum Radius (Fig. 11).

Auflösung: Der Schwerpunkt liegt jedenfalls auf dem Radius, welcher den Bogen halbirt, weil in Bezug auf ihn die einzelnen Theilchen symmetrisch liegen.

Um die Lage des Schwerpunktes näher zu bestimmen, zerlegt man den Bogen BC in n gleiche Theile, und kann, wenn n möglichst groß ist, jeden dieser Theile ohne besonderen Fehler als eine gerade Linie betrachten. Ist ab eines dieser kleinen Bogenelemente, i dessen Mittelpunkt, h_1 die Entfernung desselben von einer durch den Kreismittelpunkt O zur Sehne BC parallel gezogenen Geraden MN, so ist, da man das Gewicht p dieses Bogenelementes in dem Mittelpunkt i vereinigt denken kann das Moment von ab in Bezug auf MN gleich $p \,.\, h_1$. Sind $h_2\, h_3 \ldots h_n$ die Entfernung der Mittelpunkte der übrigen Bogenelemente von MN, so erhält man in $p \,.\, h_1$, $p \,.\, h_2 \ldots p \,.\, h_n$ die Momente derselben in Bezug auf MN und in $p(h_1 + h_2 + \ldots h_n)$ das Moment des ganzen Kreisbogens. Anderseits kann man aber das Gesammtgewicht des Kreisbogens als die Resultante der Gewichte sämmtlicher Bogenelemente betrachten, so daß, wenn x die Entfernung des gesuchten Schwerpunktes von MN, man auch in $n \,.\, p \,.\, x$ das Moment des Kreisbogens in Bezug auf MN erhält. Aus der Gleichung

$$n \,.\, p \,.\, x = p(h_1 + h_2 + \ldots + h_n) \quad \ldots . \quad (1$$

ergibt sich $$x = \frac{h_1 + h_2 + \ldots h_n}{n}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zieht man nun $a\alpha_1$ und $b\beta_1 \perp BC$, $bc \perp a\alpha$, und verbindet i mit O, so folgt aus der Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$ hOi und abc.

$$ih : iO = bc : ab$$
$$h_1 : r = \alpha_1\beta_1 : ab$$
$$h_1 = \frac{\alpha_1\beta_1}{ab} \cdot r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Bezeichnet man mit $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$ .... $\alpha_n\beta_n$ die Projektionen der übrigen Bogenelemente auf BC, so wird

$$h_2 = \frac{\alpha_2\beta_2}{ab} \cdot r;\ h_3 = \frac{\alpha_3\beta_3}{ab} \cdot r;\ \text{u. s. w.} \ldots \quad (3$$

und

$$x = \frac{r(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots \alpha_n\beta_n)}{n \,.\, ab} \ldots \quad (4$$
$$= \frac{r \,.\, BC}{\text{arc } BC}.$$

§. 28.

Der Schwerpunkt eines Dreieckes liegt auf der Geraden, welche eine Ecke mit dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seite verbindet, und zwar um zwei Dritttheile derselben von der Ecke entfernt (Fig. 12).

Theilt man das Dreieck ABC durch Parallele zur Basis AB in n Lamellen oder Streifen, so kann man, je größer n ist, um so mehr diese Streifen als materielle, gerade Linien betrachten. Der Schwerpunkt einer jeden dieser Linien ist ihr Mittelpunkt, und liegen sämmtliche Schwerpunkte auf der Mittellinie CD, welche die Halbirungspunkte der Parallelen verbindet. CD ist deßhalb eine Schwerlinie. Ebenso ist die Mittellinie AE eine Schwerlinie, und S, der Schnittpunkt der beiden Schwerlinien CD und AE, der gesuchte Schwerpunkt.

Verbindet man D mit E, so ist $DE \parallel AC$ und folgt aus der Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$ ASC und DSE

$$DS : CS = DE : AC$$
$$= 1 : 2$$
$$DS : (CS + DS) = 1 : 3$$
$$DS : \quad CD \quad = 1 : 3$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 29.

Soll der Schwerpunkt eines beliebigen Vieleckes bestimmt werden, so zerlege man dasselbe in Dreiecke, suche die Schwerpunkte derselben und zu den in diesen Punkten parallel wirkenden Schwerkräften, welche der Größe nach proportional sind den Flächeninhalten der Dreiecke, die Resultante. Der Angriffspunkt der Resultante ist der gesuchte Schwerpunkt.

§. 30.

Der Schwerpunkt eines Kreissektors (Fig. 13), dessen Halbmesser r, dessen Bogen b und dessen Sehne s ist, liegt auf der Halbirungslinie des zugehörigen Centriwinkels und hat vom Mittelpunkt eine Entfernung

$$x = \frac{2}{3} r \cdot \frac{s}{b}.$$

Theilt man den Kreissektor in n unter sich gleiche Sektoren, so kann man diese, wenn n groß genug ist, als Dreiecke betrachten. Die Schwerpunkte dieser Dreiecke liegen auf einem Kreisbogen $b_1 = \frac{2}{3} b$, dessen Radius $r_1 = \frac{2}{3} r$ und dessen Sehne $s_1 = \frac{2}{3} s$ ist. Der Schwerpunkt S dieses Bogens ist zugleich der Schwerpunkt des Sektors, und man erhält seine Entfernung x von dem Mittelpunkt C aus der Gleichung

$$x = \frac{r_1 \cdot s_1}{b_1} = \frac{2}{3} r \cdot \frac{s}{b}.$$

§. 31.

Der Schwerpunkt einer Kugelhaube (Calotte) oder Kugelzone liegt in der Mitte ihrer Axe. Theilt man die krumme Oberfläche durch n zur kreisförmigen Basis parallele Ebenen in möglichst viele schmale Streifen von gleicher Höhe, so haben diese gleiche Oberfläche. Die Schwerpunkte dieser Streifen, welche man als Cylindermäntel betrachten kann, liegen auf der im Mittelpunkte der Basis errichteten Normalen oder Axe der Kugelhaube, und fällt demnach der Schwerpunkt der Kugelhaube oder Kugelzone mit dem Schwerpunkte der Höhe zusammen. Weil sämmtliche Streifen gleichen Inhalt oder gleiches Gewicht haben, so ist die Axe eine homogene materielle Linie, und der Mittelpunkt derselben auch ihr Schwerpunkt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 32.

Der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide liegt in der Geraden, welche die Spitze der Pyramide mit dem Schwerpunkte der gegenüberliegenden Grundfläche verbindet, und zwar um $^3/_4$ dieser Geraden von der Spitze entfernt (Fig. 14).

Ist gegeben die dreiseitige Pyramide D . ABC, so geht, wenn O der Schwerpunkt der Grundfläche ABC, DO durch die Schwerpunkte aller mit dem Δ ABC parallelen materiellen Dreiecke, aus denen man sich die Pyramide zusammengesetzt denken kann, und ist demnach DO eine Schwerlinie; ebenso ist AF, wenn F der Schwerpunkt der Seitenfläche BCD, eine Schwerlinie. DO und AF liegen aber in einer und derselben Ebene ADE, und ist S, der Schnittpunkt beider, der gesuchte Schwerpunkt. Da OF $\parallel$ AD, so ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ASD und OSF, daß $OS = \frac{1}{3} DS = \frac{1}{4} DO$.

§. 33.

Um den Schwerpunkt einer vielseitigen Pyramide zu finden, denkt man sich dieselbe als ein Aggregat von Flächen, welche parallel sind zur Grundfläche. Die Schwerpunkte aller dieser parallelen Flächen liegen auf der Geraden, welche die Spitze der Pyramide mit dem Schwerpunkte der Grundfläche verbindet, also auch der Schwerpunkt der Pyramide selbst. Anderseits kann man die Pyramide in dreiseitige Pyramiden zerlegen, so daß ihre Grundflächen mit der Basis der vielseitigen Pyramide zusammenfallen. Die Schwerpunkte dieser dreiseitigen Pyramiden haben aber dieselbe Entfernung von der Basis und liegen deßhalb in einer zur Basis oder vielseitigen Pyramide parallelen Ebene, welche um den vierten Theil der Höhe von der Grundfläche entfernt ist. Der Schnittpunkt der ersten Schwerlinie mit dieser Ebene ist der Schwerpunkt der Pyramide. Dasselbe Resultat erhält man auch bei der Bestimmung des Schwerpunktes eines Kegels, da man den Kegel als eine Pyramide betrachten kann, deren Basis ein Polygon von einer unbegrenzten Seitenanzahl ist.

§. 34.

Der Schwerpunkt eines Kugelsektors (Fig. 13), welcher begrenzt ist von einem Kegelmantel mit der Seite r und einer Kugel-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

haube mit der Höhe h, hat vom Kugelmittelpunkte eine Entfernung $x = \frac{3}{8}(2r - h)$.

Man zerlegt den Sektor ABCO in n gleiche Kegel, deren gemeinschaftliche Spitze O ist. Die Schwerpunkte dieser Kegel liegen auf einer Kugelhaube $A_1 B_1 C_1$ mit dem Halbmesser $\frac{3}{4}r$, und ist der Schwerpunkt dieser Kugelhaube $A_1 B_1 C_1$ der Schwerpunkt des Sektors. Ist nun S der gesuchte Schwerpunkt, so ist, da $\frac{3}{4}h$ die Höhe der Kugelhaube, $B_1 S = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}h\right)$ und

$$x = B_1 O - B_1 S = \frac{3}{4}r - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}h\right)$$

$$= \frac{3}{4}r - \frac{3}{8}h$$

$$= \frac{3}{8}(2r - h).$$

§. 35.

Ein Körper befindet sich in Ruhe oder im Gleichgewicht, wenn sein Schwerpunkt unterstützt ist, oder wenn in seinem Schwerpunkte eine Kraft wirkt gleich und entgegengesetzt der Resultante der Schwerkräfte.

Je nach der Lage des Schwerpunktes unterscheidet man ein stabiles, labiles oder indifferentes Gleichgewicht.

Das Gleichgewicht ist ein stabiles

a) wenn der Schwerpunkt unter dem Aufhängepunkte liegt, in welchem Falle der Körper aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, immer wieder dahin zurückzukehren sucht;

b) wenn der Körper auf einer horizontalen Fläche ruht, so daß die vertikale Schwerlinie noch die Stützfläche trifft, da in diesem Falle der Körper einer Aenderung seiner Lage einen großen Widerstand entgegensetzt.

Das Gleichgewicht ist ein labiles oder unsicheres, wenn der Drehpunkt unter dem Schwerpunkte sich befindet, oder wenn der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Körper nur in einem einzigen Punkte seiner vertikalen Schwerlinie unterstützt ist, da in beiden Fällen die geringste Veränderung der Lage eine Bewegung, beziehungsweise ein Umstürzen des Körpers nach sich zieht.

Das Gleichgewicht ist indifferent, wenn der Körper im Schwerpunkte unterstützt wird, also Drehpunkt und Schwerpunkt zusammenfallen. Der Körper wird in jeder Lage bleiben, in welche er versetzt wird.

§. 36.

Die Fähigkeit eines Körpers, vermöge seines Gewichtes zu stehen, oder den Widerstand, den ein Körper einer Aenderung seiner Lage entgegensetzt, nennt man Stabilität oder Standfähigkeit des Körpers.

Sucht eine Kraft P einen Körper vom Gewichte Q um eine seiner Kanten umzudrehen, so wird der Körper vermöge seines Gewichtes dieser Drehung einen Widerstand W entgegensetzen, und dieser Widerstand W ist durch $Q . x$, das statische Moment des Gewichtes Q oder der Schwerkraft in Bezug auf die Kante, ausgedrückt, worin x die Entfernung der Richtung der Schwerkraft von der Umdrehungskante bezeichnet. Aus $W = Q . x$ ergibt sich, daß die Stabilität eines Körpers um so größer ist, je größer das Gewicht und die Basis des Körpers ist.

Anwendung der Statik auf einfache Maschinen.

§. 37.

Eine Vorrichtung, mittelst deren es möglich wird, eine gewisse Arbeit zu leisten, oder Bewegungen zu bestimmten Zwecken hervorzubringen und zwar mit geringerem Kraftaufwand als ohne dieselbe, nennt man eine Maschine.

Der Widerstand, welcher mit Hilfe einer Maschine überwunden werden soll, heißt Last, die denselben überwindende Kraft vorzugsweise Kraft.

Eine Maschine, deren Bestandtheile selbst nicht wieder als Maschinen betrachtet werden können, heißt einfach, außerdem zusammengesetzt.

Zu den einfachen Maschinen (Elementarmaschinen) rechnet

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

man 1) den Hebel (Wage), 2) die Rolle, 3) das Wellrad, 4) die schiefe Ebene, 5) die Schraube, 6) den Keil.

Von diesen lassen sich aber die Wirkungen der Rolle und des Wellrades auf die des Hebels, die Wirkungen der Schraube und des Keiles auf die der schiefen Ebene zurückführen, so daß strenge genommen es nur zwei einfache Maschinen gibt, den Hebel und die schiefe Ebene.

Vom Hebel.

§. 38.

Eine jede unbiegsame Stange, welche in einem ihrer Punkte unterstützt ist, nennt man Hebel. Denkt man sich die Stange gewichtslos, so heißt sie mathematischer, außerdem physischer Hebel. Die beiden Theile des Hebels vom Angriffspunkte der Kraft und Last bis zum Stützpunkte heißen Hebelarme. Liegen die Angriffspunkte auf verschiedener Seite des Stützpunktes, so nennt man den Hebel zweiarmig, liegen sie auf der nemlichen Seite, einarmig, und haben die Hebelarme verschiedene Richtung, Winkelhebel.

Bei jedem mathematischen Hebel müssen nach §. 21 im Falle des Gleichgewichtes die statischen Momente gleich sein.

Wirken an einem mathematischen Hebel drei Kräfte P, P_1, P_2 so kann man, wenn P den Hebel nach der einen, P_1 und P_2 nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen sucht, P in zwei parallele auf den Angriffspunkt der Kraft P wirkende Kräfte p_1 und p_2 zerlegen, und es muß, da jede Kraft zu ihrer Geltung kommt, im Falle des Gleichgewichtes

$$p_1 x = P_1 x_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$p_2 x = P_2 x_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

also $$(p_1 + p_2)\, x = P x = P_1 x_1 + P_2 x_2 \quad \ldots \quad (3$$

wenn x x_1 x_2 die senkrechten Entfernungen des Stützpunktes sind beziehungsweise von den Richtungen der Kräfte P, P_1, P_2. Wiederholt man diese Schlüsse, so ergibt sich für das Gleichgewicht beliebig vieler an einem Hebel wirkender Kräfte der allgemein giltige Satz: „Die Summe der statischen Momente der Kräfte an dem einen Hebelarme ist gleich der Summe der statischen Momente der Kräfte an dem andern.“

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wirken einige von den Kräften in entgegengesetzter Richtung, so sind die statischen Momente negativ zu nehmen.

Auf Anwendung dieses Satzes beruht das Gesetz des Gleichgewichtes von Kräften, welche an einem physischen Hebel wirken, den man als einen mathematischen betrachten kann, sobald man in seinem Schwerpunkte eine vertikal abwärts wirkende Kraft anbringt, welche gleich ist dem Gewichte des Hebels.

§. 39.

Eine der wichtigsten Anwendungen des Hebels ist die Wage, welche dazu dient, das Gewicht der Körper durch Gegengewicht zu bestimmen. Es gibt verschiedene Arten von Wagen, je nachdem dieselbe ein gleicharmiger oder ungleicharmiger Hebel, ein Winkelhebel oder ein zusammengesetzter Hebel, d. i. eine Verbindung mehrerer Hebel ist. Von diesen mögen hier als die im Gebrauche am öftesten vorkommenden angeführt werden die gemeine oder Krämerwage, die Schnellwage, die Zeigerwage und die Brücken- oder Kunstwage.

Die gemeine oder Krämerwage.

§. 40.

Die gemeine oder Krämerwage, deren man sich zu genauen Abwägungen zumeist bedient, ist ein gleicharmiger Hebel, Wagebalken genannt, an dessen Enden gewöhnlich Schalen hängen zur Aufnahme des zu wägenden Körpers und des Gewichtes, mit dem das Gewicht des Körpers verglichen werden soll. Der Wagebalken wird mittelst einer Scheere getragen, in der er mit Hilfe einer festen, horizontalen Axe aufliegt, und um welch' letztere derselbe drehbar ist. In der Mitte des Wagebalkens befindet sich eine zu demselben senkrechte Nadel, die sogenannte Zunge, und liegt der Wagebalken vollständig horizontal, sobald die Zunge sich genau in der Mitte der Scheere befindet (in die Scheere einspielt).

Die Bedingungen, welche man an eine gute Wage stellt, sind 1) Richtigkeit, 2) Empfindlichkeit.

Soll eine Wage richtig sein, d. h. genaue Resultate geben, so müssen beide Wagschalen, sowie beide Hebelarme gleich

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schwer und letztere zudem gleich lang sein. Um dieses zu prüfen, werden beide Schalen gleich belastet, dann die Schalen wie die Gewichte gewechselt, und in beiden Fällen muß der Wagebalken eine horizontale Lage einnehmen, also im Gleichgewichte sein. Soll aber der Wagebalken horizontal liegen, so muß der Schwerpunkt der Wage vertikal unter dem Aufhängepunkte liegen.

Eine gute Wage muß empfindlich sein, d. h. sie muß auch das kleinste Uebergewicht anzeigen. Besteht nemlich ein Unterschied zwischen Gewicht und Last, so bildet die Zunge mit ihrer Richtung im Gleichgewichtszustande einen Winkel, den sogenannten Ausschlagswinkel, und aus der Größe dieses Winkels bei einem bestimmten Uebergewicht läßt sich ein Schluß ziehen auf die Güte oder Empfindlichkeit der Wage.

Gesetzt, der in horizontaler Lage sich befindliche Wagebalken ab (Fig. 15) sei durch die Zulage des Gewichtes p in der rechten Schale in die Lage von $a_1 b_1$ gekommen, c sei der Drehpunkt, g der Schwerpunkt, R das Gewicht des Wagebalkens, so ist die Bedingung des Gleichgewichtes

$$P \,.\, cm + R \,.\, cd = (P + p)\, cn \;\ldots\ldots \quad (1$$

$$R \,.\, cd = p \,.\, cn$$

oder da $cd = cs \sin\alpha$ und $cn = bc \cos\alpha$, wenn α der Ausschlagswinkel

$$R \,.\, cs \sin\alpha = p \,.\, bc \cos\alpha \;\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p \,.\, bc}{R \,.\, cs} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Die Empfindlichkeit einer gleicharmigen Wage ist also um so größer

1) je länger die Hebelarme sind,
2) je leichter der Wagebalken ist,
3) je näher der Schwerpunkt dem Aufhängepunkte liegt.

Die Schnellwage.

§. 41.

Die Schnellwage (Fig. 16) ist ein ungleicharmiger Hebel, an dessen kürzerem Arme in einer bestimmten Entfernung vom Dreh-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

punkte der zu wägende Körper entweder mittelst eines Hackens oder einer Wagschale hängt. An dem in gleiche Theile getheilten, längeren Arme kann ein bekanntes Gewicht, der sogenannte Läufer, mittelst einer Hülse verschoben werden, bis der Wagebalken horizontal liegt, der Last also das Gleichgewicht gehalten wird.

Ist s der Schwerpunkt des Wagebalkens, R sein Gewicht, c der Aufhängpunkt der Last, a der Drehpunkt, und befindet sich bei b der Läufer, so ist die Gleichgewichtsbedingung

$$P \,.\, ab + R \,.\, as = L \,.\, ca \quad \ldots\ldots \quad (1$$

Wird das Gleichgewicht der unbelasteten Wage dadurch erzielt, daß man den längeren Arm etwas dünner macht als den kürzeren, oder daß man am kürzeren Arme für die Last in c eine Wagschale anbringt, welche der Kraft R das Gleichgewicht hält, so wird die Gleichgewichtsbedingung durch die einfache Gleichung erfüllt

$$P \,.\, ab = L \,.\, ac \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Ist $ab = 10\,ac$, so wird $L = 10\,P$, und die Wage ist eine Decimal-Wage.

Die Schnellwage gibt zwar keine so genauen Resultate, wie die gemeine Wage, allein sie ist leichter zu handhaben, weil das Laufgewicht geringer ist, als das Gewicht der Last. Sie findet vorzüglich Anwendung, wenn es sich um Bestimmung des Gewichtes großer Waarenballen, Heu- oder Frachtwagen handelt.

Die Zeigerwage.

§. 42.

Die Zeigerwage (Fig. 17) besteht aus dem ungleicharmigen Winkelhebel ACB, der von einem Statif EF getragen wird und im Scheitel C seinen Drehpunkt hat. Der längere Arm BC ist gewöhnlich so construirt, daß er im unbelasteten Zustande der Wage in die Richtung der vertikalen CF fällt, und der kürzere Arm AC so gebogen, daß in diesem Falle A, C, E in einer geraden Linie liegen. Hängt man nun in A eine Last auf, so wird der längere Arm aufwärts gehoben und beschreibt S, der Schwerpunkt desselben, um den Drehpunkt C einen Kreisbogen FB, aus dessen Länge man auf das Gewicht der Last schließen kann. Zu diesem Zwecke ist an dem Statif

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

eine kreisbogenförmige Skala EF angebracht, die der einem Uhrenzeiger ähnliche, längere Arm mit seinem Ende durchläuft.

Ist P das Gewicht des längeren Armes, so erhält man als Gleichgewichtsbedingung

$$P \,.\, CG = L \,.\, CH.$$

Legt man in die Wagschale nach und nach bekannte Gewichte und bezeichnet man den jedesmaligen Stand des längeren Armes auf der Skala, so läßt sich aus der Stellung des letzteren unmittelbar das Gewicht der Last bestimmen.

Diese Wagen sind besonders in Spinnereien im Gebrauch und werden in neuerer Zeit auch als Briefwagen benützt.

Die Kunst- oder Brückenwage.

§. 43.

Unter Kunstwagen versteht man solche Wagen, die aus zwei oder mehreren Hebeln zusammengesetzt sind. Von diesen ist die von Quintenz erfundene Brückenwage wegen der leichten Tragbarkeit die bequemste. Sie besteht im Wesentlichen aus drei Hebeln (Fig. 18), dem ungleicharmigen Hebel DE und den beiden einarmigen Hebeln JK und FG. Der Hebel DE ist um den Punkt C des festen Gestelles ABC drehbar. An D, dem einen Ende desselben, hängt eine Schale zur Aufnahme des Gewichtes, welche in Verbindung mit dem Hebelarme CD dem Hebelarme CE das Gleichgewicht hält. Mittelst der Stangen HJ und EF sind mit ihm verbunden die Hebel JK und FG mit den Drehpunkten K und G, von denen der erstere gewöhnlich eine gabelförmige Gestalt hat und die zu wägende Last L trägt. Die Punkte H, E und M sind dabei so gewählt, daß $CH : CE = GM : GF$. Die Last L übt zunächst im Punkte S auf den Hebel JK einen Druck aus, welcher sich vertheilt auf die Punkte J und K. Der eine Theil x wirkt im Punkte J mittelst der Stange HJ auf den Hebelarm CE; der andere Theil y pflanzt seinen Druck bis zum Punkte M fort, und vertheilt sich die Wirkung desselben auf die Punkte F und G des Hebels FG; es bleibt jedoch, da G fest unterstützt ist, nur die Wirkung z im Punkte F übrig. Die Größe dieses Druckes erhält man aus der Gleichung

$$z = y \cdot \frac{GM}{GF} \;\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

Dieser Druck z wirkt aber mittelst der Hebelstange EF auf den Hebelarm und übt auf den Punkt H einen Druck v aus, dessen Größe aus der Gleichung sich ergibt

$$v = z \cdot \frac{CE}{CH} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

oder da $z = y \cdot \frac{GM}{GF}$

$$v = \frac{GM}{GF} \cdot \frac{CE}{CH} \cdot y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Weil aber $CE : CH = GF : GM$, so ist

$$v = y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Es wirkt demnach auch der Theil der Last, welcher auf den Punkt K einen Druck ausübt, so auf den Hebelarm CE, als ob er unmittelbar mit x im Punkte H angreifen würde.

Da die Wirkung der Last L, welche auf JK ruht, die nemliche ist, wie wenn sie im Punkte H wirksam wäre, so ist es einerlei, auf welchem Theile der Brücke die Last liegt. Wird der Hebel DE so eingerichtet, daß $CH : CD = 1 : 10$ sich verhält, so ist die Wage eine Decimalwage.

Die Rolle.

§. 44.

Die Rolle ist eine kreisrunde Scheibe, an deren Umfange sich eine Vertiefung oder Rinne befindet, um ein Seil oder eine Kette aufzunehmen; in dem Mittelpunkte der Scheibe ist senkrecht auf ihre Ebene eine Axe (Zapfen oder Bolzen) angebracht, welche in einem Gehäuse (Scheere oder Kloben) ruht, und innerhalb welchen die Scheibe um die Axe sich drehen kann.

Man unterscheidet zwei Arten von Rollen: 1) die feste oder unbewegliche, 2) die lose oder bewegliche Rolle.

Eine Rolle heißt fest, wenn ihre Axe sich nicht bewegt, und führt, da sie häufig dazu dient, der Bewegung der Last eine besondere Richtung zu geben, den Namen „Leitscheibe" oder „Richtungsrolle". An dieser Rolle (Fig. 19) wirken Kraft und Last wie an einem gleicharmigen Hebel. C, der Durchgangspunkt der Axe,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist der Stützpunkt, der Radius der Scheibe der Hebelarm. Gleichgewicht findet statt, wenn

$$P = L.$$

Diese Gleichung gilt, die Angriffspunkte der Kraft und Last mögen mit dem Stützpunkte in gerader Linie liegen oder nicht, da die Entfernung des Stützpunktes von jeder Richtung der Kraft der Radius ist. Wie aus der Gleichgewichtsbedingung ersichtlich, wird bei der festen Rolle keine Kraft gewonnen, jedoch läßt sich die Last mit größerer Bequemlichkeit in bestimmter Richtung bewegen, wie z. B. bei Bauten, bei Ziehbrunnen, bei Aufzügen u. s. w.

Eine Rolle heißt lose oder beweglich, wenn die Axe während der Drehung der Rolle in fortschreitender Bewegung sich befindet. Die Last wird hier mittelst des Klobens an der Rolle befestigt, das Seil mit dem einen Ende an irgend einem festen Punkte angeknüpft, unter der losen Rolle weggeführt und der bessern Leitung wegen noch um eine feste Rolle geschlagen, während an dem anderen Ende des Seiles die Kraft wirkt. Die Wirkung einer losen Rolle (Fig. 20) läßt sich auf die eines einarmigen Hebels zurückführen, dessen Arm BD und dessen Dreh- oder Stützpunkt B ist. Kraft und Last haben zum Angriffspunkte beziehungsweise D und C. Man erhält als Gleichgewichtsbedingung

$$P \,.\, BD = L \,.\, BC \;\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$P = \frac{1}{2} L.$$

Die Last vertheilt sich demnach auf die Seilstücke a und b gleichmäßig und ist die Spannung derselben gleich groß.

Ist bei der losen Rolle die Richtung des Seiles nicht parallel der Richtung der Kraft, so nimmt der Kraftgewinn mit dem Parallelismus ab. Die Wirkung der losen Rolle ist in diesem Falle (Fig. 21) gleich der eines Winkelhebels CBA, dessen Stützpunkt B und dessen Hebelarme BA und BC sind. Gleichgewicht findet demnach statt, wenn

$$P \,.\, BE = L \,.\, BD \;\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

oder da wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ABE und CBD

$$BE : BD = AB : BC$$

$$P \,.\, AB = L \,.\, BC \;\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

$$P = L \,.\, \frac{r}{AB}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Je kleiner AB wird, desto größer muß die Kraft sein, welche der Last das Gleichgewicht halten soll.

Die Potenzrolle.

§. 45.

Die Potenzrolle oder der Rollenzug (Fig. 22) ist eine Verbindung mehrerer, beweglicher Rollen mit einer festen Rolle in der Art, daß die an jeder wirkende Kraft für die zunächst darüber befindliche Rolle zur Last wird, und die um die Rollen geschlungenen Seile gewöhnlich parallele Richtungen haben.

Was die Wirkung einer solchen Potenzrolle anlangt, so wird jede lose Rolle zu einem einarmigen Hebel und ist die Spannung an dem Seile a_1 gleich der Hälfte der Last. Diese Spannung $\frac{1}{2}$ L ist Last an der zweiten losen Rolle und daher die Spannung am Seile $a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} L = \frac{1}{2^2} L$. In ähnlicher Weise ergibt sich für das Seil a_3 die Spannung $\frac{1}{2^3}$ L, und allgemein, wenn n lose Rollen verwendet werden, die Spannung für das Seil $a_n = \frac{1}{2^n} \cdot L$.

Der Flaschenzug.

§. 46.

Der Flaschenzug (Fig. 23) ist eine Verbindung mehrerer, in einem Kloben befindlicher losen Rollen (untere Flasche) und gewöhnlich ebenso vieler, gleichfalls in einem Kloben befindlicher festen Rollen (obere Flasche) mittelst eines Seiles in der Art, daß das Seil abwechselnd um eine Rolle der beweglichen unteren und eine Rolle der unbeweglichen oberen Flasche geführt ist. Die an dem beweglichen Kloben der unteren Flasche angebrachte Last wirkt auf alle bewegliche Rollen und vertheilt sich auf dieselben in gleicher Weise. Nun hat die Kraft P eigentlich nur der Spannung des Seiles a_1 das Gleichgewicht zu halten, welche bei n beweglichen Rollen gleich $\frac{1}{2n}$ L; weil einerseits auf jede bewegliche Rolle $\frac{1}{n}$ der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Last trifft, andererseits bei jeder losen Rolle die Kraft gleich der Hälfte der Last ist. Gleichgewicht findet demnach statt, wenn

$$P : L = 1 : 2n,$$

d. h. wenn die Kraft gleich ist der Last, getheilt durch die doppelte Anzahl der in der unteren Flasche befindlichen Rollen.

Das Wellrad.

§. 47.

Das Rad an der Welle (Fig. 24) ist eine kreisrunde Scheibe, welche an einer runden, um die gleiche Axe drehbaren Walze (Welle oder Wellbaum) befestigt ist. An den Enden des Wellbaumes sind cylindrische Zapfen angebracht, welche auf einer Unterlage ruhen, den sogenannten Zapfenlagern oder Pfannen. Auf dem Umfange der Welle wickelt sich ein Seil auf, an dem die Last hängt, an dem Umfange des Rades wirkt die Last. Das Wellrad kann in dieser Form als ein ungleicharmiger Hebel betrachtet werden, dessen längerer Arm der Radius des Rades, dessen kürzerer Arm der Radius der Welle ist, und tritt Gleichgewicht ein, wenn

$$P \,.\, R = L \,.\, r.$$

Ist die Welle horizontal, so führt das Wellrad den Namen „Haspel"; ist sie vertikal, so nennt man es Göppel oder Winde.

§. 48.

Ein Rad, auf dessen Umfange sich Vertiefungen und Erhöhungen in stets gleichem Abstande befinden, heißt ein gezahntes Rad, die Erhöhungen im Allgemeinen Zähne. Ist die Welle eines Zahnrades gleichfalls gezahnt, so nennt man dieselbe das Getriebe. Eine Verbindung von gezahnten Rädern (Fig. 25) in der Art, daß immer ein Rad der einen Welle in das Getriebe der nächsten eingreift, heißt Räderwerk.

Bei einem Räderwerke von drei Rädern A_1 A_2 A_3 hänge an dem Umfange der Welle des Rades A_3 die Last L, und am Umfange des Rades A_1 wirke die Kraft P; die Radien der drei gezahnten Räderpaare seien R_1 und r_1; R_2 und r_2; R_3 und r_3. Den Druck x,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welchen die Kraft P an der Welle des Rades A_1 ausübt, erhält man aus der Gleichung

$$x r_1 = P \cdot R_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

den Druck y an der Welle des Rades A_2 aus der Gleichung

$$y \cdot r_2 = x \cdot R_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

$$y = x \cdot \frac{R_2}{r_2} = P \cdot \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} \quad \ldots\ldots \quad (3$$

Dieser Druck y hält aber der Last L das Gleichgewicht, und ist deßhalb

$$L \cdot r_3 = y \cdot R_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

$$L = y \cdot \frac{R_3}{r_3} = P \frac{R_1 R_2 R_3}{r_1 r_2 r_3}$$

$$P = L \frac{r_1 r_2 r_3}{R_1 R_2 R_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last, wie das Produkt der Radien der Getriebe zum Produkte der Radien der Räder.

Die schiefe Ebene.

§. 49.

Die schiefe Ebene (Fig. 26) ist eine ebene Fläche, welche mit einer Horizontalebene einen spitzen Winkel bildet. Da ein Körper, den man auf die schiefe Ebene legt, nicht in Ruhe bleiben kann, weil sein Gesammtgewicht wegen der Neigung der schiefen Ebene zum Horizont von dieser nicht getragen wird, so muß irgend eine Kraft das Herabgleiten des Körpers verhindern.

Ist das Dreieck ABC der vertikale Längendurchschnitt einer schiefen Ebene, AB die Länge, BC die Basis, AC die Höhe derselben, α der Winkel der schiefen Ebene mit der Horizontalfläche (Böschungswinkel), s der Schwerpunkt des Körpers, L sein Gewicht, β der Winkel der Kraft P mit der schiefen Ebene, so hat man die Gleichgewichtsbedingung eines nicht vollkommen freien Körpers aufzustellen, auf den einerseits die im Schwerpunkte angreifende Schwerkraft L, anderseits die Kraft P wirkt. Soll Gleichgewicht bestehen, so muß nach §. 18 die Resultante eine zur schiefen Ebene senkrechte Richtung haben. In diesem Falle ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$P : L = \sin\alpha : \sin(R+\beta) \quad \ldots\ldots \quad (1$$
$$= \sin\alpha : \cos\beta$$
$$P = L\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Je größer demnach $\cos\beta$ wird, desto geringere Kraft ist erforderlich.

Ist $\beta = 0$, d. h. wirkt die Kraft parallel der Länge der schiefen Ebene, so ist

$$P = L\sin\alpha$$

oder $$P : L = AC : AB \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Ist $\beta = \alpha$, somit die Richtung der Kraft parallel zur Basis, so ist $$P = L\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

oder $$P : L = AC : BC \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Es verhält sich also die Kraft zur Last im ersteren Falle wie die Höhe der schiefen Ebene zur Länge, im letzteren Falle wie die Höhe zur Basis.

Die Schraube.

§. 50.

Denkt man sich mehrere schiefe Ebenen von gleicher Höhe (Fig. 27), deren Basis gleich dem Umfange eines geraden Cylinders ist, der Reihe nach so um letzteren gewickelt, daß die Basis der ersten mit dem Umfange der Basis des Cylinders zusammenfällt, die Basis der übrigen der Basis des Cylinders parallel sind, so entsteht eine Schraubenlinie. Jede einzelne Windung heißt Schraubengang, und der Abstand je zweier Gänge (Höhe der schiefen Ebenen) die Ganghöhe, oder Höhe des Schraubenganges. Ein biegsamer prismatischer Körper, welcher in der Richtung der Schraubenlinie um den Cylinder gelegt wird, heißt Schraubengewinde, und ein Schraubengewinde, welches auf einem Cylinder erhaben ausgearbeitet ist, führt den Namen „Schraubenspindel". Um in der Mechanik dieselbe verwenden zu können, muß sie in einen hohlen Cylinder passen, die sogenannte Schraubenmutter, in welchem dieselben Schraubengänge vertieft angebracht sind. Beide, Schraubenspindel und Schraubenmutter bilden die Schraube, obwohl auch häufig die Spindel allein Schraube genannt wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Schraube kann als eine schiefe Ebene betrachtet werden, bei der die Kraft am Umfange der Schraube horizontal, also parallel der Basis der schiefen Ebene wirkt. Ist r der Radius der Spindel, also $2r\pi$ die Basis der schiefen Ebene, so besteht Gleichgewicht, wenn

$$P : L = h : 2r\pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$P = L \cdot \frac{h}{2r\pi}.$$

Der Kraftgewinn ist demnach um so größer, je geringer die Ganghöhe und je größer der Radius der Spindel ist.

In den meisten Fällen wirkt die Kraft nicht unmittelbar an der Spindel selbst (Fig. 28), sondern an dem Ende eines Hebels, der parallel zur Basis an dem oberen Ende der Spindel, dem sogenannten Schraubenkopf befestigt ist. Ist l die Länge des Hebels, vom Mittelpunkt der Spindel bis zum Angriffspunkt der Kraft gerechnet, so ist die dadurch am Umfange hervorgebrachte Wirkung

$$P = \frac{l}{r} \cdot P_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2$$

wenn P_1 die am Ende des Hebels thätige Kraft ist. Setzt man diesen Werth als die Größe der am Umfange der Spindel thätigen Kraft in Gleichung (1) für P ein, so ergibt sich aus

$$\frac{l}{r} \cdot P_1 = L \cdot \frac{h}{2r\pi}$$

oder

$$P_1 : L = h : 2l\pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3$$

daß die Wirkung gerade so ist, als ob der Radius der Spindel = l wäre.

Eine Schraubenspindel, welche nur 3 bis 4 Gänge hat, sich blos um ihre Axe dreht, und deren Gewinde in die Zähne eines Rades oder einer Zahnstange eingreifen, heißt Schraube ohne Ende, weil dieselben Schraubengänge immer wieder von Neuem wirken.

Der Keil.

§. 51.

Der Keil (Fig. 28) ist ein dreiseitiges (meistens gleichschenkliges) Prisma, das mit einer Kante zwischen die Spalte eines Körpers

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder zwischen zwei Körper durch eine auf die dieser Kante gegenüberliegende Seite wirkende Kraft getrieben wird und dazu dient, einen Körper zu spalten, oder zwei Körper zu trennen. Jene Seitenfläche, auf welche die Kraft wirkt, nennt man den Rücken, die beiden anderen Flächen die Seiten, die von letzteren gebildete Kante die Schärfe oder Schneide des Keiles.

Je nach der Form heißt ein Keil einfach, wenn der Rücken mit der einen Seite einen rechten Winkel bildet, sonst doppelt; gleichschenklig, wenn die Grundflächen des Prisma gleichschenklige Dreiecke sind.

Den einfachen Keil kann man als bewegliche schiefe Ebene betrachten, und entspricht die Länge seiner Seite der Länge, der Rücken des Keiles der Höhe der schiefen Ebene; die Wirkung des doppelten Keiles läßt sich auf die Wirkung zweier schiefen Ebenen zurückführen, welche mit ihrer Basis zusammenstoßen.

Ist Δ ABC ein normaler Querschnitt eines doppelten gleichschenkligen Keiles, AC = BC die Seite, AB der Rücken, DC die Höhe des Keiles, so kann, während die Kraft unter allen Umständen senkrecht zum Rücken wirkt, der Widerstand entweder senkrecht zu den Seiten oder zur Höhe des Keiles wirken, je nachdem es sich darum handelt, einen Körper zu spalten oder zwei Körper zu trennen.

Wirkt der Widerstand L senkrecht zu den Seiten, muß also derselbe parallel mit der schiefen Ebene überwunden werden, so ist im Falle des Gleichgewichtes

$$P_1 : L = \frac{1}{2} AB : AC \quad \ldots\ldots \quad (1$$

$$P_1 = L \cdot \frac{AB}{2\,AC},$$

und da der Widerstand zweimal vorhanden ist,

$$P = L \cdot \frac{AB}{AC} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last wie der Rücken des Keiles zur Seite oder Länge desselben.

Wirkt der Widerstand senkrecht zur Höhe des Keiles, muß also derselbe parallel zur Basis der schiefen Ebene überwunden werden, so erhält man als Gleichgewichtsbedingung

$$P : L = AB : DC,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

d. h. die Kraft verhält sich zur Last, wie der Rücken des Keiles zur Höhe.

Aus den beiden Gleichgewichtsbedingungen folgt, daß der Kraftgewinn um so größer ist, je spitzer der Keil ist, und je schmäler sein Rücken.

Die Gesetze des Keiles finden ihre Anwendung bei dem Gebrauche verschiedener Werkzeuge, z. B. der Hacken, Stemmeisen, Messer, Pflugschaaren, Nägel, Nadel 2c.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dynamik.

§. 52.

Wenn ein starres Punktesystem unter dem Einflusse von Kräften steht, welche sich nicht das Gleichgewicht halten, so findet Bewegung statt. Die Gesetze aufzufinden, nach welchen Bewegung erfolgt, ist Aufgabe der Dynamik, und man bezeichnet deßhalb dieselbe kurzweg als die Lehre von der Bewegung.

Wenn die Wirkung einer Kraft, die einen Körper in Bewegung setzt, nur so kurze Zeit dauert, daß während derselben in der Lage des Körpers eine merkliche Veränderung nicht wahrnehmbar ist, so nennt man die Kraft momentan, außerdem continuirlich. Bleibt die Stärke einer continuirlichen Kraft durch die ganze Zeit der Bewegung gleich groß, so heißt die Kraft constant.

Die Bewegung eines Körpers ist entweder

1) gleichförmig oder
2) ungleichförmig.

Die ungleichförmige Bewegung kann sein

a) gleichförmig =
b) ungleichförmig beschleunigt oder verzögert.

Die Bewegung heißt gleichförmig oder ungleichförmig, je nachdem die Geschwindigkeit während der ganzen Dauer der Bewegung constant ist oder nicht, d. h. je nachdem in gleichen Zeiteinheiten gleiche oder ungleiche Wege zurückgelegt werden.

Die ungleichförmige Bewegung nennt man beschleunigt oder verzögert, je nachdem die Geschwindigkeit in den einzelnen Zeittheilchen zu= oder abnimmt. Läßt sich für die Zu= oder Abnahme der Geschwindigkeit ein bestimmtes Gesetz aufstellen, so nennt man die ungleichförmige Bewegung gleichförmig beschleunigt oder verzögert, außerdem ungleichförmig beschleunigt oder verzögert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bei jeder Bewegung hat man die zwischen Raum, Zeit, Geschwindigkeit und Kraft bestehenden Beziehungen zu bestimmen.

Gleichförmige Bewegung.

§. 53.

Die ganze Lehre der gleichförmigen Bewegung ist in der Gleichung enthalten

$$s = v \cdot t$$

worin s den in der Zeit t zurückgelegten Weg, v die constante Geschwindigkeit, d. i. den Weg bezeichnet, welchen der Körper in jeder Zeiteinheit zurücklegt.

Werden einem Körper mehrere Bewegungen nach verschiedenen Richtungen ertheilt, so hat, was in der Statik über Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte bewiesen wurde, auch seine Geltung in Bezug auf die Geschwindigkeiten, da sich die Geschwindigkeiten verhalten, wie die wirkenden Kräfte.

Gleichförmig beschleunigte und verzögerte Bewegung.

§. 54.

Eine Kraft, welche stetig wirkt mit gleicher Intensität, erzeugt in jeder folgenden Zeiteinheit eine gleich große Zunahme an Geschwindigkeit und mithin eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit nennt man Beschleunigung.

Ist g die Beschleunigung, v die nach der Zeit t erlangte Geschwindigkeit, so ist, wenn der Körper vom Zustande der Ruhe ausgeht, die Geschwindigkeit nach der ersten Zeiteinheit (Sekunde) g, nach der zweiten Sekunde 2 g, nach 3 Sekunden 3 g, also nach t Sekunden gt; folglich ist

$$v = gt \quad \ldots\ldots \quad (1$$

$$t = \frac{v}{g} \quad \ldots\ldots \quad (2$$

$$g = \frac{v}{t} \quad \ldots\ldots \quad (3$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Besitzt der Körper, bevor die beschleunigende Kraft auf ihn einwirkt, in einer mit der Richtung der beschleunigenden Kraft übereinstimmenden Richtung die constante Geschwindigkeit a, so ist nach t Sekunden

$$v = a + gt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Um den in t Sekunden zurückgelegten Weg s zu finden, geht man von der Bestimmung des Weges in der ersten Sekunde aus. Denkt man sich die Sekunde in n gleiche Theile zerlegt und n möglichst groß, so kann man die Bewegung während dieser kleinsten Zeittheilchen um so mehr als gleichförmig betrachten, je größer man n nimmt. Bewegt sich nun der Körper in der ersten Sekunde mit einer constanten Geschwindigkeit, welche gleich ist dem arithmetischen Mittel aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit, so würde er in der ersten Hälfte der Sekunde gerade so viel Weg mehr zurücklegen, als er in der zweiten Hälfte weniger zurücklegt im Vergleich zu dem Weg, den er mit gleichförmiger Beschleunigung wirklich durchläuft. Der in der ersten Sekunde beschriebene Weg ist demnach bei einer Anfangsgeschwindigkeit Null $\frac{0+g}{2}$. Bestimmt man den Weg in den folgenden Sekunden in gleicher Weise und stellt die gewonnenen Resultate zusammen, so ist

$$s = \frac{0+g}{2} + \frac{g+2g}{2} + \frac{2g+3g}{2} + \ldots\ldots + \frac{(t-1)g+tg}{2}$$

$$= \frac{g}{2} + \frac{3g}{2} + \frac{5g}{2} + \ldots\ldots + \frac{(2t-1)g}{2}$$

$$= \frac{g}{2}\left(1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2t-1)\right)$$

$$s = \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

Hatte der Körper beim Beginne der Wirkung der continuirlichen Kraft bereits die Geschwindigkeit a, so durchläuft er vermöge der ersteren in t Sekunden den Weg $\frac{gt^2}{2}$, unter dem Einflusse der momentanen Kraft den Weg at, und ist, wenn die Richtungen beider Kräfte die gleichen sind,

$$s = at + \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bei der gleichförmig verzögerten Bewegung nimmt die Geschwindigkeit stetig ab. Betrachtet man diese Geschwindigkeitsabnahme als eine negative Zunahme, so erhält man, wenn in den Gleichungen (4) und (6) $-g$ statt $+g$ gesetzt wird, für diese Art der Bewegung

$$v = a - gt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7$$

$$s = at - \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8$$

Freier Fall der Körper.

§. 55.

Zu den gleichförmig beschleunigten Bewegungen wird der freie Fall der Körper gerechnet. Nimmt auch die Schwerkraft, die Ursache des Fallens, erfahrungsgemäß mit dem Quadrate der Entfernung vom Erdmittelpunkte ab, so sind doch die Wege, welche hier in Betracht kommen, verschwindend klein gegen die Größe des Erdhalbmessers, und kann man die Schwere als eine Kraft betrachten, welche continuirlich mit gleicher Stärke wirkt. Aus diesem Grunde sind auch die Gesetze des freien Falles in den beiden Gleichungen enthalten

$$v = gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$s = \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

und wird als Werth für g angenommen 9·81 m.

Verbindet man die Gleichungen (1) und (2), so erhält man

$$v = \sqrt{2gs} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

$$s = \frac{v^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Da für die Zeit t_1

$$s_1 = \frac{gt_1^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

so verhalten sich die Fallhöhen wie die Quadrate der Zeiten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fall auf der schiefen Ebene.

§. 56.

Befindet sich ein Körper auf einer schiefen Ebene, so kann sich derselbe nicht in der Richtung der Schwerkraft bewegen; ein Theil seiner Schwere wird durch den Widerstand der Ebene aufgehoben, und erfolgt die Bewegung abwärts nur in Folge der Einwirkung des andern Theiles der Schwere, der, weil constant, stetig wirkt wie eine zur schiefen Ebene parallele Kraft. Wie aus der Statik bekannt, ist diese Kraft $P = L \sin \alpha$. Da die Kräfte proportional sind ihren Wirkungen, also auch den Beschleunigungen, welche sie den Körpern ertheilen, so ist

$$P : L = g_1 : g$$
$$\sin \alpha : 1 = g_1 : g$$
$$g_1 = g \sin \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

Setzt man nun in die für die gleichförmig beschleunigte Bewegung geltenden Gesetze $g \sin \alpha$ statt g, so wird

$$v = g \sin \alpha \,.\, t = gt \,.\, \sin \alpha \quad \ldots\ldots \quad (2$$

$$s = \frac{g \sin \alpha \, t^2}{2} = \frac{gt^2}{2} \sin \alpha \quad \ldots\ldots \quad (3$$

§. 57.

I. Wenn ein Körper auf einer schiefen Ebene von der Länge l herabfällt, so ist seine Endgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g \,.\, \sin \alpha \,.\, l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

oder, wenn man für $\sin \alpha$ den trigonometrischen Werth $\frac{h}{l}$ einführt

$$v = \sqrt{2g \,.\, h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Aus Gleichung (2) folgt, daß ein Körper beim Falle auf einer schiefen Ebene eine Endgeschwindigkeit erlangt, welche gleich ist der Geschwindigkeit, welche er beim freien Falle erlangen würde, wenn die Fallhöhe gleich ist der Höhe der schiefen Ebene. Da ferner die Gleichung (2) unabhängig ist von dem Neigungswinkel, also auch von der Länge der schiefen Ebene, so erlangen die Körper auf schiefen Ebenen von beliebigen Längen und gleicher Höhe dieselbe Endgeschwindigkeit.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Ist ABC (Fig. 29) der normale Durchschnitt einer schiefen Ebene, AC die Länge, AB die Höhe derselben, und zieht man BD ⊥ AC, so ist, wenn t und t_1 die Zeit ist, innerhalb welcher ein Körper beziehungsweise von A bis B und D fällt

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot AD}{g \sin \alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4$$

und weil $AD = h \sin \alpha$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

also

$$t = t_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6$$

d. h. ein Körper durchläuft auf der schiefen Ebene in der nemlichen Zeit einen Weg gleich der Projektion der Höhe auf die schiefe Ebene, in der er beim freien Falle die Höhe zurücklegt.

III. Zieht man in einem Kreise (Fig. 30) von den Endpunkten A und B des vertikalen Durchmessers AB die Sehnen AC und BD, so kommt ein Körper ebenso schnell von A nach C und D nach B als von A nach B, weil AC und BD die Projektionen der Höhe AB sind beziehungsweise auf die schiefen Ebenen AE und FB. Da das Gleiche gilt für jede andere durch A oder B gezogene Sehne, so durchläuft ein Körper alle Sehnen, die durch die Endpunkte eines vertikalen Durchmessers gehen, in gleicher Zeit (isochron).

Senkrechter Wurf.

§. 58.

Wird ein Körper durch irgend eine momentan wirkende Kraft vertikal aufwärts geworfen, so wirkt auf ihn die Schwerkraft stetig ein in gleicher aber entgegengesetzter Richtung, und es entsteht deßhalb eine gleichförmig verzögerte Bewegung.

Bezeichnet man mit a die Anfangsgeschwindigkeit, so wird diese nach der ersten Sekunde nur noch $a - g$, nach der zweiten Sekunde $a - 2g$, also nach t Sekunden

$$v = a - gt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In t Sekunden hätte der Körper den Weg at zurückgelegt, wenn er allein der Wurfkraft hätte folgen können, allein vermöge der ihr entgegengesetzt wirkenden Anziehungskraft der Erde ist dieser Weg um $\frac{gt^2}{2}$ vermindert worden, so daß nach t Sekunden der wirklich zurückgelegte Weg

$$s = at - \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Der Körper bewegt sich so lange aufwärts, bis $v = 0$ wird, also

$$t = \frac{a}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Für diesen Werth von t wird

$$s_1 = \frac{a^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Von dem Augenblicke an, in welchem die Geschwindigkeit gleich Null geworden, wird der Körper anfangen zu fallen und hat nun den Weg $\frac{a^2}{2g}$ zurückzulegen. Dazu braucht er die Zeit

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{g}} = \sqrt{\frac{2a^2}{2g^2}} = \frac{a}{g} \quad \ldots\ldots \quad (5$$

und erlangt die Endgeschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{2g \cdot s_1} = \sqrt{2g \cdot \frac{a^2}{2g}} = a \quad \ldots \quad (6$$

d. h. ein Körper braucht ebenso lange zum Steigen als zum Fallen und erlangt beim freien Falle von einer bestimmten Höhe s genau wieder dieselbe Geschwindigkeit, welche ihm eine momentane Kraft ertheilen müßte, um die gleiche Höhe zu erreichen.

Krummlinige Bewegung im Allgemeinen.

§. 59.

Wirken auf einen Körper zwei momentane oder zwei continuirliche Kräfte, so wird sich derselbe in gerader Richtung bewegen, da man in beiden Fällen die Wirkung auf die einer einzigen Kraft zurückführen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

kann, welche immer nur eine geradlinige Bewegung verursacht. Soll Bewegung in einer krummen Linie erfolgen, so muß auf einen durch eine momentane Kraft in Bewegung gesetzten Körper eine stetige Kraft wirken und zwar in einer Richtung, welche von der Richtung der momentanen Kraft verschieden ist.

Hat nemlich ein Körper im Punkte A die Geschwindigkeit AB (Fig. 31) und zugleich in der Richtung AX die Geschwindigkeit AC, so kommt er in einer Sekunde nach D. In der nächsten Sekunde würde er wegen des Beharrungsvermögens in der Richtung von AD den Weg DE = AD zurücklegen. Wird ihm nun neuerdings im Punkte D in der Richtung von DY die Geschwindigkeit DF ertheilt, so ist er am Ende der zweiten Sekunde in G angelangt u. s. w. In Folge dessen wird der Körper die gebrochene Linie ADGK beschreiben. Nimmt man nun an, daß die zweite Kraft nicht stoßweise am Anfange einer jeden Sekunde, sondern continuirlich wirkt, so wird der Körper in jedem Augenblicke die Richtung ändern, welche er im unmittelbar vorausgehenden Augenblicke eingeschlagen hat, und der Weg eine krumme Linie werden.

Von dem Verhältnisse der momentanen und continuirlichen Kraft sowie von den Richtungen, in welchen sie wirken, wird die Beschaffenheit der krummen Linie abhängen.

Horizontaler Wurf.

§. 60.

Wird ein Körper in der Entfernung e von der Oberfläche der Erde in horizontaler Richtung abgeworfen (Fig. 32), so wirkt auf ihn ein 1) die Wurfkraft in der Richtung von AX, 2) die Schwerkraft in der Richtung von AY. Ist AB = BC = CD = u. s. w. die horizontale Geschwindigkeit, so wird sich der Körper nach Ablauf der einzelnen Sekunden nach und nach in b, c, d, welche beziehungsweise in vertikaler Richtung um $\frac{g}{2}$ unter B, um $\frac{g}{2} \cdot 2^2$ unter C, um $\frac{g}{2} \cdot 3^2$ unter D liegen, sich befinden, und seine Bahn die krumme Linie Abcd sein. Der Körper wird demnach nach der Seite hin, wohin ihn die Wurfkraft treibt, soweit gelangen, als er gekommen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wäre nur unter dem Einflusse der Wurfkraft, dabei aber so tief unter seine ursprüngliche Höhe herabsinken, als ob er allein der Einwirkung der Schwere folgen würde.

Bezeichnet man mit x den Weg, den der Körper in horizontaler Richtung, mit y den Weg, den er im freien Falle in der Zeit t zurücklegt, so kann man mit Hilfe der beiden Gleichungen

$$x = vt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$y = \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2$$

genau die Stelle der Bahn finden, in welcher der Körper sich in einer beliebigen Zeit t befindet.

Führt man aus Gleichung (2) den Werth von t in Gleichung (1) ein, so erhält man

$$x^2 = \frac{2v}{g} \cdot y \quad \ldots\ldots \quad (3$$

eine Gleichung, welche, unabhängig von t, die Gestalt der Bahn oder die Natur der krummen Linie erkennen läßt. Man nennt eine solche krummlinige Bahn eine Parabel.

Schiefer Wurf.

§. 61.

Wenn ein Körper in der Richtung AP, welche mit dem Horizont AX den Winkel α bildet, mit einer Anfangsgeschwindigkeit AB von A aus abgeworfen wird (Fig. 33), so würde er wegen der Trägheit den Weg ABCD .... beschreiben, allein in Folge der gleichzeitigen Einwirkung der Schwerkraft wird er sich am Ende der einzelnen Sekunden in b, c, d ... befinden, die vertikal um $\frac{g}{2}$ unter B, $\frac{g}{2} \cdot 2^2$ unter C u. s. w. liegen. Zerlegt man die Anfangsgeschwindigkeit AB = a in eine horizontale und vertikale Componente, welche beziehungsweise mit AX und AY zusammenfallen, so erhält man in

$$x = at\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$y = at\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \quad \ldots \quad (2$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Wege, welche der Körper in der Zeit t allein mit der horizontalen oder vertikalen Geschwindigkeit zurücklegen würde, und in

$$v = a \sin \alpha - gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

die Geschwindigkeit v, welche der Körper in der Zeit t in vertikaler Richtung besitzt.

Es wird nun ein Zeitpunkt eintreten, in welchem diese Geschwindigkeit gleich Null wird, also

$$a \sin \alpha = gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

und von diesem Augenblicke an wird der Körper vermöge der Schwere sich dem Horizonte wieder nähern. Der Punkt M, in welchem dieses geschieht, ist offenbar der höchste Punkt der Bahn, und seine senkrechte Entfernung von dem Horizonte nennt man die Wurfhöhe.

Erreicht der Körper in N den Horizont, so wird in diesem Augenblicke $y = 0$, also

$$at_1 \sin \alpha = \frac{gt_1{}^2}{2} \text{ oder}$$

$$2\,a \sin \alpha = gt_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

und nennt man die gerade Linie AN die Wurfweite.

Vergleicht man Gleichung (5) mit Gleichung (4), so erkennt man, daß die Zeit, welche der Körper braucht, um die ganze Bahn zu durchlaufen, doppelt so groß ist, als die Zeit, in der er die größte Entfernung vom Horizont erreicht.

Durch Verbindung der Gleichungen (1) und (5) erhält man die Wurfweite

$$x = a \,.\, \cos \alpha \,.\, \frac{2\,a \sin \alpha}{g} = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \ldots\ldots \quad (6$$

Durch Verbindung der Gleichungen (2) und (4) die Wurfhöhe

$$y = a \,.\, \sin \alpha \,.\, \frac{a \,.\, \sin \alpha}{g} - \frac{g}{2} \,.\, \left(\frac{a \sin \alpha}{g}\right)^2$$

$$y = \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{2\,g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7$$

Weil $\sin \alpha$ den größten Werth erhält, wenn $\alpha = 90^0$, so erreicht die Wurfweite ihren größten Werth, wenn $\alpha = 45^0$, die Wurfhöhe beim vertikalen Wurf. Berücksichtigt man ferner, daß $\sin(R + \beta)$ gleich $\sin(R - \beta)$, so ergibt sich, daß die Wurfweite die nemliche ist, ob $\alpha = 45^0 + \beta$ oder $45^0 - \beta$, daß man also bei Elevations-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

winkeln, welche sich zu einem R ergänzen, die gleiche Wurfweite erzielt. Durch Elimination von t aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man in

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2a^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8$$

die Gleichung der Bahn des geworfenen Körpers, und ist diese Bahn gleichfalls eine Parabel.

Anmerkung: Der Luftwiderstand, welcher bei Aufstellung der Gleichungen nicht berücksichtigt wurde, verändert die gewonnenen Resultate, da durch Einwirkung derselben die horizontale Geschwindigkeit beständig vermindert und ebenso die Bewegung in vertikaler Richtung verändert wird. Die Bahn des Körpers wird in der Wirklichkeit keine Parabel, sondern die sogenannte ballistische Kurve beschreiben, bei welcher der Theil der Bahn von der höchsten Höhe bis zum Horizont kürzer und steiler ist, als der Theil, in welchem der Körper aufsteigt.

Centralbewegung und die Kepler'schen Gesetze.

§. 62.

Wenn auf einen Körper, welcher sich in geradliniger Bewegung befindet, von einem festen Punkte aus, der nicht in der Richtung der momentanen Kraft liegt, welche jene Bewegung veranlaßte, eine Kraft continuirlich wirkt, so entsteht eine Centralbewegung. Beide Kräfte führen den Namen „Centralkräfte." Die momentane Kraft heißt auch Tangentialkraft, weil sie den Körper nach einer geraden Linie fortzubewegen sucht, welche eine Tangente der Bahn ist, die continuirlich wirkende Kraft Centripetalkraft. Ist O der anziehende Mittelpunkt der Centripetalkraft (Fig. 34) und in A ein beliebiger, angezogener Körper, so würde derselbe sehr bald mit dem Centralkörper sich vereinigen, wenn nicht die Tangentialkraft vorhanden wäre, welche ihn in der Richtung von AX zu bewegen suchte. In ähnlicher Weise, wie in vorausgehenden Paragraphen läßt sich darthun, daß der Körper die Bahn ADGK . . . . durchläuft, und daß diese Bahn eine krumme Linie sein muß.

Eine derartige Bewegung ist die Bewegung der Planeten um die Sonne, als deren Ursache zuerst Newton (1642—1727) die allgemeine Schwere nachgewiesen hat. Die Beobachtung, daß die Bahnen der Planeten Ellipsen sind, in deren einem Brennpunkte die Sonne

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

steht, verdanken wir Kepler (1571—1631); dieses ist das erste Kepler'sche Gesetz.

Das zweite Kepler'sche Gesetz: „Der Radius Vector (die Verbindungslinie des Centralpunktes mit einem Punkte der Bahn) legt in gleichen Zeiten gleiche Räume zurück", ergibt sich aus der Gleichheit der $\triangle\triangle$ AOD = DOE = DOG (gleiche Grundlinie und gleiche Höhe).

Um das dritte Kepler'sche Gesetz: „Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der mittleren Entfernungen von der Sonne", zu beweisen, nehmen wir an, daß die Bahnen der Planeten kreisförmig sind. In diesem Falle muß die Bewegung eine gleichförmige sein, weil die in den einzelnen Zeiteinheiten beschriebenen Kreisbögen sich verhalten wie die zu ihnen gehörigen Sektoren, also auch wie die Zeiten, so daß in gleichen Zeiten gleiche Bögen zurückgelegt werden.

Sind r und r_1 die Entfernungen, v und v_1 die Geschwindigkeiten, t und t_1 die Umlaufszeiten zweier Planeten, so ist

$$vt = 2r\pi \text{ und } v_1 t_1 = 2r_1\pi,$$

also

$$t^2 = \frac{4r^2\pi^2}{v^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$t_1^2 = \frac{4r_1^2\pi^2}{v_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

$$t^2 : t_1^2 = \frac{r^2}{v^2} : \frac{r_1^2}{v_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Da nun durch Erfahrung und Rechnung nachgewiesen ist, daß die Quadrate der Geschwindigkeiten sich umgekehrt verhalten wie die Entfernungen, also

$$v^2 : v_1^2 = r_1 : r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

so erhält man durch Einführen des Werthes $\frac{v^2}{v_1^2}$ in Gleichung (3)

$$t^2 : t_1^2 = \frac{r^2}{r_1} : \frac{r_1^2}{r},$$

oder

$$t^2 : t_1^2 = r^3 : r_1^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Centrifugal- oder Schwungkraft bei der kreisförmigen Centralbewegung.

§. 63.

Ein jeder Körper erlangt bei der Bewegung um einen Centralkörper ein Bestreben, sich von demselben zu entfernen, und dieses Bestreben nennt man Centrifugal- oder Schwungkraft. Der Centrifugalkraft wirkt die Centripetalkraft entgegen und beide müssen bei der kreisförmigen Bewegung einander gleich sein.

Ist nemlich ACG die kreisförmige Bahn eines Körpers (Fig. 35), AB und AD die Geschwindigkeit beziehungsweise unter dem Einflusse der Tangential- und Centripetalkraft, so ist AC der Weg, den der Körper in der Zeiteinheit wirklich zurücklegt. Betrachtet man die Tangentialgeschwindigkeit AB als die Resultante der beiden Geschwindigkeiten AF und AC, von denen AF gleich und entgegengesetzt AD, so müssen AF und AD sich das Gleichgewicht halten. Die Geschwindigkeit AF läßt sich aber als die Wirkung einer besonderen Kraft auffassen, welche der Centripetalkraft gleich und entgegengesetzt ist, und nennt man diese Kraft Centrifugal- oder Schwungkraft.

Soll P_1, die Größe der Centrifugalkraft, bestimmt werden, so ergibt sich dieselbe aus

$$P_1 : P = g_1 : g$$

$$P_1 = g_1 \cdot \frac{P}{g} = g_1 \cdot M \quad \ldots \quad (1$$

weil der Druck P_1 den ein Körper vermöge der Centrifugalkraft ausübt, sich zum Gewichte des Körpers, welches in Bewegung gesetzt wird, verhält wie die Beschleunigungen, welche sie ertheilen, und weil $\frac{P}{g}$ gleich M, der Masse des Körpers, ist.

Da die Centrifugalkraft gleich ist der Centripetalkraft, und letztere continuirlich wirkt, so ist

$$g_1 = 2 \cdot AF \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

also $$P_1 = 2AF \cdot M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Nimmt man nun die Zeiteinheit möglichst klein an, so daß man die Sehne AC mit dem Bogen AC zusammenfallend und AF sowohl als

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

AD als gerade Linien betrachten kann, so ist, wenn man die Geschwindigkeit AC mit v bezeichnet,

$$AF = \frac{v^2}{2R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

und mithin

$$P_1 = \frac{M \cdot v^2}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

Die Centrifugal- und Centripetalkraft ist demnach der Masse des Körpers und dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt, dem Radius der Bahn indirekt proportional.

Ist t die Umlaufszeit des Körpers, also $v \cdot t = 2\pi \cdot R$, so wird, wenn man $v = \frac{2\pi \cdot R}{t}$ in die Gleichung (5) einführt

$$P_1 = \frac{4\pi^2 R}{t^2} \cdot M \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6$$

Schwingen zwei Körper von gleicher Masse und in derselben Zeit, aber mit verschiedenem Bahnradius, um denselben Mittelpunkt oder dieselbe Axe, so verhält sich

$$P : P_1 = R : R_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7$$

Dieser Fall tritt ein bei der Bewegung der Erde um ihre Axe und folgt aus Gleichung (7), daß die Centrifugalkraft vom Aequator gegen die Pole hin abnimmt.

Das Pendel.

§. 64.

Hängt man einen Körper mittelst einer Stange oder eines Fadens so auf, daß er sich in einer vertikalen Ebene bewegen kann, so nennt man eine derartige Vorrichtung ein Pendel. Kann man das Gewicht des Fadens als verschwindend klein betrachten, so nennt man das Pendel ein mathematisches, außerdem physisches Pendel. Die Entfernung des Aufhänge- oder Drehpunktes von dem schweren Punkte des mathematischen Pendels nennt man Länge des Pendels. So läßt sich z. B. eine kleine Kugel an einem sehr feinen Faden, dessen Länge den Durchmesser der Kugel bedeutend übertrifft, ohne merklichen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fehler als ein mathematisches Pendel ansehen. Die nachfolgenden Entwicklungen gelten zunächst nur für das mathematische Pendel.

Ist O der Aufhängepunkt, A der einzige schwere Punkt des mathematischen Pendels OA (Fig. 36), so wird im Zustande der Ruhe der Punkt A sich vertikal unter O befinden. Bringt man das Pendel aus der Gleichgewichtslage OA in die Lage OB, so wird es auf dem Kreisbogen BA herabgleiten und mit der in A erlangten Geschwindigkeit wegen des Beharrungsvermögens von A aus bis nach C sich weiter bewegen. Der Bogen AC muß aber gleich dem Bogen BA sein, weil auf dem Wege von A nach C die Geschwindigkeit durch die Schwere genau in umgekehrter Ordnung vermindert wird, wie sie durch dieselbe auf dem Wege von B nach A vermehrt wurde. Die Bewegung von B nach C heißt eine Schwingung oder Oscillation, der Winkel BOA der Ausschlagswinkel oder Amplitude; die Zeit, welche der Pendel zu einer ganzen Schwingung braucht, Schwingungsdauer oder Schwingungszeit.

§. 65.

Hat ein Pendel den Ausschlagswinkel $BOA = 2\alpha$, und zerlegt man die Beschleunigung g der in B wirkenden Schwerkraft in die zwei Seitenkräfte BD und BE, von denen die erstere ihrer Richtung nach mit OB zusammenfällt, während letztere in der Richtung der Tangente in B wirkt, so wird die Wirkung von BD durch den Widerstand des Aufhängepunktes aufgehoben und bleibt nur $BE = g_1$ als wirkende Kraft übrig. Da Winkel BFE gleich 2α, so ist

$$BE = g_1 = g \sin 2\alpha.$$

Weil bei sehr kleinen Winkeln statt der Sinus die Bogen gesetzt werden können, also

$$g_1 = g \cdot 2\alpha \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

so läßt sich der Weg s, den das Pendel in dem sehr kleinen Zeittheilchen t zurücklegt, durch die Gleichung ausdrücken

$$s_1 = \frac{g \cdot 2\alpha}{2} \cdot t^2 \ldots\ldots \quad (2$$

Hat das Pendel den Ausschlagswinkel α, so findet man für die Zeit t in analoger Weise

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$s_2 = \frac{g \cdot \alpha}{2} \cdot t^2 \ldots\ldots\ldots \quad (3$$

also $$s_1 = 2\, s_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Daraus folgt, daß für kleine Ausschlagswinkel (bis 4°) die Schwingungsdauer unabhängig ist von der Größe des Ausschlagswinkel.

Schwingungsdauer des Pendels.

§. 66.

Entwickelt man den Bogen BAC, den der schwere Punkt des Pendels in einer gewissen Zeit durchläuft, in die gerade Linie $B_1 A_1 C_1$ (Fig. 37ᵃ und 37ᵇ) und stellt sich vor, es bewege sich auf dieser geraden Linie ein Körper so, daß seine Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn gleich ist der Geschwindigkeit des schweren Punktes an der entsprechenden Stelle des Bogens BAC, so wird die Zeit, welche der Körper zu seiner Bewegung braucht, genau gleich sein der Oscillationsdauer des Pendels.

Um für diese Zeit einen bestimmten Werth zu erhalten, möge sich ein zweiter Körper auf dem Halbkreis über $B_1 A_1 C_1$ von B_1 nach C_1 mit einer constanten Geschwindigkeit bewegen. Wählt man diese constante Geschwindigkeit so, daß ihre horizontale Componente in einem beliebigen Punkte des Halbkreises übereinstimmt mit der Geschwindigkeit des ersten Körpers an der Stelle der geraden Linie $B_1 C_1 A_1$, welche mit der Projektion dieses Punktes zusammenfällt, so werden beide Körper, wenn sie gleichzeitig den Punkt B_1 verlassen, auch ihre Bahn gleichzeitig durchlaufen. Bestimmt man deßhalb die Zeit, in welcher der zweite Körper auf dem Halbkreis von B_1 nach C_1 kommt, so erhält man mit dieser Zeitdauer die Schwingungsdauer des Pendels.

Wenn das Pendel von B bis E herabfällt, so erlangt es eine Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g \cdot DF}$$

oder da $DF = AD - AF$

$$AD = \frac{AB^2}{2l} \text{ und } AF = \frac{AE^2}{2l}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$v = \sqrt{\frac{g}{l} \cdot (AB^2 - AE^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

wenn die Pendellänge OA gleich l gesetzt wird.

Nimmt man nun an, daß der Körper sich auf dem Halbkreise bewegt mit der Geschwindigkeit, welche der schwere Punkt auf dem Bogen BAC in A erreicht, nemlich $\sqrt{2g \cdot AD}$ oder $AB\sqrt{\frac{g}{l}}$, so ist im Punkte J seine Geschwindigkeit JG, und da diese der Annahme nach gleich $AB\sqrt{\frac{g}{l}}$, die horizontale Componente

$$JH = AB \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \sin JGH$$

$$= AB\sqrt{\frac{g}{l}} \sin JA_1E_1$$

$$= AB\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{JE_1}{A_1J}$$

$$= AB\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{\sqrt{A_1B_1{}^2 - A_1E_1{}^2}}{A_1B_1}$$

und, da $A_1B_1 = AB$ und $A_1E_1 = AE$

$$JH = AB \cdot \sqrt{\frac{g}{l}(AB^2 - AE^2)} \quad \ldots\ldots \quad (2$$

Weil E_1 die Projektion von J auf $B_1A_1C_1$ und $B_1E_1 = BE$, so folgt

$$JH = v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Ist t die Zeit, in welcher der Körper auf dem Halbkreis von B_1 nach C_1 kommt, so ist

$$t \cdot AB \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = AB \cdot \pi$$

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Die Schwingungsdauer des Pendels ist demnach $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mit Hilfe der höheren Mathematik findet man genauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \alpha^2\right) \ldots\ldots\ldots \quad (5$$

in welcher Gleichung α den Ausschlagswinkel bezeichnet.

Da für ein Pendel von der Länge l_1 die Schwingungsdauer

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6$$

so folgt

$$t^2 : t_1^2 = l : l_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7$$

d. h. die Quadrate der Schwingungszeiten verhalten sich wie die Pendellängen.

Macht das erste Pendel n Schwingungen in der Zeit T, das zweite Pendel n_1 Schwingungen in derselben Zeit T, ist also $t = \frac{T}{n}$ und $t_1 = \frac{T}{n_1}$, so ergibt sich

$$n_1^2 : n^2 = l : l_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8$$

d. h. die Quadrate der Schwingungszahlen verhalten sich umgekehrt wie die Pendellängen.

Mit Hilfe des Pendels erhält man mit großer Genauigkeit die Beschleunigung durch die Schwere.

Setzt man in Gleichung (4) $t = 1$, so erhält man die Länge des Sekundenpendels.

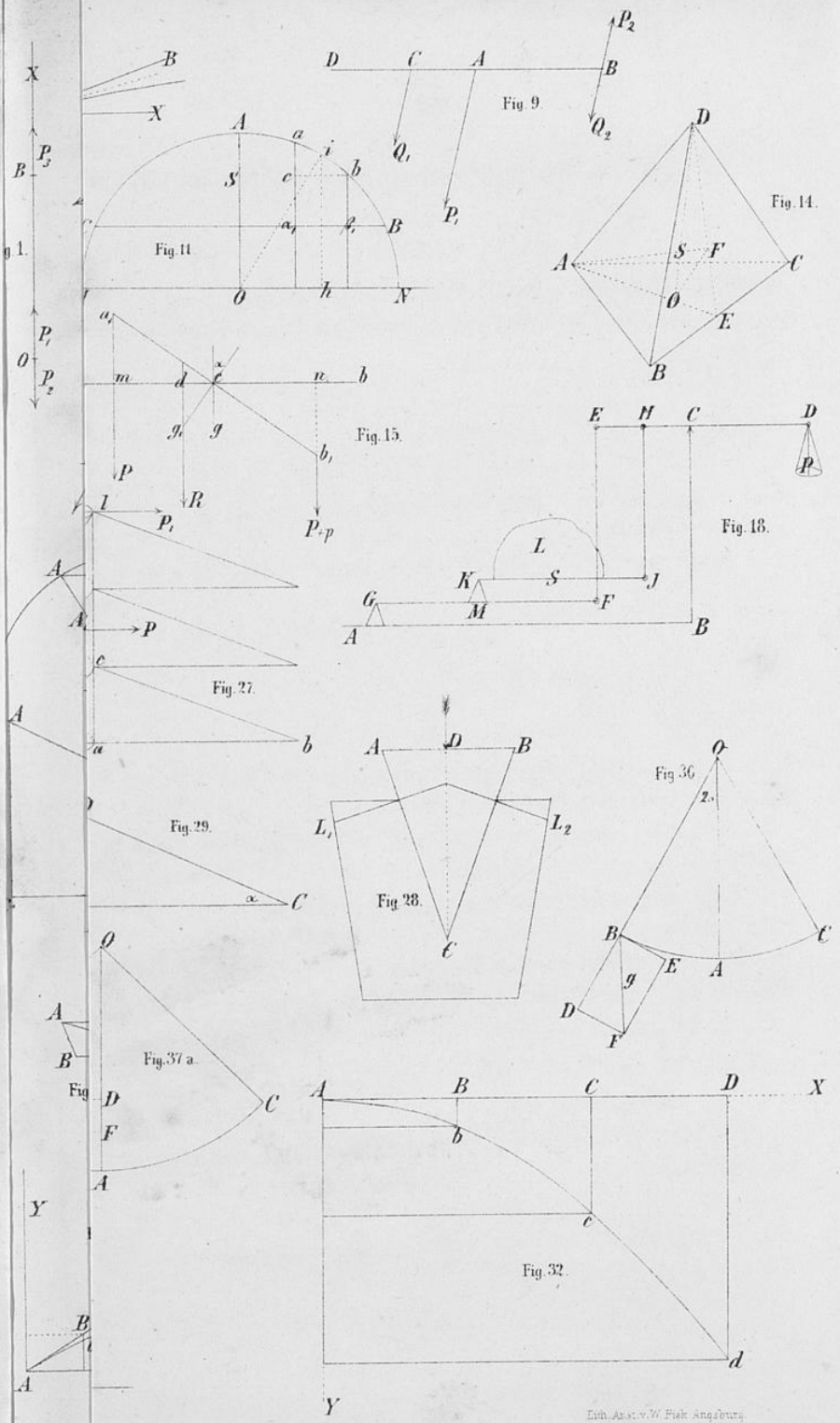
Hat ein Sekundenpendel an einem Orte der Erdoberfläche die Länge l, an einem andern Orte die Länge l_1, so folgt aus

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g_1}}$$

$$l : l_1 = g : g_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9$$

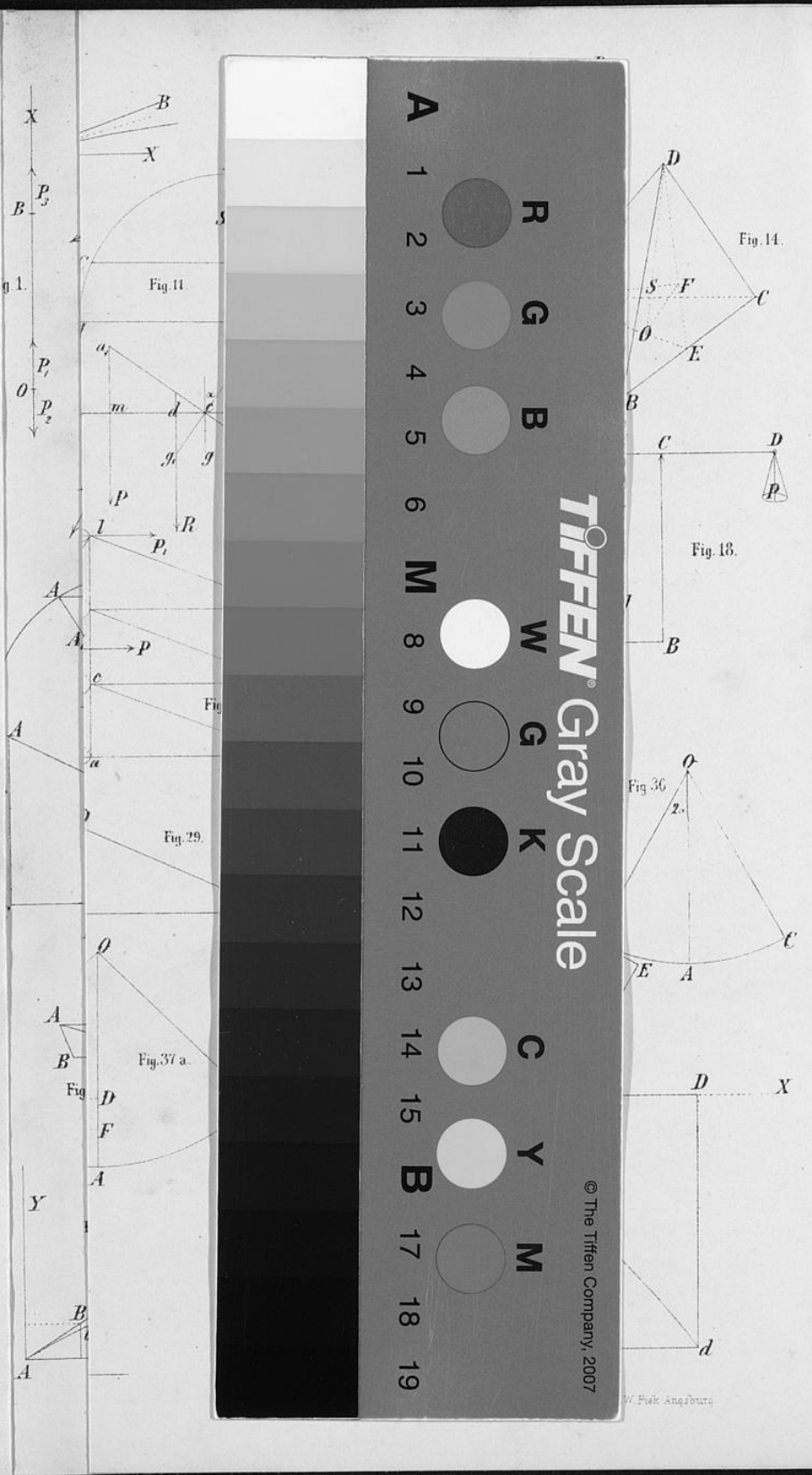
Die Länge des Sekundenpendels nimmt demnach mit der Beschleunigung in demselben Verhältnisse zu oder ab.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



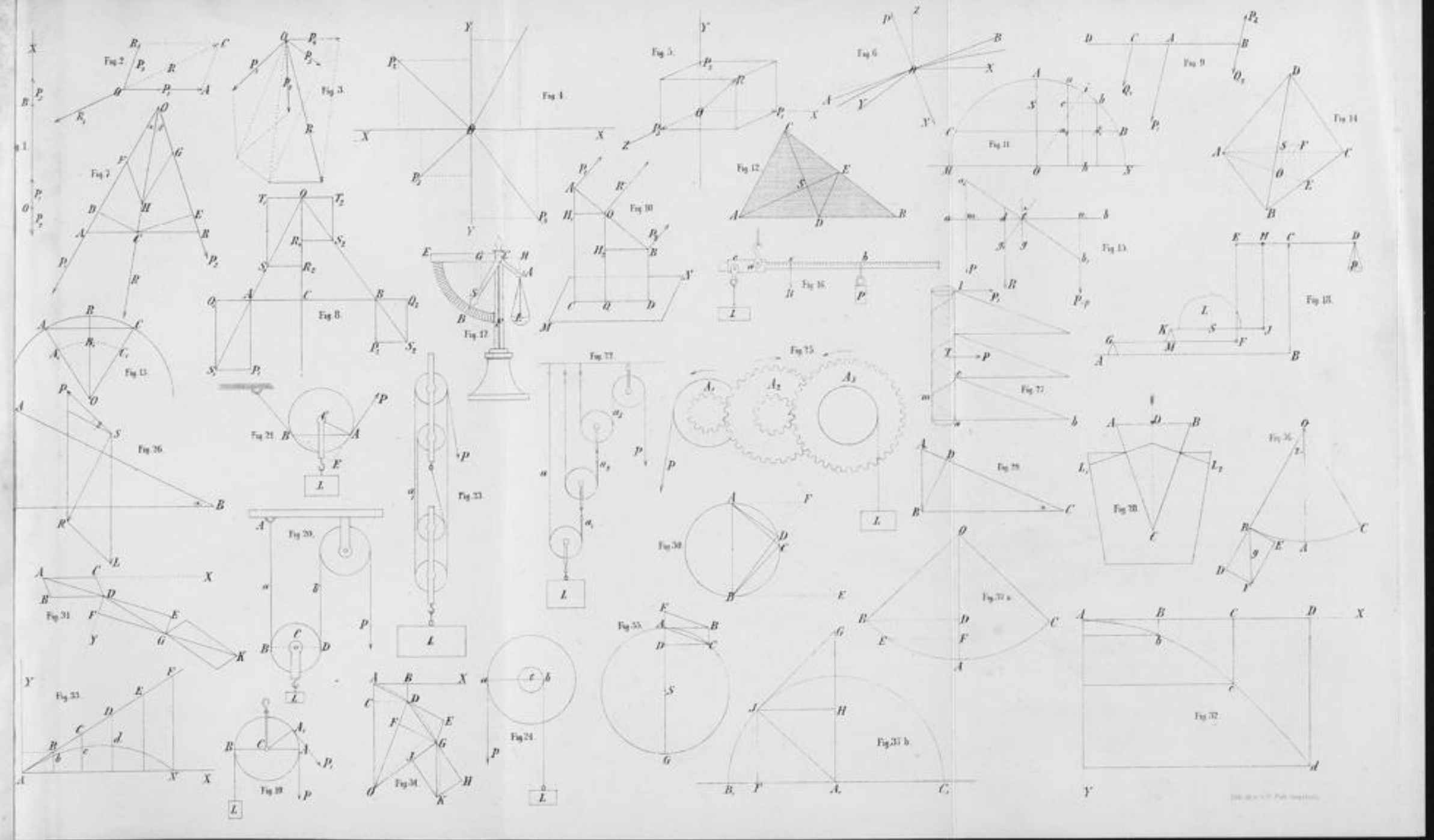
Lith. Anst. v. W. Fiek Augsburg

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



TIFFEN® Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf