# Die älteren rein geometrischen Beweise zu Steiners Konstruktion der Malfattischen Aufgabe.

## I.

Die unter dem Namen „Das Malfattische Problem" bekannte Aufgabe: Einem Dreieck drei Kreise so einzubeschreiben, dass jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt, hat ihren Namen nach dem italienischen Mathematiker Malfatti [1]) erhalten. Er wurde durch die stereometrische Aufgabe: Aus einem geraden dreiseitigen Prisma von beliebigem Material, etwa Marmor, sollen drei Cylinder von der Höhe des Prismas und von möglichst grossem Inhalte herausgeschnitten werden, sodass also von dem Material möglichst wenig übrig bleibt, auf jene planimetrische Aufgabe geführt. Er löste sie, indem er die Länge der Radien der drei verlangten Kreise berechnete und erhielt die Ergebnisse:

$$x = \frac{r}{2n}(s+e-r-f-g)$$

$$y = \frac{r}{2k}(s+f-r-e-g)$$

$$z = \frac{r}{2m}(s+g-r-e-f)$$

in denen r den Radius des dem gegebenen Dreieck einbeschriebenen Kreises, s die halbe Seitensumme, e, f und g die Abstände der Ecken vom Mittelpunkte des einbeschriebenen Kreises, n, k und m die Abstände der Ecken von den Berührungspunkten des einbeschriebenen Kreises bezeichnen. (Vergl. Adams, d. Malfattische Problem, Winterthur 1846.) Aber weder die Lösung der Aufgabe durch Malfatti selbst, die im Jahre 1802 erschien, noch die verschiedener anderer Mathematiker, die bald nachher erschienen, waren rein geometrischer Art, sondern die Resultate waren entweder mittelst trigonometrischer oder algebraisch-geometrischer Rechnungen gefunden. Erst Steiner [2]) gab 1826 eine solche, wie überhaupt die Aufgabe durch ihn ihre heutige Berühmtheit erlangt hat. Sie findet sich im 1. Bande des Crelleschen Journals, pag. 161—184. Er schickt der Lösung eine Anzahl von Sätzen über Potenzen bei Kreisen, Ähnlichkeitspunkte, Ähnlichkeitslinien u. s. w. voraus und fährt dann fort: „Um die Fruchtbarkeit der aufgestellten Sätze an einem dazu geeigneten Beispiel zu zeigen, fügen wir die geometrische Lösung und zugleich die Verallgemeinerung der Malfattischen Aufgabe, jedoch ohne Beweis hinzu:

Man halbiere die Winkel des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 1) durch die Linien AS, BS, CS; diese schneiden sich bekanntlich in einem und demselben Punkte S. 2) In das Dreieck ASB

[1]) Gianfrancesco Malfatti, geb. zu Ala di Roveredo 1731, gestorben 1807 als Professor der Mathematik an der päpstlichen Universität Ferrara.

[2]) Jakob Steiner, geb 1796 zu Utzisdorf im Kanton Bern, gest. 1863 zu Bern; vorgebildet bei Pestalozzi, Professor und Mitglied der Akademie zu Berlin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

beschreibe man den Kreis $c_1$, welcher die Seite AB im Punkte C, berührt und in das Dreieck BSC beschreibe man den Kreis $a_1$. 3) Aus dem Punkte C, lege man an den Kreis a, die Tangente C, $A_2$ und beschreibe 4) in das Dreieck AC, $A_2$ den Kreis a, so ist dieser einer der verlangten. Die beiden anderen gesuchten Kreise werden auf ganz ähnliche Weise gefunden."

Nach dem Bekanntwerden der einfachen Lösung haben mehrere Mathematiker mit mehr oder weniger Erfolg sich daran versucht, einen rein geometrischen Beweis derselben zu erbringen. Solche Beweise haben zuerst Plücker, Quidde, Hart, Talbot und Binder gegeben und die Ergebnisse ihrer Arbeiten sollen im Folgenden wiedergegeben werden. Zwar hat bereits Wittstein in seiner Dissertation: Geschichte des Malfattischen Problems, Erlangen 1871 und in einer anderen kleinen Schrift: Zur Geschichte des Malfattischen Problems, Nördlingen 1878, eine Uebersicht über die meisten dieser Beweise gegeben, doch sind die Inhalte der betreffenden Aufsätze nur skizzenhaft angedeutet, so dass es schwierig ist, sich aus diesen Inhaltsangaben ein Bild des Beweisverfahrens zu machen.

## II.

Der erste Versuch, die Steinersche Lösung der Malfattischen Aufgabe [1]) rein geometrisch zu beweisen, ist von Plücker [2]) gemacht worden. Seine Arbeit findet sich in Crelles Journal, Bd. 11; 1834. Dieselbe ist deshalb hier ausführlich behandelt, weil die des Engländers Talbot (Vergl. Nr. V der vorliegenden Arbeit) sich auf sie stützt. Plücker geht synthetisch vor und bedient sich folgender Sätze, die er vorausschickt und beweist.

1) Wenn man von zwei Punkten, die entweder beide auf den inneren oder den äusseren Tangenten zweier Kreise liegen, noch vier Tangenten an diese Kreise legt, so bestimmen diese ein solches Viereck, in das sich ein Kreis beschreiben lässt.

2) Wenn zwei äussere und eine innere, oder wenn drei innere gemeinschaftliche Tangenten an je zwei von drei gegebenen Kreisen in einem und demselben Punkte sich schneiden, so thun dasselbe die drei jenen entsprechenden Tangenten.

3) Wenn irgend zwei Tangenten zweier gegebener Kreise C und C′ sich in irgend einem Punkte M einer inneren oder äusseren gemeinschaftlichen Tangente dieser Kreise schneiden, so schneiden sich noch zwei andere Tangenten, die jenen beiden in M sich schneidenden parallel sind, in irgend einem Punkte N der anderen inneren oder äusseren gemeinschaftlichen Tangente.

4) Wird ein Punkt N so gewählt, dass er der Durchschnitt einer äusseren und einer inneren gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreise C und C′ ist, so ergiebt sich mit Hilfe von 1): Zieht man von irgend einem Punkte M einer äusseren oder inneren gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreise noch zwei Tangenten an dieselben, so bilden sie mit einer beliebigen der beiden äusseren oder inneren Tangenten ein gewisses Dreieck und der diesem Dreieck einbeschriebene Kreis berührt die letztbezeichnete innere oder äussere gemeinschaftliche Tangente in demjenigen Punkte N, in dem dieselbe von derjenigen gemeinschaftlichen Tangente, auf der der Punkt M nicht liegt, geschnitten wird. (Es sind zwei Fälle zu unterscheiden; in dem einen erhält man den dem Dreieck einbeschriebenen, in dem andern einen ihm anbeschriebenen Kreis.)

5) Berühren sich die beiden Kreise, so fallen gewisse ihrer gemeinschaftlichen Tangenten zusammen und aus 1) ergiebt sich nun: Legt man an zwei sich berührende Kreise von irgend zwei Punkten der gemeinschaftlichen Tangente im Berührungspunkte noch vier Tangenten an beide Kreise, so giebt es stets noch einen dritten Kreis, der diese vier Tangenten zugleich berührt.

6) Berühren sich zwei Kreise, so ergiebt sich aus 4): Zieht man von irgend einem Punkte der Tangente im Berührungspunkte zweier sich von aussen berührenden Kreise noch zwei Tangenten

[1]) Steinersche Lösung soll im Folgenden durch St. L., Malfattische Aufgabe durch M. A. bezeichnet werden.

[2]) Julius Plücker, geb. zu Elberfeld 1801, gest. zu Bonn 1868, Professor der Mathematik und Physik in Halle und Bonn.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

an dieselben, so bilden diese Tangenten mit einer der beiden äusseren Tangenten derselben Kreise ein Dreieck, dessen letztbezeichnete Seite von dem einbeschriebenen Kreise in ihrem Durchschnitt mit der gemeinschaftlichen Tangente im Berührungspunkte berührt wird. (Dieser Satz lässt eine Umkehrung zu.)

Die vorstehenden Sätze benutzt Plücker nun in folgender Weise. Angenommen es seien zwei sich von aussen berührende Kreise C und C′ (Fig. 2) gegeben. Man lege an diese eine äussere Tangente PQ und die gemeinschaftliche Tangente in ihrem Berührungspunkte NR′. Bestimmt man nun einen dritten Kreis c″, der PQ in dem eben bestimmten Punkte R′ berührt, so dass die Mittelpunkte der drei Kreise alle auf derselben Seite von PQ liegen, dann schneiden sich die beiden äusseren Tangenten der Kreise c″ und C, c″ und C′, P′N und Q′N in einem Punkte N, der nach Hülfssatz 6 auf der inneren gemeinschaftlichen Tangente von C und C′ liegt. Konstruirt man nun einen dritten Kreis C″, der C und C′ berührt und zwar so, dass der Berührungspunkt mit C auf Q′N liegt, so liegt der mit C′ auf P′N. Von P und Q aus lege man endlich die gemeinschaftlichen Tangenten an C und C″, C′ und C″, die sich in R schneiden mögen. Die gemeinschaftlichen inneren Tangenten an C und C″, C′ und C″ bestimmen auf den von P und Q ausgezogenen äusseren Tangenten die Punkte P′ und Q′. Es lassen sich nun Kreise c′ und c beschreiben, die PR in Q′, P′N und R′N, bezw. QR in P′, Q′N und R′N berühren. Die drei gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise C, C′ und C″, die dem Dreieck PQR so einbeschrieben sind, dass jeder zwei Seiten dieses Dreiecks berührt und alle drei sich unter einander äusserlich berühren, schneiden sich in demselben Punkte N. Da auch die inneren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise c, c′ und c″ durch denselben Punkt N gehen, so müssen auch die übrigen drei gemeinsamen inneren Tangenten durch einen und denselben Punkt, etwa M gehen. Werden nun die Kreise c, c′ und c″ mit den Kreisen C, C′ und C″ gruppenweise zu je drei zusammengestellt, z. B. c, C′ und c″ u. s. w., so ergiebt sich, dass zwei äussere und eine innere gemeinschaftliche Tangente der letzteren, z. B. P′N, Q′N und R′N durch N gehen. Es müssen also die drei entsprechenden Tangenten der drei Kreise wieder durch denselben Punkt gehen; diese Tangenten sind aber PQ, RQ und eine der durch M gehenden Geraden, etwa MQ. Mithin sind die drei Kreise c″, c′ und c den drei Dreiecken PMQ, PMR, QMR einbeschrieben, die entstehen, wenn M mit den Winkelpunkten verbunden wird. Wird das Dreieck PQR als gegeben angenommen, so ist die Konstruktion der drei verlangten Kreise C, C′ und C″ auf die der Kreise c, c′ und c″ zurückgeführt. Diese aber ergeben sich mit Hülfe der Bestimmung des Punktes M. „Der Punkt M ist derjenige Punkt, in welchem diejenigen drei geraden Linien, welche die Innenwinkel des gegebenen Dreiecks PQR halbieren, zusammentreffen.“

Die Konstruktion der M. A. lautet nun bei Plücker so: Man halbiere die Innenwinkel des gegebenen Dreiecks PQR durch PM, QM und RM. In eins der entstandenen Dreiecke, etwa PMQ werde der Kreis c″ beschrieben, der PQ in R′ berühre. Ferner bestimme man die Punkte P′ und Q′, in denen die den Dreiecken QMR und PMR einbeschriebenen Kreise die Seiten QR und PR berühren. Aus P′ und Q′ lege man an c″ die Tangenten, die sich in N schneiden mögen und ziehe R′N. P′N, Q′N und R′N sind die Tangenten in den Berührungspunkten von je zwei der gesuchten Kreise. Die drei entstandenen Vierecke PR′NQ′, R′NP′Q, Q′NP′R sind den verlangten Kreisen umbeschrieben.

## III.

Einen weiteren Versuch, die St. L. der M. A. rein geometrisch zu beweisen, unternahm Quidde [1]). Seine Arbeit findet sich in Grunert Archiv der Math. und Physik, 15. Bd. unter dem

[1]) Gustav Adolf Quidde, geb. 1815 zu Halberstadt, Gymnasialoberlehrer in Herford, Bückeburg und Erfurt, seit dem Jahre 1884 a. D.; er schrieb ausser der oben erwähnten Arbeit eine Anzahl von Programmabhandlungen meist geometrischen Inhalts.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Titel: Das M. Problem, Beweis der St. Auflösung. Die Beweisführung fusst im wesentlichen auf folgenden Hülfssätzen, die er samt ihren Beweisen vorausschickt.

1) Die Tangenten, die von Punkten der gemeinschaftlichen inneren oder äusseren Tangenten an zwei Kreise gezogen werden, haben stets eine bestimmte Summe oder Differenz, das zwischen den Berührungspunkten liegende Stück derselben.

2) (Umkehrung.) Wenn die Summe oder Differenz der von einem Punkte an zwei Kreise gezogenen Tangenten der Länge der von den Berührungspunkten begrenzten inneren oder äusseren gemeinschaftlichen Tangente der Kreise gleich ist, so muss dieser Punkt auf einer inneren oder äusseren gemeinschaftlichen Tangente dieser Kreise liegen. (Vergl. die Hülfssätze in den späteren Arbeiten von Hart und Binder.)

3) Wenn drei innere gemeinschaftliche Tangenten dreier Kreise oder eine innere mit zwei äusseren einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, so haben die drei anderen gemeinschaftlichen Tangenten derselben Art ebenfalls einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt. (Vergl. Plücker, Hülfssatz 2 und in der späteren Arbeit von Talbot, L. 9).

4) Wenn die äusseren gemeinschaftlichen Tangenten des ersten und dritten, zweiten und dritten dreier Kreise (Fig. 3) BK und DE sich auf der inneren des ersten und zweiten, LM, etwa in P schneiden, während die anderen äusseren, AF und CF, eine Gerade bilden, so geht die andere innere durch den Berührungspunkt F des dritten Kreises.

5) Wenn vier Gerade a, b, c, d einen Kreis berühren und man beschreibt zwei Kreise, von denen einer die Tangente a im Durchschnittspunkt mit c und die Tangente d, der andere b im Durchschnittspunkt mit d und die Tangente c berührt, so bildet die vom Durchschnittspunkt der Tangenten a und b nach dem Mittelpunkte des ersteren gezogene Gerade mit der Tangente a denselben Winkel, wie die nach dem Mittelpunkte des zweiten gezogene mit der Tangente b.

Mit Anwendung dieser Sätze gelangt Quidde zu der folgenden Entwicklung. In das gegebene Dreieck ABC (Fig. 4) beschreibe man 3 Kreise $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so, dass $\alpha$ die Seiten AB und AC, $\beta$ die Seiten BA und BC, $\gamma$ die Seiten CA und CB berührt und dass drei ihrer gemeinschaftlichen inneren Tangenten durch denselben Punkt P gehen. Die Tangente an $\beta$ und $\gamma$ schneide BC in $k_{,}$, die an $\alpha$ und $\gamma$ schneide AC in $l_{,}$, die an $\alpha$ und $\beta$ schneide AB in $m_{,}$. Ferner konstruiere man die Kreise a, b und c so, dass jeder von ihnen zwei der gemeinsamen Tangenten an $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ und eine Dreiecksseite berühre und zwar jedesmal die Seite, die von dem Kreise, an dem jene zu gleicher Zeit Tangenten sind, nicht berührt wird; der Kreis a z. B. müsste also $Pl_{,}$, $Pm_{,}$ und BC berühren. $Pm_{,}$ ist an a und b, $Pk_{,}$ an b und c, $Pl_{,}$ an c und a gemeinsame innere Tangente. Dann müssen nach dem Hülfssatz 3, da die drei gemeinsamen inneren Tangenten der Kreise a, b und c durch P gehen, auch die anderen inneren gemeinsamen Tangenten durch einen Punkt, etwa S, gehen. Zwei äussere und eine innere Tangente der Kreise a, b und $\gamma$ haben den Punkt P zum gemeinsamen Durchschnittspunkt, es werden sich daher auch die anderen entsprechenden Tangenten in einem Punkte schneiden. Nun ist BC die zweite äussere Tangente an a und $\gamma$, AC die an b und $\gamma$, also muss die zweite innere an a und b durch C gehen, es muss SC sein. Ebenso ergiebt sich, dass SA die zweite innere Tangente an b und c, SB die an a und c sein muss. Ausser diesen Tangenten haben aber die Kreise $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ noch drei andere innere Tangenten, die durch denselben Punkt, etwa $P_{,}$, gehen müssen. Die an $\beta$ und $\gamma$ gelegte Tangente schneide BC in k, die an $\alpha$ und $\gamma$ gelegte schneide AC in l, die an $\alpha$ und $\beta$ gelegte schneide AB in m. Konstruiert man nun drei Kreise $a_{,}$, $b_{,}$ und $c_{,}$ so, dass sie die Seiten AB, AC und BC, sowie $P_{,}k$, $P_{,}l$ und $P_{,}m$ berühren und zwar immer eine Seite und zwei dieser Tangenten, so dass $a_{,}$ z. B, BC, $P_{,}m$ und $P^{1}l$ berührt u. s. w. und wendet auf diese Kreise dasselbe Schlussverfahren an, wie vorher auf a, b und c, so folgt dass, da ihre ersten inneren Tangenten in P zusammentreffen, ihre zweiten inneren Tangenten ebenfalls in einem Punkte, etwa $S_{,}$, zusammentreffen müssen; diese können

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

keine anderen sein, als S,A, S,B und S,C. Nun berührt Pl, als gemeinsame äussere Tangente a und $\gamma$, Pm, berührt a und $\beta$; Pk, geht als innere Tangente an $\gamma$ und $\beta$ auch durch P, die anderen äusseren Tangenten an a und $\gamma$, a und $\beta$ fallen zusammen zu BC. Daher muss k (nach Lehrsatz 4) der Berührungspunkt von a mit BC sein, desgleichen k, der von a, mit BC, ebenso l der von b, l, von b, mit AC u. s. w. Unter Anwendung des Hülfssatzes 5 auf die drei Kreise $\beta$, c, und a etwa ergiebt sich, dass $\sphericalangle$ SBC = $\sphericalangle$ S,BA ist; ebenso folgt, dass $\sphericalangle$ SCB = S,CA und $\sphericalangle$ SAC = $\sphericalangle$ S,AB ist. Werden nun die Kreise $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ so gewählt, dass ihre Mittelpunkte auf den Halbierenden der Winkel A, B und C liegen, so fallen SC und S,C, SB und S,B, SA und S,A, mithin S und S, zusammen, also auch die Kreise a und a,, b und b,, c und c,. Dann fallen aber auch P,l und Pl,, P,k und Pk,, P,m und Pm,, also P und P, zusammen; mithin fallen die inneren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise $\alpha$ und $\beta$, $\alpha$ und $\gamma$, $\beta$ und $\gamma$ jedesmal in eine zusammen, d. h. die Kreise berühren einander. Hieraus ergiebt sich die St. L. der M. A.

## IV.

Eine andere rein geometrische Ableitung der St. L. hat der Engländer A. S. Hart [1]) gegeben. Sie findet sich unter dem Titel: Geometrical investigation of Steiner's construction for Malfatti's problem im Quarterly journal of pure and applied mathematics. Vol. 1. 1857. Der Verfasser bedient sich bei seiner Untersuchung folgender Hülfssätze.

1) Wenn die Summe oder Differenz der Tangenten, die von demselben Punkte aus an zwei Kreise gezogen sind, gleich ist dem Stück einer gemeinsamen Tangente, welches zwischen den Berührungspunkten liegt, so liegt jener Punkt auf einer gemeinsamen Tangente. (Vergl. Quidde, Hülfssatz 2.)

2) Wenn zwei Kreise gleiche Stücke von einer gegebenen Geraden abschneiden und wenn durch die Endpunkte dieser Geraden Tangenten an die Kreise gelegt werden, so erscheinen die Kreise von dem Schnittpunkte der Tangenten aus unter gleichen Winkeln.

Aus dem ersten Hülfssatz folgert der Verfasser den Zusatz: Wenn die gemeinsamen Tangenten an jedes Paar von drei Kreisen durch denselben Punkt gehen, so muss eine dieser Tangenten gleich der Summe der beiden anderen sein und deshalb müssen die anderen gemeinsamen Tangenten, die diesen gleichartig sind, ebenfalls durch einen Punkt gehen. Die Tangenten müssen entweder alle innere sein oder zwei müssen äussere und die dritte muss eine innere sein.

Es seien nun L, M, N (Fig. 5) die Berührungspunkte der drei Kreise, die einander berühren und von denen jeder zwei Seiten des gegebenen Dreiecks ABC berührt. Man ziehe DE, FG und HJ, die jene Kreise in L, M und N berühren und die sich in K schneiden mögen. Nach dem ersten Hülfss. muss alsdann H der Berührungspunkt der Seite DF des dem $\triangle$ DKF einbeschriebenen Kreises sein; dasselbe ergiebt sich für die Punkte E und G in Bezug auf die Linien JK, KF und AC, bezw. JK, KD und AB. Nun ist aber HN = HP = QL und NS = ER = EL, also HS = EQ; mithin erscheinen die Kreise HQ und ES von C aus unter gleichen Winkeln nach dem 2 Hülfss. Ferner gehen die drei gemeinschaftlichen Tangenten QL, SN, KF der Kreise HQ, ES und PNR durch K, also muss C ein Punkt auf der anderen gemeinschaftlichen Tangente an HQ und ES sein nach der Folgerung aus Hülfssatz 1; die gemeinschaftliche Tangente halbiert also den $\sphericalangle$ C. Ebenso lässt sich nachweisen, dass die Halbierungslinien der Winkel A und B gemeinschaftliche Tangenten der betreffenden Hülfskreise sind.

---

[1]) Andrew S. Hart, geb. 4. März 1811 in Limerick, Fellow des Trinity College zu Dublin seit 1835, gestorben daselbst am 14. März 1890. Ausser der obigen Abhandlung veröffentlichte er Schriften über mehrere Teile der Mechanik, sowie Abhandlungen meist geometrischen Inhaltes, die im Cambridge and Dublin mathematical journal, den Irish acad proceedings und dem Quarterly journal of math. enthalten sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

## V.

Einen anderen Versuch, die St. L. rein geometrisch zu beweisen, machte der Engländer H. Fox Talbot [1]) in seiner Abhandlung: Researches on Malfatti's problem (Transactions of the Royal Society of Edinburgh; vol. XXIV. 1865). Da diese Arbeit, soweit mir bekannt geworden, nur in einer deutschen Abhandlung: Die Aufgabe des M., ihre Erweiterungen und Lösungen von Dr. Sachs; Programm von Durlach i. B. 1885, zwar erwähnt, von ihrem Inhalte aber nichts angegeben ist, so lasse ich dieselbe ihrem wesentlichen Inhalte nach in deutscher Uebersetzung folgen. Die Beweise der vom Verfasser benutzten Hülfssätze sind bis auf einige, wie auch die lückenhafte Geschichte des Problems weggelassen. Es ist auffallend, dass Talbot in letzterer die Arbeit seines Landsmannes Hart, die 8 Jahre vor der seinigen erschien, nirgends erwähnt; er scheint sie nicht gekannt zu haben.

„Das Problem, das seinen Namen nach dem italienischen Mathematiker M. führt, von dem es zuerst aufgestellt und gelöst ist, hat lange die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gezogen, ihren Scharfsinn angespornt und ist der Gegenstand vieler gründlichen Untersuchungen geworden. Die grosse Aufmerksamkeit, die man dem Problem widmete, hat teilweise ihren Grund in dessen Schwierigkeit, hauptsächlich aber in der Einfachheit der schliesslich gefundenen Lösung. Das M. Problem bietet noch eine Eigentümlichkeit. Obgleich es eine Aufgabe der elementaren Geometrie ist, die durch eine einfache und elegante Konstruction gelöst werden kann, so ist bis jetzt, soweit ich sehen kann, kein rein geometrischer Beweis von der Richtigkeit dieser Konstruktion gegeben. Sie ist bis jetzt nur durch Anwendung der algebraischen Analysis bestätigt worden. Doch geht im Verlauf der Rechnung, obwohl das Resultat unbestritten sein mag, jede geometrische Vorstellung von seiner Richtigkeit verloren. Und doch kann kaum bezweifelt werden, dass ein geometrischer Beweis für eine Reihe von Thatsachen, die der elementaren Geometrie angehören, existieren muss. Die Nothwendigkeit, die Hülfe der Analysis in Anspruch zu nehmen, kann nur entstehen aus dem unvollkommenen Verständniss des wahren Zusammenhanges der geometrischen Grundlehren, in die das Problem verwickelt ist.

Ich überreiche hiermit der Königl. Gesellschaft eine rein geometrische Lösung des Problems, die ich der Uebersichtlichkeit wegen in verschiedene Teile geteilt (und Lemmata genannt) habe. Einige derselben verdienen Beachtung ihrer selbst wegen und ohne Rücksicht auf M's Problem. Wenn diese Sätze bewiesen sind, liefert ihre Vereinigung einen klaren Beweis der Richtigkeit der Lösung, die die Mathematiker bis jetzt nur mit Hülfe der Analysis erreicht haben. In dem Beweise, den ich hiermit vorlege, werde ich im Allgemeinen Plückers geometrischer Beweisführung bis dahin folgen, wo er von der Geometrie in das Gebiet der Analysis übertritt und dann einen rein geometrischen Beweis des noch übrig bleibenden Teiles der Untersuchung geben.

1) Wird einem Dreieck ein Kreis einbeschrieben, so ist die Differenz der Abschnitte auf der Grundseite gleich der Differenz der anderen Seiten.

2) Wenn sich zwei Kreise im Punkte O berühren, (Fig. 6) so mag BFGC ihre gemeinschaftliche äussere und AOD ihre gemeinschaftliche innere Tangente sein. Ist A irgend ein Punkt der Tangente AOD und sind AEB und AHC Tangenten der beiden Kreise, so wird der dem Dreieck ABC einbschriebene Kreis die Grundseite desselben in D berühren. Der Bew. folgt aus 1.

3) Ein besonderer Fall von 2 ist der, wenn (Fig 7) der Punkt A so nahe an O angenommen wird, dass die Tangenten AE und AH sich von der Grundseite BC entfernen, ihre Verlängerungen AE und AC aber die Grundseite in B und C schneiden.

4) Der geometrische Ort der Endpunkte der Tangenten von gleicher Länge an einen Kreis ist ein diesem Kreise koncentrischer.

[1]) Biographisches über Talbot beizubringen war mir trotz aller Bemühungen nicht möglich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5) Es seien A und B (Fig. 8) die Mittelpunkte zweier Kreise und RS = R'S' ihre gemeinschaftlichen inneren Tangenten. Werden dann zwei Tangenten OP und OQ von irgend einem Punkte O, der nicht auf den Verlängerungen von RS und R'S' liegt, an dieselben gelegt, so ist OQ—OP nicht gleich RS.

Bew. Man beschreibe um A als Mittelpunkt mit einem Radius AO einen Kreis, der die Verlängerung von SR in Z schneidet. Dann ist nach 4) OQ = ZS, also OQ—OP = ZS—OP. Aber OP ist nicht gleich ZR, weil O auf der Peripherie eines Kreises liegt, der dem Kreise B nicht koncentrisch ist; also ist OQ—OP nicht gleich ZS—ZR oder RS.

Zus. Ist OQ—OP = RS, so muss O entweder auf der Verlängerung von RS oder auf der von R'S' liegen.

6) A, B und C mögen drei Kreise und zugleich ihre Mittelpunkte bezeichnen. (Fig. 9) DE sei die innere gemeinschaftliche Tangente an A und B, FG die an B und C, HJ die an C und A. Dann ist, wenn diese 3 Tangenten sich bei genügender Verlängerung in einem Punkte schneiden, DE = FG + IH, d. h. die grösste gemeinschaftliche Tangente ist gleich der Summe der beiden anderen.

7) A, B und C mögen wieder drei Kreise und zugleich ihre Mittelpunkte bezeichnen. (Fig. 10) DE sei die äussere gemeinschaftliche Tangente an A und B, FG diejenige an A und C, HJ die innere gemeinschaftliche Tangente an B und C. Wenn diese 3 Tangenten bei genügender Verlängerung sich in einem Punkte O schneiden, so ist FG—DE = HJ.

8) Wenn drei innere gemeinschaftliche Tangenten von drei Kreisen sich in einem Punkte O schneiden, so schneiden sich ihre drei anderen inneren Tangenten in einem anderen Punkte P.

Beweis. Vorausgesetzt, die in O (Fig. 9) sich schneidenden gemeinschaftlichen Tangenten wären ausgelöscht und ersetzt durch die 3 anderen inneren gemeinschaftlichen Tangenten, so ist zu zeigen, dass auch diese sich in einem Punkte schneiden. Zwei von ihnen, die den Kreis A berührenden, mögen sich in P schneiden. Bezeichnen wir die neuen Tangenten wie vorher, aber mit Indices versehen, so ist doch DE = D'E', FG = F'G', HJ = H'J'. In 6) ist bewiesen, dass DE = FG + HJ oder DE—HJ = FG, also ist D'E'—H'J' = F'G'. Die neuen gemeinschaftlichen Tangenten, die sich in P treffen, PE'D' und PH'J', besitzen ein Stück, welches auf beiden gleich gross ist, PE' = PH', sie sind Tangenten desselben Kreises A. Subtrahiert man dies gemeinsame Stück, so ergiebt sich PE'D'—PH'J' = E'D'—H'J', von dieser Differenz haben wir bewiesen, dass sie gleich F'G' ist. Deshalb ist P ein Punkt, von dem aus wir Tangenten PD' und PJ' an die Kreise B und C gezogen haben, deren Differenz, wie wir fanden, gleich F'G', der inneren gemeinschaftlichen Tangente der Kreise B und C ist. Es muss also nach Zusatz von 5) P ein Punkt auf der Verlängerung von F'G' sein

9) Wenn zwei äussere und eine innere gemeinschaftliche Tangente dreier Kreise sich in einem Punkte O schneiden, so schneiden sich die drei anderen entsprechenden Tangenten in einem anderen Punkte P.

Der Beweis dieses Satzes stimmt mit dem des vorigen überein, wenn man den Hilfssatz 7) statt 6) anwendet. Diese Sätze mögen nach ihrem Entdecker die Plücker'schen heissen. (Vergl. Plücker, Hülfss. 2 und Quidde, Hülfss. 3.) Es ist klar, dass es noch mehrere andere Fälle giebt, ausser den in 6, 7, 8 und 9 betrachteten; da sie aber für die Lösung der M. A. nicht erforderlich sind, sollen sie hier übergangen werden.

10) Wenn drei Geraden von einem Punkte A aus gezogen werden (Fig. 11), die die Winkel DAX = $\delta$ und EAX = $\varphi$ mit einander bilden, und man beschreibt diesen Winkeln zwei Kreise mit den Mittelpunkten B und C so ein, dass sie die beiden äusseren Graden in D und E berühren und verbindet endlich D mit E, so stehen die auf der Verbindenden durch die Peripherien abgeschnittenen Sehnen in einem konstanten Verhältnis, nämlich im Verhältnis $\operatorname{tang} \frac{\delta}{2} : \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}$

Zusatz. Ist $\delta = \varphi$, so ist DF = GE, ist $\delta > \varphi$, so ist DF > GE.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

11) Wird ein Winkel DAE durch die Grade AX halbiert (Fig. 12) und jeder der beiden Hälften irgendwo ein Kreis einbeschrieben, der die Schenkel in D bezw. E berührt, so sind die von diesen Berührungspunkten an die beiden Kreise gelegten Tangenten einander gleich.

Der Beweis ergiebt sich mit Hülfe von 10.

Zusatz. Sind umgekehrt die beiden Tangenten einander gleich, so sind auch die beiden Winkel einander gleich.

Beweis. Angenommen, die beiden Winkel seien ungleich und $\sphericalangle$ DAX $>$ EAX, so muss die Sehne DF $>$ EG sein nach 10, Zusatz 2. Subtrahiert man beide von DE, so ist EF $<$ DG, also EF.DE $<$ DG.DE, und $EL^2 < DK^2$, somit EL $<$ DK; nach der Voraussetzung aber ist EL $=$ DK, mithin kann $\sphericalangle$ DAX nicht grösser sein als EAX. Ebenso wird bewiesen, dass er nicht kleiner sein kann, mithin ist $\sphericalangle$ DAX $=$ $\sphericalangle$ EAX.

Die Hülfss. 10 und 11 sind besondere Fälle eines weit allgemeineren Satzes, den ich bei einer anderen Gelegenheit mitzuteilen beabsichtige. In den ersten 9 Sätzen bin ich im wesentlichen Plücker gefolgt, habe mich aber bemüht, seine Beweisführung dadurch strenger zu machen, dass ich mehr auf das Einzelne eingegangen bin als er. Aber 10) und 11), und der allgemeinere Satz, von dem sie besondere Fälle sind, sind von mir, wenigstens habe ich nicht bemerkt, dass sie bis jetzt irgendwo veröffentlicht sind. Sie füllen das Glied, welches in Plückers Untersuchungen fehlt, aus und erleichtern den Beweis von St. eleganter Konstruktion. Mit Hülfe der vorstehenden Sätze lässt sich die Richtigkeit jener Konstruction auf folgende Weise zeigen.

Angenommen, die Aufgabe wäre gelöst und die drei Kreise $A_1$, $B_1$, $C_1$ wären gefunden (Fig. 13), so ist klar, dass ihre drei inneren gemeinsamen Tangenten sich in einem Punkte N treffen und die äusseren Tangenten GH, JI, KL halbieren. Man verlängere die Graden EN und FN, bis sie die Grundseite BC in den Punkten Q und R schneiden. Wird dann dem so entstandenen Dreieck QRN (Fig. 14) ein Kreis einbeschrieben, der $\alpha$ heissen mag, so berührt er die Grundseite im Punkte D nach Hülfss. 3. Durch eine ganz ähnliche Konstruktion erhalten wir einen Kreis $\beta$, der die Verlängerungen von DN und EN, sowie die Seite AC in F, und einen Kreis $\gamma$, der die Verlängerungen von DN und FN, sowie die Seite AB in E berührt.[1]) Ein blosser Anblick der Figur genügt, zu zeigen, dass die Tangente DY, die die Kreise $B_1$ und $\gamma$ berührt, gleich ist der Summe zweier Strecken, die den äusseren Tangenten EL und DG gleich sind und dass die Tangente EZ, die von E aus gezogen ist und die beiden Kreise $B_1$ und $\alpha$ berührt, gleich ist der Summe der äusseren Tangenten EL und DG. Mithin sind die beiden Tangenten DY und EZ einander gleich, da jede gleich DG + EL ist. Aber die 3 Geraden DN, EN und FN schneiden einander in einem Punkte, d. h. die drei inneren gemeinschaftlichen Tangenten der 3 Kreise $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ schneiden sich in einem Punkte. Also müssen (nach Hülfss. 8) ihre drei anderen gemeinschaftlichen Tangenten sich ebenfalls in einem Punkte schneiden; dieser mag O heissen. DN mit ihrer Verlängerung ist die äussere Tangente der Kreise $B_1$ und $\gamma$, EN mit ihrer Verlängerung ist die äussere Tangente desselben Kreises $B_1$ und des Kreises $\alpha$ und, wie oben gesagt, ist FN mit ihrer Verlängerung die innere Tangente der Kreise $\alpha$ und $\gamma$. Aber DN, EN und FN treffen sich in einem Punkte, also treffen sich (nach Hülfss. 9) die 3 anderen entsprechenden Tangenten dieser Kreise ebenfalls in einem Punkte. Es ist nun leicht zu sehen, welcher Punkt dies sein muss. Denn die zweite äussere gemeinschaftliche Tangente der Kreise $B_1$ und $\gamma$ ist AB, eine der Seiten des gegebenen Dreiecks und die zweite äussere gemeinschaftliche Tangente der Kreise $B_1$ und $\alpha$ ist BC, ebenfalls eine der Seiten des Dreiecks. Aber wir wissen, dass der Schnittpunkt von AB und BC in B, einer der Ecken des Dreiecks liegen muss. Demnach erhalten wir das wichtige Resultat, dass die zweite gemeinschaftliche innere Tangente der Kreise $\alpha$ und $\gamma$ durch die

[1]) In der Figur sind nur der verlangte Kreis $B_1$, sowie die Hülfskreise $\alpha$ und $\gamma$ dargestellt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ecke B des Dreiecks geht. Auf ähnliche Weise kann gezeigt werden, dass die zweite gemeinschaftliche innere Tangente der Kreise $\alpha$ und $\beta$ durch C und die der Kreise $\beta$ und $\gamma$ durch A geht. Diese drei Tangenten sind daher drei Geraden, die von A, B und C, den Ecken des gegebenen Dreiecks ausgehen und sich in einem Punkte, den wir oben O nannten, schneiden. Nun sagt Steiner, dass dieser Punkt O der Mittelpunkt des dem gegebenen Dreieck einbeschriebenen Kreises ist und dies ist der Satz, den Plücker und andere Geometer nur mit Hülfe der Analysis zu beweisen vermocht haben. Benutzen wir aber den Hülfssatz 11, dessen Richtigkeit wir oben gezeigt haben, so nimmt unsere Beweisführung folgenden Weg. Da wir oben bewiesen haben, dass die Gerade BO die Kreise $\alpha$ und $\gamma$ berührt und da wir ferner gezeigt haben, dass die Gerade DY, die von dem Berührungspunkte D aus an den Kreis $\gamma$ gezogen ist, gleich EZ ist, die vom Berührungspunkte E aus bis zur Berührung mit dem Kreise $\alpha$ gezogen ist, so halbiert nach dem Zusatz zu Hülfss. 11 die Gerade BO notwendig den $\sphericalangle$ B des ursprünglichen Dreiecks. Auf ähnliche Weise wird gezeigt, dass CO den $\sphericalangle$ C und AO den $\sphericalangle$ A halbiert. Daher ist O der Mittelpunkt des dem $\triangle$ ABC einbeschriebenen Kreises und das ist Steiners Satz.

Die Lösung der M. A. lautet deshalb folgendermassen: Man halbiere die Winkel des $\triangle$ ABC durch die Geraden AO, BO, CO. In zwei der kleineren so entstandenen Dreiecke AOB und BOC beschreibe man die Kreise $\gamma$ und $\alpha$. Von D aus, dem Berührungspunkte von $\alpha$ und DC, ziehe man DY, die den Kreis $\gamma$ berührt. Alsdann wird DY auch einen der verlangten Kreise berühren und derselbe Kreis berührt auch AB und BC, zwei Seiten des gegebenen Dreiecks; er ist deshalb vollständig bestimmt".

## VI.

Im Jahre 1868 erschien ein weiterer rein geometrischer Beweis der St. L im Programm des Königl. Würtembergischen Seminars Schönthal zum Kursus 1864—1868 von Professor Binder [1]) unter dem Titel: Die Malfattische Aufgabe. Die umfangreiche Abhandlung umfasst sieben Abschnitte, von denen für die vorliegende Arbeit nur die fünf ersten in Betracht kommen, die sich auf das einfache ebene Problem beziehen; im 6. Abschnitt giebt der Verfasser geschichtliche Notizen über das Problem und eine allgemeine Erörterung desselben, im 7. die Steinersche Verallgemeinerung der M. A., worin er zuerst nachgewiesen hat, dass „die Plückersche Lösung der Steinerschen Verallgemeinerung der M. A. im besten Falle unerwiesen, im höchst wahrscheinlichen schlimmeren Falle unrichtig ist".

Der erste Absch. der Binderschen Abhandlung enthält „einige Sätze über Tangenten." Diese Sätze beziehen sich auf die Lage der Schnittpunkte der Halbierenden der Winkel und Aussenwinkel des Dreiecks, auf gemeinschaftliche Tangenten an zwei Kreise u. s. w., denen der Verfasser eine Anzahl von Folgerungen und Umkehrungen hinzufügt. Unter den Sätzen sind folgende für Lösung und Beweis der M. A. wichtige hervorzuheben.

1) Wenn ein Punkt auf der Verlängerung einer inneren gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreise liegt, so ist die Differenz der beiden anderen von diesem Punkte aus gezogenen Tangenten gleich dem von der Peripherie der beiden Kreise begrenzten Abschnitt der gemeinschaftlichen Tangente. (Vergl. Quidde, Hülfss. 1 und 2.)

2) Berühren zwei Kreise je einen Schenkel eines Winkels und erscheinen vom Scheitelpunkte des Winkels aus die von den Berührungspunkten aus gezogenen Radien unter gleichen Winkeln, so sind die von jedem Berührungspunkte aus an den anderen Kreis gezogenen Tangenten einander gleich.

---

[1]) Gustav Binder, geb. 1835 zu Heidenheim in Würtemberg, 1868—1875 Professor für Mathematik und Philologie am Seminar Schönthal, gest. 1883 zu Ulm. Er war mehrere Jahre Redakteur des Aufgaben-Repertoriums in Hoffmanns Zeitschrift für den math. Unterricht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der 2. Teil der Binderschen Abhandlung ist betitelt: Deduktion des Problems. Der Verfasser untersucht darin die Lage der Berührungs- und Schnittpunkte der Tangenten und der Mittelpunkte von 3 sich berührenden Kreisen und stellt die Aufgabe: Es sind drei gerade Linien gegeben; man soll 3 Kreise zeichnen, von denen jeder die beiden anderen berührt, so dass jedes Kreispaar eine der drei Geraden zur gemeinschaftlichen Tangente hat. Diese Aufgabe lässt sich, je nach der Bestimmung, die man den 3 Geraden giebt, so aussprechen: Es sind 3 (nicht in einem Punkte sich schneidende) Gerade gegeben. Man soll 3 sich paarweise berührende Kreise zeichnen, so dass je eine Gerade gemeinschaftliche Tangente je eines Kreispaares werde und zwar

A. sollen zwei Gerade gemeinschaftliche Tangenten in den Berührungspunkten der zugehörigen Kreispaare werden, entweder so, dass

a) 2 Kreise vom dritten umschlossen werden

b) sich die 3 Kreise von aussen berühren,

B. soll eine Gerade gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte des zugehörigen Kreispaares werden, die beiden anderen sollen ihre Kreispaare in zwei verschiedenen Punkten berühren, so dass sich die 3 Kreise von aussen berühren müssen,

C. sollen alle drei Gerade ihre Kreispaare je in zwei verschiedenen Punkten berühren, in welchem Falle sich die 3 Kreise ebenfalls von aussen berühren müssen.

Im dritten Abschnitt seiner Arbeit behandelt der Verfasser die im 2. Abschnitt gestellten Aufgaben A, a und b, im 4. Abschnitt die Aufg. B in völlig schulgemässer Form, indem er zu jeder Aufgabe die vollständige Analysis, die sich daraus ergebende Konstruction, sowie den Beweis nebst der „Möglichkeit" giebt. Aus der Analysis der Aufgabe A, b ergiebt sich der für die Aufgabe C wichtige Satz:

3) Wenn 3 Kreise sich paarweise von aussen berühren und man zieht die inneren Tangenten zweier und eine äussere Tangente des dritten Kreispaares, so berührt derjenige Berührungskreis des von den drei Tangenten gebildeten Dreiecks, welcher in denselben drei Winkeln liegt, in denen die einzelnen Kreise liegen, die äussere Tangente des dritten Kreispaares in dem Punkte, in welchem sie von der inneren Tangente desselben Kreispaares geschnitten wird.

Endlich ergiebt sich noch aus der Lösung der Aufg. B der Lehrsatz:

4) Wenn die Schenkel eines Winkels gemeinschaftliche äussere Tangenten zweier Paare von 3 sich gegenseitig berührenden, ganz in den Winkel fallenden Kreisen sind und man konstruiert die zwei in den Winkel fallenden Kreise, welche je eine solche äussere Tangente und die beiden inneren Tangenten der zwei anderen Kreispaare berühren, so werden diese beiden Kreise auch von der Halbierenden des Winkels berührt.

Mit Hülfe der in den vorhergehenden Abschnitten gelösten Aufgaben und der sich daraus ergebenden Sätze löst Binder im 5. Absch. seiner Arbeit die Aufg. C oder das M. Problem. Die Analysis derselben hat etwa folgenden Gang. Vorausgesetzt, die dem $\triangle$ GHJ (Fig. 15) einbeschriebenen Kreise A, B, C entsprächen der Forderung, so dass GH von A und B in den Punkten M und N, GJ von A und C in R und S, HJ von B und C in g und h berührt würden, Die 3 inneren Tangenten OD, OE und OF dieser 3 Kreise schneiden sich nun nach einem im 2. Absch. enthaltenen Satze in einem Punkte und die Verlängerungen dieser Tangenten über die Berührungspunkte hinaus mögen die Dreiecksseiten in den Punkten W, U und P schneiden. Unter Anwendung der in den Abschnitten 3 und 4 sich ergebenden Sätze werden die 3 Kreise X, Y, Z, die die inneren Tangenten je zweier Kreispaare und die äussere Tangente des dritten berühren, nicht nur diese dritte je im Schnittpunkt mit der inneren Tangente des dritten Kreispaares, sondern auch die Halbierenden der beiden anliegenden Dreieckswinkel berühren.

Die von Binder gegebene Konstruktion ist im Wesentlichen die Steinersche, nur, wie der Verfasser sagt, „so im Ausdruck abgeändert, wie es für den vom Verfasser gefundenen Beweis

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

erforderlich schien". Die Konstruktion lautet[1]): Man halbiere die drei inneren Winkel des $\triangle$ GHJ, beschreibe in die entstandenen Dreiecke oGH und oGJ die Kreise X und Y, ziehe vom Berührungspunkte P des Kreises X und der Seite GH an den Kreis Y die Tangente Pd und vom Berührungspunkte U von Y mit JG an den Kreis X die Tangente Uc so, dass die Kreise in den Winkeln dPG und cUG liegen, ziehe die zweite gemeinschaftliche Tangente a b beider Kreise, die GH in K, JG in T schneidet. Man halbiere den $\sphericalangle$ dPG, die Halbierende schneide Go in A; man verbinde K mit X, die Verbindende schneide die Halbierende des $\sphericalangle$ dPH in B; man verbinde T mit Y, die Verbindende schneide die Halbierende des Winkels GJH in C, fälle von A, B und C aus auf GH und JG die Lote AM, BN und CS und beschreibe mit ihnen um A, B und C die Kreise; sie sind die verlangten.

Dass sie den Forderungen der Aufgabe genügen, wird so bewiesen: Sie sind konstruiert entsprechend der Aufg. B im 4. Abschn. in Bezug auf das $\triangle$ TGK, so dass sich die Kreise A, B und C von aussen in den Punkten D, E und F berühren und zwar berühren die Kreise A und B die Seite GH in M und N, die Kreise C und A berühren die Seite GJ in R und S. Somit ist nur noch zu beweisen, dass die Kreise B und C die Seite HJ berühren. Nun haben die Kreise B und C zwei gemeinschaftliche äussere Tangenten, von denen die eine von der Verlängerung von KD über D hinaus etwa in W getroffen werden mag. Diese Tangente muss jedenfalls die Verlängerung eines der Schenkel des $\sphericalangle$ G, GS, etwa in J' schneiden; der Schnittpunkt mit dem anderen Schenkel sei H'. Es mögen sich die durch C gehende Halbierende des $\sphericalangle$ WJ'S und die durch B gehende des $\sphericalangle$ WH'N auf GA etwa in o' schneiden; sie berühren die Kreise X und Y nach dem Satze, der sich bei der Lösung der Aufg. B ergab. Da nun $\sphericalangle$ o'GJ' + $\sphericalangle$ o'J'G < 2R, so ist o'J'G ein Dreieck, dem der Kreis Y einbeschrieben ist und es muss o' sowohl auf der Verlängerung von Gf als auch auf der von Ge liegen. Liegt nun H' auf der Verlängerung von GP, so ist:

$$\sphericalangle Bo'C = 2R - (\sphericalangle o'J'H' + o'H'J') = 2R - \tfrac{1}{2}(GJ'H' + GH'J') = 2R - (R - \tfrac{1}{2} UGP)$$
$$= R + \tfrac{1}{2} UGP.$$

Nun ist $\sphericalangle Xo'A = \tfrac{1}{2} Ao'B$ u. $\sphericalangle Yo'A = \tfrac{1}{2} Ao'C$, woraus folgt: $\sphericalangle Xo'Y = \tfrac{1}{2}(Ao'B + Ao'C)$

$$= \tfrac{1}{2}(4R - \sphericalangle Bo'C) = 2R - \tfrac{1}{2} \sphericalangle Bo'C = 2R - \tfrac{1}{2}(R + \tfrac{1}{2} UGP)$$
$$= 2R - \tfrac{1}{2} R - \tfrac{1}{4} UGP = \tfrac{3}{2} R - \tfrac{1}{4} UGP$$

Da sich nun nachweisen lässt, dass auch der Punkt o auf der Verlängerung von Ge über e und f hinaus liegt und dass $\sphericalangle XoY = \tfrac{3}{2} R - \tfrac{1}{4} UGP$ ist, so liegen o und o' auf einem Kreisbogen, der durch X und Y geht und der den $\sphericalangle \tfrac{3}{2} R - \tfrac{1}{4} UGP$ als Peripheriewinkel fasst; sie liegen aber zugleich auf GA, die XY schneidet, also mit dem Kreisbogen nur einen Punkt gemein hat, d. h. die Punkte o und o' fallen zusammen, also auch die beiden von ihnen aus an die Kreise X und Y gelegten Tangenten. Es fällt mithin J auf J', H auf H' und HJ ist die gemeinschaftliche äussere Tangente der Kreise B und C.

## VII.

Die im Vorhergehenden wiedergegebenen fünf Beweise bezw. Analysen zu St. L. der M. A. sind die ersten, die die Bezeichnung „rein geometrisch" beanspruchen können. Alle früheren Versuche, die Richtigkeit jener Konstruktion nachzuweisen, sind entweder trigonometrischer Art oder „aus metrischen Beziehungen und algebraischen Umformungen hervorgegangen". (Schröter, Die St. L. der M. A.) Wenn bei den obigen Beweisführungen einerseits der aufgebotene Scharfsinn bemerkenswert ist, so ist es anderseits eigentümlich, dass ihre Verfasser sich nicht an die von Steiner seiner Lösung vorausgeschickten Sätze über zugeordnete Pole, Chordalen, Aehnlichkeitspunkte u. s. w. bei Kreisen in einerlei Ebene halten, sondern selbständig gewisse Sätze, die sie manchmal sehr mühselig herbeiholen, zu Grunde legen. Das ist namentlich bei der Arbeit von

[1]) Um die Figur unübersichtlicher zu machen, sind mehrere der im Folgenden angegebenen Linien daraus fortgelassen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Quidde der Fall. Dieselbe enthält, wie aus der Darlegung derselben in III. hervorgeht, keinen eigentlichen Beweis jener Konstruktion, sondern nur eine Analysis, obgleich der Verfasser seine Arbeit benennt: Beweis der Steinerschen Auflösung. Das bemerkt auch schon Binder im 6. Abschn. seiner Arbeit, indem er hervorhebt, dass gerade zu der Quiddeschen Analysis einen Beweis zu geben nicht leicht sein dürfte. Ebenso wenig wie diese Arbeit ist auch die von Plücker ein völlig ausreichender Beweis der St. L. Wenn man auch zugesteht, dass die Konstruktion Plückers sich mit der Steiners in Einklang bringen lässt, so hat doch der Verfasser gerade an dem schwierigsten Teile der Arbeit, da, wo er sich bemüht, den Nachweis zu erbringen, dass die zweiten gemeinschaftlichen Tangenten an die drei Hülfskreise die Winkel des gegebenen Dreiecks halbieren, die Hülfe der Analysis in Anspruch genommen und diesen Nachweis durch eine, wie er sich selbst ausdrückt, „etwas ermüdende Eliminationsrechnung" algebraisch-analytisch geführt. Die Ableitung der St. K. des Engländers Hart ist eine rein geometrische, aber auch seine Hülfssätze sind nicht der Steinerschen Kreistheorie entnommen, vielmehr solcher Art, dass sie, wie der Verfasser sagt, „lead to a tolerable easy proof of the truth of his result". Es bleiben von den oben dargelegten Beweisführungen noch die von Talbot und Binder. Der erstere folgt dem Gange der Plückerschen Entwickelung bis dahin, wo dieser den Weg der reinen Geometrie verlässt und den der Analysis einschlägt. Es gelingt ihm zwar, das „missing link" in Plückers Beweisführung durch seine Hülfss. 10 und 11 zu ergänzen und einen rein geometrischen Beweis der St. L. zu erbringen, der aber ebenso wenig wie alle früheren dem Sinne der reinen Geometrie entspricht. Dasselbe gilt auch von der Arbeit Binders; sie enthält einen rein geometrischen Beweis der St. L. in ihrer ganzen Allgemeinheit für drei Gerade. Der Verfasser sagt in der Einleitung zu seiner Arbeit: Geübtere Leser des folgenden Aufsatzes werden gebeten, zu berücksichtigen, dass derselbe mit Absicht ganz elementar gehalten ist, damit er auch von Schülern verstanden werden könne, die mit den Anfangsgründen der neueren Geometrie nicht vertraut sind." Infolge dessen bietet der Verfasser eine gewaltige Anzahl von Hülfssätzen und -Aufgaben auf, wodurch der Arbeit eine grosse Weitschweifigkeit anhaftet. Der Wert der Arbeit Binders beruht weniger auf dem von ihm gefundenen Beweise, als auf einer allgemeinen Erörterung des Problems (6. Abschnitt der Binderschen Arbeit), worin Untersuchungen über die Anzahl und Beschaffenheit der Lösungen angestellt werden. Diese Untersuchungen sind nebst denen von Steiner die ersten, in denen eine genaue Diskussion aller möglichen Fälle der Auflösungen gegeben ist. Steiner behauptet, es seien immer 32 Lösungen möglich; Binder weist nach, dass die allgemeine Aufgabe: Es sind drei gerade Linien gegeben. Man soll drei Kreise zeichnen, von denen jeder die beiden anderen berührt, so dass jedes Kreispaar eine der drei Geraden zur gemeinschaftlichen Tangente hat, wenigstens 86 und höchstens 96 verschiedene Lösungen hat, wenn die drei Geraden ein (ungleichseitiges) Dreieck bilden.[1]) Dieser Teil der Untersuchungen Binders konnte in der vorliegenden Arbeit als über den Rahmen derselben hinausgehend nicht berücksichtigt werden.

Ausser den im Vorhergehenden besprochenen Arbeiten über die St. L. der M. A. erschienen einige Jahre später weitere, die sich mit dem gleichen Gegenstande beschäftigten und zwar eine solche in Grunerts Archiv für Math. und Physik, 55. Teil 1873 unter dem Titel: Geometrischer Beweis der St. K. zur Lösung der M. A, von Mendthal in Königsberg und eine andere in Crelles Journal, 77. Band 1874: Die St. L. der M. A. von Professor Schröter in Breslau. Wenn Wittstein in der Einleitung zu seiner Schrift: Zur Geschichte des M. Problems sagt, dass „in der Geschichte desselben seit dem Erscheinen der Schröterschen Abhandlung ein gewisser Abschluss insofern

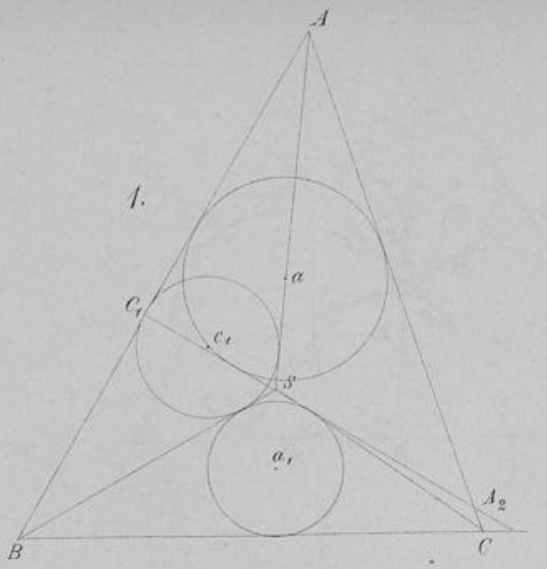
[1]) In der bereits oben (in V) erwähnten Programmabhandlung: Über die Aufgabe des M., ihre Erweiterungen und Lösungen, von Dr. J. Sachs, hat der Verfasser durch Untersuchung der Gleichungen der Kreise des M. Problems für das ebene Dreieck gefunden, dass die Aufgabe 128 Lösungen hat.

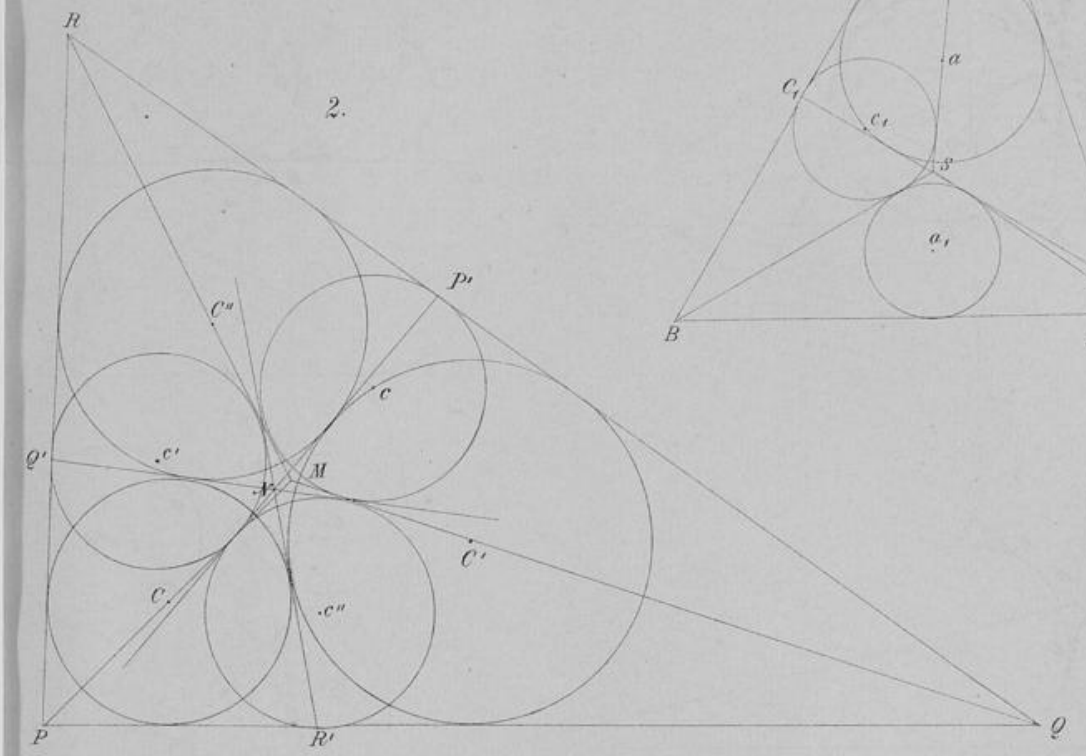
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

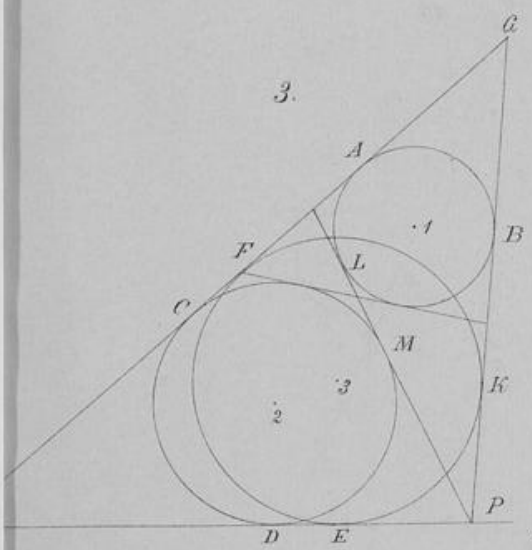
herbeigeführt worden ist, als Bemühungen um Beweise für St. Konstruktion, im Sinne Steiners, eben diese fernerhin unnötig erscheinen lässt", so sind solche Bemühungen doch nicht unterblieben, denn Petersen in Kopenhagen gab in seinem bekannten Buche: Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben, übersetzt von Fischer-Benzon, 1879 eine neue rein geometrische Herleitung der St. L. Die Art der Beweisführung in den drei zuletzt genannten Arbeiten von Mendthal, Schröter und Petersen ist von der in früheren Arbeiten angewendeten gänzlich verschieden. Zur Darlegung derselben ist jedoch hier um so weniger der Ort, als die beiden ersten Beweise in der eben angeführten Schrift von Wittstein vom Jahre 1878 ausführlich gewürdigt sind. Es mag genügen, darauf hinzuweisen, dass diese drei Beweisführungen den Forderungen Steiners entsprechen und sich auf die Sätze stützen, die er seiner Lösung voranschickt. Schröter bedient sich in seiner Arbeit mehrfach der Methode der Transformation durch reziproke Radien. Petersen hat einen einfachen Beweis des Satzes, der über den Zusammenhang der gesuchten Kreise mit den Hülfskreisen Aufschluss giebt, gegeben und man findet diesen benutzt in der „Anleitung zur Lösung planimetrischer Aufgaben" von Prof. Hoffmann Leipzig 1887, bei der Behandlung der M. A. Spätere Beweise der St. K., sowie weitere rein geometrische Lösungen der M. A. sind mir nicht bekannt geworden.

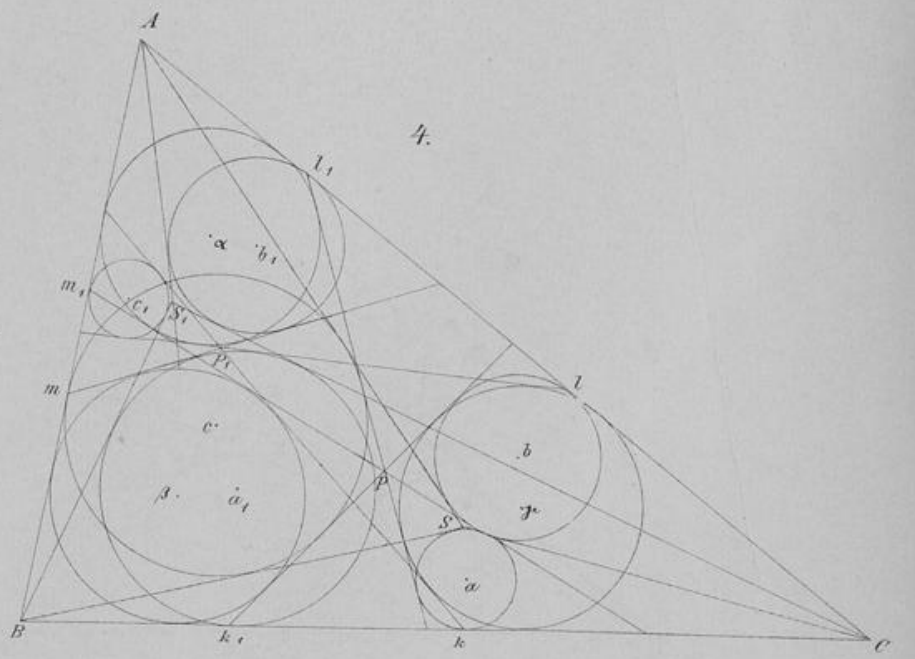
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



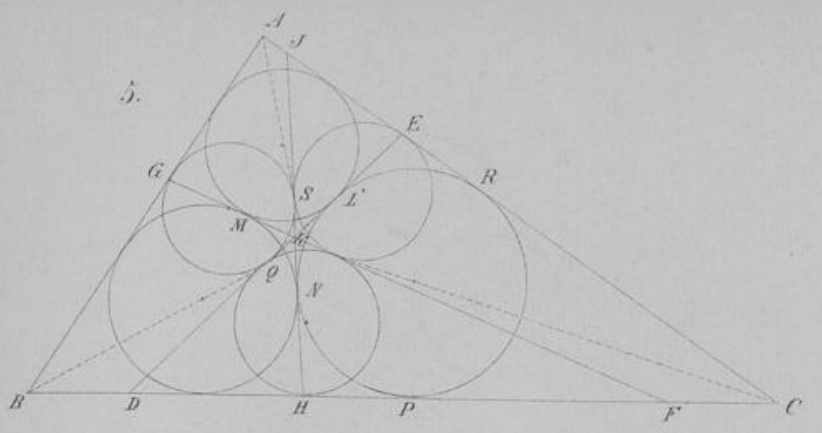



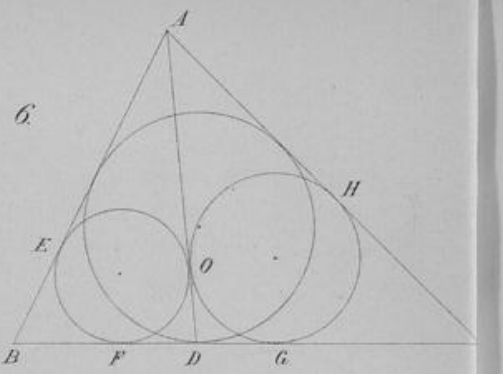

v. G. A. Hülswitt, Münster i. W.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

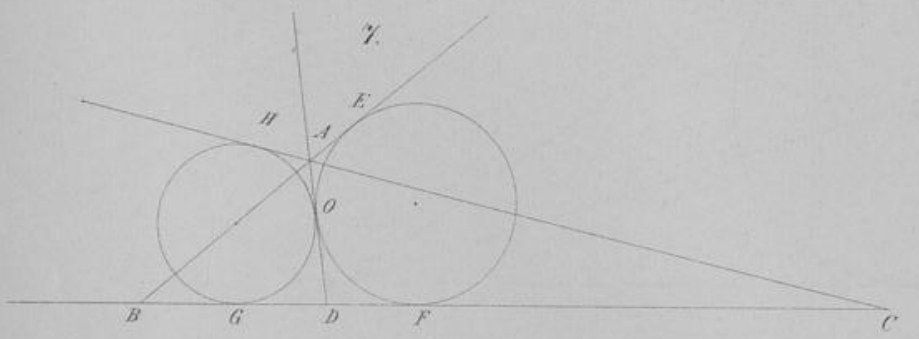
5.



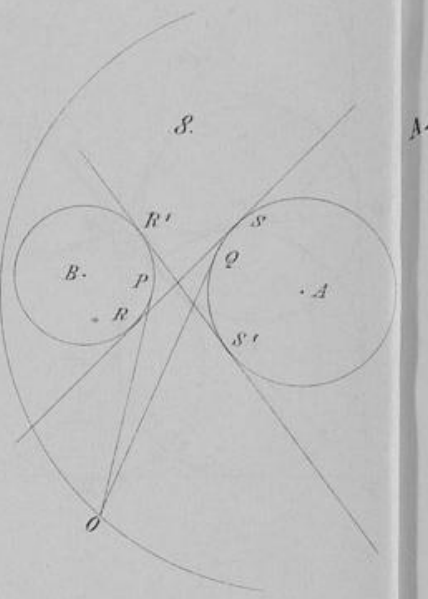

6.



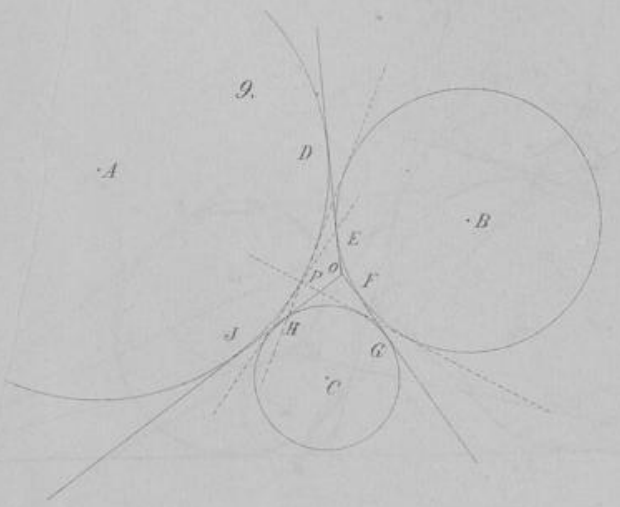

7.



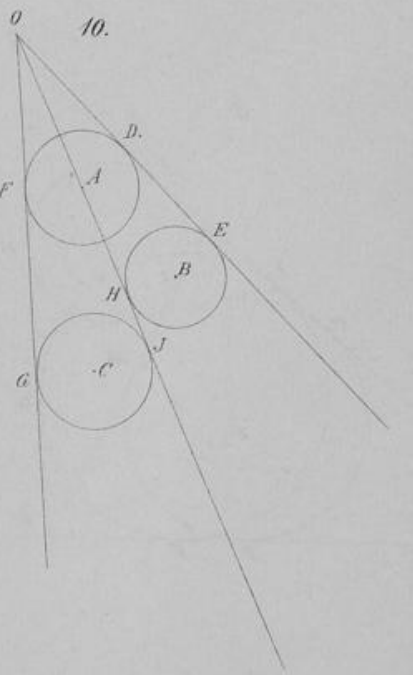

8.



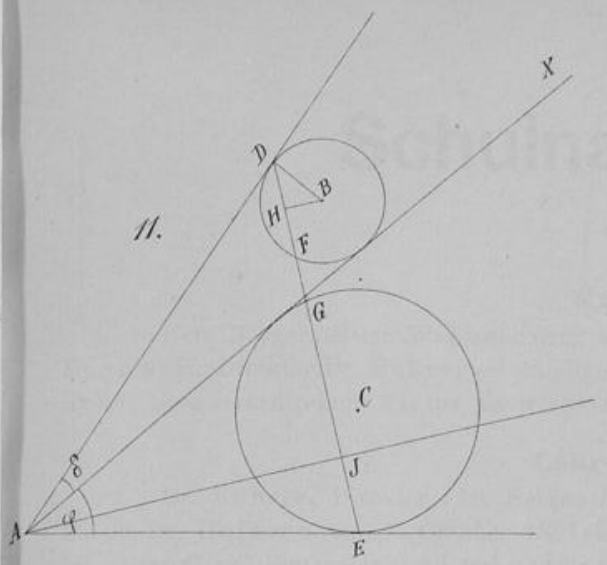

9.

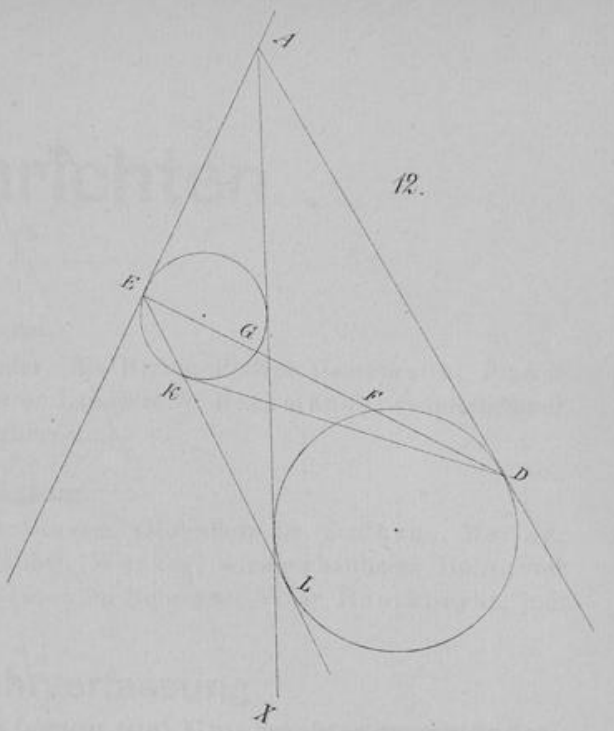


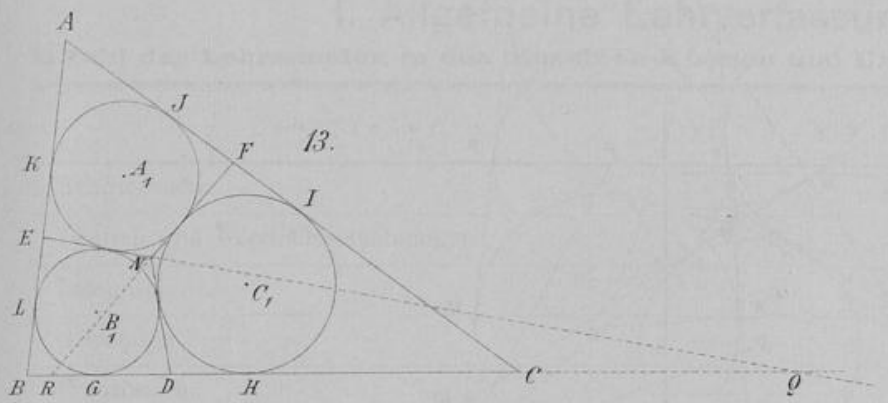

10.

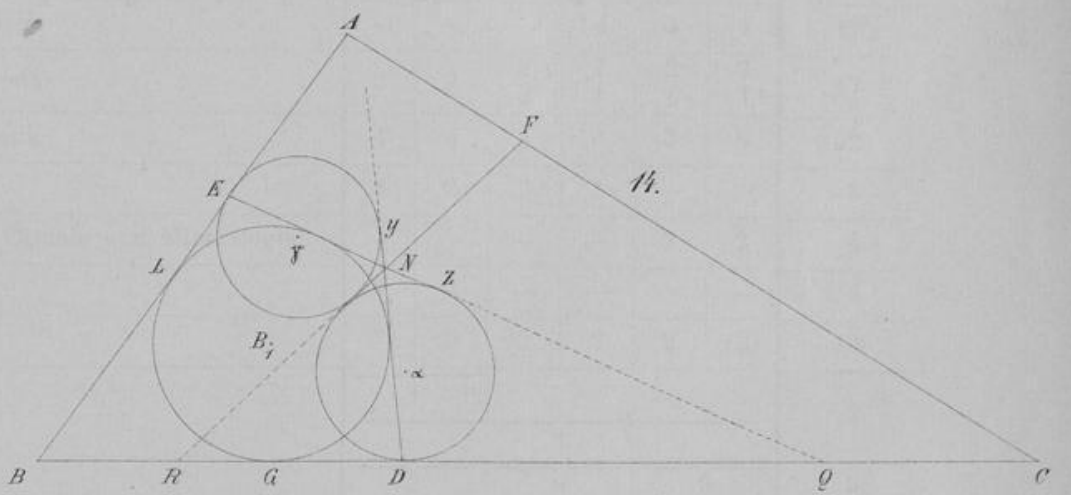


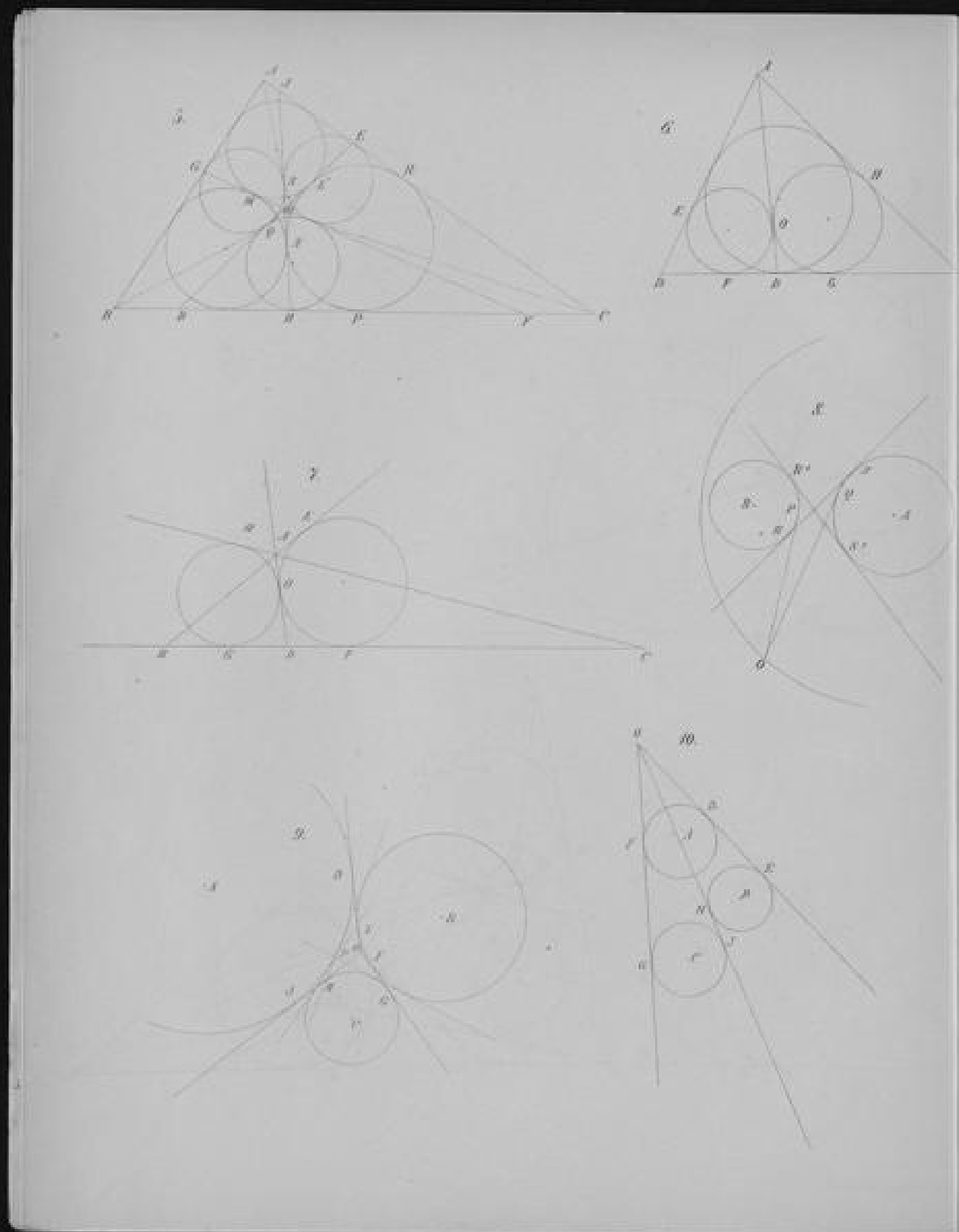

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

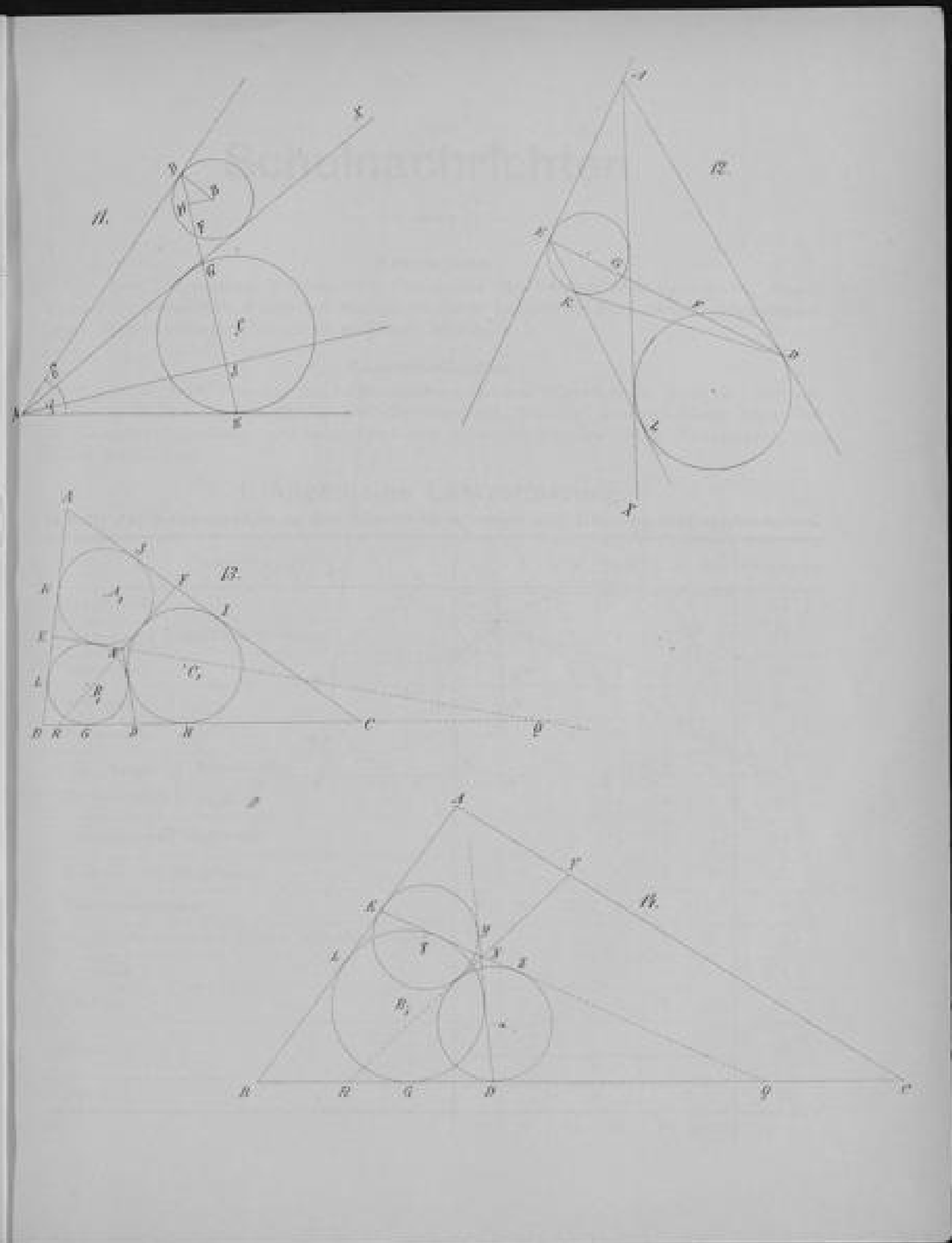

11.
X
D
B
H
F
G
C
J
A
E


12.
A
E
G
K
F
D
L
X


13.
A
J
K
F
I
E
L
B R G D H C Q

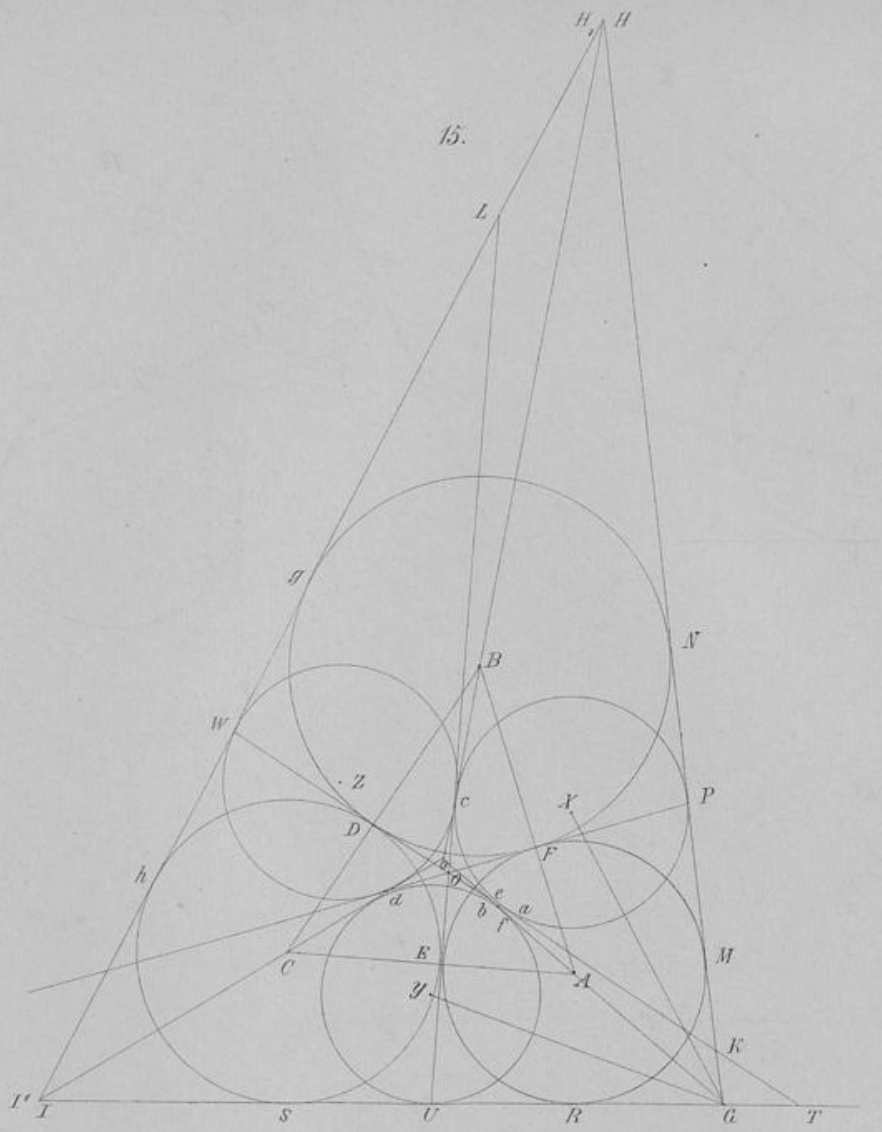

14.
A
F
E
y
L
N
z
B R G D Q C





Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

15.




Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf