Über den Ort der Endpunkte,

die man erhält, wenn man auf jeder Tangente eines Kegelschnitts nach beiden Seiten hin vom Berührungspunkte aus eine konstante Strecke abträgt.

Bekannt sind in der Theorie der höhern Kurven die s. g. Parallelkurven, die man als den Ort der Endpunkte erhält, wenn man auf jeder Normalen vom Kurvenpunkte aus nach beiden Seiten eine konstante Strecke $\varkappa$ abträgt. Es liegt nun nahe, die Strecke $\varkappa$ auf den Tangenten abzutragen. Gerade wie die Parallelkurve ist auch dieser Ort für Kegelschnitte im allgemeinen eine Kurve 8. Ordnung, der sich für die Parabel auf eine Kurve 6. Ordnung reduziert.

Zur Behandlung dieses Ortes wollen wir die analytische Methode anwenden. Zeichnen wir in einem beliebigen Punkte Q eines Kegelschnitts die Tangente und tragen nach beiden Seiten hin von Q aus die Strecke $\varkappa$ auf derselben ab, so mögen die beiden Endpunkte P^1 und P^{11} sein. Die rechtwinkligen Koordinaten von Q seien x_1 y_1, von P^1 x^1 y^1 und vom P^{11} x^{11} y^{11}. Ziehen wir jetzt die Ordinaten zu diesen Punkten, so ist

$$x^1 = x_1 - \varkappa \cos \tau \qquad x^{11} = x_1 + \varkappa \cos \tau$$
$$y^1 = y_1 - \varkappa \sin \tau \qquad y^{11} = y_1 + \varkappa \sin \tau,$$

wenn τ der Winkel ist, den die Tangente mit der X-Achse bildet. Die Koordinaten eines Punktes $P(x, y)$ der verlangten Art werden demnach durch

$$x = x_1 + \varkappa \cos \tau$$
$$y = y_1 + \varkappa \sin \tau$$

dargestellt, wenn wir in $\varkappa$ das doppelte Vorzeichen aufnehmen. Indem wir den Punkt $Q(x_1, y_1)$ den Kegelschnitt durchlaufen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

lassen, erhalten wir die Koordinaten sämtlicher Punkte P; wir müssen also die Koordinaten des Punktes Q x_1 und y_1 der Relation unterwerfen, welche durch die Gleichung des Kegelschnitts gegeben ist. Da hier die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts nicht in Betracht kommen kann, so werden wir uns auf die Normalformen der Gleichungen für Ellipse (Kreis), Hyperbel und Parabel beschränken. Aus der Gleichung des Kegelschnitts ergibt sich zunächst die Gleichung der Tangente im Punkte Q (x_1, y_1), aus der wir dann den Wert für tang τ und hieraus die Werte für sin τ und cos τ erhalten. Setzen wir diese Werte in

$$x = x_1 + \varkappa \cos \tau \qquad y = y_1 + \varkappa \sin \tau$$

ein und ersetzen die laufenden Koordinaten der Kegelschnittsgleichung durch x_1 und y_1, so ergibt sich die Gleichung des gesuchten Ortes, wenn wir aus diesen drei Gleichungen x_1 und y_1 eliminieren.

Zu den Koordinaten der Punkte P (x, y) gelangen wir auch, indem wir um den Berührungspunkt Q (x_1, y_1) der Tangente als Mittelpunkt mit dem Radius $\varkappa$ den Kreis beschreiben und ihn mit der Tangente zum Schnitt bringen, indem wir also die Gleichung

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \varkappa^2$$

und die Gleichung der Tangente im Punkte $x_1 y_1$ nach x und y auflösen. Ersetzen wir nun auch hier die laufenden Koordinaten der Gleichung des Kegelschnitts durch $x_1 y_1$, so gelangen wir zu der Gleichung des gesuchten Ortes, wenn wir aus diesen drei Gleichungen nämlich aus der Gleichung des Kreises, der Tangente und des Kegelschnitts die Koordinaten des Berührungspunktes $x_1 y_1$ eliminieren.

Beginnen wir mit der Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit den Halbachsen a und b, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Mittelpunkte der Ellipse als Anfangspunkt. Die Gleichung der Tangente in einem beliebigen Punkte Q (x_1, y_1) ist:

$$\frac{x\, x_1}{a^2} + \frac{y\, y_1}{b^2} = 1,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder auf die Form $y = m\,x + d$ gebracht, worin $m = \operatorname{tg}\tau$ ist:

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}\,x + \frac{b^2}{y_1}.$$

Es ist also $\operatorname{tg}\tau = -\dfrac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$ und somit:

$$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\tau}} = \frac{a^2 y_1}{\sqrt{a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2}},$$

$$\sin\tau = \frac{\operatorname{tg}\tau}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\tau}} = \frac{-b^2 x_1}{\sqrt{a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2}}.$$

Führen wir diese Werte in

$$x = x_1 + \varkappa\cos\tau$$
$$y = y_1 + \varkappa\sin\tau$$

ein, so ergeben sich die Koordinaten x und y eines die gesuchte Kurve durchlaufenden Punktes P, nämlich:

$$x = x_1 + \frac{\varkappa a^2 y_1}{\sqrt{a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2}},$$

$$y = y_1 - \frac{\varkappa b^2 x_1}{\sqrt{a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2}}.$$

Zur Probe wollen wir diese Werte, wie bereits vorhin angedeutet wurde, dadurch ableiten, dass wir die Gleichung des Kreises

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \varkappa^2$$

und die Gleichung der Tangente

$$\frac{x\,x_1}{a^2} + \frac{y\,y_1}{b^2} = 1$$

nach x und y auflösen. Setzen wir zu diesem Zwecke den Wert für y aus der letzten Gleichung in die Kreisgleichung ein und ordnen nach x, so erhalten wir die Bestimmungsgleichung:

$$(a^4 y_1{}^2 + b_4 x_1{}^2)\,x^2 - 2\,x_1\,(a^4 y_1{}^2 + b^4 a^2 - a^2 b^2 y_1{}^2)\,x + a^4 x_1{}^2 y_1{}^2 + b^4 a^4 - 2\,a^4 b^2 y_1{}^2 + a^4 y_1{}^4 - \varkappa^2 a^4 y_1{}^2 = 0,$$

oder mit Rücksicht auf $a^2 y_1{}^2 + b^2 x_1{}^2 = a^2 b^2$:

$$(a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2)\,x^2 - 2\,x_1\,(a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2)\,x + x_1{}^2\,(a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2) - \varkappa^2 a^4 y_1{}^2 = 0$$

und durch Division durch $a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2$:

$$x^2 - 2\,x_1\,x + x_1{}^2 - \frac{\varkappa^2 a^4 y_1{}^2}{a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2} = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hieraus ergibt sich:

$$x = x_1 + \frac{\varkappa a^2 y_1}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}},$$

und durch Substitution dieses Wertes in die Tangentengleichung:

$$y = y_1 - \frac{\varkappa b^2 x_1}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}}.$$

Wir wollen jetzt durch Elimination von x_1 und y_1 aus den Gleichungen

$$\text{I.} \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \varkappa^2$$
$$\text{II.} \quad a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 = a^2 b^2$$
$$\text{III.} \quad a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2$$

die Gleichung des gesuchten Ortes der Endpunkte ermitteln. Diese Elimination soll in der Weise bewirkt werden, dass wir zunächst die Werte von x_1 und y_1 berechnen und diese in die Gleichung III einsetzen. Aus der Gleichung II folgt:

$y_1^2 = \frac{a^2 b^2 - b^2 x_1^2}{a^2}$, und aus Gleichung III: $y y_1 = \frac{a^2 b^2 - b^2 x_1 x}{a^2}$.

Diese Werte setzen wir in Gleichung I ein und geben ihr zu diesem Zwecke die Form:

$$x_1^2 + y_1^2 - 2(x x_1 + y y_1) = \varkappa^2 - (x^2 + y^2).$$

Nach Multiplikation mit a^2 lautet die nach x_1 geordnete Gleichung:

$$(a^2 - b^2) x_1^2 - 2 x (a^2 - b^2) x_1 = a^2 b^2 + a^2 \varkappa^2 - a^2 (x^2 + y^2),$$

oder nach Division durch $a^2 - b^2$:

$$x_1^2 - 2 x x_1 = \frac{a^2 b^2 + a^2 \varkappa^2 - a^2 (x^2 + y^2)}{a^2 - b^2};$$

hieraus folgt:

$$x_1 = x + \sqrt{\frac{a^2 \varkappa^2 + a^2 b^2 - (a^2 y^2 + b^2 x^2)}{a^2 - b^2}}.$$

In analoger Weise ergibt sich durch Substitution der Werte

$$x_1^2 = \frac{a^2 b^2 - a^2 y_1^2}{b^2} \text{ aus Gleichung II, und}$$

$$x x_1 = \frac{a^2 b^2 - a^2 y y_1}{b^2} \text{ aus Gleichung III}$$

in die Kreisgleichung I die Bestimmungsgleichung für y_1, nämlich:

$$y_1^2 - 2 y y_1 = \frac{a^2 b^2 + b^2 \varkappa^2 - b^2 (x^2 + y^2)}{b^2 - a^2};$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und hieraus folgt:

$$y_1 = y + \sqrt{\frac{-b^2 \varkappa^2 - a^2 b^2 + (a^2 y^2 + b^2 x^2)}{a^2 - b^2}}.$$

Zur Abkürzung wollen wir $a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = \varepsilon$ setzen und erhalten dann für x_1 und y_1:

$$x_1 = x + \frac{\sqrt{a^2 \varkappa^2 - \varepsilon}}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \qquad y_1 = y + \frac{\sqrt{\varepsilon - b^2 \varkappa^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Diese Werte setzen wir in die Gleichung III, nämlich in

$$a^2 y y_1 + b^2 x x_1 = a^2 b^2 \text{ ein.}$$

Es ergibt sich alsdann:

$$a^2 y^2 + a^2 y \frac{\sqrt{\varepsilon - b^2 \varkappa^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} + b^2 x^2 + b^2 x \frac{\sqrt{a^2 \varkappa^2 - \varepsilon}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = a^2 b^2,$$

oder mit Benutzung der obigen Abkürzung und durch Multiplikation mit $\sqrt{a^2 - b^2}$:

$$a^2 y \sqrt{\varepsilon - b^2 \varkappa^2} + b^2 x \sqrt{a^2 \varkappa^2 - \varepsilon} = - \varepsilon \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Die Rationalisierung dieser Gleichung bewirken wir durch zweimaliges Quadrieren, so dass wir die Gleichung des gesuchten Ortes in folgender Form erhalten:

$$4 a^4 b^4 x^2 y^2 (\varepsilon - b^2 \varkappa^2)(a^2 \varkappa^2 - \varepsilon) =$$
$$\{(a^2 - b^2) \varepsilon^2 + b^4 x^2 (\varepsilon - a^2 \varkappa^2) - a^4 y^2 (\varepsilon - b^2 \varkappa^2)\}^2.$$

Da $\varepsilon = a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2$ gesetzt war, so ist der Grad der Gleichung ersichtlich 8, und somit die Kurve 8. Ordnung d. h. eine beliebige Grade hat mit der Kurve 8 Schnitte, die natürlich alle oder zum Teil imaginär sein können. Die Gleichung enthält die Variabeln nur als Potenzen von x^2 und y^2, woraus folgt, dass die Kurve symmetrisch zur X- und Y-Achse liegt, wie es auch die Symmetrie der Grundkurve (Ellipse) erfordert.

Erinnern wir uns jetzt, dass wir $\varkappa$ für $\pm \varkappa$ gesetzt haben, jedoch das eine oder das andere Vorzeichen wählen mussten, je nachdem wir den einen oder den anderen Endpunkt einer Tangente in Betracht zogen. Dem entsprechend würden wir auch die Gleichung des Ortes der einen oder der andern Art der Endpunkte erhalten, wenn wir in obiger Gleichung das eine oder das andere Vorzeichen von $\varkappa$ wählten. Da die Gleichung jedoch eine Funk-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

tion von $\varkappa^2$ ist, so genügen beide Arten von Endpunkten ein und derselben Gleichung und gehören somit derselben Kurve an.

Für $\varkappa = 0$ fallen beide Endpunkte mit dem Berührungspunkte der Tangente zusammen und das Erzeugnis ist offenbar nichts anderes, als die doppelt gezählte Originalkurve. Dies zeigt auch unsere Gleichung, denn nach Annullierung der Glieder mit $\varkappa$ ergibt sich:

$$\{(a^2 - b^2)\,\varepsilon^2 - a^4\,y^2\,\varepsilon + b^4\,x^2\,\varepsilon\}^2 + 4\,a^4\,b^4\,x^2\,y^2\,\varepsilon^2 = 0.$$

Die linke Seite zerfällt ersichtlich in Faktoren, von denen der Faktor $\varepsilon^2 = 0$ der doppelt gezählten Ellipse entspricht; die Restkurve wird durch den anderen Faktor dargestellt; derselbe ist nach Division durch $a^4\,b^4$

$$(x^2 - y^2 + b^2 - a^2)^2 + (2\,x\,y)^2 = 0$$

und repräsentiert nur imaginäre Punkte.

Wir wollen jetzt die Kurvengleichung homogen machen, indem wir für $x\,\frac{x}{z}$ und für $y\,\frac{y}{z}$ setzen, und können x, y, z als trimetrische Koordinaten in Bezug auf das unendlich grosse Dreieck auffassen, welches von den alten X- und Y-Achsen und der unendlich fernen Geraden eingeschlossen wird. Die Gleichung der Ellipse ist somit $a^2\,y^2 + b^2\,x^2 - a^2\,b^2\,z^2 = 0$; die linke Seite dieser Gleichung wollen wir auch hier wieder mit ε bezeichnen und erhalten nach Multiplikation mit z^8:

$$4\,a^4\,b^4\,x^2\,y^2\,\{\varkappa^2\,(a^2 + b^2)\,z^2\,\varepsilon - \varkappa^4\,a^2\,b^2\,z^4 - \varepsilon^2\} =$$
$$\{(a^2 - b^2)\,\varepsilon^2 - a^4\,y^2\,(\varepsilon - b^2\,\varkappa^2\,z^2) - b^4\,x^2\,(a^2\,\varkappa^2\,z^2 - \varepsilon)\}^2.$$

Diese Form der Gleichung ist geeignet, um die Schnitte der Kurve mit der Ellipse zu ermitteln. Für $\varepsilon = 0$ ist

$$-4\,a^6\,b^6\,\varkappa^4\,x^2\,y^2\,z^4 = (a^4\,b^2\,\varkappa^2\,z^2\,y^2 - b^4\,a^2\,\varkappa^2\,z^2\,x^2)^2,$$

oder nach Division durch $a^4\,b^4\,\varkappa^4$

$$(b^2\,x^2 + a^2\,y^2)^2\,z^4 = 0, \text{ oder}$$
$$(b\,x + i\,a\,y)^2\,(b\,x - i\,a\,y)^2\,z^4 = 0.$$

Die Ellipse trifft also die Kurve dort, wo sie diesen 8 Geraden begegnet.

$b\,x \pm i\,a\,y = 0$ sind nun die Gleichungen der beiden imaginären Asymptoten der Ellipse, und $z = 0$ ist die Gleichung der unendlich fernen Geraden, die die Ellipse also in der Richtung der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

beiden Asymptoten trifft. Alle 16 Schnitte der Ellipse mit unserer Kurve sind somit unendlich fern und imaginär; 8 Schnitte liegen in der Richtung der einen, und 8 in der Richtung der andern Asymptote, d. h. die Ellipse berührt die Kurve in der Richtung der Asymptoten je achtpunktig.

Wir gehen nun dazu über, das Verhalten der Kurve zur unendlich fernen Geraden zu untersuchen; hierzu benutzen wir gleichfalls die homogene Form unserer Kurvengleichung, geben ihr aber eine andere Gestalt. Durch Ausführung der angedeuteten Operationen überzeugen wir uns leicht, dass die Gleichung auf die Gestalt

$$u_8 + u_6 z^2 + u_4 z^4 + u_2 z^6 + u_0 z^8 = 0$$

gebracht werden kann, wo allgemein unter u_i eine homogene Funktion in den Veriabeln x und y, also eine binäre Form von der i^{ten} Dimension zu verstehen ist. Wir erhalten die Form u_8 aus der ursprünglichen homogenen Gleichung, indem wir $z = 0$ setzen. Es ist also:

$$u_8 \equiv \{(a^2-b^2)(a^2y^2+b^2x^2)^2 - a^4y^2(a^2y^2+b^2x^2) + b^4x^2(a^2y^2+b^2x^2)\}^2 + 4a^4b^4x^2y^2(a^2y^2+b^2x^2)^2,$$

oder indem wir den Faktor $(a^2y^2+b^2x^2)^2$ ausklammern:

$$u_8 \equiv (a^2y^2+b^2x^2)^2\left[\{(a^2-b^2)(a^2y^2+b^2x^2) - a^4y^2 + b^4x^2\}^2 + 4a^4b^4x^2y^2\right]$$

Die eckige Klammer reduziert sich auf:

$$a^4b^4(x^2+y^2)^2,$$

somit ist:

$$u_8 \equiv a^4b^4(a^2y^2+b^2x^2)^2(x^2+y^2)^2, \text{ oder}$$

$$u_8 \equiv a^4b^4(bx+aiy)^2(bx-aiy)^2(x+iy)^2(x-iy)^2.$$

Ferner lässt sich aus u_6, wie die Rechnung zeigt, der Faktor $a^2y^2+b^2x^2$ ausklammern, so dass wir für u_6 setzen können $(a^2y^2+b^2x^2)\,\varphi$, wo φ eine binäre Form 4. Dimension ist. Wie leicht zu ersehen, ist $u_0 \equiv a^8b^8(a^2-b^2)^2$. Hiernach ergibt sich die Kurvengleichung in der neuen Gestalt:

$$a^4b^4(bx+aiy)^2(bx-aiy)^2(x+iy)^2(x-iy)^2 + (a^2y^2+b^2x^2)\,\varphi\, z^2 + u_4 z^4 + u_2 z^6 + a^8b^8(a^2-b^2)^2 z^8 = 0.$$

Aus dieser Gleichung können wir das Verhalten der Kurve zur unendlich fernen Geraden ohne weiters ablesen. Es ergibt sich zunächst, dass jede der Geraden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$bx + aiy = 0,\ bx - aiy = 0,\ x + iy = 0 \text{ und } x - iy = 0$$

durch einen der Schnitte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden $z = 0$ geht; da aber jede Gerade doppelt gerechnet werden muss, so sehen wir, dass von den 8 imaginären Schnitten der Kurve mit $z = 0$ 4 mal je zwei zusammen fallen.

Wir haben nun zu untersuchen, ob die $z = 0$ die Kurve 4 mal berührt, oder ob die Kurve auf $z = 0$ 4 Doppelpunkte besitzt. Auch auf diese Frage gibt uns unsere Kurvengleichung eine klare Antwort. Es fehlen nämlich in ihr die Glieder 7. Dimension, woraus folgt, dass jede der 4 Geraden auf $z = 0$ zwei vereinte Schnitte hat. Also gehen durch jeden der 4 in Frage stehenden Punkte zwei Gerade, die die Kurven dort in vereinigten Punkten schneiden, nämlich die Gerade $z = 0$ und je eine von obigen 4 Geraden. Die vereinten Schnitte auf $z = 0$ mit der Kurve können daher nicht von einer Taktion, sondern nur von Doppelpunkten herrühren. Wir können sagen, die Kurve hat im Unendlichen 4 imaginäre Doppelpunkte und zwar in den Richtungen der beiden imaginären Asymptoten der Ellipse und in der Richtung der beiden Geraden, die nach den beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkten hinweisen. Unsere Gleichung gibt uns ferner noch Aufklärung über die Tangenten in den Doppelpunkten. Da nämlich die Glieder 6. Dimension den Faktor $a^2y^2 + b^2x^2$ enthalten und die 5. Dimension überhaupt fehlt, so folgt, dass die beiden Geraden $bx \pm aiy = 0$ die Kurve im Unendlichen in 4 vereinigten Schnitten treffen. Die imaginären Asymptoten der Ellipse sind die gemeinsamen Tangenten der beiden sich im Unendlichen berührenden Kurvenäste. Da diese ausgezeichnete Singularität bei der Hyperbel reell ist, so soll sie auch dort eingehender besprochen werden.

Es ist noch zu beachten, dass die Glieder höchster Dimension den Parameter $\varkappa$ nicht enthalten, so dass das Verhalten der Kurve zur unendlich fernen Geraden für das ganze Kurvenbüschel unverändert bleibt, welches durch den veränderlichen Paramenter $\varkappa$ bedingt ist.

Zur Ermittelung der Schnitte mit der X-Achse wird in der ursprünglichen unhomogenen Kurvengleichung $y = 0$ gesetzt; es

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ergibt sich dann folgende Bestimmungsgleichung in x für die Abscissen der Schnittpunkte:

$$\left[(a^2-b^2)(b^2x^2-a^2b^2)^2+b^4x^2(b^2x^2-a^2b^2-a^2\varkappa^2)\right]^2=0,$$

oder nach Division durch b^8a^4 in reduzierter Form

$$\left[x^4+(b^2-2a^2-\varkappa^2)x^2-a^2b^2+a^4\right]^2=0.$$

Aus der Gleichung folgt, dass auf der X-Achse 8 je zwei vereinte Schnitte liegen und zwar symmetrisch zum Mittelpunkte der Ellipse. Die 4 Werte für x sind:

$$x=\pm\sqrt{\frac{2a^2-b^2+\varkappa^2}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{b^4+2\varkappa^2(2a^2-b^2)+\varkappa^4}};$$

dieselben sind alle reell, denn es ist zunächst der Radikand der kleinen Wurzel ersichtlich positiv; dies gilt aber auch von dem Radikanden der grossen Wurzel, denn es ist:

$$2a^2-b^2+\varkappa^2>\sqrt{b^4+2\varkappa^2(2a^2-b^2)+\varkappa^4}.$$

Quadriert man nämlich beide Seiten, so kommt:

$$\varkappa^4-2\varkappa^2b^2+b^4+4\varkappa^2a^2-4a^2b^2+4a^4>b^4+4\varkappa^2a^2-2\varkappa^2b^2+\varkappa^4$$

oder $4a^4>4a^2b^2$, oder nach Division durch $4a^2$ $a^2>b^2$.

Dem positiven Vorzeichen der kleinen Wurzel entsprechen Punkte, deren Abscisse grösser als a ist, während das negative Zeichen Werte für x liefert, die kleiner als a sind; die ersteren Punkte liegen also ausserhalb, die letzteren dagegen innerhalb der Ellipse. Es ist nämlich:

$2x^2=2a^2-b^2+\varkappa^2\pm\sqrt{b^4+2\varkappa^2(2a^2-b^2)+\varkappa^4}$ und es lässt sich zeigen, dass

$2a^2<2a^2-b^2+\varkappa^2+\sqrt{b^4+2\varkappa^2(2a^2-b^2)+\varkappa^4}$, aber

$2a^2>2a^2-b^2+\varkappa^2-\sqrt{b^4+2\varkappa^2(2a^2-b^2)+\varkappa^4}$ ist.

Es wird genügen, die letzte Ungleichheit zu zeigen.

Es folgt

$$\sqrt{b^4+2\varkappa^2(2a^2-b^2)+\varkappa^4}>\varkappa^2-b^2, \text{ oder}$$

$$b^4+4\varkappa^2a^2-2\varkappa^2b^2+\varkappa^4>\varkappa^4-2\varkappa^2b^2+b^4, \text{ und}$$

$$\text{daher } 4\varkappa^2a^2>0.$$

Analog gestaltet sich die Untersuchung der Schnitte mit der Y-Achse; für $x=0$ ergibt sich in y folgende Bestimmungsgleichung 8ten Grades

$$\left[y^4+(a^2-2b^2-\varkappa^2)y^2-a^2b^2+b^4\right]^2=0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hieraus ergeben sich wieder vier zum Mittelpunkte der Ellipse symmetrisch gelegene Doppelschnitte mit den folgenden Ordinaten:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2b^2 - a^2 + \varkappa^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^4 + 2\varkappa^2(2b^2 - a^2) + \varkappa^4}}.$$

Bei der Untersuchung dieser Werte in Bezug auf Realität, handelt es sich zunächst darum, nachzuweisen, dass der Radikand der kleinen Wurzel wesentlich positiv ist.

Dies ist aber der Fall, da er als Summe zweier Quadrate dargestellt werden kann; es ist nämlich:

$$a^4 + 2\varkappa^2(2b^2 - a^2) + \varkappa^4 = (a^2 - \varkappa^2)^2 + 4b^2\varkappa^2.$$

Um nun zu zeigen, dass

$$y^2 = \frac{2b^2 - a^2 + \varkappa^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^4 + 2\varkappa^2(2b^2 - a^2) + \varkappa^4}$$

für das obere Zeichen positiv und für das untere negativ wird, genügt es zu beweisen, dass

$$(\varkappa^2 - a^2 + 2b)^2 < a^4 + 2\varkappa^2(2b^2 - a^2) + \varkappa^4, \text{ oder}$$

$$\varkappa^4 - 2\varkappa^2 a^2 + a^4 + 4b^2\varkappa^2 - 4a^2b^2 + 4b^4 < a^4 + 4b^2\varkappa^2 - 2a^2\varkappa^2 + \varkappa^4,$$

$$\text{oder } 4b^4 < 4a^2b^2 \text{ d. i. } b^2 < a^2 \text{ ist.}$$

Wir bekommen also für y zwei reelle und zwei imaginäre Werte. Es ist leicht zu zeigen, dass die beiden reellen Schnitte ausserhalb der Ellipse liegen. Da nämlich

$$2y^2 = 2b^2 - a^2 + \varkappa^2 + \sqrt{a^4 + 2\varkappa^2(2b^2 - a^2 + \varkappa^4)} \text{ ist,}$$

so muss nachgewiesen werden, dass

$$2b^2 < 2b^2 - a^2 + \varkappa^2 + \sqrt{a^4 + 2\varkappa^2(2b^2 - a^2) + \varkappa^4}, \text{ oder}$$

$$a^4 - 2a^2\varkappa^2 + \varkappa^4 < a^4 + 4b^2\varkappa^2 - 2a^2\varkappa^2 + \varkappa^4 \text{ ist.}$$

Dies ist aber der Fall, da

$$0 < 4b^2\varkappa^2 \text{ ist.}$$

Wir wollen nun versuchen, die Schnitte der Kurve mit den Achsen der Ellipse unabhängig von der Kurvengleichung zu erhalten und fragen nach den Punkten auf den Achsen, von denen wir eine Tangente von gegebener Länge $\varkappa$ an die Ellipse legen können. Von einem solchen Punkte kommt dann aber noch eine zweite zu der entsprechenden Achse symmetrische Tangente von der Länge $\varkappa$ an die Ellipse. Ein Punkt der X-Achse dieser Art sei D mit der Abscisse x; seine Polare treffe die X-Achse im Punkte E; dieselbe geht durch die Berührungspunkte der beiden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tangenten; einer von ihnen sei P mit den Koordinaten x_1, y_1. Nach einem bekannten Satze über Involution an der Ellipse ist alsdann

$$OE \cdot OD = a^2, \text{ oder}$$

$$x_1 \cdot x = a^2.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke DEP folgt ferner:

$$\varkappa^2 = ED^2 + EP^2 \text{ oder}$$

$$= (x - x_1)^2 + y_1^2, \text{ und da } x_1 = \frac{a^2}{x} \text{ ist,}$$

$$\varkappa^2 = \left(x - \frac{a^2}{x}\right)^2 + y_1^2, \text{ da ferner}$$

$$y_1^2 = \frac{a^2 b^2 - b^2 x_1^2}{a^2} \text{ oder}$$

$$y_1^2 = \frac{b^2 x^2 - b^2 a^2}{x^2}, \text{ so ist}$$

$$\varkappa^2 = \frac{(x^2 - a^2)^2}{x^2} + \frac{b^2 x^2 - a^2 b^2}{x^2}.$$

Hieraus ergibt sich dann die bereits aus der Kurvengleichung gefundene Gleichung 4ten Grades in x zur Bestimmung der Schnitte mit der X-Achse, nämlich

$$x^4 + (b^2 - 2a^2 - \varkappa^2)x^2 = a^2 b^2 - a^4.$$

In ganz analoger Weise ergibt sich für die Schnitte der Y-Achse:

$$\varkappa^2 = \frac{(y^2 - b^2)^2}{y^2} + \frac{a^2 y^2 - a^2 b^2}{y^2}, \text{ und hieraus die bekannte Gleichung:}$$

$$y^4 + (a^2 - 2b^2 - \varkappa^2)y^2 = a^2 b^2 - b^4.$$

Wir haben uns noch zu fragen, ob die Doppelschnitte auf den Achsen Doppelpunkte für die Kurve sind. Wenn wir erwägen, dass diese Punkte bei der Erzeugung der Kurve zweimal an die Reihe kommen, und dass jeder Endpunkt einer Tangente einen in sich geschlossenen Kurvenzug beschreibt, so müssen wir uns überzeugen, dass jene Punkte die Durchschnittspunkte beider Züge sind. Beide Züge werden ferner durch eine analytische Gleichung dargestellt, daher kann keiner für sich als selbständige Kurve betrachtet werden. Da die Kurve auch nicht in das Innere der Ellipse eindringt, so müssen die beiden Doppelpunkte im Innern isolierte Punkte sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es wird nicht uninteressant sein, die Ellipse als Grundkurve in einen Kreis übergehen zu lassen; dies geschieht analytisch einfach dadurch, dass wir $a = b$ setzen. Wir erinnern uns, dass wir in der Kurvengleichung $\varepsilon \equiv a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2$ gesetzt hatten, dem entsprechend haben wir jetzt $\varepsilon = a^2 \delta$ zu setzen, wo $\delta = x^2 + y^2 - a^2$ ist. Führen wir nun diesen Wert in die Kurvengleichung ein, so ergibt sich:

$$-4 a^{12} x^2 y^2 (\delta - \varkappa^2)^2 = \left[a^6 (x^2 - y^2)(\delta - \varkappa^2)\right]^2 \text{ oder}$$

$a^{12} (\delta - \varkappa^2)^2 (x^2 - y^2)^2 + 4 a^{12} x^2 y^2 (\delta - \varkappa^2)^2 = 0$, und nach Reduktion und Division durch a^{12}:

$(\delta - \varkappa^2)^2 (x^2 + y^2)^2 = 0$. Oder wenn für δ der obige Wert wieder eingeführt wird:

$(x^2 + y^2 - a^2 - \varkappa^2)^2 (x^2 + y^2)^2 = 0$.

Die Kurve zerfällt also für den Kreis als Grundkurve in den doppelt gezählten Kreis mit dem Radius $\sqrt{a^2 + \varkappa^2}$ und das doppelte Geradenpaar $x \pm i y = 0$. Geometrisch können wir uns leicht von der Richtigkeit dieses Ergebnisses überzeugen, wenn wir auf einer Tangente des Kreises mit dem Radius a vom Berührungspunkte aus die Strecke $\varkappa$ abtragen; die beiden Endpunkte haben dann vom Mittelpunkte die Entfernung $\sqrt{a^2 + \varkappa^2}$. Das Erzeugnis ist demnach der zum Grundkreise konzentrische Kreis mit dem Radius $\sqrt{a^2 + \varkappa^2}$ und zwar doppelt gezählt.

Zur Probe und wegen der Leichtigkeit der Elimination von x_1, y_1 aus den drei bekannten Gleichungen wollen wir für den Kreis die Kurvengleichung nochmal direkt ableiten. Die 3 Eliminationsgleichungen sind in diesem Falle:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \varkappa^2, \\ \text{II.} & x_1^2 + y_1^2 = a^2, \\ \text{III.} & x x_1 + y y_1 = a^2. \end{array}$$

Wir bringen die Gleichung I auf die Form:

$x_1^2 + y_1^2 - 2(x x_1 + y y_1) = \varkappa^2 - (x^2 + y^2)$ und setzen die entsprechenden Werte aus II und III darin ein, so kommt:

$$a^2 - 2 a^2 = \varkappa^2 - (x^2 + y^2), \text{ oder}$$

$$x^2 + y^2 - a^2 - \varkappa^2 = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um aus der Gleichung unserer Endpunktkurve für die Ellipse als Grundkurve dieselbe für die entsprechende Hyperbel zu bekommen, haben wir b^2 durch $-b^2$ zu ersetzen; die Abkürzung

$$\varepsilon \equiv a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 \quad \text{geht hierbei über in}$$
$$h \equiv a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2.$$

Die Gleichung der Endpunktkurve für die Hyperbel

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2 = 0 \text{ ist somit:}$$

$$\left\{b^4 x^2 (h - a^2 \varkappa^2) - a^4 y^2 (h + b^2 \varkappa^2) + (a^2 + b^2) h^2\right\}^2$$
$$+ 4 a^4 b^4 x^2 y^2 (h - a^2 \varkappa^2)(h + b^2 \varkappa^2) = 0.$$

Für $\varkappa = 0$ ergibt sich:

$$\left\{(a^2 + b^2) h^2 - a^4 y^2 h + b^4 x^2 h\right\}^2 + 4 a^4 b^4 h^2 = 0, \text{ oder}$$
$$h^2 \cdot \left\{(x^2 - y^2 - b^2 - a^2)^2 + 2 x^2 y^2\right\} = 0.$$

Die Kurve zerfällt also in die doppelt gezählte Hyperbel und in einen imaginären Kurvenbestandteil.

Um die Schnitte der Hyperbel mit der Kurve zu erhalten, schreiben wir die Gleichung in homogener Form:

$$\left\{b^4 x^2 (h - a^2 \varkappa^2 z^2) - a^4 y^2 (h + b^2 \varkappa^2 z^2) + (a^2 + b^2) h^2\right\}^2$$
$$+ 4 a^4 b^4 x^2 y^2 (h - a^2 \varkappa^2 z^2)(h + b^2 \varkappa^2 z^2) = 0,$$
$$\text{wo } h \equiv a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2 z^2 \text{ ist.}$$

Für $h = 0$ bekommen wir nun analog wie bei der Ellipse:

$$(b^2 x^2 - a^2 y^2)^2 z^4 = 0, \text{ oder}$$

$(b x + a y)^2 (b x - a y)^2 z^4 = 0$ und schliessen, dass die Hyperbel unsere Kurve dort trifft, wo diese 8 Geraden die Hyperbel schneiden; die Hyperbel berührt hiernach unsere Kurve in der Richtung der beiden Asymptoten im Unendlichen je achtpunktig.

Um ferner den Verlauf der Kurve in der Unendlichkeit zu erforschen, geben wir der Kurvengleichung die bereits bekannte Gestalt:

$$a^4 b^4 (a^2 y^2 - b^2 x^2)^2 (x^2 + y^2)^2 + (a^2 y^2 - b^2 x^2) \varphi z^2$$
$$+ u_4 z^4 + u_2 z^6 + a^8 b^8 (a^2 + b^2)^2 z^8 = 0,$$

worin die Funktionen φ, u_4 und u_2 dieselbe Bedeutung wie bei der Ellipse haben, nur dass überall b^2 durch $-b^2$ zu ersetzen ist. Wir schliessen auch hier wieder, dass die unendlich ferne Gerade $z = 0$ in der Richtung der Asymptoten und in den beiden imaginären Kreispunkten je zwei vereinte Schnitte besitzt, dass ferner

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

diese Schnitte von Doppelpunkten und nicht von einer Taktion herrühren. Die beiden Hyperbel-Asymptoten sind auch für die Kurve Doppelpunkts-Asymptoten, weil die Glieder 6. Dimension den Faktor $a^2 y^2 - b^2 x^2$ enthalten. Da aber die 5. Dimension in der Gleichung fehlt, so sehen wir, dass die beiden Asymptoten im Unendlichen mit der Kurve 4 vereinte Schnitte besitzen. Wir haben es hier also mit einem Doppelpunkte ganz besonderer Art zu tun. Jeder Kurvenzug hat nämlich hyperbelartige Gestalt, wie dies für kleine Werte von $\varkappa$ selbstverständlich ist; für grössere Werte von $\varkappa$ weicht ihre Gestalt zwar im Endlichen von der Hyperbel ab, in weiterer Entfernung tritt indes auch der zweite Zug, wie die Figur I. zeigt, wieder zwischen Hyperbel und Asymptote und beide Züge schmiegen sich schliesslich immer inniger an einander und gemeinsam der Hyperbel an und berühren dieselbe, wie wir gesehen haben, in dem unendlich fernen Punkte jeder Asymptote 8 punktig, und zwar ganz unabhängig von $\varkappa$, da die Glieder höchster Dimension diesen Paramenter nicht enthalten.

Wenn wir nun bedenken, dass eine gewöhnliche Tangente bei der Projektion des Berührungspuntes ins Unendliche, die beiden Äste von verschiedenen Seiten an sich herantreten lässt, so erkennen wir, indem wir den unendlich fernen Punkt der Asymptote ins Endliche zurückprojizieren, dass sich die beiden Kurvenäste von innen berühren; dass sie sich in diesem Selbstberührungspunkte auch noch durchsetzen, soll später gezeigt werden.

Die Schnitte der Kurve mit den Koordinatenachsen sind, wie bereits bei der Ellipse gezeigt ist, Doppelpunkte. Dieselben liegen symmetrisch zum Mittelpunkte der Kurve. Ihre Entfernungen auf der X-Achse sind:

$$x = \pm \sqrt{\frac{2a^2 + b^2 + \varkappa^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^4 + 2\varkappa^2(2a^2 + b^2) + \varkappa^4}},$$

oder

$$2x^2 = 2a^2 + b^2 + \varkappa^2 \pm \sqrt{b^4 + 2\varkappa^2(2a^2 + b^2) + \varkappa^4}.$$

Da der Radikand der letzten Wurzel wesentlich positiv ist, so sind die beiden Schnitte, welche dem oberen Zeichen ent-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sprechen stets reell, und da der Wert von $2x^2$ grösser als $2a^2$ ist, so liegen diese beiden Doppelpunkte im Innern der Hyperbel und müssen demnach isolierte Punkte sein.

Aber auch dem negativen Zeichen der Wurzel entsprechen stets reelle Werte für x; es ist nämlich

$$2a^2 + b^2 + \varkappa^2 > \sqrt{b^4 + 2\varkappa^2(2a^2 + b^2) + \varkappa^4}.$$

Der Wert für $2x^2$ ist hier aber kleiner als $2a^2$; somit liegen die zugehörigen Schnitte ausserhalb der Hyperbel und sind eigentliche Knotenpunkte. Ihre Entfernung vom Mittelpunkte nimmt von a bis 0 ab, wenn $\varkappa$ von 0 bis ∞ wächst. Für $\varkappa = 0$ ist offenbar $2x^2 = 2a^2$; geometrisch ist auch ersichtlich, dass der Mittelpunkt bei unendlich grossem $\varkappa$ zur Kurve gehört. Dies ist aber auch aus dem Werte für $2x^2$ ersichtlich, denn derselbe wird zu Null, wenn $2a^2 + b^2 + \varkappa^2 = \sqrt{b^4 + 2\varkappa^2(2a^2 + b^2) + \varkappa^4}$ ist.

Wir haben also einen Wert für $\varkappa$ zu suchen, der dieser Gleichung genügt. Quadrieren wir beide Seiten und ordnen nach $\varkappa$, so ergibt sich:

$$\varkappa^4 - \varkappa^4 + 2(2a^2 + b^2)(\varkappa^2 - \varkappa^2) = 4(a^4 + a^2b^2),$$

woraus wir ersehen, dass nur ein unendlich grosser Wert von $\varkappa$ imstande ist, diese Gleichung zu befriedigen.

Ganz besonderes Interesse bieten die Schnitte der Kurve mit der Nebenachse; ihre Ordinaten sind bestimmt durch:

$$2y^2 = -2b^2 - a^2 + \varkappa^2 \pm \sqrt{a^4 - 2\varkappa^2(2b^2 + a^2) + \varkappa^4}.$$

Wenn der Radikand negativ ist, sind offenbar alle 4 Werte für y imaginär. Für

$$\varkappa^4 - 2\varkappa^2(2b^2 + a^2) + a^4 = 0$$

fallen je zwei Wurzeln zusammen. Wir lösen nun die letzte Gleichung nach $\varkappa^2$ auf und erhalten $\varkappa^2 = 2b^2 + a^2 + 2\sqrt{b^4 + a^2b^2}$, wobei zu bemerken ist, dass nur das positive Zeichen von $\sqrt{b^4 + a^2b^2}$ reelle Werte von y liefert. Diesen Wert von $\varkappa^2$ setzen wir in den Wert für $2y^2$ ein und bekommen

$$y = \pm\sqrt[4]{b^4 + a^2b^2}.$$

Wir schliessen hieraus, dass für

$$\varkappa^2 = 2b^2 + a^2 + 2\sqrt{b^4 + a^2b^2}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

auf der Nebenachse in der Entfernung $\pm\sqrt[4]{b^4+a^2b^2}$ vom Mittelpunkte je zwei Doppelpunkte zusammenfallen. Diese Vereinigung kommt dadurch zustande, dass sich von beiden Seiten her je zwei Äste der Kurve bis zur Berührung nähern. Die Nebenachse ist für beide Selbstberührungspunkte gemeinsame Tangente.

Ist nun endlich $\varkappa^4 - 2\varkappa^2(2b^2+a^2)+a^4$ positiv, etwa gleich $4\varrho^4$, so folgt aus

$$\varkappa^4 - 2\varkappa^2(2b^2+a^2)+a^4 = 4\varrho^4, \text{ dass}$$

$\varkappa^2 = 2b^2+a^2+2\sqrt{b^4+a^2b^2+\varrho^4}$ ist; auch hier liefert nur das positive Zeichen von $\sqrt{b^4+a^2b^2+\varrho^4}$ reelle Werte von y.

Durch Substitution dieses Wertes für $\varkappa^2$ in den Ausdruck für $2y^2$ ergibt sich:

$$y^2 = \sqrt{b^4+a^2b^2+\varrho^4} \pm \varrho^2, \text{ oder}$$

$$y = \pm\sqrt{\sqrt{b^4+a^2b^2+\varrho^4} \pm \varrho^2}.$$

Da alle 4 Werte von y reell sind, kann man sagen, dass für

$$\varkappa^2 > 2b^2+a^2+\sqrt{b^4+a^2b^2}$$

auf der Nebenachse symmetrisch zum Mittelpunkte 4 getrennte Knotenpunkte liegen. Bei stetigem Wachsen von $\varkappa$ entfernen sich die beiden äusseren Doppelpunkte stets weiter vom Mittelpunkte, während die beiden inneren stets näher an denselben heranrücken, ihn aber erst für unendlich grosse Werte von $\varkappa$ erreichen. Es kann nämlich $2y^2$ nur zu Null werden, wenn $\varkappa^2 - 2b^2+a^2 = \sqrt{\varkappa^4 - 2\varkappa^2(2b^2+a^2+a^4}$ ist; dies ist aber, wie die Quadrierung beider Seiten zeigt, nur für unendlich grosse Werte von $\varkappa$ möglich.

Für $\varkappa = \infty$ repräsentieren nämlich die Asymptoten den Teil der Kurve im Endlichen, während alle anderen Kurventeile ins Unendliche gerückt sind.

Es ist bereits gezeigt, dass die Asymptoten als gemeinsame Tangenten in den unendlich fernen Selbstberührungspunkten vier Schnitte im Unendlichen haben; es erübrigt nun noch die 4 Schnitte im Endlichen zu untersuchen.

Wir schneiden also die Kurve mit den Asymptoten, indem

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wir in der unhomogenen Gleichung $a^2 y^2 = b^2 x^2$ setzen und erhalten:

$$\left\{a^2 b^4 (b^2 - \varkappa^2) x^2 - a^2 b^4 (a^2 + \varkappa^2) x^2 + (a^2 + b^2) a^4 b^4\right\}^2$$
$$+ 4 a^4 b^8 (b^2 - \varkappa^2)(a^2 + \varkappa^2) x^4 = 0.$$

Nach Ausführung der angedeuteten Operationen und nach Division durch $a^4 b^8$ erhalten wir die nach x geordnete Gleichung:

$$(a^2 + b^2)^2 x^4 + 2 a^2 (a^2 + b^2)(b^2 - a^2 - 2 \varkappa^2) x^2 + (a^2 + b^2)^2 a^4 = 0,$$

oder nach Division durch $(a^2 + b^2)^2$:

$$x^4 + \frac{2 a^2 (b^2 - a^2 - 2 \varkappa^2)}{a^2 + b^2} x^2 + a^4 = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$x^2 = -\frac{b^2 - a^2 - 2 \varkappa^2}{a^2 + b^2} a^2 \pm \frac{2 a^2}{a^2 + b^2} \sqrt{\varkappa^4 + (a^2 - b^2) \varkappa^2 - a^2 b^2}, \text{ oder}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}\left(a^2 + 2 \varkappa^2 - b^2 \pm 2 \sqrt{\varkappa^4 + (a^2 - b^2) \varkappa^2 - a^2 b^2}\right).$$

Ist der Radikand $\varkappa^4 + (a^2 - b^2) \varkappa^2 - a^2 b^2 < 0$, so sind alle 4 Werte für x imaginär, ist er jedoch > 0, so sind sie alle reell,

da $a^2 + 2 \varkappa^2 - b^2 > 2 \sqrt{\varkappa^4 + (a^2 - b^2) \varkappa^2 - a^2 b^2}$ ist,

was die Quadratur beider Seiten leicht ergibt.

Von besonderem Interesse ist der Fall

$$\varkappa^4 + (a^2 - b^2) \varkappa^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Lösen wir diese Gleichung nach $\varkappa$ auf, so erhalten wir zwei reelle Werte, nämlich:

$$\varkappa^2 = b^2 \text{ oder } \varkappa = \pm b.$$

Durch Substitution dieses Wertes für $\varkappa^2$ ergibt sich

$$x^2 = a^2, \text{ oder } x = \pm a,$$

und durch Einführung desselben in die Gleichung der Asymptoten $a^2 y^2 = b^2 x^2$:

$$y^2 = b^2, \text{ oder } y = \pm b.$$

Für $\varkappa = b$ haben also die beiden Asymptoten noch die besondere Eigenschaft auch in Endlichen Doppeltangenten zu sein, indem sie je zwei Äste der Kurve in den Punkten mit den bez. Koordinaten $x = \pm a$, $y = \pm b$ berühren. Dieses Resultat war geometrisch vorauszusehen, da b die Strecke der Tangente vom Scheitelpunkte der Hyperbel bis zur Asymptote ist. Zusammenfassend können wir demnach sagen, dass für $\varkappa < b$ die endlichen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Schnitte der Kurve mit den Asymptoten imaginär sind; für $\varkappa = b$ sind sie reell und zwar je zwei vereint und für $\varkappa > b$ reell und getrennt.

Wir haben bei der Ellipse als Grundkurve $a = b$ gesetzt und fanden, dass die Endpunktkurve in zwei Kreise zerfiel; es fragt sich nun, wie sich die Verhältnisse bei der Hyperbel gestalten, wenn wir $a = b$ setzen, also die Grundkurve eine gleichseitige Hyperbel sein lassen. Aus

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2 \text{ wird nun } a^2 (y^2 - x^2 + a^2);$$

zur Abkürzung wollen wir $y^2 - x^2 + a^2 = \gamma$ setzen und haben dann in der Hauptgleichung b durch a und h durch $a^2 \gamma$ zu ersetzen. Nach Division durch a^{12} ergibt sich alsdann die Gleichung:

$$\{x^2 (\gamma - \varkappa^2) - y^2 (\gamma + \varkappa^2) + 2 \gamma^2\}^2 + 4 x^2 y^2 (\gamma^2 - \varkappa^4) = 0.$$

Um darzutun, dass sich die linke Seite dieser Gleichung nicht in rationale Faktoren zerlegen lässt, wollen wir durch die Kurve einen geraden Schnitt legen und zeigen, dass die Gleichung des Schnittpunktsystems nicht in Faktoren zerfällt. Da die Achsenschnitte nur Doppelpunkte enthalten, so sind sie zu unserm Zwecke unbrauchbar; ihre Gleichung stellt sich nämlich, da das Glied mit $x^2 y^2$ fortfällt als ein Quadrat dar.

Dagegen sind die Schnitte mit den Asymptoten hierzu besonders geeignet, da die letzteren die einfache Gleichung $x^2 = y^2$ besitzen. Wir haben demnach in der Gleichung der Kurve für y^2 x^2 und für γ a^2 zu setzen und bekommen:

$$\{x^2 (a^2 - \varkappa^2) - x^2 (a^2 + \varkappa^2) + 2 a^2\}^2 + 4 x^4 (a^4 - \varkappa^4) = 0,$$

oder ausgeführt und geordnet nach x:

$$x^4 - 2 \varkappa^2 x^2 + a^4 = 0.$$

Da diese Gleichung offenbar nicht in rationale Faktoren zerlegbar ist, so gilt das Gleiche auch für die Gleichung der Kurve.

Es sei noch besonders darauf aufmerksam gemacht, dass sich die Art der Schnitte in diesem Falle leicht überblicken lässt; es ist nämlich:

$$x = \pm \sqrt{\varkappa^2 \pm \sqrt{\varkappa^4 - a^4}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eine etwas einfachere Form erhält die Gleichung der Endpunktkurve für die Hyperbel als Basis, wenn wir der letzteren selbst die einfache Form $x y = a^2$ geben.

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung ist offenbar, dass der Inhalt des durch die Koordinaten gebildeten Rechtecks konstant ist. Die Koordinatenachsen sind die Asymptoten, deren Winkel durch die Hyperbelachsen halbiert werden; die Koordinaten des Scheitelpunktes sind $x = y = a$.

Die Gleichung der Tangente in einem Hyperbelpunkte x_1, y_1 ist:

$$x_1 y + y_1 x = 2 a^2, \text{ oder}$$

$$y = -\frac{y_1}{x_1} x + \frac{2 a^2}{x_1}.$$

Hieraus ergibt sich für den Winkel τ, den die Tangente mit der X-Achse bildet:

$$\sin \tau = \frac{-y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \text{ und } \cos \tau = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}.$$

Führen wir diese Werte in die Formeln $x = x_1 + \varkappa \cos \tau$ und $y = y_1 + \varkappa \sin \tau$ ein, so ergeben sich die Koordinaten der Endpunkte

$$x = x + \frac{\varkappa x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, \; y = y_1 - \frac{\varkappa y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}.$$

Die Gleichung der Endpunktkurve erhalten wir am bequemsten durch Elimination von x_1 und y_1 aus den folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \varkappa^2, \\ \text{II.} & x_1 y + y_1 x = 2 a^2, \\ \text{III.} & x_1 y_1 = a^2. \end{array}$$

Der Gleichung I und II geben wir die Form:

$$\text{I. } 2 (x x_1 + y y_1) = x^2 + y^2 + x_1^2 + y_1^2 - \varkappa^2,$$

$$\text{II. } 2 (y x_1 + x y_1) = 4 a^2;$$

Durch Addition derselben ergibt sich:

$$\text{I} + \text{II. } 2 (x + y) x_1 + 2 (x + y) y_1 = x^2 + y^2 + x_1^2 + y_1^2 - \varkappa^2 + 4 a^2, \text{ oder}$$

$$2 (x + y) (x_1 + y_1) = x^2 + y^2 + x_1^2 + y_1^2 - \varkappa^2 + 4 a^2, \text{ oder}$$

$$x_1^2 + y_1^2 - 2 (x + y) (x_1 + y_1) = \varkappa^2 - 4 a^2 - x^2 - y^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Addieren wir hierzu die Gleichung

$$\text{III} \qquad 2\,x_1\,y_1 = 2\,a^2,$$

so erhalten wir:

$$(x_1 + y_1)^2 - 2\,(x + y)\,(x_1 + y_1) = \varkappa^2 - 2\,a^2 - x^2 - y^2,$$

oder nach $x_1 + y_1$ aufgelösst:

$$x_1 + y_1 = x + y \pm \sqrt{\varkappa^2 - 2\,(a^2 - x\,y)} \text{ oder}$$

$$x_1 + y_1 = x + y \pm \sqrt{\varkappa^2 - 2\,H}, \text{ wo } H = a^2 - x\,y \text{ gesetzt ist.}$$

In ganz analoger Weise ergibt sich durch Subtraktion der Gleichungen I und II:

$$x_1 - y_1 = x - y \pm \sqrt{\varkappa^2 + 2\,H},$$

und durch Addition bez. Subtraktion der beiden letzten Werte:

$$2\,x_1 = 2\,x \pm \sqrt{\varkappa^2 - 2\,H} \pm \sqrt{x^2 + 2\,H},$$

$$2\,y_1 = 2\,y \pm \sqrt{\varkappa^2 - 2\,H} \mp \sqrt{\varkappa^2 + 2\,H};$$

oder nach Division durch 2 und durch Aufnahme des doppelten Zeichens in die Wurzeln:

$$x_1 = x + \frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2 - 2\,H} + \frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2 + 2\,H},$$

$$y_1 = y + \frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2 - 2\,H} - \frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2 + 2\,H}.$$

Führen wir diese Werte in die Gleichung

$$\text{II.} \qquad y_1\,x + x_1\,y = 2\,a^2$$

ein und setzen zur Abkürzung $\sqrt{\varkappa^2 - 2\,H} = m$ und $\sqrt{\varkappa^2 + 2\,H} = n$, so erhalten wir:

$$x\,y + \frac{x}{2}\,m - \frac{x}{2}\,n + x\,y + \frac{y}{2}\,m + \frac{y}{2}\,n = 2\,a^2.$$

Wenn wir mit 2 multiplizieren und berücksichtigen, dass $a^2 - xy = H$ ist, so kommt:

$$x\,(m - n) + y\,(m + n) = 4\,H,$$

oder quadriert und die Glieder mit $m\,n$ auf eine Seite geschafft:

$$(x^2 + y^2)\,(m^2 + n^2) + 2\,x\,y\,(m^2 - n^2) - 16\,H^2 = 2\,(x^2 - y^2)\,m\,n.$$

Quadrieren wir jetzt noch einmal und bedenken, dass $m^2 + n^2 = 2\,\varkappa^2$, $m^2 - n^2 = -4\,H$ und $(m\,n)^2 = \varkappa^4 - 4\,H^2$ ist, so ergibt sich:

$$\left[(x^2 + y^2)\,2\,\varkappa^2 - 8\,x\,y\,H - 16\,H^2\right]^2 = 4\,(x^2 - y^2)^2\,(\varkappa^4 - 4\,H^2),$$

und da $x\,y + 2\,H = a^2 + H$ ist, so folgt nach Division durch 4:

$$\left[(x^2 + y^2)\,\varkappa^2 - 4\,H\,(a^2 + H)\right]^2 = (x^2 - y^2)^2\,(\varkappa^4 - 4\,H^2).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es soll noch bemerkt werden, dass sich die Elimination etwas einfacher bewirken lässt. Aus den Gleichungen

$$x_1 y + y_1 x = 2 a^2$$
$$x_1 y_1 = a^2$$

ergibt sich nämlich:

$$x_1 = \frac{a^2 + a\sqrt{H}}{y},$$
$$y_1 = \frac{a^2 - a\sqrt{H}}{x}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \varkappa^2$$

ein, so erhält man nach zweimaliger Quadratur folgende Eliminationsgleichung:

$$\{\varkappa^2 x^2 y^2 - (x^2 + y^2)(a^2 H + H^2)\}^2 = 4 a^2 H^3 (x^2 - y^2)^2.$$

Dieselbe ist in dieser Form 12. Grades; nach einigen Umformungen lässt sich jedoch der Faktor $x^2 y^2$ als ortsfremd abschneiden, und die Gleichung alsdann leicht in die erste Form überführen.

Für $\varkappa = 0$ erhält man:

$$4 H^2 \left[(x^2 - y^2)^2 + 4 (a^2 + H)^2\right] = 0,$$

also die doppelt gezählte Grundkurve nebst einem imaginären Kurvenbestandteile.

Die Schnitte der Kurve mit der Hauptachse der Hyperbel geben nur Doppelpunkte, denn für $x = y$ ist:

$\left[2 x^2 \varkappa^2 - 4 (a^2 - x^2)(2 a^2 - x^2)\right]^2 = 0$, oder nach x geordnet:

$$x^4 - (3 a^2 + {}^1/_2\, \varkappa^2) x^2 = -2 a^4 \text{ und daher:}$$

$$x^2 = \frac{6 a^2 + \varkappa^2}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{4 a^4 + 12 a^2 \varkappa^2 + \varkappa^4},$$

$$\text{oder } (2 x)^2 = 6 a^2 + \varkappa^2 \pm \sqrt{4 a^4 + 12 a^2 \varkappa^2 + \varkappa^4}.$$

Da $(2 x)^2 > (2 a)^2$ ist für das positive Zeichen der Wurzel, so liegen zwei reelle Doppelpunkte im Innern der Hyperbelzweige und sind daher isolierte Punkte; die beiden anderen Doppelpunkte, die dem negativen Wurzelzeichen entsprechen sind eigentliche Doppelpunkte und liegen ausserhalb der Hyperbel, da

$$(2 a)^2 > 6 a^2 + \varkappa^2 - \sqrt{4 a^4 + 12 a^2 \varkappa^2 + \varkappa^2} \text{ ist.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Interessanter gestaltet sich auch hier wieder die Untersuchung der Kurvenschnitte mit der Nebenachse der Hyperbel $y = -x$.

Wir erhalten nämlich:

$\left[2\varkappa^2 x^2 - 4(a^2 + x^2)(2a^2 + x^2)\right]^2 = 0$, also vier Doppelpunkte, deren Koordinaten bestimmt werden durch:

$$x^4 - \left(\frac{1}{2}\varkappa^2 - 3a^2\right)x^2 = -2a^4 \quad \text{oder}$$

$$(2x)^2 = \varkappa^2 - 6a^2 \pm \sqrt{\varkappa^4 - 12a^2\varkappa^2 + 4a^4}.$$

Die vier Doppelpunkte können hiernach alle imaginär sein, wenn nämlich der Radikand negativ ist; ist er dagegen gleich Null, so berühren sich je zwei Kurvenäste, so dass die Nebenachse zweimal gemeinsame Doppeltangente ist.

Dies ist also der Fall, wenn

$$\varkappa^4 - 12a^2\varkappa^2 + 4a^4 = 0, \quad \text{oder}$$

$$\varkappa^2 = 6a^2 + 4a^2\sqrt{2} \text{ ist.}$$

Setzt man diesen Wert für $\varkappa^2$ in

$(2x)^2 = \varkappa^2 - 6a^2 \pm \sqrt{\varkappa^4 - 12a^2\varkappa^2 + 4a^4}$ ein, so kommt:

$$(2x)^2 = 4a^2\sqrt{2} \text{ und somit } x = \pm a\sqrt[4]{2};$$

hiermit sind die Koordinaten der beiden Selbstberührungspunkte gefunden.

Ist endlich $\varkappa^4 - 12a^2\varkappa^2 + 4a^4$ positiv, etwa gleich δ^4, so ist

$$\varkappa^2 = 6a^2 + \sqrt{32a^4 + \delta^4} \text{ und daher}$$

$$(2x)^2 = 6a^2 + \sqrt{32a^4 + \delta^4} - 6a^2 \pm \delta^2 \quad \text{oder}$$

$$(2x)^2 = \sqrt{32a^4 + \delta^4} \pm \delta^2$$

Die entsprechenden 4 Doppelpunkte sind daher reell und getrennt und liegen symmetrisch zum Anfangspunkte auf der Geraden $x : y = -1$.

Zur weitern Untersuchung wollen wir die Kurvengleichung homogen machen und bekommen, wenn $H = a^2z^2 - xy$ ist:

$$(x^2 - y^2)^2(\varkappa^4 z^4 - 4H^2) = \left[(x^2 + y^2)\varkappa^2 z^2 - 4H(a^2z^2 + H)\right]^2.$$

Für $H = 0$ ergeben sich die Schnitte der Kurve mit der Hyperbel, nämlich:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$(x^2 - y^2)^2 \varkappa^4 z^4 = (x^2 + y^2)^2 \varkappa^4 z^4$, oder nach Reduktion und Division durch $4 \varkappa^4$:

$$x^2 y^2 z^4 = 0.$$

Die Hyperbel trifft die Endpunktkurve hiernach dort, wo sie die vorstehenden 8 Geraden schneidet, d. h. die beiden Kurven berühren sich in den unendlich fernen Punkten der Asymptoten je 8 punktig.

Um die Schnitte der Kurve mit den Koordinatenachsen, d. i. mit den Asymptoten, und der unendlich fernen Geraden zu erhalten, wollen wir die homogene Gleichung ausführen und nach Dimensionen von x, y und z ordnen. Nach Division durch 4 lautet die Gleichung:

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2)^2 - 2 x y \left[\varkappa^2 (x^2 + y^2) x y + 10 a^2 x^2 y^2 + a^2 (x^4 + y^4)\right] z^2$$
$$+ \left[(50 a^4 + \varkappa^4) x^2 y^2 + 6 \varkappa^2 a^2 (x^2 + y^2) x y + a^4 (x^4 + y^4)\right] z^4$$
$$- 4 a^4 \left[12 a^2 x y + \varkappa^2 (x^2 + y^2)\right] z^6 + 16 a^8 z^8 = 0.$$

Die unendlich ferne Gerade $z = 0$ trifft die Kurve dort, wo sie die 8 Geraden

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2)^2 = 0 \qquad \text{schneidet,}$$

also in den beiden unendlich fernen Asymptotenpunkten und den beiden unendlich fernen Kreispunkten und zwar in je zwei vereinten Schnitten. Die unendlich ferne Gerade berührt jedoch die Kurve nicht in diesen Punkten, sondern die Punkte sind Doppelpunkte. Da nämlich in der Gleichung das Aggregat 7. Dimension fehlt, so schneiden auch die Geraden $x = 0$, $y = 0$ und $x \pm i y = 0$ die Kurve im Unendlichen in zwei vereinten Punkten, wodurch die Natur der Doppelpunkte nachgewiesen ist.

Für $x = 0$ oder $y = 0$ verschwinden ferner die Glieder bis zur 4. Dimension, d. h. die beiden Asymptoten haben im Unendlichen je 4 vereinte Schnitte; sie sind die gemeinsamen Tangenten an je zwei Kurvenäste, die in diesen ausgezeichneten unendlich fernen Punkten eine innige Berührung eingehen. Zur Bestimmung der Schnitte der Asymptoten im Endlichen erhalten wir nach Division durch a^4 folgende Gleichung 4. Grades

$$x^4 - 4 \varkappa^2 x^2 + 16 a^4 = 0,$$

oder aufgelöst:

$$x = \pm \sqrt{2 \varkappa^2 \pm 2 \sqrt{\varkappa^4 - 4 a^4}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist $\varkappa^4 - 4a^4$ positiv, etwa gleich δ^4, so ist leicht zu übersehen, dass alle 4 Werte für x reell sind, ist jedoch $\varkappa^4 - 4a^4 < 0$, so sind dieselben imaginär; im Übergangsfalle, wo $\varkappa^4 = 4a^4$, oder $\varkappa = a\sqrt{2}$ ist, fallen je zwei Schnitte zusammen; die Asymptoten berühren die Kurve und zwar in der Entfernung $\pm 2a$ vom Mittelpunkte; sie sind in diesem Falle auch im Endlichen für die Kurve Doppeltangenten.

Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung der Endpunktkurve für die Parabel als Basis; die Gleichung der letztern lautet $y^2 = 2px$, wo als X-Achse die Hauptachse und als Y-Achse die Scheiteltangente der Parabel gewählt ist, und wo p die doppelte Entfernung des Scheitels vom Brennpunkte bedeutet. Die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkte x_1 y_1 ist

$$y\,y_1 = p(x + x_1), \text{ oder}$$

$$y = \frac{p}{y_1}x + p\frac{x_1}{y_1}.$$

Hiernach ist $\operatorname{tg}\tau = \frac{p}{y_1}$, wo τ den Winkel bedeutet, den die Tangente mit der X-Achse bildet, und somit

$$\sin\tau = \frac{p}{\sqrt{y_1^2 + p^2}}, \text{ und } \cos\tau = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + p^2}}.$$

Die Koordinaten der Endpunktkurve erhalten wir daher, wenn wir diese Werte in

$$x = x_1 + \varkappa\cos\tau \text{ und } y = y_1 + \varkappa\sin\tau$$

einsetzen, also

$$x = x_1 + \frac{\varkappa y_1}{\sqrt{y_1^2 + p^2}} \text{ und } y = y_1 + \frac{\varkappa p}{\sqrt{y_1^2 + p^2}}.$$

Zur Probe wollen wir diese Werte für x und y dadurch ableiten, dass wir die Parabeltangente im Punkte x_1 y_1 mit dem Kreise, der mit dem Radius $\varkappa$ um den Berührungspunkt als

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mittelpunkt beschrieben wird, zum Schnitt bringen. Wir lösen daher die beiden Gleichungen

$$y\,y_1 = p\,(x + x_1),$$
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \varkappa^2$$

nach x und y auf, indem wir den Wert von y aus der ersten in die zweite Gleichung einsetzen. Nach einigen Reduktionen ergibt sich

$$x^2 - 2\,x_1\,x + x_1^2 - \frac{\varkappa^2\,y_1^2}{y_1^2 + p^2} = 0 \text{ und hieraus}$$

$$x = x_1 \pm \frac{\varkappa\,y_1}{\sqrt{y_1^2 + p^2}}.$$

Führt man diesen Wert in die Gleichung der Tangente ein, so kommt:

$$y = y_1 \pm \frac{p\,\varkappa}{\sqrt{y_1^2 + p^2}}.$$

Es wird von Interesse sein, diese Koordinaten durch einen veränderlichen Parameter auszudrücken. Zu diesem Zwecke schneiden wir die Parabel mit dem Strahlenbüschel aus ihrem Scheitel; die Gleichung des letzteren sei etwa $x = \lambda\,y$.

Wir erhalten daher:

$$y^2 = 2\,p\,\lambda\,y \text{ oder } (y - 2\,p\,\lambda)\,y = 0.$$

Sehen wir nun von dem selbstverständlichen Schnitte, dem Scheitel $y = 0$ ab und betrachten nur den variabeln fernern Schnitt eines jeden Strahles mit der Parabel, der durch die lineare Gleichung

$$y = 2\,p\,\lambda$$

gegeben ist, so erhalten wir das zugehörige x durch die Gleichung des Strahlenbüschels also:

$$x = 2\,p\,\lambda^2.$$

Setzen wir diese Werte in den obigen Koordinaten an Stelle von x_1 und y_1, so ergeben sich folgende irrationalparametrischen Ausdrücke

$$x = 2\,p\,\lambda^2 + \frac{2\,\varkappa\,\lambda}{\sqrt{4\,\lambda^2 + 1}},$$

$$y = 2\,p\,\lambda + \frac{\varkappa}{\sqrt{4\,\lambda^2 + 1}}$$

als die Koordinaten eines die Endpunktkurve durchlaufenden Punktes.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir sehen, dass für $\varkappa = 0$ sich die parametrischen Koordinaten für die Punkte der Parabel ergeben. Mit Hülfe dieser Koordinaten sind wir imstande eine Reihe von Eigenschaften unserer Endpunktkurve zu ermitteln, ohne dass wir ihre Gleichung aufzustellen brauchen. Um z. B. die Ordnung der Kurve zu bestimmen, setzen wir die obigen Werte für x und y in die Gleichung einer beliebigen Geraden $y = m x + b$ ein und erhalten:

$$2 p \lambda + \frac{\varkappa}{\sqrt{4 \lambda^2 + 1}} = 2 m p \lambda^2 + \frac{2 m \varkappa \lambda}{\sqrt{4 \lambda^2 + 1}} + b;$$

rationalisieren wir diese Gleichung, so bekommen wir:

$$\varkappa^2 (1 - 2 m \lambda)^2 = (2 p m \lambda^2 - 2 p \lambda + b)^2 (4 \lambda^2 + 1).$$

Wir sind nun berechtigt aus dem Grade 6 dieser Gleichung zu schliessen, dass die Endpunktkurve von der 6. Ordnung ist. Die Gleichung liefert im allgemeinen 6 verschiedene Werte für λ; zieht man in den 6 entsprechenden parametrischen Parabelpunkten die Tangenten, so liegen zwar auf jeder 2 Endpunkte, von denen aber im allgemeinen nur einer auf die Schnittgerade fallen wird.

Da die X-Achse die Gleichung $y = 0$ hat, so erhalten wir die Werte für λ, von denen die Schnitte mit der X-Achse herkommen, wenn wir die Gleichung

$$2 p \lambda + \frac{\varkappa}{\sqrt{4 \lambda^2 + 1}} = 0$$

nach λ auflösen; dies ist eine Gleichung 4. Grades, wie die rationale Form

$$\lambda^4 + \frac{1}{4} \lambda^2 = \frac{\varkappa^2}{16 p^2}$$

zeigt; es sind also zwei Wurzeln von λ unendlich gross, und da $\lambda = \infty$ die X-Achse bedeutet, so sehen wir, dass sie die Endpunktkurve in 2 unendlich fernen Punkten trifft.

Die 4 endlichen Werte von λ sind:

$$\lambda = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{1}{2} \pm \frac{w}{2 p}}, \text{ wo } w^2 = p^2 + 4 \varkappa^2 \text{ ist.}$$

Durch Substitution dieser Werte in

$$x = 2 p \lambda^2 + \frac{2 \varkappa \lambda}{\sqrt{4 \lambda^2 + 1}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ergeben sich die Abscissen der Schnittpunkte nämlich:

$$x_1 = -\frac{p}{4} + \frac{w}{4} + \varkappa \frac{\sqrt{-p+w}}{\sqrt{p+w}} = \frac{p}{4} - \frac{w}{4};$$

$$x_2 = -\frac{p}{4} - \frac{w}{4} + \varkappa \frac{\sqrt{-p-w}}{\sqrt{p-w}} = \frac{p}{4} + \frac{w}{4}.$$

Die Schnitte mit der Y-Achse erhalten wir, indem wir $x = 0$, also

$$2\,p\,\lambda^2 + \frac{2\,\varkappa\,\lambda}{\sqrt{4\,\lambda^2+1}} = 0 \text{ setzen.}$$

Nach der Rationalisierung lässt sich der Faktor λ^2 abheben, so dass die Gleichung 4. Grades

$$\lambda^4 + \frac{1}{4}\lambda^2 = \frac{\varkappa^2}{4\,p^2} \text{ resultiert.}$$

Hieraus ergeben sich die folgenden 4 Werte für λ:

$$\lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{2} \pm \frac{r}{2\,p}}, \text{ wo } r^2 = p^2 + 16\,\varkappa^2 \text{ ist.}$$

Führen wir diese Werte für λ in

$$y = 2\,p\,\lambda + \frac{\varkappa}{\sqrt{4\,\lambda^2+1}} \text{ ein,}$$

so ergeben sich die Ordinaten der Schnittpunkte:

$$y = \pm\varkappa \text{ (für } \lambda^2 = 0) \text{ und}$$

$$y = \sqrt{-\frac{p^2}{2} \pm \frac{pr}{2}} + \frac{\varkappa}{\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{r}{2p}}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{p^2}{2} \pm \frac{pr}{2}}.$$

Die 6 Schnittpunkte, von denen 4 reell und 2 imaginär sind, liegen hiernach symmetrisch zum Anfangspunkte, wie es die Symmetrie der Parabel zur X-Achse erfordert.

Um die Schnitte der unendlich fernen Geraden zu bekommen, schreiben wir die parametrischen Ausdrücke der Koordinaten homogen und erhalten:

$$x = 2\,p\,\lambda^2\sqrt{4\,\lambda^2+1} + 2\,\varkappa\,\lambda,$$
$$y = 2\,p\,\lambda\sqrt{4\,\lambda^2+1} + \varkappa,$$
$$z = \sqrt{4\,\lambda^2+1}.$$

Für $z = 0$ folgt nun $\lambda^2 = -\frac{1}{4}$, oder $\lambda = \pm\frac{i}{2}$; 4 Werte für

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

λ sind demnach unendlich gross, so dass die unendlich ferne Gerade die Kurve in der Richtung der X-Achse in 4 vereinten Schnitten trifft.

Die beiden anderen Schnitte sind die unendlich fernen Kreispunkte; setzen wir nämlich den Wert $\lambda = \pm \frac{i}{2}$ in die beiden ersten Gleichungen ein und dividieren sie durcheinander, so ergibt sich:

$$\frac{x}{y} = \pm i,$$

also die Gleichungen der Geraden, die nach jenen Punkten hinweisen.

Mit Hülfe unserer Parameter-Koordinaten können wir auch die Schnitte der Parabel mit der Endpunktkurve untersuchen. Wir setzen daher in $y^2 = 2px$ die parametrischen Werte von x und y ein und erhalten

$$\left(2p\lambda + \frac{\varkappa}{\sqrt{4\lambda^2+1}}\right)^2 = 2p\left(2p\lambda^2 + \frac{2\varkappa\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+1}}\right),$$

oder ausgeführt:

$$4p^2\lambda^2 + \frac{4p\varkappa\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+1}} + \frac{\varkappa^2}{4\lambda^2+1} = 4p^2\lambda^2 + \frac{4p\varkappa\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+1}},$$

woraus folgt:

$$\frac{\varkappa^2}{4\lambda^2+1} = 0.$$

Die Gleichung kann also nur von unendlich grossen Werten von λ befriedigt werden; wir schliessen hieraus, dass sämtliche 12 Punkte, die die beiden Kurven gemein haben, im Unendlichen u. z. in der Richtung der X-Achse liegen.

Aus den parametrischen Ausdrücken

$$x = 2p\lambda^2 + \frac{2\varkappa\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+1}}$$

$$y = 2p\lambda + \frac{\varkappa}{\sqrt{4\lambda^2+1}}$$

ergibt sich die Gleichung der Kurve durch Elimination von λ. Wir setzen die Werte für $\sqrt{4\lambda^2+1}$ aus beiden Gleichungen einander gleich und erhalten:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{2\varkappa\lambda}{x-2p\lambda}=\frac{\varkappa}{y-2p\lambda}.$$

Nach λ geordnet und aufgelöst ergibt sich:

$$\lambda^2-\frac{y}{p}\lambda+\frac{x}{2p}=0;$$

$$\lambda=\frac{y}{2p}\pm\frac{1}{2p}\sqrt{y^2-2px},$$

oder wenn $y^2-2px=\pi$ gesetzt wird:

$$\lambda=\frac{y}{2p}\pm\frac{1}{2p}\sqrt{\pi}.$$

Führen wir diesen Wert für λ in $y=2p\lambda+\frac{\varkappa}{\sqrt{4\lambda^2+1}}$ ein, so ergibt sich die Gleichung der Kurve zunächst in folgender Gestalt:

$$\frac{\pm\varkappa}{\sqrt{\pi}}=\sqrt{\left(\frac{y}{p}\pm\frac{1}{p}\sqrt{\pi}\right)^2+1}.$$

Um die Gleichung zu rationalisieren, quadrieren wir und multiplizieren mit $p^2\pi$; es ergibt sich alsdann:

$$\varkappa^2p^2-(p^2+y^2+\pi)\pi=2y\sqrt{\pi^3}.$$

Quadrieren wir nun noch einmal, so bekommen wir die Gleichung der Kurve in folgender Form:

$$\text{I.}\quad \varkappa^4p^2-2\varkappa^2(p^2+y^2+\pi)\pi+\{(2x-p)^2+4y^2\}\pi^2=0.$$

Bevor wir die Gleichung diskutieren, wollen wir sie in anderer Weise aus den bekannten Gleichungen

$$1)\quad x=x_1+\frac{\varkappa y_1}{\sqrt{y_1^2+p^2}},$$

$$2)\quad y=y_1+\frac{\varkappa p}{\sqrt{y_1^2+p^2}},$$

$$3)\quad y_1^2=2px_1$$

durch Elimination von x_1 und y_1 ableiten. Aus den beiden ersten Gleichungen folgt durch Division:

$$\frac{\varkappa y_1}{x-x_1}=\frac{\varkappa p}{y-y_1}\quad\text{oder}\quad yy_1-y_1^2=px-px_1.$$

Da nun aus Gleichung 3) folgt, dass $px_1=\frac{y_1^2}{2}$ ist, so ergibt sich, wenn wir nach y_1 ordnen,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$y_1^2 - 2\,y\,y_1 = -2\,p\,x, \text{ und daher}$$
$$y_1 = y + \sqrt{\pi}.$$

Geben wir der Gleichung $y = y_1 + \dfrac{\varkappa\,p}{\sqrt{y_1^2 + p^2}}$ durch Quadratur die Form

$$(y - y_1)^2 (y_1^2 + p^2) = \varkappa^2 p^2,$$

und substituieren darin den obigen Wert für y_1, so erhalten wir die Kurvengleichung in der bereits bekannten Form:

$$\varkappa^2 p^2 - (p^2 + y^2 + \pi)\,\pi = 2\,y\sqrt{\pi^3},$$

aus der die Form I in der beschriebenen Weise folgt.

Aus der Gleichung in dieser Form ergibt sich für $\varkappa = 0$.

$$\{(2\,x - p)^2 + (2\,y)^2\}\,(y^2 - 2\,p\,x)^2 = 0.$$

Wir erhalten also die doppelt gezählte Parabel und das imaginäre Geradenpaar $x \pm i\,y = \frac{p}{2}$; diese Geraden stehen aufeinander senkrecht und verbinden die unendlich fernen Kreispunkte mit dem Brennpunkte der Parabel.

Um die Kurve mit der Parabel zum Schnitt zu bringen, schreiben wir ihre Gleichungen homogen und erhalten:

$$y^2 - 2\,p\,x\,z \equiv \pi = 0 \quad \text{und}$$

$$\text{II.} \quad \varkappa^4 p^2 z^6 - 2\,\varkappa^2 (p^2 z^2 + y^2 + \pi)\,\pi + \{(2\,x - p\,z)^2 + 4\,y^2\}\pi^2 = 0.$$

Für $\pi = 0$ ergibt sich nun $\varkappa^4 p^2 z^6 = 0$, oder $z^6 = 0$.

Wir sehen also, dass sämtliche 12 Punkte, die die Parabel und ihre Endpunktkurve gemein haben in dem unendlich fernen Punkte der X-Achse vereinigt sind. Beide Kurven schmiegen sich im Unendlichen so nahe als möglich an einander d. h. sie berühren sich zwölfpunktig.

Um die Gestalt der Kurve im Unendlichen zu untersuchen, ordnen wir die Gleichung II nach Potenzen von x, y und z und erhalten:

$$\begin{aligned}\text{IIa.} \quad & 4\,y^6 + 4\,x^2 y^4 - 20\,p\,x\,y^4 z - 16\,p\,x^3 y^2 z + 16\,p^2 x^4 z^2 \\ & + (p^2 - 4\,\varkappa^2)\,y^4 z^2 + 32\,p^2 x^2 y^2 z^2 - 16\,p^3 x^3 z^3 \\ & + 4\,p\,(3\,\varkappa^2 - p^2)\,x\,y^2 z^3 + 4\,p^2 (p^2 - 2\,\varkappa^2)\,x^2 z^4 \\ & - 2\,\varkappa^2 p^2 y^2 z^4 + 4\,\varkappa^2 p^3 x\,z^5 + \varkappa^4 p^2 z^6 = 0.\end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für $z = 0$ ist:

$$4y^6 + 4x^2y^4 = 0, \text{ oder } y^4(x + iy)(x - iy) = 0,$$

d. h. die unendlich ferne Gerade trifft die Kurve in der Richtung der X-Achse in 4 vereinten Punkten und ferner in den unendlich fernen Kreispunkten, wie bereits früher aus der parametrischen Darstellung erkannt wurde. Aus der Gleichung ersehen wir ferner, dass x nur bis zur 4. Potenz steigt, und schliessen daraus, dass jede Gerade des Parallelstrahlenbüschels durch den unendlich fernen Punkt der X-Achse in letzterem zwei vereinte Schnitte hat. Die unendlich ferne Gerade selbst jedoch hat hier 4 vereinte Schnitte, woraus wir auf eine Selbstberührung beider Äste schiessen, wobei die unendlich ferne Gerade gemeinsame Tangente ist.

Wenden wir uns jetzt zu den Schnitten mit den Koordinatenachsen; zu diesem Zwecke schreiben wir die Form der Gleichung IIa wieder unhomogen und setzen $x = 0$. Für das Schnittpunktsystem mit der Y-Achse erhalten wir dann folgende Gleichung:

$$4y^6 + (p^2 - 4\varkappa^2)y^4 - 2\varkappa^2p^2y^2 + \varkappa^4p^2 = 0.$$

Diese kubische Gleichung in y^2 reduziert sich auf eine quadratische Gleichung in y^2, wenn wir berücksichtigen, dass uns bereits die Wurzeln $y^2 = \varkappa^2$ bekannt sind und zwar infolge der Erzeugungsweise unserer Kurve; auch aus der Koordinaten-Darstellung:

$$y = y_1 \pm \frac{\varkappa p}{\sqrt{y_1^2 + p^2}} \text{ folgt für } y_1 = 0 \;\; y = \pm\varkappa.$$

Sondern wir daher von der linken Seite obiger Gleichung durch Division den Faktor $y^2 - \varkappa^2$ ab, so ergibt sich:

$$4y^4 + p^2y^2 - \varkappa^2p^2 = 0 \text{ oder aufgelöst:}$$

$$y^2 = -\frac{p^2}{8} \pm \frac{p}{8}\sqrt{p^2 + 16\varkappa^2}.$$

Somit ergeben sich für y folgende 6 Werte:

$$y = \pm\varkappa \text{ und } y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{p^2}{2} \pm \frac{pr}{2}},$$

wo $r^2 = p^2 + 16\varkappa^2$ bedeutet. Von diesen Wurzeln sind ersichtlich vier reell und zwei imaginär; sie sind ferner, wie es die Symmetrie der Kurve zur X-Achse erfordert, paarweise gleich

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und entgegengesetzt. Es ist noch zu bemerken, dass die beiden Werte $\pm \varkappa$ absolut grösser sind als die beiden andern reellen Wurzeln, da $\varkappa^2 > -\frac{p^2}{8} + \frac{p^2}{8}\sqrt{p^2 + 16\varkappa^2}$, wie durch Quadratur beider Seiten leicht gezeigt werden kann.

Wegen der Symmetrie der Kurve nach der X-Achse müssen die Schnitte der letzteren für die Kurve Doppelpunkte sein. Es sei nun der Punkt D mit der Abscisse x ein Schnittpunkt der Kurve, Q einer der entsprechenden Berührungspunkte und E der Fusspunkt des Lotes aus ihm auf die X-Achse, so ist:

$$DO^2 = 4\,OD^2 + EQ^2 \text{ oder}$$
$$\varkappa^2 = 4\,x^2 + y_1{}^2, \text{ oder da } y_1{}^2 = 2\,p\,x_1,$$

und da die Subtangente der Parabel durch den Scheitel halbiert wird, so ist $x_1 = -x$, und somit:

$$\varkappa^2 = 4\,x^2 - 2\,p\,x.$$

Lösen wir nach x auf, so ergibt sich:

$$x = \frac{p}{4} \pm \frac{w}{4}, \text{ wo } w^2 = p^2 + 4\,\varkappa^2 \text{ ist.}$$

Nur der Punkt $\frac{p-w}{4}$ liegt ausserhalb der Parabel, so dass von ihm allein Tangenten von der Länge $\varkappa$ an die Parabel kommen; der andere Punkt $\frac{p+w}{4}$ liegt im Innern der Parabel und muss daher ein isolierter Punkt sein. Wir wollen nun sehen, wie die Gleichung der Kurve diese Resultate bestätigt. Für $y = 0$ erhalten wir für das Schnittpunktsystem im Endlichen folgende Gleichung 4. Grades in x:

$$x^4 - p\,x^3 + \frac{1}{4}(p^2 - 2\,\varkappa^2)\,x^2 + \frac{\varkappa^2\,p}{4}\,x + \frac{\varkappa^4}{16} = 0.$$

Sind nun $\frac{p \pm w}{4}$ die Wurzeln dieser Gleichung, so muss die linke Seite derselben identisch sein mit

$$\left(x - \frac{p+w}{4}\right)^2 \left(x - \frac{p-w}{4}\right)^2.$$

Führen wir diese Operationen aus, so ergibt eine Koeffizientenvergleichung die völlige Identität beider Seiten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir wollen uns jetzt auch analytisch überzeugen, dass die beiden vereinten Schnitte auf der X-Achse mit den Abscissen $\frac{p \pm w}{4}$ von Doppelpunkten herrühren. Zu diesen Zwecke ersetzen wir in der Kurvengleichung IIa, nachdem wir sie unhomogen gemacht haben, x durch $x + \frac{p \pm w}{4}$ d. h. wir verschieben die Y-Achse des ursprünglichen Koordinatensystems parallel zu sich selbst um die Strecke $\frac{p \pm w}{4}$. Die transformierte Gleichung lautet alsdann:

$$\begin{aligned} &4\,y^6 + 4\,y^4\,x^2 - 2\,(9\,p \mp w)\,y^4\,x - 16\,p\,y^2\,x^3 \\ &- \left(\tfrac{7}{2}\,p^2 + 3\,\varkappa^2 \pm \tfrac{9}{2}\,p\,w\right) y^4 + 4\,p\,(5\,p \mp 3\,w)\,y^2\,x^2 \\ &+ 16\,p^2\,x^4 + 2\,p^2\,(3\,p \pm 5\,w)\,y^2\,x \pm 16\,p^2\,w\,x^3 \\ &+ 2\,p\,(p^3 + 3\,p\,\varkappa^2 \pm p^2\,w \pm \varkappa^2\,w)\,y^2 + 4\,p^2\,(p^2 + 4\,\varkappa^2)\,x^2 = 0. \end{aligned}$$

Da die Glieder 0. und 1. Dimension fehlen, so sind die beiden fraglichen Punkte Doppelpunkte. Die Gleichung des Tangentenpaares in diesen Punkten ist:

$$2\,p\,(p^2 + 4\,\varkappa^2)\,x^2 + (p^3 + 3\,p\,\varkappa^2 \pm p^2\,w \pm \varkappa^2\,w)\,y^2 = 0.$$

Für das obere Vorzeichen ist der Koeffizient von y^2 ersichtlich positiv und für das untere ist er negativ, denn es ist $p^3 + 3\,p\,\varkappa^2 < (p^2 + \varkappa^2)\sqrt{p^2 + 4\,\varkappa^2}$, wie die Quadratur beider Seiten ergibt. Der Punkt $\frac{p + w}{4}$ besitzt also ein imaginäres Tangentenpaar und ist daher ein Einsiedelpunkt, während der Punkt $\frac{p - w}{4}$ ein Knotenpunkt ist, dessen Tangenten reell und getrennt sind.

Wir kommen nun zu der schwierigsten Frage bei der Untersuchung unserer Endpunktkurve, nämlich zu der Frage nach der Klasse derselben und haben also die Anzahl der Tangenten zu bestimmen, die sich von einem beliebigen Punkte der Ebene an die Kurve ziehen lassen. Beginnen wir mit der zuletzt behan-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

delten Endpunktkurve der Parabel. Jede Tangente, die der Y-Achse parallel ist, muss, wie wir gesehen haben, eine Doppeltangente sein. Um die Anzahl dieser Doppeltangenten zu ermitteln schneiden wir die Kurve mit der Geraden $x = m$; dies geschieht am einfachsten, indem wir für x den parametrischen Wert einsetzen; es ergibt sich alsdann:

$$m = 2\,p\,\lambda^2 + \frac{2\,\varkappa\,\lambda}{\sqrt{4\,\lambda^2 + 1}}, \text{ oder:}$$

$$16\,p^2\,\lambda^6 + 4\,p\,(p - 4\,m)\,\lambda^4 + 4\,(m^2 - p\,m - \varkappa^2)\,\lambda^2 + m^2 = 0.$$

Diese Gleichung liefert 3 Werte für λ^2 und somit 3 Paare von Parabeltangenten, die symmetrisch zur X-Achse liegen; jede Tangente gibt 2 Endpunkte d. h. Kurvenpunkte, von denen im allgemeinen nur einer auf die Gerade $x = m$ fällt, sodass insgesamt 6 Schnittpunkte darauf liegen. Hat diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln für λ^2, so geht die Schnittgerade in eine Doppeltangente über; die Verbindungslinie zweier Knotenpunkte kann es nicht sein, da ein solcher im allgemeinen nur von endlich getrennten und nicht von zwei unendlich nahen Tangenten der Originalkurve herkommen kann. Die Bedingung, dass in obiger Gleichung 3. Grades in λ^2 zwei Wurzeln zusammen fallen, ist das Verschwinden ihrer Diskriminante; letztere ist aber, wie die Rechnung gezeigt hat, 4. Grades in m, so dass es im Endlichen 4 Doppeltangenten parallel zur Y-Achse gibt. Wir können dies Resultat auch auf folgende Weise gewinnen: Nehmen wir einmal an, in den Punkten der Parabel mit den Ordinaten y_1 und $-y_1$ liessen sich Tangenten ziehen, deren Endpunkte (x, y) Tangenten besitzen, die parallel zur Y-Achse sind, so wird einer unendlich kleinen Änderung von y_1 keine Änderung von x entsprechen. Es muss also $\frac{d\,x}{d\,y_1} = 0$ sein, oder da $y_1 = 2\,p\,\lambda$, und somit $d\,y_1 = 2\,p\,d\,\lambda$ ist, so muss auch $\frac{d\,x}{d\,\lambda} = 0$ sein.

Es war aber $x = 2\,p\,\lambda^2 + \frac{2\,\varkappa\,\lambda}{\sqrt{4\,\lambda^2 + 1}}$, also ist:

$$\frac{d\,x}{d\,\lambda} = \frac{4\,p\,\lambda\,(4\,\lambda^2 + 1)^{3/2} + 2\,\varkappa.}{(4\,\lambda^2 + 1)^{3/2}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieser Differentialquotient verschwindet, wenn sein Zähler gleich Null ist, und dies ist der Fall, wenn

$$4\lambda^2(4\lambda^2+1)^3 = \varkappa^2 : p^2 \text{ ist.}$$

Setzt man $\varkappa^2 : p^2 = \alpha$ und $4\lambda^2 = z$, so nimmt diese Gleichung folgende Gestalt an:

$$z^4 + 3z^3 + 3z^2 + z - \alpha = 0.$$

Jede Wurzel z liefert zwei gleiche und entgegengesetze Werte von λ, also 2 zur X-Achse symmetrische Parabeltangenten, die in je einem ihrer Endpunkte die Berührungspunkte einer Doppeltangente geben, die zur Y-Achse parallel ist. Jedem Werte von z entspricht somit nur eine Doppeltangente. — Es sei nebenher bemerkt, dass die obige Gleichung nur einen Zeichenwechsel enthält, somit kann sie nur eine reelle positive Wurzel haben und dementsprechend nur eine reelle Doppeltangente, wie es geometrisch evident ist.

Wegen der Wichtigkeit der Sache wollen wir die beiden vorhergehenden Methoden auf eine andere parametrische Darstellung anwenden. Wir wollen das Parallelstrahlenbüschel aus dem unendlich fernen Punkte der Y-Achse benutzen und erhalten als Parabel-Koordinaten $x_1 = \lambda$ und $y_1 = \sqrt{2p\lambda}$. Zwar ist hier die Eindeutigkeit der Beziehung aufgegeben, für unsern Zweck lässt sich indes diese Darstellung mit Erfolg benutzen. Die Abscisse der Endpunktkurve ergibt sich, wenn wir obige Werte in

$$x = x_1 + \frac{\varkappa y_1}{\sqrt{y_1^2 + p^2}} \text{ einsetzen, nämlich:}$$

$$x = \lambda + \varkappa \frac{\sqrt{2p\lambda}}{\sqrt{2p\lambda + p^2}}.$$

Das Schnittpunktsystem der Geraden $x = m$ erhalten wir wiederum, wenn wir $m = \lambda + \varkappa \frac{\sqrt{2p\lambda}}{\sqrt{2p\lambda + p^2}}$ setzen, woraus sich folgende Gleichung 3. Grades in λ ergibt:

$$2\lambda^3 + (p - 4m)\lambda^2 + 2(m^2 - mp - \varkappa^2)\lambda + m^2 p = 0.$$

Zu den 6 Schnittpunkten der Kurve mit $x = m$ gehören also die 3 Werte von λ, die diese Gleichung liefert. Fallen 2 Werte von λ zusammen, so geht die Gerade $x = m$ in eine

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tangente über. Die Bedingung dafür ist das Verschwinden der Diskriminante obiger Gleichung nämlich:

$$16\,m^4 + 24\,p\,m^3 + 12\,p^2\,m^2 - 32\,\varkappa^2\,m^2 + 2\,p^3\,m$$
$$+ 40\,\varkappa^2\,p\,m + \varkappa^2\,p^2 + 16\,\varkappa^4 = 0.$$

Der Grad dieser Gleichung ist wieder 4; es gibt also 4 Gerade $x = m$, die Doppeltangenten sind.

Bilden wir ebenso den Differentialquotienten von x nach λ, so kommt:

$$\frac{d\,x}{d\,\lambda} = \frac{(2\,p\,\lambda + p^2)^{3/2}\sqrt{2\,p\,\lambda} + \varkappa\,p^3}{(2\,p\,\lambda + p^2)^{3/2}\cdot\sqrt{2\,p\,\lambda}}.$$

Dieser Wert verschwindet, wenn

$$(2\,p\,\lambda + p^2)^3 \cdot 2\,p\,\lambda - \varkappa^2\,p^6 = 0 \text{ ist, oder}$$
$$16\,\lambda^4 + 24\,p\,\lambda^3 + 12\,p^2\,\lambda^2 + 2\,p^3\,\lambda - \varkappa^2\,p^2 = 0.$$

Die Ähnlichkeit dieser Gleichung 4. Grades in λ und der obigen Gleichung 4. Grades in m ist auffallend, während jedoch die erste durch ihre 4 Wurzeln für m die Gleichungen der Doppeltangenten selbst, nämlich $x = m$, liefert, gibt die letzte Gleichung die 4 Parameter λ, die durch Substitution in $x = \lambda + \varkappa\,\frac{\sqrt{2\,p\,\lambda}}{\sqrt{2\,p\,\lambda + p^2}}$ zu jenen Gleichungen führen.

Es kommen demnach 10 Tangenten vom unendlich fernen Punkte der Y-Achse an die Kurve, nämlich im Endlichen 4 Doppeltangenten und die unendlich ferne Gerade, die wir bereits früher als Doppeltangente erkannt haben.

Bevor wir jedoch hieraus die weiteren Schlüsse ziehen, wollen wir untersuchen, ob wir auch zu demselben Resultate für den unendlich fernen Punkt der X-Achse gelangen. Hierzu stellen wir die Koordinaten der Parabel und ihrer Endpunktkurve durch das Strahlenbüschel aus diesem Punkte dar und setzen $y_1 = \lambda$ und $x_1 = \lambda^2 : 2\,p$. Zu jedem λ gehört alsdann nur ein Parabelpunkt und zwei Punkte der Endpunktkurve mit den Koordinaten:

$$x = \frac{\lambda^2}{2\,p} + \frac{\varkappa\,\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + p^2}},\quad y = \lambda + \frac{\varkappa\,p}{\sqrt{\lambda^2 + p^2}}.$$

Eine beliebige Parallele zur X-Achse, $y = m$, trifft die Kurve in 4 endlichen Punkten; die entsprechenden Werte von λ ergeben sich aus der Gleichung:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$m = \lambda + \frac{\varkappa p}{\sqrt{\lambda^2 + p^2}}, \text{ oder}$$

$$\lambda^4 - 2 m \lambda^3 + (m^2 + p^2) \lambda^2 - 2 m p^2 \lambda + m^2 p^2 - \varkappa^2 p^2 = 0.$$

Hat diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln, so hat die Gerade $y = m$ zwei vereinte Schnitte mit der Kurve; diese können nur von einer Taktion und nicht von einem Knotenpunkte herkommen, da eine bewegliche Tangente einen Knotenpunkt, insofern er zu dem einen oder andern Aste gehört, nicht unmittelbar nach einander, sondern zu verschiedenen Zeiten passiert. Das Verschwinden der Diskriminante obiger Gleichung 4. Grades in λ gibt uns nun die Bedingung für die Vereinigung von 2 Werten von λ; also:

$$m^6 + (3 p^2 - \varkappa^2) m^4 + (3 p^4 - 20 \varkappa^2 p^2) m^2 + p^6 + 8 \varkappa^2 p^4 + 16 \varkappa^4 p^2 = 0.$$

Dies ist eine Gleichung 3. Grades in m^2; es gibt demnach 6 Tangenten an die Kurve, die zu je zweien symmetrisch und parallel zur X-Achse liegen.

Von der Zahl 6 dieser Tangenten können wir uns auch wieder durch Differentiation von

$$y = \lambda + \frac{\varkappa p}{\sqrt{\lambda^2 + p^2}}$$

nach λ überzeugen. Es ist nämlich:

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{(\lambda^2 + p^2)^{3/2} - \varkappa p \lambda}{(\lambda^2 + p^2)^{3/2}}; \text{ dieser Ausdruck}$$

wird zu Null, wenn $(\lambda^2 + p^2)^3 = \varkappa^2 p^2 \lambda^2$ ist, oder:

$$\lambda^6 + 3 p^2 \lambda^4 + 3 p^4 \lambda^2 - \varkappa^2 p^2 \lambda^2 + p^6 = 0.$$

Aus den 6 Wurzeln dieser Gleichung ergeben sich durch Substitution derselben in den parametrischen Ausdruck für y die Gleichungen der 6 Tangenten, parallel zur X-Achse. Da nun der unendlich ferne Punkt dieser Geraden auf der Kurve liegt, so muss die unendlich ferne Gerade als Doppeltangente doppelt gezählt werden, so dass auch hier wieder die Zahl 10 erreicht wird. Wir können demnach behaupten, dass die Klasse der Kurve 10, und ihr Geschlecht daher Null ist. Da nämlich die Anwesenheit von Rückkehrpunkten ausgeschlossen ist, nimmt die I. Plücker'sche Formel die Gestalt $n_1 = n(n-1) - 2d$ an, wo n_1 die Klasse, n die Ordnung und d die Anzahl der Doppelpunkte

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bedeutet. Hiernach muss die Kurve, da $n_1 = 10$ und $n = 6$ ist, 10 Doppelpunkte besitzen. Da ferner im Endlichen 2 Doppelpunkte liegen, so muss die Berührung der beiden Äste im Unendlichen eine 8 punktige sein. Der direkte Nachweis dieser sehr innigen Berührung hat Herrn Prof. Dr. R. Sturm zum Autor und soll in Kürze mitgeteilt werden. Ist nämlich die Klasse der Kurve 10, so muss sie rational sein; dies ergibt sich auch, wenn man einen neuen Parameter einführt mittels der Gleichung $y_1 = \frac{2pt}{1-t^2}$, wo y_1 wieder die Parabel-Ordinate ist; demselben Parabelpunkte entsprechen dann stets die beiden Parameter t und $-\frac{1}{t}$. Aus dem Parameterwerte für y_1 folgt, da $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$ ist: $x_1 = \frac{2pt^2}{(1-t^2)^2}$. Führen wir diese Werte für x_1 und y_1 in die frühern Ausdrücke $x = x_1 + \frac{\varkappa y_1}{\sqrt{y_1^2 + p^2}}$, $y = y_1 + \frac{\varkappa p}{\sqrt{y_1^2 + p^2}}$ ein, so erhalten wir für x und y rationale Werte, da $\sqrt{y_1^2 + p^2}$ in $\frac{p(1+t^2)}{1-t^2}$ übergeht, nämlich:

$$x = \frac{2pt^2}{(1-t^2)^2} + \frac{2\varkappa t}{1+t^2},$$

$$y = \frac{2pt}{1-t^2} + \varkappa \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Die Kurve (vergl. Fig. III.) kann also nur aus einem Zuge bestehen; in dem unendlich fernen Selbstberührungspunkte durchsetzen sich nicht die beiden Zweige, wie man wegen der Analogie bei der Ellipse als Grundkurve erwarten sollte, sondern es findet hier wegen der geraden Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte eine eigentliche Taktion statt; in diesem Punkte geht sowohl der Zweig der einen Art der Endpunkte in den der anderen Art als auch dieser in jenen über, wie es sich ergibt, wenn man die Verteilung der Parameterwerte t auf der Kurve untersucht.

Dem in Frage stehenden unendlich fernen Punkte der X-Achse entsprechen nun die beiden Parameter ± 1. Da die Regeln der Differentialrechnung nicht für unendlich ferne Punkte

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gelten, so können wir, da es sich um eine projektive Eigenschaft handelt, eine kollineare Transformation vornehmen. Zu diesem Zwecke bringen wir zunächst die obigen Werte für x und y auf den gemeinschaftlichen Nenner:

$$(1-t^2)^2(1+t^2)=1-t^2-t^4+t^6$$

und erhalten:

$$x=\frac{2pt^2+2pt^4+2\varkappa t-4\varkappa t^3+2\varkappa t^5}{1-t^2-t^4+t^6}$$

$$y=\frac{2pt-2pt^5+\varkappa-3\varkappa t^2+3\varkappa t^4-\varkappa t^6}{1-t^2-t^4+t^6}.$$

Führen wir jetzt homogene Koordinaten ein, so erhalten wir mit Vernachlässigung eines gewissen Proportionalitätsfaktors:

$$x=2pt^2+2pt^4+2\varkappa t-4\varkappa t^3+2\varkappa t^5,$$
$$y=2pt-2pt^5+\varkappa-3\varkappa t^2+3\varkappa t^4-\varkappa t^6,$$
$$z=1-t^2-t^4+t^6.$$

Wenn wir jetzt die Werte für x und z vertauschen, so gelangt der singuläre Punkt in den Anfangspunkt mit der Y-Achse als gemeinsamer Tangente. Unhomogen geschrieben lauten die neuen parametrischen Werte:

$$x=\frac{1-t^2-t^4+t^6}{2pt^2+2pt^4+2\varkappa t-4\varkappa t^3+2\varkappa t^5},$$

$$y=\frac{2pt-2pt^5+\varkappa-3\varkappa t^2+3\varkappa t^4-\varkappa t^6}{2pt^2+2pt^4+2\varkappa t-4\varkappa t^3+2\varkappa t^5}.$$

Man überzeugt sich leicht durch Substitution der Werte $t=\pm 1$ in diese Ausdrücke, dass der singuläre Punkt zum Anfangspunkte geworden ist. Nun lehrt die Differentialrechnung, dass zwei Kurven oder Kurvenzweige in einem Punkte eine 8 punktige Berührung eingehen, wenn nicht bloss die Koordinaten x und y, sondern auch die 7 ersten Ableitungen der einen nach der andern für jenen Punkt übereinstimmen. Die Rechnung hat nun gezeigt, dass die 7 ersten Ableitungen von $\frac{dx}{dy}$ für die Werte $t=\pm 1$ übereinstimmen; es ist nämlich für $t=\pm 1$:

$$\frac{dx}{dy}=0,\ \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1}{p},\ \frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d^4x}{dy^4}=\frac{d^5x}{dy^5}=0,\ \frac{d^6x}{dy^6}=-\frac{45\varkappa^2}{2p^3},\ \frac{d^7x}{dy^7}=0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für centrische Kegelschnitte sind die Endpunktkurven 8. Ordnung; ihre gemeinsamen 16 Schnitte liegen, wie wir sahen im Unendlichen und zwar zu je 8 in der Richtung der beiden Asymptoten. Da sich diese 8 Schnitte auf beide Züge wegen der Symmetrie gleichartig verteilen, also der Kegelschnitt mit jedem Zuge im unendlich fernen Punkte der Asymptoten 4 vereinte Schnitte hat, so muss die Selbstberührung beider Äste mindestens eine 4 punktige sein. Andererseits lässt sich feststellen, dass die beiden Kurvenzüge in den unendlich fernen singulären Punkten eine ungerade Anzahl von vereinten Punkten besitzen, sich also in ihnen schneiden, woraus dann folgt, dass die Berührung mindestens eine 5 punktige ist. Die Endpunktkurve der Ellipse besteht nämlich, wie Fig. II zeigt, aus zwei Ovalen, die sich um die Originalkurve herum legen und sich auf beiden Seiten einer jeden Achse in einem Knotenpunkte durchsetzen. Projizieren wir nun die Ellipse mit ihrer Endpunktkurve auf eine zur kleinen Achse parallele Ebene aus einem Centrum, dessen Verbindungsebene mit der kleinen Achse zur Projektionsebene parallel und dessen Verbindungsebene mit der grossen Achse zu derselben, um die Symmetrie zu erhalten, normal ist, so geht durch diese Centralprojektion die Ellipse in eine Hyperbel und die beiden Ovale in je zwei Kuvenäste über, deren unendlich fernen Punkte von den Schnitten der Ovale auf der kleinen Achse herrühren. Da die 4 Äste der Hyperbel-Endpunktkurve in Fig. I zu einander und zu der Hyperbel dieselbe Lage haben wie die beschriebenen Projektionskurven, so sehen wir, dass wir es in dem unendlich fernen singulären Punkten der Endpunktkurven mit Schnitten zu tun haben. Ferner ist noch ersichtlich, dass das punktierte Oval in Fig. II. als Ort der Endpunkte der einen Art den beiden punktierten Ästen in Fig. I entspricht, und ebenso das ausgezogene Oval in Fig. II als Ort der Endpunkte der andern Art den beiden ausgezogenen Ästen in Fig. I. Hiernach besitzt die Endpunktkurve in den beiden unendlich fernen Asymptotenpunkten mindestens 10 Doppelpunkte, auf jeder Koordinatenachse liegen im Endlichen 4 Doppelpunkte, wozu noch die unendlich fernen Kreispunkte kommen, so dass die Gesamtzahl der Doppelpunkte auf 20 steigt. Das Maximum der Anzahl der Doppelpunkte einer

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kurve n. Ordnung ist $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$; für $n=8$ also 21. Diese Zahl kann aber nicht erreicht werden, da wegen der Symmetrie nach den Achsen die Anwesenheit eines fernern Doppelpunktes in irgend einem Koordinatenraume noch weitere Doppelpunkte bedingen würde, so dass die Maximalzahl der Doppelpunkte überschritten würde; aus diesem Grunde kann auch die Selbstberührung in den unendlich fernen Asymptotenpunkten nicht inniger als 5 punktig sein. Dass aber die Kurve die Maximalzahl der Doppelpunkte nicht erreichen und somit nicht vom Geschlechte Null sein kann, geht auch daraus hervor, dass sie für die centrische Kegelschnitte aus zwei Zügen besteht.

Mit der Zahl der Doppelpunkte ist nach der I. Plücker'schen Formel auch die Klasse der Kurve bekannt; aus $n_1 = n(n-1) - 2d$ folgt nämlich für $n=8$ und $d=20$, dass $n_1 = 16$ ist. Dieses Resultat wollen wir analytisch dadurch bestätigen, dass wir zeigen, dass vom unendlich fernen Punkte der Y-Achse 16 Tangenten an die Kurve kommen.

Die Endpunkt-Abscissen waren bestimmt durch:

$$x = x_1 + \frac{\varkappa a^2 y_1}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}},$$

wo x_1 und y_1 der Beziehung $\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ unterliegen. Schneiden wir nun die Ellipse mit dem Strahlenbüschel aus dem Anfangspunkte $x = \lambda y$, so sind die Koordinaten derselben:

$$x_1 = \frac{a b \lambda}{\sqrt{a^2 + b^2 \lambda^2}}, \quad y_1 = \frac{a b}{\sqrt{a^2 + b^2 \lambda^2}}.$$

Führen wir diese Werte in den obigen Ausdruck für x ein, so kommt:

$$x = \frac{a b \lambda}{\sqrt{a^2 + b^2 \lambda^2}} + \frac{\varkappa a^2}{\sqrt{a^4 + b^4 \lambda^2}}.$$

Für solche Werte von λ, die zu Kurvenpunkten führen, die Tangenten parallel zur Y-Achse besitzen, muss

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{a^3 b}{(a^2 + b^2 \lambda^2)^{3/2}} - \frac{\varkappa a^2 b^4 \lambda}{(a^4 + b^4 \lambda^2)^{3/2}} = 0 \text{ sein;}$$

dies is der Fall, wenn

$$a^2 (a^4 + b^4 \lambda^2)^3 = \varkappa^2 b^6 \lambda^2 (a^2 + b^2 \lambda^2)^3 \text{ ist.}$$

Jeder Wert von λ, der diese Gleichung 8. Grades befriedigt, liefert zwei Punkte der verlangten Art, so dass 16 Tangenten an

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Kurve kommen, die der Y-Achse parallel sind. Für die Hyperbel ergibt sich die entsprechende Gleichung 8. Grades, wenn man $-b^2$ an Stelle von b^2 setzt, also:

$$a^2(a^4+b^4\lambda^2)^3 = \varkappa^2 b^6 \lambda^2 (b^2\lambda^2 - a^2)^3.$$

Zur Kontrolle wollen wir die Rechnung noch ausführen, wenn die Koordinaten der Ellipse durch das Parallelstrahlenbüschel $x_1 = \lambda$ ausgedrückt werden. Es ist dann $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-\lambda^2}$ und

daher: $x = \lambda + \frac{\varkappa a \sqrt{a^2-\lambda^2}}{\sqrt{a^2(a^2-\lambda^2)+b^2\lambda^2}}$; hieraus folgt:

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{\left[a^2(a^2-\lambda^2)+b^2\lambda^2\right]^{3/2}\cdot\sqrt{a^2-\lambda^2} - \varkappa a^3 b^2 \lambda}{\left[a^2(a^2-\lambda^2)+b^2\lambda^2\right]^{3/2}\cdot\sqrt{a^2-\lambda^2}}.$$

Dieser Differentialquotient wird zu Null, wenn

$\left[a^2(a^2-\lambda^2)+b^2\lambda^2\right]^3(a^2-\lambda^2) = \varkappa^2 a^6 b^4 \lambda^2$ ist, und für die Hyperbel:

$$\left[a^2(a^2-\lambda^2)-b^2\lambda^2\right]^3(a^2-\lambda^2) = \varkappa^2 a^6 b^4 \lambda^2.$$

Wir bekommen also wieder eine Gleichung 8. Grades in λ und somit 16 Tangenten.

Für die Hyperbel $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ wollen wir noch die bekannte rationalparametrische Darstellung

$$x_1 = \frac{a}{2}\frac{\lambda^2+1}{\lambda};\ y_1 = \frac{b}{2}\frac{\lambda^2-1}{\lambda} \text{ anwenden.}$$

Setzen wir diese Werte in die Endpunktkoordinaten

$$x = x_1 + \frac{\varkappa a^2 y_1}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}},\ y = y_1 + \frac{\varkappa b^2 x_1}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}}$$

ein, so erhalten wir:

$$x = \frac{a}{2}\frac{\lambda^2+1}{\lambda} + \frac{\varkappa a(\lambda^2-1)}{\sqrt{a^2(\lambda^2-1)^2+b^2(\lambda^2+1)^2}},$$

$$y = \frac{b}{2}\frac{\lambda^2-1}{\lambda} + \frac{\varkappa b(\lambda^2+1)}{\sqrt{a^2(\lambda^2-1)^2+b^2(\lambda^2+1)^2}}.$$

Diese irrationalparametrischen Ausdrücke eignen sich in gleicher Weise, wie die entsprechenden Ausdrücke für die Endpunktkoordinaten der Parabel zur Bestimmung der Ordnung der Kurve, ihrer Schnitte mit den Achsen, der Schnitte mit der Originalkurve u. s. w. Um z. B. die Ordnung der Kurve zu bestimmen, brauchen wir nur etwa $x = 0$ zu setzen und bekom-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

men für das Schnittpunktsystem der Y-Achse folgende Gleichung 8. Grades in λ:

$$(\lambda^2+1)^2\left[a^2(\lambda^2-1)^2+b^2(\lambda^2+1)^2\right]=4\varkappa^2\lambda^2(\lambda^2-1)^2.$$

Jede Wurzel λ dieser Gleichung liefert eine Hyperbeltangente, deren eine Endpunkt auf der Y-Achse liegt; letztere trifft demnach die Kurve in 8 Punkten, dessen Ordinaten sich ergeben, wenn man die Wurzeln λ in den Parameterwert für y einsetzt.

Kehren wir jedoch zur Hauptsache zurück und bilden den Differentialquotienten von x nach λ, so erhalten wir:

$$\frac{dx}{d\lambda}=\frac{a(\lambda^2-1)\left[a^2(\lambda^2-1)^2+b^2(\lambda^2+1)^2\right]^{3/2}+8ab^2\varkappa\lambda^3(\lambda^2+1)}{2\lambda^2\left[a^2(\lambda^2-1)^2+b^2(\lambda^2+1)^2\right]^{3/2}}.$$

Dieser Quotient verschwindet, wenn der Zähler gleich Null ist, d. h. wenn

$$(\lambda^2-1)^2\left[a^2(\lambda^2-1)^2+b^2(\lambda^2+1)^2\right]^3=64b^4\varkappa^2\lambda^6(\lambda^2+1)^2$$

ist; diese Gleichung ist 16. Grades in λ, woraus folgt, dass es 16 Tangenten an die Kurve gibt, die der Y-Achse parallel sind.

Zum Schluss wollen wir noch für die Endpunktkurve der Hyperbel $x_1 y_1 = a^2$ nachweisen, dass sie 16 Tangenten parallel zu den Achsen besitzt. Wir schneiden die Hyperbel mit dem Strahlenbüschel $x=\lambda y$, alsdann ist

$$x_1=a\sqrt{\lambda},\ \text{und}\ y_1=\frac{a}{\sqrt{\lambda}}.$$

Durch Substitution dieser Werte in

$$x=x_1+\frac{\varkappa x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\ \text{erhalten wir}$$

$$x=a\sqrt{\lambda}+\frac{\varkappa\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}};$$

nach λ differenziert, ergibt sich:

$$\frac{dx}{d\lambda}=\frac{a(\lambda^2+1)^{3/2}+2\varkappa\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}(\lambda^2+1)^{3/2}}.$$

Dieser Ausdruck wird zu Null, wenn

$$a^2(\lambda^2+1)^3=4\varkappa^2\lambda\ \text{ist.}$$

Der Grad der Gleichung ist 6; mithin besitzt die Kurve, da jede Wurzel λ zwei Tangenten liefert, 12 Tangenten parallel zur Y-Achse, die im Endlichen berühren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für die Hyperbel $x_1 y_1 = a^2$ gibt es aber auch eine sehr einfache rationalparametrische Darstellung, welche sich durch Schnitt der Kurve mit dem Strahlenbüschel aus dem unendlich fernen Punkte der Y-Achse ergibt; nämlich

$$x_1 = \lambda \text{ und } y_1 = \frac{a^2}{\lambda}.$$

Durch Einsetzung dieser Werte in

$$x = x_1 + \frac{\varkappa x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \text{ und } y = y_1 - \frac{\varkappa y}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

erhalten wir:

$$x = \lambda + \frac{\varkappa \lambda^2}{\sqrt{\lambda^4 + a^4}} \text{ und } y = \frac{a^2}{\lambda} - \frac{\varkappa a^2}{\sqrt{\lambda^4 + a^4}}.$$

Auch diese Ausdrücke lassen sich vorteilhaft zur Untersuchung vieler Kurveneigenschaften benutzen. Für das Schnittpunktsystem der Kurve mit einer beliebigen Geraden $y = m x + b$ ergibt sich z. B. folgende Gleichung 8. Grades in λ:

$$(a^2 - m \lambda^2 - b \lambda)^2 (\lambda^4 + a^4) = \varkappa^2 \lambda^2 (a^2 + m \lambda^2)^2,$$

woraus folgt, dass die Kurve 8. Ordnung ist. Durch Differentiation von x nach λ, ergibt sich

$$\frac{d x}{d \lambda} = \frac{(\lambda^4 + a^4)^{3/2} + 2 \varkappa a^4 \lambda}{(\lambda^4 + a^4)^{3/2}}.$$

Für $(\lambda^4 + a^4)^3 = 4 \varkappa^2 a^4 \lambda^2$ verschwindet der Differentialquotient; diese Gleichung ist 12. Grades in λ, woraus folgt, dass es 12 Tangenten an die Kurve gibt, die der Y-Achse parallel sind. Da nun der unendlich ferne Punkt der Y-Achse ein Kurvenpunkt ist, so muss jede Tangente in ihm unter den Tangenten, die von ihm an die Kurve gezogen werden können, doppelt gezählt werden. Die Y-Achse ist nun gemeinsame Tangente an beide Äste im unendlich fernen Selbstberührungspunkte, somit muss sie unter den Tangenten, die von ihm an die Kurve kommen, 4fach gezählt werden, so dass sich auch hier insgesamt 16 Tangenten ergeben.

Der untersuchte Ort der Endpunkte ist demnach für centrische Kegelschnitte, Ellipse und Hyperbel, vom Geschlechte 1 während er für die Parabel das Geschlecht Null hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für die Hyperb e sehr
einfache rationalpara durch
Schnitt der Kurve m endlich
fernen Punkte der Y-

Durch Einsetzu

$$x = x_1 + \frac{}{\sqrt{x}}$$

erhalten wir:

$$x = \lambda + \frac{}{\sqrt{\lambda^4}}$$

Auch diese Au Unter-
suchung vieler Kurve chnitt-
punktsystem der Kurv x + b
ergibt sich z. B. folge

$$(a^2 - m\lambda^2$$

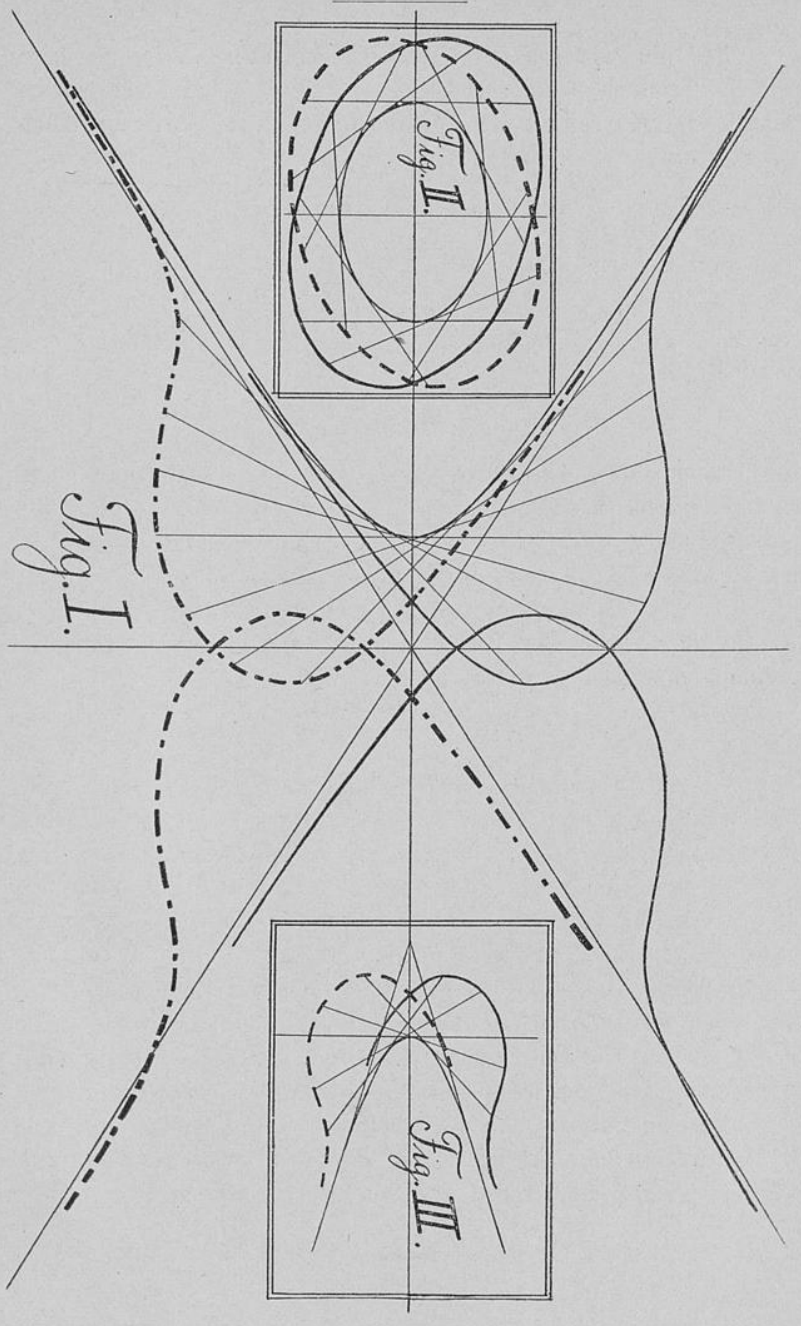
woraus folgt, dass di ferenti-
tiation von x nach λ,

$$\frac{dx}{d\lambda}$$

Für $(\lambda^4 + a^4)^3 = 4\varkappa^2 a$ tient;
diese Gleichung ist 1 es 12
Tangenten an die Kur l. Da
nun der unendlich fer kt ist,
so muss jede Tangente ihm
an die Kurve gezogen erden.
Die Y-Achse ist nun te im
unendlich fernen Selb unter
den Tangenten, die von ezählt
werden, so dass sich a eben.

Der untersuchte cen-
trische Kegelschnitte, nte 1
während er für die Pa

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf