I. Kapitel.

Bildung, Bezeichnung und Eintheilung der Zahlen.

Jeder Gegenstand, einmal vorgestellt, bildet eine Einheit. Durch wiederholtes Setzen desselben entsteht die Vorstellung der Vielheit oder die Zahl. Zahlen sind also Vielfache der Einheit. Sie werden als Größen betrachtet, in so fern sie aus gleichartigen Theilen bestehen; die Zahlengrößen (Zahlgrößen) unterscheiden sich von den Raumgrößen (continuirlichen Größen) dadurch, daß ihre gleichartigen Theile nicht, wie bei diesen, räumlich außer- und aneinander, sondern daß sie getrennt und ineinander liegend vorgestellt werden; sie heißen deshalb auch discrete (discerno) Größen.

Die Lehre von den Zahlengrößen nennt man Arithmetik.

Die Zahlengröße oder Zahl heißt benannt, wenn außer der Anzahl der Einheiten zugleich auch die Art (der Name) der zu Grunde liegenden Einheit angegeben wird; unbenannt (rein, abstrakt, inhaltslos), wenn sie nur eine Anzahl von Einheiten bezeichnet, ohne die Art derselben zu bestimmen. 6 ist eine unbenannte, 6 Thaler eine benannte Zahl.

Die Lehre von den unbenannten Zahlen heißt reine Arithmetik, die Lehre von den benannten Zahlen angewandte Arithmetik; nur erstere wird im Folgenden berücksichtigt.

Zur mündlichen Angabe der unbenannten Zahlen gebraucht man die Zahlwörter; die Einheit der unbenannten Zahlen wird Eins genannt und schriftlich durch 1 bezeichnet. Zu Eins Eins hinzufügen, zu dem Erhaltenen wieder Eins u. s. w. heißt Zählen (Numeriren); die dadurch hervorgehenden Zahlen sind bestimmte Vielfache der Eins und bilden in ihrer Aufeinanderfolge die Reihe der natürlichen (numerischen) Zahlen; sie erhalten die besonderen Zeichen 2, 3, 4.... (Ziffern) und die Benennung zwei, drei, vier ꝛc.; auch die Eins (1) wird als Zahl betrachtet, so daß die natürliche Zahlenreihe mit 1 beginnt und ohne Ende fortschreitet. Wie mit einer beschränkten Anzahl von Ziffern alle numerischen Zahlen dargestellt, wie dann ferner aus zwei oder mehreren gegebenen bestimmten Zahlen neue unbekannte Zahlen hergeleitet werden (Ziffer-Rechnen), lehrt die gemeine Rechenkunst (besondere Arithmetik).

Außer den besonderen Zeichen (Ziffern) für bestimmte Zahlen der Zahlenreihe bedient man sich der Buchstaben zur Bezeichnung solcher Zahlen, die in Rücksicht auf die Menge ihrer Einheiten unbestimmt oder allgemein sind. Am meisten gebraucht man dazu das kleine lateinische Alphabet und wählt die ersten Buchstaben

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

a, b, c.... desselben zur Bezeichnung bekannter (gegebener), die letzten ....x, y, z zur Bezeichnung unbekannter (gesuchter) Zahlen. Obgleich jeder Buchstabe, unabhängig von seiner Stellung und alphabetischen Ordnung, alle möglichen Zahlen bedeuten kann, so versteht es sich doch von selbst, daß sein Werth in ein und derselben Rechnung als unveränderlich angenommen wird.

Die Rechnung mit Buchstaben, allgemeine Arithmetik (Buchstabenrechnung oder allgemeine Zahlenlehre), ist eine Verallgemeinerung der Zifferrechnung; sie ergibt keine bestimmten Resultate, sondern allgemeine Ausdrücke (Formeln), welche alle zu einer Rechnungsart gehörigen besonderen Fälle in sich begreifen; will man ein bestimmtes Resultat erhalten, so müssen statt der Buchstaben Ziffern eingesetzt werden.

Zur Andeutung der Rechnungs-Operationen gebraucht man beim Rechnen mit Buchstaben dieselben arithmetischen Zeichen, wie bei der Rechnung mit Ziffern, z. B. $+ - \times \cdot : = > < \angle$. Um insbesondere anzudeuten, daß 2 Zahlformen denselben Werth bedeuten sollen, verbindet man sie durch das Gleichheitszeichen $=$ und nennt eine solche Verbindung zweier gleichwerthiger Zahlengrößen, z. B. $a = b$, eine Gleichung, a die linke, b die rechte Seite derselben.

Soll ein Zahlenausdruck zum Zweck einer mit demselben vorzunehmenden Rechnungsoperation für sich als eine Größe dargestellt werden, so zeigt man dies dadurch an, daß man ihn in Klammern (Parenthesen) ( ) [ ] { } einschließt. Will man die Klammern weglassen (auflösen), so muß an dem vorher eingeklammerten Ausdruck die alsdann nothwendige Veränderung vorgenommen werden.

Die allgemeinen Grundsätze (Axiome) der Mathematik gelten natürlich auch für die Arithmetik.

II. Kapitel.

Von der Addition und Subtraction der allgemeinen Zahlengrößen.

Erklärungen. I. Wie beim Numeriren durch wiederholtes Setzen der Eins die verschiedenen Zahlen entstehen, so werden durch die Addition verschiedene Zahlen zu einer neuen Zahl vereinigt.

Zu einer Zahl a eine zweite Zahl b addiren heißt also eine dritte Zahl s finden, welche so viel Einheiten enthält, als a und b zusammengenommen.

Die Zahlen a und b, welche addirt werden sollen, heißen Summanden, die Zahl s, das Resultat der Addition, Summe.

Um anzudeuten, daß 2 Zahlen addirt werden sollen, setzt man zwischen dieselben das Zeichen eines stehenden Kreuzes $+$ und liest solches „plus“ (mehr).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Demnach ist $a + b = s$ $4 + 3 = 7$
und man nennt $a + b$ die formelle, s die wirkliche (ausgerechnete) Summe. Es ist klar, daß wenn a und b beliebige Zahlen der natürlichen Zahlenreihe sind, auch die Summe s immer eine Zahl derselben darstellen muß.

II. Ist eine Zahl als Summe zweier Summanden und zugleich ein Summand gegeben, so ist die Aufgabe der Subtraction die Auffindung des zweiten Summanden.

Von einer Zahl a eine zweite Zahl b subtrahiren heißt also eine dritte Zahl d finden, welche zu b addirt a gibt.

Die als Summe zweier Summanden gedachte Zahl a heißt Minuendus, der gegebene Summand b Subtrahendus, der gesuchte Summand d Differenz (Rest, Unterschied). Das Zeichen der Subtraction ist ein zwischen Minuend und Subtrahend gesetzter horizontaler Strich — und wird gelesen „minus" (weniger). Demnach ist $a - b = d$ $7 - 4 = 3$
und man nennt $a - b$ die formelle, d die wirkliche (ausgerechnete) Differenz.

Es ist klar, daß Minuend und Subtrahend nicht verwechselt werden dürfen, und daß die Differenz d nur dann eine Zahl der natürlichen Zahlenreihe darstellen kann, wenn $a > b$, d. h. wenn a mehr Einheiten enthält (größer ist) als b.

Anmerkung. Aus den Erklärungen der Addition und Subtraction folgt 1) daß beide entgegengesetzte Operationen sind, welche sich vernichten (aufheben), wenn sie mit derselben Zahl vollzogen werden. Daher bleibt eine Zahl ungeändert, wenn man ein und dieselbe Zahl durch Addition und Subtraction mit ihr verbindet, z. B. $a + b - b = a$; 2) wird zu einer Differenz $a - b$ der Subtrahendus b addirt, so erhält man den Minuendus a, d. h. $a - b + b = a$; denn da die Differenz um b Einheiten kleiner ist als der Minuendus, so muß man, wenn diese b Einheiten zu der Differenz hinzugefügt werden, wieder a erhalten; 3) wird von der Summe $a + b$ der eine Summand b subtrahirt, so erhält man den anderen a, d. h. $(a + b) - b = a$. Denn da die Summe $a + b$ um b Einheiten größer ist als a, so muß man, wenn diese b Einheiten weggenommen werden, a erhalten.

Sätze über die Addition und Subtraction.

§. 1. Wenn 2 oder mehrere Zahlen addirt werden sollen, so ist es einerlei, in welcher Reihenfolge dies geschieht.

$$a + b = b + a \qquad 4 + 3 = 3 + 4$$
$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = c + a + b = c + b + a$$
$$4 + 3 + 7 = 4 + 7 + 3 = 3 + 4 + 7 \text{ u. s. w.}$$

Beweis. Aus der Erklärung der Addition folgt, daß durch eine andere Reihenfolge der Summanden die Anzahl der in ihnen enthaltenen Einheiten nicht verändert wird.

Zusatz. Will man in einer Summe mehrere Summanden als eine besondere Summe auszeichnen, so schließt man sie in Klammern, und es ist klar, daß

$$a + b + c = (a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c)$$
$$4 + 3 + 2 = (4 + 3) + 2 = (4 + 2) + 3 = 4 + (3 + 2)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Denn jede dieser Verbindungen stellt dieselbe Zahl als Summe dar. Umgekehrt folgt daraus, daß man eine Zahl c, welche zu einer Summe $a + b$ addirt werden soll, zu irgend einem der Summanden addiren kann.

§. 2. Sollen von einer Zahl mehrere Zahlen subtrahirt werden, so ist es einerlei, in welcher Reihenfolge dies geschieht.

$a - b - c = a - c - b \qquad 9 - 4 - 3 = 9 - 3 - 4 = 2$

Beweis. Da im Ganzen $b + c$ Einheiten von a subtrahirt werden sollen, so bleibt es sich gleich, ob ich zuerst b und dann c Einheiten, oder umgekehrt zuerst c und dann b Einheiten wegnehme; d. h.:

$$a - b - c = a - (b + c) = a - (c + b)$$

§. 3. Soll zu einer Zahl eine zweite addirt und eine dritte von ihr subtrahirt werden, so ist es einerlei, in welcher Reihenfolge dies geschieht.

$a + b - c = a - c + b \qquad 5 + 4 - 3 = 5 - 3 + 4$

Beweis. $a + b - c$ oder $(a + b) - c$ wird durch Verwechselung der Summanden $= b + a - c$ oder $= b + (a - c)$ und diese Summe durch Verwechselung der Summanden $= (a - c) + b$ oder $= a - c + b$.

§. 4. Sind die zu addirenden Summanden einander **gleich**, so ist die Summe ein Vielfaches des gegebenen Einzel-Summanden und man bezeichnet dieselbe dadurch, daß man die bestimmte Zahl, welche die Anzahl der Summanden angibt, vor den Einzel-Summanden setzt. Diese bestimmte Zahl heißt Coeffizient.

$a + a = 2a \qquad b + b + b = 3b$

Zusatz. Zu jeder Zahl kann man den Coeffizienten 1 hinzudenken, da $1a = a$ ist; dieser Coeffizient kann beliebig gesetzt oder weggelassen werden.

Erklärungen. Verschiedene Vielfache derselben Einheit heißen gleichnamige ($2a$ und $5a$), verschiedene Vielfache verschiedener Einheiten ($2a$ und $3b$) heißen ungleichnamige Zahlengrößen.

§. 5. Gleichnamige Zahlengrößen werden addirt, indem man ihre Coeffizienten addirt und hinter diesen neuen Coeffizienten die gemeinschaftliche Einheit setzt.

$3a + 2a = 5a \qquad 4b + 3b + b = 8b$

Beweis. $3a + 2a = a + a + a + a + a = 5a$ (nach §. 4)

$4b + 3b + b = b + b + b + b + b + b + b + b = 8b$

Zusatz. Bei ungleichnamigen Zahlengrößen kann die Addition nicht ausgeführt, sondern nur angedeutet werden, z. B. $2a + 3b$

§. 6. Gleichnamige Zahlengrößen werden von einander subtrahirt, indem man ihre Coeffizienten von einander subtrahirt und den dadurch erhaltenen neuen Coeffizienten vor die gemeinschaftliche Einheit setzt.

$7a - 3a = 4a \qquad 6b - b = 5b$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. Die Richtigkeit folgt daraus, daß die Differenz zum Subtrahendus addirt den Minuendus hervorbringt; denn

$$4a + 3a = 7a \qquad 5b + b = 6b$$

Zusatz. Bei ungleichnamigen Zahlgrößen kann die Subtraction nur angedeutet, nicht ausgeführt werden, z. B. $6a - 5b$.

III. Kapitel.

Entstehung und Erklärung der algebraischen Zahlen.

Nach dem vorigen Kapitel ist die Differenz $a - b$ nur dann einer Zahl der natürlichen Zahlenreihe gleich, wenn $a > b$ ist. Sollen a und b aber beliebige Zahlen bedeuten, so kann es vorkommen, daß auch $a = b$ und $b > a$ ist, wo dann die Differenz $a - b$ keine Zahl der natürlichen Zahlenreihe mehr darstellt.

Um auch für diese Fälle den Operationen und Zeichen ihre allgemeine Gültigkeit zu erhalten, muß man den Begriff der Zahl erweitern.

I. Ist in der Differenz $a - b$ der Subtrahend b gleich dem Minuend a, so ist die dadurch entstehende Differenz $a - a$ anzusehen als das Zeichen für keine Zahl; denn um den Minuend a zu erhalten, darf zu dem Subtrahend a keine Zahl mehr hinzugefügt werden. Man bezeichnet eine solche Differenz der Kürze wegen mit dem lateinischen Vokal O und nennt dieses Zeichen „Null".

Es ist also $a - a = 0$

und selbstverständlich, daß alle Differenzen, deren Minuend gleich dem Subtrahend ist, unter sich gleich sind, also

$$a - a = b - b = s - s = 0$$

Eben so versteht es sich von selbst, daß

$$a + 0 = a - 0 = a$$

d. h. wenn man 0 zu einer Zahl addirt oder von ihr subtrahirt, so bleibt die Zahl unverändert.

II. Ist in der Differenz $a - b$ der Subtrahend b größer als a, z. B. $b = a + m$, so darf man, um a zu erhalten, zu $b = a + m$ keine Zahl mehr addiren, vielmehr muß man dann von b eine Zahl m subtrahiren, um welche b größer ist als a.

Eine solche Zahl, welche man mit der Operation des Subtrahirens behaftet denkt, in der Art, daß sie subtrahirt werden muß, wenn sie zu einer natürlichen Zahl addirt wird, heißt eine negative (subtractive) Zahl. Um eine Zahl als negativ zu bezeichnen, setzt man ihr das Subtractionszeichen — vor.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist also, wenn b um m Einheiten größer ist als a

$$a - b = -m \quad \text{oder } a - (a + m) = (a - a) - m$$
$$4 - 7 = -3 \qquad\qquad = 0 - m$$
$$= -m$$

Eine negative Zahl muß also, zu einer Zahl der natürlichen Zahlenreihe hinzugefügt, dieselbe um so viel Einheiten vermindern, als sie selbst zählt.

Im Gegensatz gegen die negative Zahl nennt man eine natürliche Zahl, welche, zu einer andern natürlichen Zahl hinzugefügt, dieselbe um so viel Einheiten vermehrt, wie sie selbst zählt, auch positive (additive) Zahl und setzt ihr als solcher das Additionszeichen + vor. Die positiven Zahlen unterscheiden sich in nichts von den Zahlen der natürlichen Zahlenreihe; man darf sie daher in allen Rechnungsausdrücken untereinander vertauschen. Denn da die Hinzufügung der Null den Werth einer Zahl nicht ändert, so ist $a = a + 0$ oder durch Versetzung der Summanden $= 0 + a = + a$, folglich $a = + a$.

Positive und negative (mit den Vorzeichen + oder — behaftete) Zahlen heißen zusammen entgegengesetzte oder algebraische Zahlen, wogegen die natürlichen (mit keinem Vorzeichen behafteten) Zahlen absolute Zahlen genannt werden.

Ist es unbestimmt, ob eine Zahl als positiv oder negativ angesehen werden soll, so setzt man ihr beide Zeichen vor; z. B. $\pm a$.

Zusatz 1. Eine positive Zahl kann als eine Summe betrachtet werden, deren erster Summand Null ist. Denn

$$0 + a = + a$$

und ebenso kann eine negative Zahl als eine Differenz betrachtet werden, deren Minuend $= 0$ ist; denn $\quad 0 - a = - a$

Zusatz 2. Durch Zuziehung der 0 und der negativen Zahlen erweitert sich die natürliche Zahlenreihe zu folgender Reihe der algebraischen Zahlen:

$$\ldots\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +\ldots.$$

welche die Null zur Mitte hat und in welcher auf der einen Seite die Reihe aller positiven Zahlen durch wiederholtes Addiren der Eins, auf der andern Seite die Reihe aller negativen Zahlen durch wiederholtes Subtrahiren der Eins gebildet wird.

Zusatz 3. Veranschaulichung der entgegengesetzten Zahlen an wirklichen Größen, z. B. Vor- und Rückwärtsgehen, Auf- und Absteigen, Schulden und Vermögen, Gewinn und Verlust, Einnahme und Ausgabe, Gegeneinanderwirken zweier Kräfte ꝛc. Welche der entgegengesetzten Größen als positiv und welche als negativ angesehen werden soll, ist Sache der Willkür.

Zusatz 4. Eine algebraische Zahl heißt größer, als eine andere, wenn man zu der letzteren noch eine absolute Zahl addiren muß, um die erste zu erhalten. So ist $-5 > -7$ (weil man zu -7 noch 2 addiren muß, damit -5 entsteht); $0 > -2$; $+1 > -7$; $+8 > +5$. Dagegen sagt man, eine algebraische Zahl ist in absoluter Hinsicht größer als eine andere, wenn sie mehr Einheiten enthält; in dieser Beziehung ist also $-5 > -3$; $-2 > 0$; $+8 > +3$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

IV. Kapitel.

Von der Addition algebraischer Zahlen.

§. 1. Algebraische Zahlen mit **gleichen** Vorzeichen werden addirt, indem man der Summe ihrer absoluten Werthe das gemeinschaftliche Vorzeichen gibt; algebraische Zahlen mit **ungleichen** Vorzeichen werden addirt, indem man der Differenz ihrer absoluten Werthe das Vorzeichen der größeren Zahl gibt. (Algebraische Addition.)

I. $+a+(+b)=+(a+b)$ $\quad (+5)+(+3)=+(5+3)=+8$

II. $-a+(-b)=-(a+b)$ $\quad (-5)+(-3)=-(5+3)=-8$

III. $+a+(-b)=+(a-b)$ für $a>b$ $\quad (+5)+(-3)=+(5-3)=+2$

$=-(b-a)$ für $b>a$ $\quad (+3)+(-5)=-(5-3)=-2$

IV. $-a+(+b)=-(a-b)$ für $a>b$ $\quad (-5)+(+3)=-(5-3)=-2$

$=+(b-a)$ für $b>a$ $\quad (-3)+(+5)=+(5-3)=+2$

Die Beweise ergeben sich aus der Erklärung des Addirens und der algebraischen Zahlen.

Zusatz 1. Sind die zu addirenden algebraischen Zahlen ungleichnamig, so kann die Addition nur angedeutet werden, z. B.:

$$+7a+(-3b)=+(7a-3b)=7a-3b$$

sind sie aber gleichnamig, so wird die algebraische Addition an den Coeffizienten ausgeführt; z. B.:

$+a+(+a)=+2a$; $-a+(-a)=-2a$; $+3a+(+4a)=+7a$; $-3a+(-4a)=-7a$; $+7a+(-3a)=+4a$; $-7a+(+3a)=-4a$; dabei können die Coeffizienten auch bestimmte Buchstaben sein; z. B.:

$$+ma+(-na)=+(m-n)a$$

Zusatz 2. Man setzt bei der practischen Ausführung die gleichnamigen Summanden häufig untereinander; z. B.:

	$+3a$	$-7ax$
dazu addirt	$-4a$	$-12ax$
Summe	$-a$	$-19ax$

Zusatz 3. Soll Null und eine positive oder negative Zahl addirt werden, so erhält man dieselbe positive oder negative Zahl; z. B.: $0+(+a)=+a$, $0+(-a)=-a$. Sind beide Summanden gleich aber von entgegengesetzten Vorzeichen, so erhält man Null; z. B.: $-5+(+5)=0$.

Erklärung. Eine Summe, deren Summanden algebraische Zahlen sind, heißt algebraische Summe (Polynom oder vielgliedrige Größe); z. B.:

$$+a+(-b)+(+c)+(-d)+\ldots.$$

Zur Vereinfachung der Bezeichnung schreibt man mit Weglassung der Additionszeichen die Zahlen von links nach rechts mit ihren Vorzeichen unmittelbar nebenein-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ander und läßt auch das Vorzeichen der ersten Zahl, falls diese positiv ist, weg. Die vorige Summe schreibt man daher kürzer: $a - b + c - d + \ldots$

Die einzelnen Summanden nennt man Glieder des Polynoms; jedes Glied für sich Monom; zwei durch + oder — verbundene Monome bilden ein Binom, drei durch + oder — verbundene Monome ein Trinom u. s. w.

Die Ordnung, in der man die Glieder einer algebraischen Summe schreibt, ist gleichgültig; man wählt in der Regel die alphabetische.

§. 2. Algebraische Summen werden addirt, indem man zuerst irgend zwei der Summanden algebraisch addirt, zu der erhaltenen Summe einen dritten Summanden u. s. w., bis alle addirt sind.

Practisch führt man diese Addition am bequemsten dadurch aus, daß man die gleichnamigen Summanden untereinander setzt und dann nach dem vorigen Satze verfährt; z. B.:

$$\begin{array}{rl} & 3a - 2b + 2c \\ & 7a - 5b + 3c + 4d \\ & \qquad\quad - 6c + \ \ d - m \\ \hline \text{Summe} & 10a - 7b - \ \ c + 5d - m \end{array}$$

Will man die Addition bloß andeuten, so schließt man die zu dem ersten Polynom zu addirende algebraische Summe in Klammern ein; soll die Addition wirklich ausgeführt werden, so läßt man die Klammern weg und zieht die gleichnamigen Glieder zusammen; z. B.:

$$\begin{aligned} & 3a - 2b + 2c + (7a - 5b + 3c + 4d) + (-6c + d - m) \\ &= 3a - 2b + 2c + 7a - 5b + 3c + 4d - 6c + d - m \\ &= 3a + 7a - 2b - 5b + 2c + 3c - 6c + 4d + d - m \\ &= 10a - 7b - c + 5d - m \end{aligned}$$

Umgekehrt kann man in einer algebraischen Summe jede beliebige Summe von Summanden in Klammern schließen und der Klammer das Zeichen + vorsetzen.

Zusatz 1. Sind die Summanden Ziffern, so verfährt man am kürzesten, wenn man zuerst alle positiven und eben so alle negativen Ziffern für sich addirt und die kleinere Summe von der größeren subtrahirt; z. B.:

$$\begin{aligned} & 3 - 7 + 8 - 5 - 4 + 9 - 2 \\ &= (3 + 8 + 9) - (7 + 5 + 4 + 2) \\ &= 20 - 18 = 2 \end{aligned}$$

Zusatz 2. Kommen in einer algebraischen Summe 2 gleiche Summanden mit entgegengesetzten Vorzeichen vor, so kann man dieselben ohne Weiteres fortlassen; man sagt alsdann: diese Summanden heben sich, z. B.:

$$a - 2b + 3c + 2b = a + 3c$$

Umgekehrt darf man jedem Polynom je 2 gleiche Summanden mit entgegengesetzten Vorzeichen zufügen; z. B.:

$$a + b = a - c + b + c$$

Zusatz 3. Ein Zahlenausdruck von der Form $a + b$ kann sowohl als die Summe der absoluten Zahlen a und b, wie als die Summe der algebraischen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zahlen + a und + b angesehen werden, da statt einer positiven Zahl immer die absolute gesetzt werden darf.

Ein Zahlenausdruck von der Form a — b bedeutet sowohl die Differenz der absoluten Zahlen a und b, als auch die algebraische Summe der algebraischen Zahlen + a und — b. Da aber nach §. 1 (+ a) + (— b) = + (a — b) = a — b, so ist es gleichgültig, wie dieser Zahlenausdruck aufgefaßt wird.

V. Kapitel.

Von der Subtraction algebraischer Zahlen.

§. 1. Algebraische Zahlen werden subtrahirt, indem man den Subtrahendus mit **umgekehrtem** Zeichen zum Minuendus **addirt** (Algebraische Subtraction.)

Erster Beweis. Nach der Erklärung ist die Subtraction richtig, wenn die Differenz, zum Subtrahendus addirt, den Minuendus hervorbringt.

I. + a — (+ b) = + a + (— b) = + a — b;
denn + a — b dazu addirt + b = + a — b + b = + a.

II. + a — (— b) = + a + (+ b) = + a + b;
denn + a + b dazu addirt — b = + a + b — b = + a.

III. — a — (+ b) = — a + (— b) = — a — b;
denn — a — b dazu addirt + b = — a — b + b = — a.

IV. — a — (— b) = — a + (+ b) = — a + b;
denn — a + b dazu addirt — b = — a + b — b = — a.

Zweiter Beweis.

Da + a = + a + b — b, so bleibt

I. wenn man + b von beiden Seiten wegnimmt: + a — b
II. „ „ — b „ „ „ „ + a + b

und da — a = — a + b — b, so bleibt

III. wenn man + b von beiden Seiten wegnimmt: — a — b
IV. „ „ — b „ „ „ „ — a + b

Zusatz 1. Statt den Subtrahendus mit dem vorgesetzten Subtractionszeichen hinter den Minuendus, kann man den letzteren auch unter den ersteren setzen.

	I.	II.	III.	IV.	I.	II.	III.	IV.
Minuendus	+ a	+ a	— a	— a	+ 7	+ 7	— 7	— 7
Subtrahendus	+ b	— b	+ b	— b	+ 3	— 3	+ 3	— 3
Differenz	+a—b	+a+b	—a—b	—a+b	+ 4	+ 10	— 10	— 4

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zusatz 2. Sind die zu subtrahirenden algebraischen Zahlen ungleichnamig, so kann die Subtraction nur angedeutet werden, sind sie aber gleichnamig, so subtrahirt man ihre Coeffizienten und fügt dem Erhaltenen den gemeinschaftlichen Buchstaben zu; z. B.: $2a - (+3b) = 2a - 3b$;

$5a - (+3a) = +2a = 2a$; $-7b - (-3b) = -7b + 3b = -4b$;

$4m - 5m = -m$; $mb - nb = (m - n)b$

Zusatz 3. $0 - (-a) = 0 + a = +a$; $0 - 0 = 0$; $\pm a \mp 0 = \pm a$

§. 2. Ein Polynom wird von einem Polynom subtrahirt, indem man im Subtrahendus alle Zeichen umkehrt und dann die gleichnamigen Glieder des Minuendus und Subtrahendus algebraisch addirt.

$$\begin{array}{rl} \text{Minuend} & 2a - b + d - 1 \\ \text{Subtrahend} & 9a + 4b - d - 1 + e - f \end{array}$$

ist gleich

$$\begin{array}{rl} & 2a - b + d - 1 \\ \text{dazu addirt} & -9a - 4b + d + 1 - e + f \\ \hline \text{daher die gesuchte Differenz} & = -7a - 5b + 2d - e + f \end{array}$$

Der Beweis für die Richtigkeit liegt darin, daß man, wenn eine Summe von einer Zahl subtrahirt werden soll, nach und nach jeden Summanden von der Zahl subtrahiren muß.

Will man die Subtraction bloß andeuten, so schließt man den Subtrahenden in eine Klammer und setzt ihn mit vorgesetzten Subtractionszeichen hinter den Minuendus; z. B.:

$$3a - 2b + b - (2a - 7b - 3)$$

Soll nun aber die Subtraction wirklich ausgeführt werden, so läßt man die Klammer weg (löst sie auf) und ändert alle Zeichen des Subtrahendus in die entgegengesetzten, wodurch man eine algebraische Summe erhält. Demnach verwandelt sich der vorstehende Ausdruck in

$$3a - 2b + 6 - 2a + 7b + 3 = a + 5b + 9$$

Der Beweis für die Richtigkeit ergibt sich sogleich, wenn man den Subtrahendus unter den Minuendus setzt.

Umgekehrt kann man in einer algebraischen Summe eine beliebige Anzahl Summanden mit vorgesetztem Minuszeichen in eine Klammer einschließen, muß dann aber alle Vorzeichen innerhalb der Klammer umkehren.

Stehen innerhalb einer Klammer neue Klammern, und man will dieselben weglassen, so löst man zuerst die inneren und dann die äußeren auf; z. B.:

$a - [b - (-c + d) - 2] = a - [b + c - d - 2] = a - b - c + d + 2$

Umgekehrt kann man auch in eine algebraische Summe mehrere Klammern einsetzen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VI. Kapitel.

Von der Multiplication absoluter und algebraischer Zahlen.

Erklärungen. Sind bei einer Addition die Summanden gleich, so bezeichnet man die Summe derselben, z. B. $a + a + a$ (nach Kap. II. §. 4), kürzer dadurch, daß man den Summanden nur einmal setzt und davor die Zahl, welche angibt, wie oft der Summand addirt werden soll, z. B. $3a$, wo 3 der Coeffizient von a heißt. Eine solche abgekürzte Addition nennt man im Allgemeinen Multiplication, die Zahl, welche mehreremal addirt werden soll (den gegebenen Summanden) Multiplicandus, die Zahl, welche angibt, wie oft er addirt werden soll, Multiplicator, das Resultat der Multiplication (die Summe der gleichen Summanden) Product. Ist der Multiplicator eine unbestimmte Zahl, z. B. b, so pflegt man ihn dem Multiplicandus nachzusetzen, z. B. ab.

Eine Zahl a mit einer Zahl b multipliciren heißt also a so oft addiren als b Einheiten enthält.

Anstatt den Multiplicator unmittelbar hinter den Multiplicandus zu setzen, bedient man sich zur Andeutung der Multiplication auch eines Punktes (·) oder liegenden Kreuzes (×) und liest diese Zeichen „mal" oder „multiplicirt mit". (Diese Zeichen dürfen bei der Multiplication von Ziffern der Verwechselung wegen niemals fehlen, denn $4 \cdot 3$ oder 4×3 ist nicht gleich 43.) So schreibt man also das Product aus dem Multiplicandus a und dem Multiplicator b: $a \cdot b$, oder $a \times b$, oder ab, und liest „a mal b", oder a multiplicirt mit b", oder „a mit b", oder schlechtweg „ab".

Sätze über die Multiplication absoluter und algebraischer Zahlen.

§. 1. Durch Vertauschung von Multiplicator und Multiplicandus wird der Werth eines Products nicht geändert.

Formel: $ab = ba$ Beispiel: $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$

Beweis. Nach Erklärung der Multiplication bezeichnet das Product ab die Summe $a + a + a + \ldots$ (b mal),
und es ist $a = 1 + 1 + 1 + \ldots$ (a mal)
Nehme ich nun von jedem Summanden a eine 1 weg, so erhalte ich als Summe der weggenommenen Einheiten die Zahl b; dieses Wegnehmen der 1 aus jedem Summanden a läßt sich so oft wiederholen, als a Einheiten enthält, also a mal, und da hierdurch jedesmal die Zahl b entsteht, so erhält man nach und nach die Summen $b + b$, $b + b + b$ u. s. w., und zuletzt

$b + b + b + \ldots$ (amal),

wofür man nach Erklärung der Multiplication ba schreibt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Erklärung. Da hiernach Multiplicandus und Multiplicator für das Product gleiche Bedeutung haben, so bezeichnet man sie auch mit dem gemeinschaftlichen Namen: Factoren.

§. 2. Die Multiplication der 1 mit einer beliebigen Zahl läßt die Zahl unverändert und umgekehrt kann jede Zahl als ein Product ihrer selbst mit 1 betrachtet werden.

Formel: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \qquad 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = 5$

Beweis. Das Product $a \cdot 1$ bezeichnet die Summe, welche entsteht, wenn ich den Multiplicandus so oft als Summand setze, als der Multiplicator Einheiten enthält. Daher ist $a \cdot 1 = a$ und nach §. 1 auch $1 \cdot a = a$.

Folgerung: $1 \cdot 1 = 1$

§. 3. Ist **ein** Factor eines Products 0, so ist der Werth des Products gleich 0.

Beweis. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 + 0 + \ldots$ (a mal) $= 0$. Ebenso $0 \cdot 0 = 0$.

§. 4. I. Eine Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man jeden Summanden mit der Zahl multiplicirt und die Producte addirt.

Formel: $(a + b)\, m = a\, m + b\, m \qquad (7 + 4)\, 3 = 7 \cdot 3 + 4 \cdot 3$

II. Eine Differenz wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man Minuendus und Subtrahendus mit der Zahl multiplicirt, und letzteres Product von ersterem subtrahirt.

Formel: $(a - b)\, m = a\, m - b\, m \qquad (7 - 4)\, 3 = 7 \cdot 3 - 4 \cdot 3$

Beweis I. Es ist $(a+b)\, m = (a+b) + (a+b) + (a+b) + \ldots$ m mal

$= (a+a+a+\ldots \text{m mal}) + (b+b+b+\ldots \text{m mal})$

$= a\, m + b\, m$

II. $(a-b)\, m = (a-b) + (a-b) + (a-b) + \ldots$ m mal

$= a + a + a + \ldots$ m mal $- b - b - b - \ldots$ m mal

$= (a+a+a+\ldots \text{m mal}) - (b+b+b+\ldots \text{m mal})$

$= a\, m - b\, m$

Zusatz 1. Nach §. 1 folgt hieraus durch Vertauschung der Factoren für die Multiplication einer Zahl mit einer Summe oder Differenz:

$(a \pm b)\, m = m\, (a \pm b) = m\, a \pm m\, b$

Zusatz 2. Liest man die obigen Formeln von der rechten zur linken Seite, so folgt: Zwei Producte, die einen gemeinschaftlichen Factor haben, werden addirt oder subtrahirt, indem man die Summe resp. Differenz der nicht gemeinschaftlichen Factoren mit dem gemeinschaftlichen Factor multiplicirt. (Verwandlung von Summen in Producte durch Herausziehen des gemeinschaftlichen Factors.)

Zusatz 3. Eine Summe oder Differenz von der Form $a\, m \pm m$ wird in ein Product verwandelt, indem man $1 \cdot m$ statt m setzt; man erhält alsdann

$(a\, m \pm 1 \cdot m) = (a \pm 1)\, m$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 5. Ein Product wird mit einer Zahl (oder eine Zahl mit einem Product) multiplicirt, indem man einen beliebigen Factor desselben mit der Zahl multiplicirt.

Formel: $(ab)\,m = (am)\,b = (bm)\,a$ $\qquad (5\cdot4)\,3 = (5\cdot3)\,4 = (4\cdot3)\,5$

Beweis. Nach Erklärung der Multiplication ist

$$(ab)\,m = ab + ab + ab + \ldots (m\text{ mal})$$

Sieht man in diesen Producten b als gemeinschaftlichen Factor an, so erhält man nach §. 4, Zus. 2

$$(ab)\,m = [a + a + a + \ldots (m\text{mal})]\,b = (am)\,b$$

Sieht man aber a als gemeinschaftlichen Factor an, so ist

$$(ab)\,m = [b + b + b + \ldots (m\text{mal})]\,a = (bm)\,a$$

Zusatz 1. Ist m auch ein Product, z. B. aus 2 Factoren c und d, so folgt aus §. 5 in Verbindung mit §. 1, daß

$(ab)(cd) = (ba)(cd) = (ba)(dc) = [(ab)c]\,d = [(ab)d]\,c = [a(bc)]\,d$ u. s. w.

d. h. in jedem Product ist die Ordnung der Factoren beliebig. In der Regel ordnet man sie alphabetisch und wenn sich eine bestimmte mit Ziffern geschriebene Zahl unter ihnen befindet, so setzt man diese (als Coeffizienten) voran. Dabei kann man die Klammern, welche hier ja nur eine bestimmte Ordnung für die Rechnung festsetzen, weglassen. Demnach ist z. B.

$$abcd = abdc = acbd = adbc = bacd \text{ u. s. w.}$$

$$5\cdot4\cdot3\cdot2 = 5\cdot4\cdot2\cdot3 = 5\cdot3\cdot4\cdot2 \text{ u. s. w.}$$

Zusatz 2. Sind die Factoren eines Products alle gleich, so bezeichnet man dasselbe in der Regel abgekürzt dadurch, daß man die mehrmals als Factor auftretende Zahl nur einmal und rechts oben an dieselbe diejenige Zahl schreibt, welche die Anzahl der Factoren angibt. So schreibt man z. B.

$$a^5 \text{ statt } a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a$$

und nennt ein solches Zeichen für ein Product gleicher Factoren (a^5) eine Potenz, die Zahl a „Grundzahl" (Basis), die Zahl 5 „Exponent" und spricht „a hoch 5" oder „a zur (oder in der) 5ten (Potenz)". Man nennt die zweite Potenz einer Zahl (a^2) auch das Quadrat, die dritte Potenz (a^3) den Kubus derselben.

§. 6. Algebraische Zahlen werden mit einander multiplicirt, indem man dem Product aus den absoluten Werthen derselben das Vorzeichen + oder − gibt, je nachdem die beiden Factoren **gleiche** oder **verschiedene** Vorzeichen haben. (Kürzer: Beim Multipliciren geben gleiche Zeichen ein positives, ungleiche ein negatives Product.)

Formeln:

I.	$(+a)\cdot(+b) = +ab$	$(+4)(+3) = +(4\cdot3) = +12$
II.	$(-a)\cdot(+b) = -ab$	$(-4)(+3) = -(4\cdot3) = -12$
III.	$(+a)\cdot(-b) = -ab$	$(+4)(-3) = -(4\cdot3) = -12$
IV.	$(-a)\cdot(-b) = +ab$	$(-4)(-3) = +(4\cdot3) = +12$

Erster Beweis. Nach dem Begriffe der Multiplication entsteht das Product, indem ich den Multiplicandus so oft als Summand setze, wie der Multipli-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

cator anzeigt (oder das Product entsteht so aus dem Multiplicandus, wie der Multiplicator aus der Einheit). Ist nun der Multiplicator positiv (additiv), z. B. $+b$, so bedeutet dies, daß ich den Multiplicandus b mal und die einzelnen Summanden, also auch das entstandene Product additiv nehmen soll. Ist aber der Multiplicator negativ (subtractiv), z. B. $-b$, so bedeutet dies, daß ich den Multiplicandus b mal und die einzelnen Summanden, also auch das entstandene Product subtractiv nehmen soll. Hiernach ist

I. $(+a)(+b) = +a + (+a) + (+a) + \ldots b\,\text{mal} = +a + a + a + \ldots b\,\text{mal} = +ab$

II. $(-a)(+b) = -a + (-a) + (-a) + \ldots b\,\text{mal} = -a - a - a - \ldots b\,\text{mal} = -ab$

III. $(+a)(-b) = -(+a) - (+a) - (+a) - \ldots b\,\text{mal} = -a - a - a - \ldots b\,\text{mal} = -ab$

IV. $(-a)(-b) = -(-a) - (-a) - (-a) - \ldots b\,\text{mal} = +a + a + a + \ldots b\,\text{mal} = +ab$

Zweiter Beweis.

I. $(+a)(+b)$ ist nicht verschieden von der Multiplication absoluter Zahlen, daher $= ab = +ab$.

II. $(-a)(+b)$ ist $= (-a)\,b = (0-a)\,b = 0b - ab = 0 - ab = -ab$

III. $(+a)(-b)$ ist $= a(-b) = a(0-b) = a0 - ab = 0 - ab = -ab$

IV. $(-a)(-b)$ ist $= (0-a)(-b) = 0(-b) - a(-b) = 0 - (-ab)$
$= 0 + ab = +ab$ (nach §. 4 II).

Dritter Beweis.

I. $(+a)(+b) = ab = +ab$

II. Nimmt man als Multiplicandus $+a - a$ und als Multiplicator $+b$ an, so muß, weil der Multiplicandus $= 0$ ist, auch das Product $= 0$ sein; da nun aber das Product aus 2 Summanden besteht, deren erster nach I $= +ab$ ist, so muß der zweite, um 0 hervorzubringen, $= -ab$ sein, daher

$$(-a)(+b) = -ab$$

III. Nimmt man als Multiplicandus $+a$ und als Multiplicator $+b - b = 0$ an, so erhält man eben so $(+a)(-b) = -ab$

IV. Nimmt man als Multiplicandus $-a$ und als Multiplicator $+b - b = 0$ an, so muß, da nach II. $(-a)(+b) = -ab$ ist, $(-a)(-b) = +ab$ geben.

Vierter Beweis.

I. $(+a)(+b) = ab = +ab$ ist nicht verschieden von der Multiplation absoluter Zahlen.

II. Es ist $(m-a)\,b = mb - ab$; denn wenn ich zuerst m bmal nehme, so erhalte ich mb; ich soll aber nicht das ganze m, sondern das um a verminderte m bmal nehmen; jedesmal also, wenn ich m bmal nehme, habe ich a Einheiten bmal zuviel genommen, ich muß also das dadurch erhaltene Product ab wieder von mb abziehen, erhalte also $mb - ab$, folglich muß $(-a)\,b = (-a)(+b) = -ab$ sein. (Vergl. §. 4 II.)

III. und IV. Sei der Multiplicandus $m - a$, der Multiplicator $n - b$, so muß ich $mn - an - mb + ab$ erhalten. Denn das Product aus $m - a$ und n ist nach II. gleich $mn - an$. Indem ich aber n statt des um b verminderten n als Multiplicator nehme, habe ich die Größe $m - a$ bmal zu viel genommen; ich muß also dieses Product $(m-a)\,b = mb - ab$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

vom ersten Product $mn - an$ wieder abziehen, um das richtige Product zu erhalten. Demnach ist letzteres

$$mn - an - (mb - ab)$$
$$= mn - an - mb + ab$$

Daraus folgt $m(-b)$ oder $(+m)(-b) = -mb$

und $(-a)(-b) = +ab$

Zusatz 1. Ein Product von mehr als 2 negativen Factoren ist positiv, wenn die Anzahl der Factoren gerade, negativ, wenn sie ungerade ist; z. B.:

$$(-a)(-b)(-c)(-d) = (+ab)(+cd) = +abcd$$
$$(-a)(-b)(-c) = -abc$$

Zusatz 2. Das Vorzeichen eines Products von beliebig vielen positiven und negativen Factoren hängt daher von der Anzahl der negativen Factoren ab; z. B.:

$$(+a)(-b)(-c)(+d)(-e) = -abcde$$

§. 7. Ein Polynom wird mit einem Monom multiplicirt, indem man jedes Glied des Polynoms mit dem Monom algebraisch multiplicirt und die Producte zu einer algebraischen Summe vereinigt.

Formel: $(a + b - c + \ldots.)(\pm p) = \pm ap \pm bp \mp cp \pm \ldots.$

$(7 + 5 - 3 + \ldots.)\,4 = 7 \cdot 4 + 5 \cdot 4 - 3 \cdot 4 + \ldots. = 36$

Beweis wie in §. 4.

§. 8. Polynome werden mit einander multiplicirt, indem man jedes Glied des einen Polynoms mit jedem Glied des andern Polynoms algebraisch multiplicirt und die sämmtlichen Producte zu einer algebraischen Summe vereinigt.

Formel und Beweis. $(a + b - c + \ldots.)(p - q + r + \ldots.)$

$= (a + b - c + \ldots.)\,p + (a + b - c + \ldots.)(-q) + (a + b - c + \ldots.)\,r + \ldots.$

$= ap + bp - pc + \ldots. - aq - bq + cq - \ldots. + ar + br - cr + \ldots.$

$$(7 + 5 - 9)(4 - 3 + 2) = 9$$

Zusatz 1. Liest man die in §. 7 und 8 enthaltenen Formeln von der rechten zur linken Seite, so ergibt sich daraus die Regel, wie man algebraische Summen mit einem oder mehreren gemeinschaftlichen Factoren durch Herausziehen dieser Factoren in Producte verwandelt.

Zusatz 2. In der Regel setzt man bei der praktischen Ausführung die zu multiplicirenden Polynome ebenso wie die erhaltenen gleichnamigen Theilproducte untereinander, wodurch die Addition der letzteren übersichtlicher wird.

Zusatz 3. Besonders zu merken und in Worten auszusprechen sind einige Producte, deren Factoren Summen oder Differenzen derselben Zahlen sind, nämlich:

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)(a - b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)(a \pm b)(a \pm b) = (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VII. Kapitel.

Von der Division absoluter und algebraischer Zahlen.

Erklärungen. 1. Wie es die Aufgabe der Multiplication war, aus 2 gegebenen Factoren das Product derselben zu finden, so ist es umgekehrt die Aufgabe der Division, aus einem gegebenen Product (a) und einem Factor (b) desselben den andern Factor q zu ermitteln. Die als Product gegebene Zahl (a) heißt Dividendus, der bekannte Factor (b) Divisor, der gesuchte Factor (q) Quotient. Man bezeichnet die Beziehung zwischen diesen 3 Zahlen durch

$$a : b = q \text{ oder } \frac{a}{b} = q$$

und liest: „a dividirt (getheilt) durch b" oder „a durch b" oder „a b tel" und nennt $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ den formellen, das ausgerechnete Resultat q der Division den wirklichen Quotienten. Da nach dem Vorhergehenden das Product aus den als Factoren gedachten Zahlen b und q gleich a sein soll, so ergibt sich daraus die Erklärung der Division:

„eine Zahl a durch eine zweite Zahl b dividiren heißt eine dritte Zahl q finden, welche mit der zweiten (b) multiplicirt die erste (a) ergibt"

und die Division oder der gefundene Quotient q muß richtig sein, wenn sich nachweisen läßt, daß $bq = a$ ist (Divisionsprobe).

2. Der Quotient q der beiden Zahlen a und b kann nur dann eine Zahl der natürlichen Zahlenreihe (ganze Zahl) darstellen, wenn a ein Vielfaches von b ist. Findet dieses nicht statt, so nennt man ihn auch Bruch (oder gebrochene Zahl), den Dividendus Zähler, den Divisor Nenner.

Die folgenden Sätze über Division gelten für beliebige Werthe von a und b und enthalten also auch die Regeln der Bruchrechnung als besondere Fälle.

3. Aus der Divisionserklärung folgt, daß sich Dividendus und Divisor nicht verwechseln lassen. Man nennt den Werth, welcher durch eine solche Verwechselung (Umkehrung) erhalten wird, „den reciproken Werth des Quotienten", z. B. $\frac{a}{b}$ gibt umgekehrt den reciproken Werth $\frac{b}{a}$.

4. Quotienten (Brüche), welche gleiche Divisoren (Nenner) haben, heißen gleichnamig; Quotienten mit ungleichen Divisoren werden ungleichnamig genannt.

Sätze über die Division absoluter und algebraischer Zahlen.

§. 1. Jede Zahl, durch sich selbst dividirt, gibt 1.

$$\text{Formel: } \frac{a}{a} = 1 \qquad \frac{3}{3} = 1$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. Nach der Divisionsprobe gibt der Divisor a mit dem Quotienten 1 multiplicirt $1 \cdot a = a$ d. h. den Dividendus.

Folgerung. $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{n}{n} = 1$; d. h. alle Quotienten, deren Dividendus gleich dem Divisor ist, sind einander gleich.

§. 2. Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn sie durch 1 dividirt wird.

Formel: $\frac{a}{1} = a \quad \frac{3}{1} = 3$

Beweis. $1 \cdot a = a$

§. 3. Wird eine Zahl durch eine andere dividirt und der erhaltene Quotient mit derselben Zahl multiplicirt, so erhält man wieder die erste Zahl.

Formel: $\frac{a}{b} \cdot b = a \quad \frac{5}{7} \cdot 7 = 5 \quad \frac{12}{7} \cdot 7 = 12$

Beweis. Nach der Divisionsprobe muß, wenn man $\frac{a}{b} = q$ nimmt, $q \cdot b = a$ sein; setzt man hier statt q den ihm gleichen Werth $\frac{a}{b}$, so folgt $\frac{a}{b} \cdot b = a$

§. 4. Wird eine Zahl mit einer anderen multiplicirt und das Product durch dieselbe Zahl dividirt, so erhält man wieder die erste Zahl.

Formel: $\frac{a \cdot b}{b} = a \quad \frac{7 \cdot 5}{5} = 7$

Beweis. Nach der Divisionsprobe gibt der Quotient a mit dem Divisor b multiplicirt den Dividendus $a \cdot b$.

Zusatz. Dieser Satz läßt sich auch so ausdrücken: Wird ein Product durch einen seiner Factoren dividirt, so erhält man den andern Factor.

Folgerung. Aus §. 3 und §. 4 ergibt sich, daß Multiplication und Division entgegengesetzte Operationen sind, welche, mit derselben Zahl ausgeführt, sich aufheben.

§. 5. Der Werth eines Quotienten bleibt ungeändert, wenn man Dividendus und Divisor mit derselben Zahl multiplicirt.

Formel: $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} \quad \frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3}$

Beweis. Geht man von der rechten Seite aus, so ist

$$\frac{a}{b} \cdot bm = \frac{a}{b} b \cdot m = am$$

Folgerung. Haben Dividend und Divisor einen gemeinschaftlichen Factor, so kann man denselben weglassen. (Aufheben und Gleichnamigmachen der Brüche.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 6. Der Werth eines Quotienten bleibt ungeändert, wenn man Dividendus und Divisor durch dieselbe Zahl dividirt.

Formel: $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}$ $\qquad \frac{12}{8} = \frac{\frac{12}{4}}{\frac{8}{4}}$

Beweis. Nach §. 5 ist $\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} = \frac{\frac{a}{m}\,m}{\frac{b}{m}\,m} = \frac{a}{b}$

Folgerung. Zwei Quotienten mit gemeinschaftlichem Divisor werden durch einander dividirt, indem man ihre Dividenden durch einander dividirt.

§. 7. Eine Summe wird durch eine Zahl dividirt, indem man jeden Summanden durch dieselbe dividirt und die erhaltenen Quotienten addirt.

Formel: $\frac{a+b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$ $\qquad \frac{12+8}{4} = \frac{12}{4} + \frac{8}{4}$

Beweis: $\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m}\right) m = \frac{a}{m}\,m + \frac{b}{m}\,m = a + b$

Zusatz. Eben so ist $\frac{a+b+c+\ldots.}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}\,m + \ldots.$

Folgerung. Liest man die Formel von der Rechten zur Linken, so folgt: Gleichnamige Quotienten werden addirt, indem man die Summe der Dividenden durch den gemeinschaftlichen Divisor dividirt.

§. 8. Eine Differenz wird durch eine Zahl dividirt, indem man Minuendus und Subtrahendus durch dieselbe dividirt und letzteren Quotienten vom ersteren subtrahirt.

Formel: $\frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}$ $\qquad \frac{12-8}{4} = \frac{12}{4} - \frac{8}{4}$

Beweis: $\left(\frac{a}{m} - \frac{b}{m}\right) m = \frac{a}{m}\,m - \frac{b}{m}\,m = a - b$

Folgerung. Liest man die Formel von rechts nach links, so folgt: Gleichnamige Quotienten werden von einander subtrahirt, indem man die Differenz der Dividenden durch den gemeinschaftlichen Divisor dividirt.

Zusatz 1. Sind zwei oder mehrere ungleichnamige Quotienten zu addiren oder zu subtrahiren, so macht man sie nach §. 5 dadurch gleichnamig, daß man Dividendus und Divisor jedes Quotienten mit dem Product aus den Divisoren aller übrigen Quotienten multiplicirt und dann nach §. 7 und 8 verfährt. (Aufsuchen des Hauptnenners bei Brüchen.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd} \qquad \frac{4}{3} \pm \frac{5}{7} = \frac{28 \pm 15}{21}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf}{bdf} + \frac{bcf}{bdf} + \frac{bed}{bdf} = \frac{adf + bcf + bed}{bdf}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 5}$$

Zusatz 2. Eine ganze Zahl und ein Quotient werden addirt oder subtrahirt, indem man die ganze Zahl unter den Divisor des Quotienten bringt und die gleichnamigen Quotienten addirt oder subtrahirt; z. B.:

I. $a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c} \qquad 4 \pm \frac{3}{5} = \frac{20 \pm 3}{5}$

II. $\frac{b}{c} \pm a = \frac{b}{c} \pm \frac{ac}{c} = \frac{b \pm ac}{c} \qquad \frac{3}{5} \pm 4 = \frac{3 \pm 20}{5}$

§. 9. Ein Product wird durch eine Zahl dividirt, indem man einen beliebigen Factor desselben durch die Zahl dividirt und den erhaltenen Quotienten mit dem andern Factor multiplicirt.

Formel: $\frac{a \cdot b}{c} = \begin{cases} \frac{a}{c} \cdot b \\ b \cdot \frac{a}{c} \end{cases}$ oder auch $= \begin{cases} \frac{b}{c} \cdot a \\ a \cdot \frac{b}{c} \end{cases} \quad \frac{6 \cdot 4}{2} = \frac{6}{2} \cdot 4 = \frac{4}{2} \cdot 6$

Beweis: $\left(\frac{a}{c} \cdot b\right) c = \left(\frac{a}{c}\, c\right) b = a \cdot b$

Folgerung. Von rechts nach links gelesen folgt:
Ein Quotient wird mit einer Zahl, oder eine Zahl mit einem Quotienten multiplicirt, indem man das Product aus Dividendus und Zahl durch den Divisor dividirt.

§. 10. Zwei Producte werden durch einander dividirt, indem man ihre Factoren einzeln durch einander dividirt und die erhaltenen Quotienten multiplicirt.

Formel: $\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$ (oder auch $= \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{c}$) $\qquad \frac{8 \cdot 9}{2 \cdot 3} = \frac{8}{2} \cdot \frac{9}{3}$

Beweis: $\left(\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}\right) c \cdot d = \frac{a}{c}\, c \cdot \frac{b}{d}\, d = a \cdot b$

Folgerung. Von rechts nach links gelesen, folgt:
Zwei Quotienten werden multiplicirt, indem man das Product der Dividenden durch das Product der Divisoren dividirt.

Zusatz. Setzt man $d = 1$, so folgt der Satz §. 9 als besonderer Fall.

$$\left.\begin{matrix} \frac{a \cdot b}{c \cdot 1} \\ \frac{ab}{c} \end{matrix}\right\} = \begin{cases} \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{1} \\ \frac{a}{c} \cdot b \end{cases}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 11. Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, indem man den Dividendus durch das Product aus Divisor u. Zahl dividirt.

Formel: $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b\,c}$ $\qquad \frac{\frac{9}{5}}{4} = \frac{9}{20}$

Beweis: $\left(\frac{a}{b\,c}\right) c = \frac{a\,c}{b\,c} = \frac{a}{b}$ (§. 9 und 5.)

Folgerung. Von rechts nach links gelesen folgt:
Eine Zahl wird durch ein Product dividirt, indem man die Zahl erst durch einen Factor, und den erhaltenen Quotienten durch den andern Factor dividirt.

Zusatz. Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die einzelnen Factoren als Divisoren setzt. Denn

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{a}{c}}{b} = \frac{a}{b\,c} \qquad \frac{\frac{16}{4}}{2} = \frac{\frac{16}{2}}{4}$$

§. 12. Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, indem man den Divisor mit der Zahl multiplicirt und das Product durch den Dividendus dividirt.

Formel: $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a\,c}{b}$ $\qquad \frac{7}{\frac{2}{3}} = \frac{21}{2}$

Beweis. $\frac{a\,c}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a\,c\,b}{b\,c} = a$ (§. 5.)

§. 13. Ein Quotient wird durch einen Quotienten dividirt, indem man den letzteren umgekehrt mit dem ersteren multiplicirt.

Formel: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$ $\qquad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$

Beweis. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a\,d}{b\,d}}{\frac{b\,c}{b\,d}} = \frac{a\,d}{b\,c}$ (§. 5 und 6.)

Zusatz. Die Sätze in §. 11 und 12 ergeben sich als besondere Fälle von §. 13, wenn man in der letzten Formel nach und nach $d = 1$ und $b = 1$ setzt.

$$\text{I.} \quad \left.\begin{matrix} \frac{\frac{a}{b}}{c} \\ \frac{1}{\frac{a}{b}} \\ c \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \frac{a \cdot 1}{b\,c} \\ \frac{a}{b\,c} \end{matrix}\right. \qquad \text{II.} \quad \left.\begin{matrix} \frac{\frac{a}{1}}{c} \\ \frac{\frac{a}{c}}{d} \\ d \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \frac{a\,d}{1 \cdot c} \\ \frac{a\,d}{c} \end{matrix}\right.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 14. Ein Quotient, dessen Dividendus 0 ist, ist selbst = 0.

Formel: $\frac{0}{a} = 0$ $\qquad \frac{0}{3} = 0$

Beweis. Denn $0 \cdot a = 0$

Zusatz 1. Der Quotient $\frac{0}{0}$ ist im Allgemeinen unbestimmt, da jede beliebige Zahl oder 0 mit 0 multiplicirt 0 gibt. In besonderen Fällen läßt sich aber durch passende Umformungen ein bestimmter Werth für $\frac{0}{0}$ finden, z. B. $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ wird für $a = b$ nicht $= \frac{0}{0}$, sondern $= 2a$, weil

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b)}{a - b} = a + b = 2a$$

Zusatz 2. Ein Quotient $\frac{a}{0}$, dessen Divisor = 0 ist, hat vorläufig keine Bedeutung, weil sich keine Zahl angeben läßt, welche mit 0 multiplicirt a gibt.

§. 15. Zwei algebraische Zahlen werden durch einander dividirt, indem man die absoluten Werthe derselben durch einander dividirt und dem Quotienten das Vorzeichen + oder — gibt, je nachdem Dividend und Divisor gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. (Kürzer: Beim Dividiren geben gleiche Zeichen im Dividendus und Divisor einen positiven, ungleiche einen negativen Quotienten.)

Formeln und Beweis.

I. $\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$, denn $(+\frac{a}{b})(+b) = +\frac{a}{b}b = +a$

II. $\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$, „ $(-\frac{a}{b})(+b) = -\frac{a}{b}b = -a$

III. $\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$, „ $(-\frac{a}{b})(-b) = +\frac{a}{b}b = +a$

IV. $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$, „ $(+\frac{a}{b})(-b) = -\frac{a}{b}b = -a$

I. $\frac{+12}{+3} = +\frac{12}{3} = +4$ $\qquad$ III. $\frac{+12}{-3} = -\frac{12}{3} = -4$

II. $\frac{-12}{+4} = -\frac{12}{3} = -4$ $\qquad$ IV. $\frac{-12}{-3} = +\frac{12}{3} = +4$

§. 16. Ein Polynom (eine algebraische Summe) wird durch ein Monom dividirt, indem man jedes Glied des Polynoms durch das Monom dividirt und die Quotienten algebraisch addirt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Formel: $\frac{a + b - c + \ldots}{\pm m} = \pm \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} \mp \frac{c}{m} \pm \ldots$

$$\frac{27 + 9 - 12}{3} = \frac{27}{3} + \frac{9}{3} - \frac{12}{3} = 8$$

Beweis.

$$(\pm \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} \mp \frac{c}{m} + \ldots)(\pm m) = + \frac{a}{m} m + \frac{b}{m} m - \frac{c}{m} m + \ldots$$
$$= a + b - c + \ldots$$

§. 17. Zwei Polynome werden durch einander dividirt, indem man sie übereinstimmend (nach fallenden oder steigenden Potenzen einer Größe) ordnet, das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors dividirt, den gefundenen 1ten Theil-Quotienten mit dem ganzen Divisor multiplicirt, das Product von dem Dividendus subtrahirt, das erste Glied des erhaltenen geordneten Restes wieder durch das erste Glied des Divisors dividirt, den gefundenen 2ten Theil-Quotienten mit dem ganzen Divisor multiplicirt, das Product von dem ersten Reste subtrahirt und in Bezug auf den erhaltenen zweiten Rest eben so weiter verfährt, bis die letzte Subtraction ohne Rest aufgeht oder bis sich herausstellt, daß dies nicht geschieht; im ersten Falle ist der gesuchte Quotient genau gleich der algebraischen Summe der gefundenen Theil-Quotienten, im andern Falle fügt man derselben noch den durch den Divisor dividirten Rest als Glied hinzu, oder verwandelt letzteres durch fernere Division in eine endlose Reihe.

Formel. Wenn s und s_1 die beiden Polynome, $q, q', q'' \ldots$ die Theil-Quotienten, $r, r', r'' \ldots$ die bezüglichen Reste sind, so ist

I. wenn die Division nicht aufgeht $\frac{s}{s'} = q + q' + q'' + \ldots + \frac{r''}{s'}$

II. „ „ „ aufgeht $\frac{s}{s'} = q + q' + q'' + \ldots$

Beweis. Sei die Division ausgeführt nach folgendem Schema:

Divisor. Dividendus.

$s' : s = q$ Dann ergibt sich die Richtigkeit der Formeln u. des Verfahrens so:

$\underline{q s'}$ $\quad s = q s' + r$

$s' : r = q'$ $\quad r = q' s' + r'$

$\underline{q' s'}$

$s' : r' = q''$ $\quad r' = q'' s' + r''$

$\underline{q'' s'}$

r'' $\quad s + r + r' = (q + q' + q'') s' + r + r' + r''$

$$s = (q + q' + q'') s' + r''$$

$$\text{I.} \quad \frac{s}{s'} = q + q' + q'' + \frac{r''}{s'}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Geht die Division auf, so ist $r'' = 0$

und alsdann II. $\frac{s}{s'} = q + q' + q''$

Zusatz 1. Das angegebene Divisionsverfahren läßt sich auch durch folgende Formel darstellen:

$$\frac{s}{s'} = q + \frac{s - q s'}{s'}$$

wo q eine beliebige Zahl sein kann, in der Ausführung aber immer als der Quotient aus dem ersten Gliede des geordneten Dividendus und dem ersten Gliede des geordneten Divisors gewählt wird. Die Richtigkeit der Formel folgt daraus, daß nach der Divisionsprobe

$$(q + \frac{s - q s'}{s'}) s' = s \text{ ist.}$$

Zusatz 2. Läßt sich der Dividendus so umformen, daß der Divisor als Factor desselben erscheint, so findet man den Quotienten am einfachsten nach §. 5; z. B:

$$\frac{a m + b m + c m}{a + b + c} = \frac{(a + b + c) m}{a + b + c} = m$$

Zusatz 3. Bei der Verwandlung eines nicht aufgehenden Quotienten in eine endlose (unendliche) Reihe stellt sich ein Bildungsgesetz für die aufeinander folgenden Glieder heraus; z. B.:

$$\frac{a}{a+x} = 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \ldots.$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

Zusatz 4. Der in §. 14 Zus. 2 aufgeführte Quotient $\frac{a}{0}$ erhält, wenn man statt 0 den Divisor a — a setzt, folgenden Werth:

$$\frac{a}{a - a} = 1 + 1 + 1 + \ldots.$$

Dieser Werth besteht aus einer unendlichen Menge von Einheiten, und eine solche nennt man eine unendlich große Zahl und bezeichnet sie mit ∞. Es ist also $\frac{a}{0}$ oder $\frac{1}{0}$ oder $\frac{x}{0} = \infty$, d. h. jede Größe durch 0 dividirt gibt eine unendlich große Zahl. Umgekehrt muß $\frac{a}{\infty}$ oder $\frac{1}{\infty} = 0$ sein.

Anhang.

Zusammenstellung der wichtigsten Regeln der Bruchrechnung.

Erklärung. Ein Quotient $\frac{a}{b}$, der keine Zahl der natürlichen Zahlenreihe (ganze Zahl) darstellt, heißt nach der gewöhnlichen Erklärung ein Bruch. Derselbe kann auch so aufgefaßt werden, daß man sich die Einheit (1) in eine Anzahl (b) gleicher

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Theile getheilt denkt und die dadurch entstehende Einheit niederer Ordnung $\left(\frac{1}{b}\right)$ amal nimmt. Denn $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$. Ist der Nenner b größer als der Zähler a, so heißt der Bruch ein ächter, ist aber der Zähler a größer als der Nenner b, ein unächter Bruch. Ein Bruch, dessen Zähler $= 1$ ist $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{4}\right)$, heißt Stammbruch. Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner beide oder einer von ihnen Brüche sind, heißt Doppelbruch; z. B.: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, $\frac{\frac{a}{b}}{c}$, $\frac{a}{\frac{b}{c}}$, eine aus einer ganzen Zahl und einem Bruch bestehende Summe gemischte Zahl, z. B. $(a + \frac{m}{n})$. (Ist eine gemischte Zahl mit Ziffern geschrieben, so läßt man das $+$ Zeichen gewöhnlich weg, z. B. $4 + \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$, wobei man sich hüten muß, diesen Ausdruck als ein Product zu betrachten.)

Sind a, b, c, d absolute ganze Zahlen und ist $a > b$ und $c > d$, so ist

I. $\frac{a}{b} > 1$ und $\frac{b}{a} < 1$, d. h. jeder unächte Bruch ist größer und jeder ächte Bruch kleiner als 1. $\frac{4}{3} > 1$, $\frac{3}{4} < 1$.

Beweis. $\frac{a}{b} - 1 = \frac{a - b}{b}$, also positiv, da $a > b$

$\frac{b}{a} - 1 = \frac{b - a}{a}$, „ negativ, da $b < a$

II. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, d. h. von 2 Brüchen, welche gleiche Nenner haben (gleichnamig sind), ist derjenige der größere, welcher den größeren Zähler hat. $\frac{5}{3} > \frac{2}{3}$

Beweis. $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$, also positiv, da $a > b$

III. $\frac{a}{c} < \frac{a}{d}$, d. h. von 2 Brüchen, welche gleiche Zähler haben, ist derjenige der kleinere, welcher den größeren Nenner hat. $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$

Beweis. $\frac{a}{c} - \frac{a}{d} = \frac{ad - ac}{cd} = \frac{a(d - c)}{cd}$, also negativ, da $c > d$

IV. Ein Bruch bleibt seinem Werthe nach unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe dividirt.

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daraus folgt, daß man einen oder mehrere dem Zähler und Nenner gemeinschaftliche Factoren weglassen (gegen einander aufheben) kann.

V. Gleichnamige Brüche werden addirt oder subtrahirt, indem man ihre Zähler addirt oder subtrahirt und dem Resultat denselben Nenner gibt.

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}$$

VI. Ungleichnamige Brüche werden addirt oder subtrahirt, indem man sie unter gleichen Nenner bringt und wie bei V. verfährt.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} \pm \frac{b\,c}{b\,d} = \frac{a\,d \pm b\,c}{b\,d}$$

VII. Eine ganze Zahl und ein Bruch werden addirt oder subtrahirt, indem man beide unter denselben Nenner bringt und nach V. verfährt.

$$a \pm \frac{b}{c} = \frac{a\,c \pm b}{c}; \qquad \frac{b}{c} \pm a = \frac{b \pm a\,c}{c}$$

VIII. Zwei Brüche werden multiplicirt, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$$

IX. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl (oder eine ganze Zahl mit einem Bruch) multiplicirt, indem man den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl multiplicirt.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a\,c}{b}$$

X. Zwei Brüche werden dividirt, indem man den Divisor umkehrt und multiplicirt.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

XI. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, indem man den Nenner mit der Zahl multiplicirt.

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b\,c}$$

XII. Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividirt, indem man die Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt.

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a\,c}{b}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VIII. Kapitel.

Von den Proportionen.

Erklärungen. 1. Ein Quotient $\frac{a}{b}$ heißt auch das Verhältniß der beiden Zahlen a und b; er wird als ein solches geschrieben a : b und gelesen: „a verhält sich zu b", oder kurz: „a zu b"; dabei heißt der Dividendus a das erste, der Divisor b das zweite Glied, das ausgerechnete Resultat q der Division: Quotient (Exponent) des Verhältnisses; z. B.: $\left.\begin{matrix}\frac{a}{b}\\ a:b\end{matrix}\right\} = q$. Ein Verhältniß heißt steigend oder fallend, je nachdem $a \lesseqgtr b$; der Quotient eines steigenden Verhältnisses ist < 1, eines fallenden > 1.

2. Zwei Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie gleiche Quotienten haben (und umgekehrt). Wenn z. B. $\left.\begin{matrix}a:b\\ \frac{a}{b}\end{matrix}\right\} = q$ und $\left.\begin{matrix}c:d\\ \frac{c}{d}\end{matrix}\right\} = q$, so ist $a:b=c:d$. Eine solche Verbindung zweier gleicher Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen heißt eine Proportion (geometrische Proportion, Verhältnißgleichung). In derselben heißt a : b das erste, c : d das zweite Verhältniß. Die vier Glieder a, b, c, d werden der Reihe nach als 1stes, 2tes, 3tes, 4tes Glied, a und c als Vorderglieder, b und d als Hinterglieder, a und d als äußere, b und c als innere oder Mittelglieder der Proportion bezeichnet. Sind die innern Glieder einander gleich, z. B. $a : b = b : c$ $2 : 4 = 4 : 8$, so heißt die Proportion eine stetige. Zwei Verhältnisse, die einem dritten gleich sind, sind untereinander gleich; z. B.: Aus $a : b = x : y$ und $c = d : x : y$ folgt $a : b = c : d$. Werden mehr als zwei Verhältnisse gleich gesetzt, so entsteht eine fortlaufende Proportion; z. B.:

$$a : b = c : d = e : f = g : h$$
$$2 : 4 = 3 : 6 = 5 : 10 = 17 : 34$$

3. Da die Verhältnisse nichts als Quotienten sind, so finden die Gesetze der Quotientenrechnung auch auf die Proportionsrechnung Anwendung.

Sätze über die Proportionen.

§. 1. In jeder Proportion ist das Product der äußeren gleich dem Producte der inneren Glieder.

Voraussetzung. $a : b = c : d$ $\quad 4 : 6 = 10 : 15$

Behauptung. $ad = bc$ $\quad 4 \cdot 15 = 6 \cdot 10$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$$

Durch Multiplication beider Quotienten mit dem Producte der Nenner wird

$$\frac{a}{b} bd = \frac{c}{d} bd \qquad \frac{4}{6} \cdot 6 \cdot 15 = \frac{10}{15} \cdot 6 \cdot 15$$

d. h. $ad = bc \qquad 4 \cdot 15 = 10 \cdot 6$

§. 2. (Umkehrung von §. 1.) Aus zwei gleichen Producten erhält man eine richtige Proportion, indem man die Factoren des einen zu äußern, die Factoren des andern zu innern Gliedern macht.

Voraussetzung. $ad = bc \qquad 5 \cdot 6 = 2 \cdot 15$

Behauptung. $a : b = c : d \qquad 5 : 2 = 15 : 6$

Beweis. Dividirt man die gegebenen Producte durch bd $(6 \cdot 2)$, so ist

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{d. h. } a : b = c : d$$

$$\frac{5 \cdot 6}{6 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 15}{6 \cdot 2} \quad \text{„} \quad \frac{5}{2} = \frac{15}{6} \quad \text{„} \quad 5 : 2 = 15 : 6$$

§. 3. Jedes äußere Glied einer Proportion ist gleich dem Product der inneren Glieder, dividirt durch das andere äußere Glied, und jedes innere Glied ist gleich dem Product der äußeren, dividirt durch das andere innere Glied.

Beweis. Aus $a : b = c : x$ folgt (§. 1) $ax = bc$ und daraus $x = \frac{bc}{a}$

$$6 : 3 = 8 : x \quad \text{„} \quad 6x = 8 \cdot 3 \quad \text{„} \quad x = \frac{8 \cdot 3}{6} = 4$$

$$a : b = x : d \quad \text{„} \quad bx = ad \quad \text{„} \quad x = \frac{ad}{b}$$

$$6 : 3 = x : 8 \quad \text{„} \quad 3x = 6 \cdot 8 \quad \text{„} \quad x = \frac{6 \cdot 8}{3} = 16$$

$$a : x = c : d \quad \text{„} \quad cx = ad \quad \text{„} \quad x = \frac{ad}{c}$$

$$6 : x = 16 : 8 \quad \text{„} \quad x = \frac{6 \cdot 8}{16} \quad \text{„} \quad x = 3$$

$$x : b = c : d \quad \text{„} \quad dx = bc \quad \text{„} \quad x = \frac{bc}{d}$$

$$x : 3 = 16 : 8 \quad \text{„} \quad 8x = 3 \cdot 16 \quad \text{„} \quad x = 6$$

Zusatz 1. In einer **stetigen** Proportion ist das unbekannte mittlere Glied (die mittlere Proportionale) gleich der Quadratwurzel aus dem Product der beiden bekannten äußeren Glieder.

Beweis. Aus $a : x = x : d \qquad 12 : x = x : 3$

$$x^2 = ad \qquad x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{ad} \qquad x = \sqrt{36} = 6$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zusatz 2. Sind in einer Proportion drei gleichstellige Glieder gleich, so sind auch die vierten Glieder gleich.

Beweis. Aus $a : b = c : x$ folgt $x = \frac{bc}{a}$

$a : b = c : y$ „ $y = \frac{bc}{a}$, daher $x = y$

§. 4. Ist in einer Proportion das erste Glied gleich, größer oder kleiner als das zweite, so ist auch das dritte gleich, größer oder kleiner als das vierte.

Voraussetzung. In der Proportion $a : b = c : d$

sei $a \lesseqgtr b$

Behauptung. $c \lesseqgtr d$

Nach Voraussetzung ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, folglich

1) wenn $a = b$

auch $\frac{a}{b} = 1$, daher $\frac{c}{d} = 1$ und $c = d$

2) wenn $a > b$

auch $\frac{a}{b} > 1$, „ $\frac{c}{d} > 1$ und $c > d$

3) wenn $a < b$

auch $\frac{a}{b} < 1$, „ $\frac{c}{d} < 1$ und $c < d$

§. 5. Eine Proportion bleibt richtig, wenn man die inneren Glieder untereinander, oder die äußeren Glieder untereinander, oder die inneren Glieder mit den äußeren vertauscht (wodurch man sieben neue Proportionen erhält).

Voraussetzung.	$a : b = c : d$	$4 : 12 = 5 : 15$
Behauptung.	1) $a : c = b : d$	$4 : 5 = 12 : 15$
	2) $d : b = c : a$	$15 : 12 = 5 : 4$
	3) $b : a = d : c$	$12 : 4 = 15 : 5$
	4) $c : d = a : b$	$5 : 15 = 4 : 12$
	5) $c : a = d : b$	$5 : 4 = 15 : 12$
	6) $b : d = a : c$	$12 : 15 = 4 : 5$
	7) $d : c = b : a$	$15 : 5 = 12 : 4$

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt $ad = bc$, und hieraus erhält man nach §. 2 die Proportionen 1—7, indem man auf alle mögliche Weise die Factoren des einen Products zu äußeren, die des andern zu inneren Gliedern macht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 6. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz des ersten und zweiten Gliedes zum ersten oder zweiten, wie die Summe oder Differenz des dritten und vierten Gliedes zum dritten oder vierten Gliede.

Voraussetzung. $a : b = c : d$ $\qquad 12 : 4 = 9 : 3$

Behauptung. $a \pm b : \begin{cases} a \\ b \end{cases} = c \pm d : \begin{cases} c \\ d \end{cases}$ $\qquad 12 \pm 4 : \begin{cases} 12 \\ 4 \end{cases} = 9 \pm 3 : \begin{cases} 9 \\ 3 \end{cases}$

Beweis. 1) Nach Vorauss. ist
$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$
$$1 = 1$$
$$1 \pm \frac{b}{a} = 1 \pm \frac{d}{c}$$
oder $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$ $\qquad$ d. h. $16 : 12 = 12 : 9$
oder $8 : 12 = 6 : 9$
oder $16 : 4 = 12 : 3$
d. h. $a \pm b : a = c \pm d : c$ $\qquad$ oder $8 : 4 = 6 : 3$

2) Nach Vorauss. ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
$$1 = 1$$
$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$$
$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$
d. h. $a \pm b : b = c \pm d : d$

Folgerung. In jeder Proportion verhält sich die Summe des ersten und zweiten Gliedes zur Differenz dieser Glieder, wie die Summe des dritten u. vierten Gliedes zur Differenz dieser Glieder.

Beweis. Es ist, wie oben bewiesen,
$a + b : a = c + d : c$ oder $a + b : c + d = a : c$
$a - b : a = c - d : c$ „ $a - b : c - d = a : c$

daraus $a + b : c + d = a - b : c - d$
oder $a + b : a - b = c + d : c - d$

z. B. $12 + 4 : 12 - 4 = 9 + 3 : 9 - 3$
d. h. $16 : 8 = 12 : 6$

§. 7. Aus jeder Proportion erhält man wieder eine richtige Proportion, wenn man ein inneres und ein äußeres Glied mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

Voraussetzung. $a : b = c : d$ $\qquad 10 : 20 = 6 : 12$

1. Behauptung. $am : bm = c : d$ $\qquad 30 : 60 = 6 : 12$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\frac{am}{bm} = \frac{c}{d}$$

und daraus $am : bm = c : d$

2. Behauptung. $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$ $\quad \left.\begin{matrix}\frac{10}{5} : \frac{20}{5} \\ 2 : 4\end{matrix}\right\} = 6 : 12$

Beweis. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} = \frac{c}{d}$$

und daraus $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$

Zusatz. Ebenso läßt sich beweisen, daß

$am : b = cm : d$	$\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$	$\frac{a}{m} : b = c : dm$
$a : bm = c : dm$	$a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$	$am : b = c : \frac{d}{m}$
$a : b = cm : dm$	$a : b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$	$a : \frac{b}{m} = cm : d$
$am : bm = cm : dm$	$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$	$a : bm = \frac{c}{m} : d$
$am : bm = cn : dn$	$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$	u. s. w.

§. 8. **Wenn man die gleichstelligen Glieder zweier (oder mehrerer) Proportionen mit einander multiplicirt, so bilden die Producte in derselben Reihenfolge wieder eine richtige Proportion.** (Zusammensetzung der Proportionen.)

Voraussetzung.	$a : b = c : d$	$2 : 3 = 4 : 6$
	$a' : b' = c' : d'$	$5 : 10 = 7 : 14$
Behauptung.	$aa' : bb' = cc' : dd'$	$10 : 30 = 28 : 84$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$$

$$\frac{aa'}{bb'} = \frac{cc'}{dd'} \text{ oder } aa' : bb' = cc' : dd'$$

Zusatz. Sind die entsprechenden Glieder der gegebenen Proportionen einander gleich, so erhält man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$aa : bb = cc : dd \qquad 3 : 4 = 6 : 8$$

oder $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$ $\quad 3^2 : 4^2 = 6^2 : 8^2$

Eben so $a^3 : b^3 = c^3 : d^3$ $\quad 9 : 16 = 36 : 64$

und allgemein $a^n : b^n = c^n : d^n$

d. h. durch Potenzirung aller Glieder einer gegebenen Proportion mit derselben Zahl erhält man wieder eine richtige Proportion.

§. 9. Wenn man die gleichstelligen Glieder zweier Proportionen durch einander dividirt, so bilden die Quotienten in derselben Reihenfolge wieder eine richtige Proportion.

Voraussetzung. $\begin{cases} a : b = c : d \\ a' : b' = c' : d' \end{cases}$ $\qquad \begin{array}{l} 12 : 36 = 16 : 48 \\ 4 : 9 = 8 : 18 \\ \hline 3 : 4 = 2 : 2\frac{2}{3} \end{array}$

Behauptung. $\frac{a}{a'} : \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} : \frac{d}{d'}$

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt $a\,d = b\,c$

$$a'd' = b'c'$$

$$\frac{a\,d}{a'd'} = \frac{b\,c}{b'c'}$$

oder $\frac{a}{a'} \cdot \frac{d}{d'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}$

und daraus $\frac{a}{a'} : \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} : \frac{d}{d'}$

§. 10. In einer fortlaufenden Proportion verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Voraussetzung. $a : b = c : d = e : f = g : h$

(wofür man auch schreibt $a : c : e : g = b : d : f : h$)

Behauptung. $a + c + e + g : b + d + f + h = \begin{cases} a : b \\ c : d \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$

Beweis. Setzt man $\frac{a}{b} = q$ und daher $a = b\,q$,

dann ist auch $\frac{c}{d} = q$ „ „ $c = d\,q$

$\frac{e}{f} = q$ „ „ $e = f\,q$

$\frac{g}{h} = q$ „ „ $g = h\,q$

folglich $a + c + e + g = (b + d + f + h)\,q$

$$\frac{a + c + e + g}{b + d + f + h} = q = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ u. s. w.}$$

oder $a + c + e + g : b + d + f + h = \begin{cases} a : b \\ c : d \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 11. Wenn in zwei Proportionen die inneren (oder äußeren) Glieder bezüglich gleich sind, so bilden die äußeren (oder inneren) Glieder in umgekehrter Ordnung eine richtige Proportion.

Voraussetzung 1. $\begin{cases} a : b = c : d \\ e : b = c : f \end{cases}$ $\quad \begin{array}{c} 2 : 4 = 6 : 12 \\ 8 : 4 = 6 : 3 \\ \hline 2 : 8 = 3 : 12 \end{array}$

Behauptung. $a : e = f : d$

Beweis.
$$\begin{array}{c} ad = bc \\ ef = bc \\ \hline ad = ef \end{array}$$
oder $a : e = f : d$

Voraussetzung 2. $a : b = c : d$
$a : e = f : d$

Behauptung. $b : e = f : c$

Beweis.
$$\begin{array}{c} ad = bc \\ ad = ef \\ \hline bc = ef \end{array}$$
$b : e = f : c$

IX. Kapitel.

Von den algebraischen Gleichungen des ersten Grades.

Erklärungen. Nach Kap. I. wird eine Verbindung zweier gleichwerthigen Zahlengrößen durch das Gleichheitszeichen Gleichung genannt. Man unterscheidet

1) identische Gleichungen, deren Seiten sich nicht von einander unterscheiden; z. B.:

$$a = a; \qquad \frac{a + b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

2) analytische Gleichungen, deren Glieder zwar verschieden sind, sich aber durch Ausführung der angedeuteten Operationen eine in die andere verwandeln lassen, und die des halb für beliebige Werthe der darin vorkommenden Buchstaben richtig bleiben. (Mit solchen Gleichungen beschäftigten sich die bisher abgehandelten 4 Species der allgemeinen Arithmetik.) Z. B.:

$$(a + b)\, m = am + bm; \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) algebraische Gleichungen (synthetische oder Bestimmungsgleichungen), deren Seiten verschieden sind und sich auch durch Rechnungsoperationen nicht in einander verwandeln lassen; z. B.:

$$x + 2 = 8 \qquad 3y = 15 \qquad \frac{z}{a} = b$$

Eine algebraische Gleichung muß wenigstens eine unbestimmte Größe (die Unbekannte x, y, z) enthalten, welche durch die andern als bekannt angenommenen Größen (2, 8, 3, 15, a, b) bestimmt werden kann. Man nennt die Bestimmung der unbekannten Größen durch die bekannten das Auflösen einer Gleichung, und bezeichnet jene gewöhnlich durch die letzten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets (....x, y, z), diese, falls sie nicht Ziffern sind, durch die ersten Buchstaben des lateinischen oder griechischen Alphabets (a, b, c... α, β, γ...). Die algebraischen Gleichungen gelten daher nicht für beliebige, sondern nur für einen oder mehrere bestimmte Werthe der darin vorkommenden Unbekannten, z. B. in dem vorigen Beispiele für $x = 6 \quad y = 5 \quad z = ab$

Die Lehre von den algebraischen Gleichungen heißt Algebra.

Algebraische Gleichungen heißen vom 1. Grade oder einfach, wenn die Unbekannten in ihnen nur einfach, nicht mit sich selbst multiplicirt, vorkommen. Sie können eine, zwei oder mehrere Unbekannte enthalten.

§. 1. Auflösung der algebraischen Gleichungen vom 1. Grade mit **einer** Unbekannten.

Sie besteht darin, daß man durch entsprechende Umformungen und arithmetische Operationen die unbekannte Größe (x) auf die eine (gewöhnlich linke) Seite, die bekannten Größen auf die andere Seite der Gleichung bringt. Zu diesem Zwecke verfährt man nach dem Grundsatze, daß gleiche Rechnungsoperationen, mit gleichen Größen (den beiden Seiten) vorgenommen, gleiche Resultate geben. (Gleiches zu Gleichem, Gleiches von Gleichem, Gleiches mit Gleichem und Gleiches durch Gleiches gibt Gleiches.) Veranschaulichung durch Vergleich mit einer im Gleichgewichte befindlichen Wage.

Daraus folgt im Einzelnen:

1) Gleiche Glieder, welche mit denselben Vorzeichen auf beiden Seiten vorkommen, können weggelassen werden.

$$\text{Aus } x \pm a = m \pm a \text{ folgt } x = m$$

2) Man kann jedes Glied mit verändertem Vorzeichen auf die andere Seite bringen. (Transposition.)

Aus $x \pm m = a$ folgt, wenn man auf beiden Seiten m subtrahirt oder addirt $\qquad x = a \mp m$

In der Regel schafft man alle Glieder, welche die Unbekannten enthalten, auf die linke Seite.

Bringt man alle Glieder von einer Seite auf die andere, so bleibt auf der erstern Seite 0, und man sagt dann, die Gleichung sei auf 0 reduzirt.

$$\text{Aus } x = a - m \text{ folgt } x - a + m = 0$$

Auch ergibt sich aus 2., daß man die Vorzeichen aller Glieder umkehren darf.

Aus $-x + a = -b$ folgt $+x - a = +b$ oder $x - a = b$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) Man kann alle Glieder mit derselben Zahl multipliciren, insbesondere die vorhandenen Brüche durch Multiplication jedes Gliedes mit dem Hauptnenner der Brüche wegschaffen.

Aus $x + a = b$ folgt $mx + ma = mb$

„ $\frac{x}{m} + a = b$ „ $x + ma = mb$

„ $\frac{m}{x} + a = b$ „ $m + xa = xb$

„ $\frac{x}{6} - a = \frac{b}{10}$ „ $5x - 30a = 3b$ (Hauptnenner 30.)

Durch Multiplication sämmtlicher Glieder mit (-1) werden (wie bei 2.) alle Zeichen umgekehrt.

4) Man kann alle Glieder durch dieselbe Zahl dividiren, und somit einen allen gemeinschaftlichen Factor weglassen, auch ein beliebiges Glied von seinem Factor befreien.

Aus $6x + 12 = 9b$ folgt $2x + 4 = 3b$ und daraus $x + 2 = \frac{3}{2}b$

5) Man kann die in der Gleichung vorkommenden zusammengesetzten Producte in algebraische Summen verwandeln und dadurch die Unbekannte frei von Klammern darstellen.

Aus $(2x + a)b = c - d$ folgt $2bx + ab = c - d$

Die Reihenfolge, in welcher die Umformungen der gegebenen Gleichung am zweckmäßigsten vorgenommen werden, ist Sache der Ueberlegung; in der Regel ist das Verfahren folgendes: Man lös't die Klammern auf, beseitigt die Nenner, bringt alle Glieder, welche die Unbekannte als Factor enthalten, auf die linke, die übrigen auf die rechte Seite, verwandelt die linke Seite in ein Product, von dem ein Factor die positive Unbekannte, der andere die algebraische Summe ihrer Coeffizienten ist, und dividirt schließlich beide Seiten durch diesen Factor.

§. 2. Auflösung der algebraischen Gleichungen vom 1. Grade mit **zwei** Unbekannten.

Aus einer einfachen Gleichung mit 2 Unbekannten (x, y), z. B. $ax + by = c$, läßt sich zwar nach den vorigen Regeln der Werth der einen Unbekannten finden, aber derselbe enthält noch die andere Unbekannte und ist also unbestimmt. Man bedarf daher zur Wegschaffung (Elimination) derselben noch einer zweiten, von der ersten unabhängigen, nicht durch Umformung derselben entstandenen Gleichung, welche man mit der ersten so verbindet, daß eine dritte Gleichung mit nur einer Unbekannten entsteht, die man nach den bekannten Regeln auflöst.

Es gibt 4 Methoden zur Elimination einer Unbekannten:

I. Die **Einsetzungsmethode** (Substitutionsmethode [substitutio]).

Man sucht den Werth der einen Unbekannten, z. B. x, aus einer der gegebenen Gleichungen und setzt diese an die Stelle derselben Unbekannten in die zweite Gleichung ein; dadurch erhält man eine dritte Gleichung, worin nur y vorkommt; z. B.:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(1)\quad a x + b y = c$$
$$(2)\quad \alpha x + \beta y = \gamma$$

Aus (1) ist $x = \frac{c - b y}{a}$; wird dieser Werth in (2) eingesetzt, so ergibt sich

$$y = \frac{a\gamma - \alpha c}{a\beta - \alpha b}$$

Um x zu erhalten, substituirt man den gefundenen Werth von y in (1) oder (2), und erhält z. B.

$$x = \frac{\beta c - b\gamma}{a\beta - \alpha b}$$

II. Die **Gleichsetzungsmethode** (Combinations- oder Comparations-Methode).

Man entwickelt den Werth der einen Unbekannten, z. B. x, aus jeder der beiden Gleichungen; durch Gleichsetzung der gefundenen Werthe erhält man eine dritte Gleichung, welche nur die andere Unbekannte enthält; z. B. seien gegeben die Gleichungen

$$(1)\quad a x + b y = c$$
$$(2)\quad \alpha x + \beta y = \gamma$$

Aus (1) ist $x = \frac{c - b y}{a}$, aus (2) $x = \frac{\gamma - \beta y}{\alpha}$, daher

$$(3)\quad \frac{c - b y}{a} = \frac{\gamma - \beta y}{\alpha}$$

woraus y gefunden wird. x kann auf dieselbe Art oder durch Substitution des Werthes von y in (1) oder (2) erhalten werden.

III. Die **Coeffizientenmethode** (Additions- und Subtractionsmethode).

Man formt die beiden Gleichungen so lange um, bis die eine der beiden Unbekannten, z. B. x, nur als Factor eines einzigen Gliedes in beiden Gleichungen auftritt und macht dann durch Multiplication mit geeigneten Factoren die Coeffizienten von x einander gleich. (Dies geschieht dadurch, daß man das kleinste Vielfache der Coeffizienten bildet und jede Gleichung mit demjenigen Factor dieses Vielfachen multiplicirt, welchen der Coeffizient von x in ihr nicht schon hat.) Wenn man alsdann die beiden so erhaltenen Gleichungen subtrahirt oder addirt, je nachdem die Glieder mit x dasselbe oder verschiedene Vorzeichen haben, so erhält man eine neue Gleichung, in der x verschwunden ist und nur y vorkommt.

Seien z. B. I. gegeben die Gleichungen

$$(1)\quad a x + b y = c$$
$$(2)\quad \alpha x + \beta y = \gamma$$

Multiplicirt man (1) mit α und (2) mit a, so erhält man

$$(3)\quad a\alpha x + \alpha b y = \alpha c$$
$$(4)\quad a\alpha x + a\beta y = a\gamma$$

und durch Subtraction

$$(\alpha b - a\beta)\, y = \alpha c - a\gamma$$
$$y = \frac{\alpha c - a\gamma}{\alpha b - a\beta}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es kann nun x auf dieselbe Art oder durch Substitution des Werthes von y in (1) oder (2) erhalten werden.

Seien II. gegeben die Gleichungen

$$(1)\quad 4x + 6y = 26$$
$$(2)\quad 2x - 9y = 42$$

und es soll daraus zunächst x gefunden werden.

Das kleinste Vielfache von 6 und 9 ist 18; man multiplicirt also die erste Gleichung mit 3, die zweite mit 2; dadurch erhält man die Gleichungen

$$(3)\quad 12x + 18y = 60$$
$$(4)\quad 4x - 18y = 84$$

und durch Addition derselben

$$16x = 144$$
$$x = \frac{144}{16} = 9$$

IV. Die **Methode des unbestimmten Factors** (Bézout'sche Methode).

Man multiplicirt eine der beiden Gleichungen mit dem vorläufig unbestimmten Factor f, subtrahirt von der erhaltenen Gleichung die zweite, setzt in der neuen Gleichung den Coeffizienten der zu eliminirenden Unbekannten gleich Null und bestimmt aus dieser auf 0 gebrachten Gleichung den Factor f, mittelst dessen Einsetzung die durch Subtraction erhaltene Gleichung in eine Gleichung mit einer Unbekannten übergeht. (Man kann auch die beiden Gleichungen addiren.) Wenn man z. B. die erste der gegebenen Gleichungen

$$(1)\quad ax + by = c$$
$$(2)\quad \alpha x + \beta y = \gamma$$

mit f multiplicirt und davon die zweite subtrahirt, so erhält man

$$(3)\quad (fa - \alpha)\,x + (fb - \beta)\,y = fc - \gamma$$

Soll nun etwa zuerst y gefunden werden, so setze man, da f unbestimmt ist, $fa - \alpha = 0$, oder $fa = \alpha$, woraus $f = \frac{\alpha}{a}$. Substituirt man diesen Werth für f in (3), so verwandelt sich diese in

$$\left(\frac{\alpha}{a}b - \beta\right)y = \frac{\alpha}{a}c - \gamma$$

woraus $\quad (\alpha b - a\beta)\,y = \alpha c - a\gamma$

$$y = \frac{\alpha c - a\gamma}{\alpha b - a\beta}$$

Bemerkung. Die Auswahl unter den angegebenen 4 Methoden richtet sich in jedem besonderen Fall nach der Natur der Aufgabe; am seltensten wird die vierte gebraucht, am meisten die dritte.

§. 3. Auflösung der algebraischen Gleichungen vom 1. Grade mit **drei** und **mehr** Unbekannten.

I. Seien zuerst 3 von einander unabhängige einfache Gleichungen zwischen 3 Unbekannten x, y, z z. B.:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & a\,x + b\,y + c\,z = d \\
(2)\quad & a'\,x + b'\,y + c'\,z = d' \\
(3)\quad & a''\,x + b''\,y + c''\,z = d''
\end{aligned}
$$

gegeben, so eliminirt man nach einer der vier Methoden des §. 2 die eine der Unbekannten, z. B. x, zweimal aus irgend 2 der gegebenen Gleichungen, z. B. aus (1) und (2) und aus (2) und (3). Dadurch erhält man 2 neue Gleichungen, welche nur noch die beiden Unbekannten y und z enthalten, die man dann nach §. 2 bestimmt und deren Werthe, in eine der ursprünglichen Gleichungen eingesetzt, auch den Werth von x finden lassen.

II. Sind im Allgemeinen n von einander unabhängige einfache Gleichungen zwischen n Unbekannten gegeben, so eliminirt man zunächst aus denselben eine der Unbekannten, wodurch man eine Unbekannte weniger, aber auch eine Gleichung weniger erhält. Aus diesen n — 1 Gleichungen mit n — 1 Unbekannten eliminirt man eine zweite Unbekannte, wodurch man zu n — 2 Gleichungen mit n — 2 Unbekannten kommt. In dieser Weise fährt man fort, bis man schließlich zu einer Gleichung mit nur noch einer Unbekannten gelangt. Den gefundenen Werth derselben substituirt man in das vorhergehende System und erhält so eine zweite Unbekannte; die für zwei Unbekannte gefundenen Werthe setzt man wieder in ein weiter vorhergehendes System und findet so schließlich durch Einsetzung der gefundenen n — 1 Unbekannten in eine der ursprünglich gegebenen Gleichungen die letzte Unbekannte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(1)\quad a\,x + b\,y + c\,z$$
$$(2)\quad a'\,x + b'\,y + c'\,z$$
$$(3)\quad a''\,x + b''\,y + c''\,z$$

gegeben, so eliminirt man nach einer der vier Mö
Unbekannten, z. B. x, zweimal aus irgend 2 der
(1) und (2) und aus (2) und (3). Dadurch erhält
nur noch die beiden Unbekannten y und z enthalten
stimmt und deren Werthe, in eine der ursprünglic
den Werth von x finden lassen.

II. Sind im Allgemeinen n von einander u
zwischen n Unbekannten gegeben, so eliminirt man
Unbekannten, wodurch man eine Unbekannte wen
weniger erhält. Aus diesen n — 1 Gleichungen mi
man eine zweite Unbekannte, wodurch man zu n —
bekannten kommt. In dieser Weise fährt man for
Gleichung mit nur noch einer Unbekannten gelang
selben substituirt man in das vorhergehende System
bekannte; die für zwei Unbekannte gefundenen W
weiter vorhergehendes System und findet so schließl
nen n — 1 Unbekannten in eine der ursprünglich
Unbekannte.

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
R G B W G K C Y M

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf