In den ausführlicheren physikalischen Lehrbüchern findet man gewöhnlich die Bewegung materieller Punkte auf einer sich um einen ihrer Punkte in der horizontalen Ebene mit constanter Winkelgeschwindigkeit drehenden starren Geraden erwähnt, wenn auch nicht eingehend behandelt. Es interessirte mich die allgemeineren Fälle solcher Bewegungen zu untersuchen, in welchen die Gerade nicht an die Horizontalebene gebunden ist, sondern entweder unter beliebigem, aber constantem Neigungswinkel um die Vertikale mit constanter Winkelgeschwindigkeit rotirt, oder um einen ihrer Punkte mehr oder weniger frei beweglich durch einen Stoß in Bewegung gesetzt wird. Einen Theil der Arbeit und zwar den zuerst erwähnten einfacheren, da er weniger Raum beansprucht, lasse ich hier folgen.

Zur Vergleichung gebe ich zunächst die Ausführung des oben erwähnten einfachsten Falles:

## I.

Eine starre Gerade dreht sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit um einen ihrer Punkte in horizontaler Ebene; es soll die Bewegung eines auf ihr befindlichen und beweglichen, materiellen Punktes bestimmt werden. — Denkt man sich in der Horizontalebene ein rechtwinkliges Coordinatensystem durch den Drehungspunkt gelegt, so daß die x Axe mit der rotirenden Linie zu Anfang der Bewegung zusammenfällt und die Drehung von der positiven x Axe zur positiven y Axe verfolgt, ist ferner $\omega$ die gegebene constante Winkelgeschwindigkeit, so ist die Bewegung der rotirenden Linie vollständig bekannt, und ihre jedesmalige Lage wird gefunden durch die Gleichung

$$\varphi = \omega\, t$$

worin t die seit dem Anfang der Bewegung verflossene Zeit und $\varphi$ den Abweichungswinkel der rotirenden Linie von der positiven x Axe bedeutet. Die Gleichung der Geraden ist

$$y - x \operatorname{tang} \varphi = 0$$

Es ergeben sich mithin nach d'Alambert's Prinzip folgende Bewegungsgleichungen des auf der Geraden beweglichen Punktes von der Masse m und mit den Coordinaten x und y:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = - \lambda \operatorname{tang} \varphi$$

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = \lambda$$

Daraus folgt:

$$0 = m. \frac{d^2 x}{dt^2} + m \frac{d^2 y}{dt^2} . \operatorname{tang} \varphi = \left( x \frac{d^2 x}{dt^2} + y \frac{d^2 y}{dt^2} \right) . m$$



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder setzt man Polarcoordinationen ein

$$x = r \,.\, \cos\varphi \;;\; y = r \,.\, \sin\varphi$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos\varphi \frac{d^2r}{dt^2} - 2\sin\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} - r\cos\varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - r\sin\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sin\varphi \frac{d^2r}{dt^2} + 2\cos\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} - r\sin\varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - r\cos\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

so lautet die Gleichung:

$$0 = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

Weil aber $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, so ist $\frac{d^2r}{dt^2} = r\omega^2$ und folglich, wenn c der Anfangswerth von r, d. h.: die anfängliche Entfernung des beweglichen Punktes vom Drehungspunkte ist

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = r^2\omega^2 - c^2\omega^2 \;;\; \text{also}$$

$$t = \frac{1}{\omega} \int_c^r \frac{dr}{\sqrt{r^2 - c^2}} = \frac{1}{\omega} \operatorname{Log} \frac{r + \sqrt{r^2 - c^2}}{c}$$

$$\omega t = \varphi = \operatorname{Log} \frac{r + \sqrt{r^2 - c^2}}{c} \quad \text{also:} \quad r = \frac{c\left(1 + e^{2\varphi}\right)}{2\,e^{\varphi}} \quad \text{oder:}$$

$$r = \frac{c}{2}\left(e^{-\varphi} + e^{+\varphi}\right) = \frac{c}{2}\left(e^{-\omega t} + e^{+\omega t}\right)$$

Dies ist die Gleichung der Curve, welche der Punkt beschreibt, für Polarcoordinaten. Für gerade rechtwinklige Coordinaten lautet sie:

$$x^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}\left(e^{-\omega t} + e^{+\omega t}\right)^2$$

Sie ist die Gleichung einer mit wachsendem $\varphi$ schnell sich erweiternden Spirale. Man ersieht daraus, daß die Bewegung von der Masse des Punktes ganz unabhängig ist, ferner, daß die Entfernung desselben vom Drehungspunkt, wenn die Winkelgeschwindigkeit größer genommen wird, desto schneller einen gleich großen Werth erlangt, und daß dieselbe einen ganz bestimmten Werth hat für jede Drehung, es mag zu derselben wenig oder viel Zeit verbraucht sein, wenn die anfängliche Lage des materiellen Punktes dieselbe war, daß endlich, wenn $c = 0$ d. h.: wenn der Punkt sich im Drehungspunkt befindet, derselbe sich gar nicht fortbewegt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Geschwindigkeit des Punktes in der Richtung der rotirenden Linie wird:

$$\frac{dr}{dt} = \omega \frac{c}{2} \left( e^{+\omega t} - e^{-\omega t} \right) = \omega \frac{c}{2} \left( e^{+\varphi} - e^{-\varphi} \right)$$

die darauf senkrechte:

$$r \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{c}{2} \left( e^{+\omega t} + e^{-\omega t} \right) = \omega \frac{c}{2} \left( e^{+\varphi} + e^{-\varphi} \right)$$

und folglich die Gesammtgeschwindigkeit:

$$v = \omega c \sqrt{\frac{e^{+2\omega t} + e^{-2\omega t}}{2}} = \omega c \sqrt{\frac{e^{+2\varphi} + e^{-2\varphi}}{2}}$$

Beide Geschwindigkeitskomponenten sowohl, als mithin auch die absolute Geschwindigkeit wachsen also nicht nur mit der Drehung, sondern auch mit der Winkelgeschwindigkeit und mit der anfänglichen Entfernung des Punktes. Die Zeit dagegen, in welcher r und $\varphi$ bestimmte, sich entsprechende Werthe erlangen, ist desto kleiner, je größer die Winkelgeschwindigkeit ist. Bei gleicher Winkelgeschwindigkeit erlangt r desto schneller einen bestimmten Werth, je größer die anfängliche Entfernung des Punktes ist. — Dieselbe Rechnung kann auf beliebig viele bewegliche Punkte angewendet werden, da dieselben von einander gänzlich unabhängig sind. Es würde sich für jeden eine Spirale ergeben, welche sich nur durch die verschiedenen Werthe von c unterschieden und welche deßhalb desto schneller sich erweiterten, je größer die Verhältnisse der verschiedenen anfänglichen Entfernungen unter einander wären.

## II.

Die Bewegung der materiellen Punkte wird modificirt, wenn die Bedingung eingeführt wird, daß die gegenseitige Entfernung derselben unveränderlich sein soll. Ich will die Rechnung für 2 Punkte: m mit der variablen Entfernung r und den Coordinaten x und y, m' mit der Entfernung r' und den Coordinaten x' und y' durchführen. Die gegenseitige Entfernung der Punkte sei a. Die Bedingungen des Systems sind nun ausgedrückt durch die 3 Gleichungen:

$$\text{I.} \quad y - x \operatorname{tang} \omega t = 0$$

$$\text{II.} \quad x' - x' \operatorname{tang} \omega t = 0$$

$$\text{III.} \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} - \sqrt{x^2 + y^2} - a = 0 = r' - r - a$$

wobei vorausgesetzt ist, daß mit Berücksichtigung des Zeichens $r' > r$ sei, d. h.: daß diejenige Richtung der x Axe als positiv genommen wird, auf welcher anfangs der Punkt m' liegt, daß, wenn beide Punkte auf derselben Seite liegen, m' weiter vom Drehungspunkt entfernt sei als m, und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

daß, wenn beide auf entgegengesetzten Seiten liegen, m sich auf der negativen befinde, also r negativ sei.

Die Gleichungen für die Bewegung lauten:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = - \lambda \operatorname{tang} \omega t - \lambda_2 \frac{x}{r}$$

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = \lambda \qquad - \lambda_2 \frac{y}{r}$$

$$m' \frac{d^2 x'}{d t^2} = - \lambda_1 \operatorname{tang} \omega t + \lambda_2 \frac{x'}{r'}$$

$$m' \frac{d^2 y'}{d t^2} = \lambda_1 \qquad + \lambda_2 \frac{y'}{r}$$

daraus ergibt sich:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} + m \frac{d^2 y}{d t^2} \cdot \operatorname{tang} \omega t = - \lambda_2 \left( \frac{x}{r} + \frac{y}{r} \operatorname{tang} \omega t \right)$$

$$m' \frac{d^2 x'}{d t^2} + m' \frac{d^2 y'}{d t^2} \operatorname{tang} \omega t = \lambda_2 \left( \frac{x'}{r} + \frac{y'}{r} \operatorname{tang} \omega t \right)$$

oder, wenn in die ersten dieser Gleichungen für tang $\omega$ t sein Werth aus I, in die zweite der Werth aus II gesetzt wird:

$$m x \frac{d^2 x}{d t^2} + m y \frac{d^2 y}{d t^2} = - \lambda_2 \left( \frac{x^2 + y^2}{r} \right) = - \lambda_2 r$$

$$m' x' \frac{d^2 x'}{d t^2} + m' y' \frac{d^2 y'}{d t^2} = \lambda_2 \left( \frac{x'^2 + y'^2}{r'} \right) = \lambda_2 r' \text{ ; also:}$$

$$m r' \left( x \frac{d^2 x}{d t^2} + y \frac{d^2 y}{d t^2} \right) + m' r \left( x' \frac{d^2 x'}{d t^2} + y' \frac{d^2 y'}{d t^2} \right) = 0$$

Setzt man darin

$x = r \cdot \cos \varphi$ ; $y = r \cdot \sin \varphi$ ; $x' = r' \cos \varphi$ ; $y' = r' \sin \varphi$ entsprechend den Gleichungen I, II, III, so daß $\varphi = \omega$ t, so geht die Gleichung über in:

$$m \frac{d^2 r}{d t^2} + m' \frac{d^2 r'}{d t^2} - \left( m r + m' r' \right) \left( \frac{d \varphi}{d t} \right)^2 = 0$$

Weil nun $r' - r - a = 0$, also $\frac{d^2 r'}{d t^2} = \frac{d^2 r}{d t^2}$ und

$(m r + m' r') = (m + m') r' - m a$, ferner $\frac{d \varphi}{d t} = \omega$ ist, so geht die Gleichung über in:

$$\frac{d^2 r'}{d t^2} = \omega^2 r' - \frac{m a \omega^2}{m + m'}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wird das mit $2\frac{dr'}{dt}$ multiplicirt und integrirt, so folgt:

$$\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2 = \omega^2 r'^2 - \frac{2\,m\,a\,\omega^2}{m+m'}\,r' + \mu$$

Die Constante $\mu$ ergiebt sich $= -\omega^2 c^2 + \frac{2\,m\,a\,\omega^2}{m+m'}\cdot c$, wenn mit c die anfängliche Entfernung des Punktes m' bezeichnet wird, da sich leicht ergiebt, daß für den Anfang der Bewegung $\frac{dr'}{dt} = 0$ ist. Es entsteht also: $\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2 = \omega^2\left(r' - c\right)\left(r' + c - \frac{2\,m\,a}{m+m'}\right)$

Wenn nun $c - \frac{2\,m\,a}{m+m'}$ positiv ist, so ist der Factor $r' + c - \frac{2\,m\,a}{m+m'}$ positiv, da der Punkt m' zunächst auf der positiven Seite liegt. Es muß folglich, damit die Wurzel aus obigem Ausdruck reell sei, auch $r' - c$ positiv sein, d. h.: r' muß mit t zugleich wachsen.

Ist aber $c - \frac{2\,m\,a}{m+m'}$ negativ, so fragt sich, ob es absolut genommen größer oder kleiner als c ist. Ist es größer, so wird, so lange r' von c bis zu dem Werth $-\left(c - \frac{2\,m\,a}{m+m'}\right)$ wächst, die Wurzel imaginair, und r' muß daher von c an abnehmen. Ist der Ausdruck dagegen kleiner als c, so muß r' von c an wachsen.

Es sei nun die anfängliche Entfernung der Masse m vom Drehungspunkt b, so daß $a = c - b$. Die beiden Massen seien zu Anfang beide auf der positiven Seite, so daß c, a, b positiv, $c > a$ ist, dann ist $c - \frac{2\,m\,a}{m+m'} = \frac{(m+m')\,c - 2\,m\,a}{m+m'}$

$(m+m')\,c - 2\,m\,a = (m+m')\,c - 2\,m\,c + 2\,m\,b = (m'-m)\,c + 2\,m\,b$

ist $m' > m$, so ist $(m'-m)\,c + 2\,m\,b$ positiv;

ist $m > m'$ und $-(m'-m)\,c > 2\,m\,b$, so ist $\frac{(m'-m)\,c + 2\,m\,b}{m+m'}$ negativ, aber sein absoluter Werth kleiner als c;

ist $m > m'$ und $2\,m\,b > -(m'-m)\,c$, so ist $\frac{(m'-m)\,c + 2\,m\,b}{m+m'}$ positiv.

Wenn sich zweitens zu Anfang die Masse m auf der negativen Seite befindet, während m' auf der positiven ist, so ist $b = -b'$, $a = c + b'$, $a > c$.

Dann wird:

$c\,(m+m') - 2\,m\,a = c\,(m+m') - 2\,m\,c - 2\,m\,b' = c\,m' - m\,b' - m\,a.$

Ist nun $c\,m' > m\,b'$ und setzt man $c\,m' - m\,b' = g$, so ist wenn $g > m\,a$, $c\,(m+m) - 2\,m\,a$ positiv,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn $g < m a$, so ist $\frac{c(m + m') - 2 m a}{m + m'}$ negativ, aber sein absoluter Werth kleiner als c, denn es ist $m a = m c + m b' < (m + m') c$, weil $m' c > m b'$ ist.

Es ergiebt sich also hieraus, daß der Ausdruck $c - \frac{2 m a}{m + m'}$ entweder positiv, oder 0, oder negativ, aber im letzteren Falle seinem absoluten Werth nach kleiner als c ist, wenn die beiden Massen anfänglich entweder auf derselben Seite der starren Linie sich befinden, oder auf entgegengesetzten, aber so, daß $m' c > m b$ ist. In diesen Fällen muß also $r'$ wachsen.

$$\text{Ist } c m' = m b', \text{ so wird } c - \frac{2 m a}{m + m'} = - \frac{m a}{m + m'} = - c .$$

Ist $c m' < m b'$, so wird $c - \frac{2 m a}{m + m'}$ negativ und absolut genommen größer als c.

In diesem Falle ist also $r' < c$ d. h.: als abnehmend anzunehmen. Dieser Fall reducirt sich aber auf den ersten dadurch, daß man die Vorzeichen der Coordinalen-Axen und die Bezeichnungen von m und m' vertauscht.

1) Betrachten wir nun zunächst den Fall, in welchem

$c m' = m b' = - m b$, also $c - \frac{2 m a}{m + m'} = - c$ ist, so folgt aus der Gleichung

$$\left(\frac{d r'}{d t}\right)^2 = \omega^2 (r' - c) \left(r' + c - \frac{2 m a}{m + m'}\right) \text{ jetzt: } \frac{d r'}{d t} = \pm \omega (r' - c) \text{ also:}$$

$$\omega t = \pm \int_c^{r'} \frac{d r'}{r' - c} = \pm \left(\text{Log } (r' - c) - \text{Log } 0\right) = \pm \infty$$

d. h.: die 2 Massen verharren unbeweglich an dem Ort auf der starren rotirenden Linie, wo sie sich auf derselben anfangs befanden und bewegen sich also in Kreisen um den Drehungspunkt, indem sie stets auf entgegengesetzten Seiten der starren Geraden sind.

2) Beide Massen befinden sich anfangs auf derselben Seite der starren Linie, oder m' befindet sich auf der positiven, m auf der negativen Seite, aber so, daß $m' c > - m b$ ist, dann hat man:

$$\frac{d r'}{d t} = \omega \sqrt{r'^2 - \frac{2 m a}{m + m'} \cdot r' + \frac{2 m a}{m + m'} \cdot c - c^2}$$

$$\text{also } \omega t = \varphi = \int_c^{r'} \frac{d r'}{\sqrt{r'^2 - \frac{2 m a}{m + m'} r' + \frac{2 m a}{m + m'} c - c^2}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$= \mathrm{Log}\left(r' - \frac{m\,a}{m+m'} + \sqrt{r'^2 - \frac{2\,m\,a}{m+m'}\,r' + \frac{2\,m\,a}{m+m'}\,c - c^2}\right) - \mathrm{Log}\left(c - \frac{m\,a}{m+m'}\right)$$

oder weil $(m + m')\,c - m\,a = m'\,c + m\,b$ ist,

$$\varphi = \mathrm{Log}\,\frac{(m+m')\,r' - m\,a + \sqrt{m+m'}\,\sqrt{r'^2\,(m+m') - 2\,m\,a\,r' + 2\,m\,a\,c - c^2\,(m+m')}}{m'\,c + m\,b}$$

Geht man nun vom Logarithmus zur Potenz über, quadrirt dann und bedenkt, daß:

$2\,m\,a\,c\,(m + m') - c^2\,(m + m')^2 - m^2\,a^2 = -\,(b\,m + c\,m')^2$ ist, so ergiebt sich:

$$(m'c + m\,b)^2\,e^{2\varphi} + 2\,m\,a\,(m'c + m\,b)\,e^{\varphi} - 2\,(m+m')\,(m'c + m\,b)\,r'\,e^{\varphi} + (m'\,c + m\,b)^2 = 0$$

und daraus:

$$r' = \frac{m'\,c + m\,b}{2\,(m+m')}\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right) + \frac{m\,a}{m+m'} \quad \text{und da } r = r' - a$$

$$r = \frac{m'\,c + m\,b}{2\,(m+m')}\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right) - \frac{m'\,a}{m+m'}$$

In diesen Gleichungen ist, je nachdem m und m' auf derselben Seite der Geraden sich befinden oder nicht, b positiv oder negativ zu nehmen.

Man sieht also, daß in diesem Fall, wenn die Massen auf derselben Seite sich befinden, oder auf entgegengesetzten so, daß die statischen Momente ungleich sind, mit Einschluß des Falles, daß eine der Massen im Drehungspunkt selbst sei, beide sich auf derjenigen Seite der starren Linie fortbewegen, auf welcher das größere Moment sich befindet. Dabei muß natürlich, wenn die Massen entgegengesetzt gelegen waren, derjenige, dem das kleinere Moment zukam, den Drehungspunkt überschreiten und zwar nach einer Drehung, welche sich aus dem Werthe von $\varphi$ ergiebt, wenn man $r' = a$ setzt:

$$\varphi = \mathrm{Log}\,\frac{m'\,a + \sqrt{m+m'}\,\sqrt{-2\,m'\,a\,b - b^2\,(m+m')}}{m'\,c + m\,b}$$

Dieser Ausdruck ist für ein negatives b und wenn $c\,m' > -\,m\,b$, stets reell. In diesem Fall beschreibt der Punkt m von Anfang an, bis er den Drehungspunkt erreicht, eine sich verengende Spirale, dann ändert er seine Richtung und beschreibt eine sich erweiternde Spirale. Der Punkt m' beschreibt nur eine sich erweiternde Spirale, welche von dem Moment an, in welchem m den Drehungspunkt erreicht, dem zweiten Theil der Bahn dieses Punktes parallel ist. Liegen beide Punkte von Anfang an auf derselben Seite, oder auch einer von beiden im Drehungspunkt, so sind die ganzen Bahnen parallel.

Zugleich sieht man aus den Bahngleichungen, daß für dieselben Anfangslagen die Entfernungen der Punkte vom Drehungspunkt für eine bestimmte Drehung stets dieselben sind, ganz abgesehen



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

davon, ob die Winkelgeschwindigkeit groß oder klein ist, daß sie aber abhängig sind von den Massen und Anfangslagen, und zwar, daß sie desto größer sind, je größer die Summe der statischen Momente ist. Die Winkelgeschwindigkeit hat dagegen Einfluß auf die Zeit, in welcher die bestimmte Drehung erreicht wird, nach der Gleichung $\varphi = \omega\, t$; je größer sie ist, desto kürzer ist die Zeit, welche zu dieser bestimmten Drehung nöthig ist. Die Geschwindigkeiten der beiden Punkte sind folgende:

Für m′ ist die Geschwindigkeit in der Richtung der starren Linie:

$$\frac{d\,r'}{d\,t} = \omega \sqrt{r'^2 - \frac{2\,m\,a}{m+m'}\,r' + \frac{2\,m\,a\,c}{m+m'} - c^2} = \frac{\omega\,(m\,b + m'\,c)}{m+m'} \sqrt{\frac{\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)^2}{4} - 1}$$

die darauf senkrechte Geschwindigkeitskomponente:

$$r'\,\frac{d\,\varphi}{d\,t} = \omega\,r' = \omega\left[\frac{(m\,b + m'\,c)}{2\,(m+m')}\cdot\left(e^{+\varphi} + e^{-\varphi}\right) + \frac{m\,a}{m+m}\right]$$

und die Gesammtgeschwindigkeit:

$$v' = \omega\sqrt{2\,r'^2 - \frac{2\,m\,a\,r'}{m+m'} + \frac{2\,m\,a\,c}{m+m'} - c^2}$$

$$= \omega\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{m\,b + m'\,c}{m+m'}\right)^2\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)^2 + \frac{m\,a}{m+m'}\left(\frac{m\,b + m'\,c}{m+m'}\right)\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right) + \frac{2\,m\,a\,c}{m+m'} - c^2}$$

Für den Punkt m ist die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung der starren Linie

$$\frac{d\,r}{d\,t} = \frac{d\,r'}{d\,t} = \omega\sqrt{r^2 + \frac{2\,m'\,a\,r}{m+m} - \frac{2\,m'\,a\,b}{m+m'} - b^2}$$

die darauf senkrechte:

$$r\,\frac{d\,\varphi}{d\,t} = r\,\omega = \omega\left[\frac{(m\,b + m'\,c)}{2\,(m+m')}\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right) - \frac{m'\,a}{m+m'}\right]$$

und die Gesammtgeschwindigkeit.

$$v = \omega\sqrt{2\,r^2 + \frac{2\,m'\,a\,r}{m+m'} - \frac{2\,m'\,a\,b}{m+m'} - b^2}$$

$$= \omega\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{m\,b + m'\,c}{m+m'}\right)^2\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)^2 - \frac{m'\,a}{m+m'}\left(\frac{m\,b + m'\,c}{m+m'}\right)\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right) - \frac{2\,m'\,a\,b}{m+m'} - b^2}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gesammtgeschwindigkeiten beider Massen sowohl, als auch ihre Componenten in der Richtung der starren Linie nehmen beständig zu mit wachsender Drehung. Die Componenten senkrecht auf die starre Linie nehmen ebenfalls zu, wenn beide Massen auf derselben Seite liegen. Anderenfalls nimmt nur die Componente für denjenigen Punkt, welcher das größere Moment hatte, beständig zu; für den anderen Punkt aber nimmt sie so lange ab, bis er den Drehungspunkt erreicht hat, hier wird sie zu 0 und wächst von da an ebenfalls beständig.

---

## III.

Ich lasse nun die Bestimmung fallen, daß die starre Gerade sich in der Horizontalebene drehen soll und nehme an, daß sie unter constantem Winkel gegen eine verticale Axe geneigt sei und um dieselbe mit constanter Winkelgeschwindigkeit rotire, daß also auch die Schwerkraft auf die auf derselben befindlichen Punkte wirken könne. Ich will zunächst wieder die Bewegung eines auf der Geraden beweglichen Punktes von der Masse m bestimmen, wobei wieder von vornherein klar ist, daß dieselbe Untersuchung auf beliebig viele derartige Punkte übertragen werden kann, da dieselben von einander vollkommen unabhängig sind.

Coordinatenaxen seien drei im Drehungspunkt auf einander senkrecht stehende Gerade, und zwar die eine vertikal als z Axe, deren positive Seite im Sinne der Schwere gerichtet sei. x Axe sei diejenige auf der Vertikalen senkrechte Linie, welche in der durch die Anfangslage der starren Linie und die z Axe bestimmten Ebene liegt, und zwar sei ihre positive Richtung so gewählt, daß die anfängliche x Coordinate des beweglichen Punktes positiv sei. Die y Axe endlich stehe im Drehungspunkte senkrecht auf der eben bestimmten xz Ebene und ihre positive Seite sei so gerichtet, daß die Projection der starren Linie auf die xy Ebene sich von der positiven x Axe zur positiven y Axe dreht.

Der bewegliche Punkt von der Masse m habe die Coordinaten x, y, z. Die Schwerkraft sei bezeichnet mit g. Die starre Linie sei unter dem spitzen Winkel $\alpha$ gegen die z Axe geneigt und rotire um dieselbe mit der constanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\varphi}{t}$. Durch diese Gleichung ist die jedesmalige Lage der rotirenden Linie vollkommen bestimmt. Die Bedingungen des Systems sind ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$\text{I. } y - x \operatorname{tang} \varphi = 0$$

$$\text{II. } \frac{x}{\cos \varphi \operatorname{tang} \alpha} - z = 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichungen für die Bewegung lauten also:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = - \lambda \operatorname{tang} \varphi + \lambda_1 \frac{1}{\cos \varphi \operatorname{tang} \alpha}$$

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = \lambda$$

$$m \frac{d^2 z}{d t^2} = m g \qquad - \lambda_1 \qquad \text{daraus folgt:}$$

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{d^2 y}{d t^2} \operatorname{tang} \varphi + \frac{d^2 z}{d t^2} \cdot \frac{1}{\cos \varphi \operatorname{tang} \alpha} = \frac{g}{\cos \varphi \operatorname{tang} \alpha} \qquad \text{oder:}$$

$$x \frac{d^2 x}{d t^2} + y \frac{d^2 y}{d t^2} + z \frac{d^2 z}{d t^2} = g z$$

Aus dieser Gleichung, welche die ganze Bewegung bestimmt, sieht man von vorne herein, daß die Bewegung von der Masse des Punktes ganz unabhängig ist, daß also Punkte, welche dieselbe anfängliche Lage haben, stets dieselbe Curve beschreiben müssen, wenn das System dieselbe Winkelgeschwindigkeit hat.

Durch Einführung von Polarcoordinaten mittelst der Gleichungen:

$$x = r \sin \alpha \cos \varphi \; ; \; y = r \sin \alpha \sin \varphi \; ; \; z = r \cos \alpha$$

geht die obige Gleichung über in:

$$\frac{d^2 r}{d t^2} = \omega^2 r \sin^2 \alpha + g \cos \alpha$$

und daraus folgt, wenn man mit $2 \frac{d r}{d t}$ multiplicirt und integrirt:

$$\left(\frac{d r}{d t}\right)^2 = \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha + 2 g r \cos \alpha + k$$

Die Constante k wird, wenn die anfängliche Entfernung des Punktes $r_0 = \pm c$ ist, worin das obere Zeichen für den Fall gilt, daß der Punkt unterhalb des Drehungspunktes liegt, das untere für den entgegengesetzten Fall,

$$k = - \omega^2 c^2 \sin^2 \alpha \mp 2 g c \cos \alpha$$

Also wird:

$$\frac{d r}{d t} = \pm \sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha (r^2 - c^2) + 2 g \cos \alpha (r \mp c)}$$

Wenn nun

1) anfangs $r_0 = + c$ ist, so wird

$$\frac{d r}{d t} = \pm \omega \sin \alpha \sqrt{(r - c)\left(r + c + \frac{2 g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}\right)}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Darin ist der zweite Factor des Radicanten stets positiv, es muß folglich, damit der Ausdruck reell sei, auch $r - c$ positiv sein, d. h. $r$ muß von $+ c$ an positiv wachsen. Es ist daher:

$$\frac{dr}{dt} = + \omega \sin \alpha \sqrt{(r^2 - c^2) + \frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(r - c)}$$

2) Ist $r_0 = - c$, so ist $\frac{dr}{dt} = \pm \omega \sin \alpha \sqrt{(r + c)\left(r - c + \frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}\right)}$.

Dann lauten also die beiden Werthe, für welche der quadratische Ausdruck verschwindet, $- c$ und $c - \frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$. Wenn nun $\frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} > c$, so ist $c - \frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$ negativ,

und es frägt sich dann, ob $\frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - c > c$ od. $< c$ ist.

Ist $\frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - c > c$, d. h. $\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} > c$, dann müßte,

wenn $r$ von $- c$ bis $- \frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} + c$ abnähme, $r < - c$ aber $> c - \frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$ sein, also die Wurzel würde imaginair; es muß also $r$ in diesem Fall ebenfalls wachsen:

also, wenn $r_0 = - c$; $\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} > c$, so ist $\frac{dr}{dt} = + \omega \sin \alpha \sqrt{r^2 - c^2 + \frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(r + c)}$

3) Ist $r_0 = - c$, $\frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} > c$, aber $\frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - c < c$, d. h. $\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} < c$,

dann würde, wenn $r$ von $- c$ bis $c - \frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$ wüchse, die Wurzel imaginair, mithin muß $r$ abnehmen:

also wenn $r_0 = - c$; $\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} < c$, so ist $\frac{dr}{dt} = - \omega \sin \alpha \sqrt{r^2 - c^2 + \frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(r + c)}$

Damit ist zugleich schon der Fall bestimmt, in welchem $c > \frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$

4) Wenn endlich $\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} = c$, $r_0 = - c$, so ist $\frac{dr}{dt} = \pm \omega \sin \alpha \sqrt{(r + c)^2}$

$$t = \frac{1}{\omega \sin \alpha} \int_{-c}^{r} \frac{dr}{r + c} = \frac{1}{\omega \sin \alpha} \operatorname{Log} \frac{r + c}{- c + c} = \infty$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

d. h. r behält beständig seinen Werth — c, und der Punkt dreht sich wie ein auf der starren Linie fester Punkt im Kreise um die vertikale Axe, bleibt also in der horizontalen Ebene, in welcher er sich von Anfang an befand.

Kehren wir nun zu den ersten Fällen zurück.

Es ist wenn 1, $r_0 = + c$ oder 2, $r_0 = - c$ und $\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} > c$

$$d t = + \frac{d r}{\omega \sin \alpha \sqrt{r^2 - c^2 + \frac{2 g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} (r \mp c)}}$$

worin das obere Zeichen gilt für $r_0 = + c$, das untere für $r_0 = - c$.

Daraus folgt:

$$\omega t \sin \alpha = \varphi \sin \alpha = \operatorname{Log} \left( r + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{r^2 - c^2 + \frac{2 g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} (r \mp c)} \right)$$
$$- \operatorname{Log} \left( \pm c + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \right)$$

oder:

$$\varphi \sin \alpha = \operatorname{Log} \frac{r \omega^2 \sin^2 \alpha + g \cos \alpha + \omega \sin \alpha \sqrt{(r^2 - c^2) \omega^2 \sin^2 \alpha + 2 g \cos \alpha (r \mp c)}}{\pm c \omega^2 \sin^2 \alpha + g \cos \alpha}$$

also wenn man zur Potenz übergeht:

$$\omega^2 \sin^2 \alpha \left( \pm c e^{\varphi \sin \alpha} - r \right) + g \cos \alpha \left( e^{\varphi \sin \alpha} - 1 \right) =$$
$$\omega \sin \alpha \sqrt{(r^2 - c^2) \omega^2 \sin^2 \alpha + 2 g \cos \alpha (r \mp c)}$$

Wenn man nun quadrirt und r bestimmt, so folgt:

$$r = \left( e^{\varphi \sin \alpha} + e^{- \varphi \sin \alpha} \right) \left( \frac{g \cos \alpha}{2 \omega^2 \sin^2 \alpha} \pm \frac{c}{2} \right) - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

Die Gleichung zeigt, daß r, wenn die anfängliche Entfernung $r_0$ positiv ist, von dem Werth + c an unbegrenzt fortwächst, daß also dann der materielle Punkt, der von Anfang an auf der unteren Seite der starren Linie sich befindet, auf dieser Seite ohne Ende vom Drehungspunkt fortrückt. Ist dagegen $r_0$ negativ, so bleibt r so lange negativ bei wachsender Drehung, d. h. der Punkt bleibt so lange auf der oberen Seite, als

$$\left( e^{\varphi \sin \alpha} + e^{- \varphi \sin \alpha} \right) \left( \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - \frac{c}{2} \right) < \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \text{ ist,}$$

dabei rückt er aber auf den Drehungspunkt zu, erreicht denselben nach der Zeit

$$t = \frac{1}{\omega \sin \alpha} \operatorname{Log} \frac{g \cos \alpha + \omega \sin \alpha \sqrt{2 c g \cos \alpha - c^2 \omega^2 \sin^2 \alpha}}{g \cos \alpha - c \omega^2 \sin^2 \alpha}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

tritt dann auf die untere Seite über, um nun auf derselben ebenfalls immer weiter fortzurücken.

Im dritten Fall war $r_0 = -c, c > \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$

$$dt = - \frac{dr}{\omega \sin \alpha \sqrt{r^2 - c^2 + \frac{2 g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(r + c)}} \quad \text{also}$$

$$t \omega \sin \alpha = \varphi \sin \alpha = - \operatorname{Log}\left(r + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{r^2 - c^2 + \frac{2 g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(r + c)}\right)$$

$$+ \operatorname{Log}\left(- c + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}\right)$$

$$\varphi \sin \alpha = \operatorname{Log} \frac{g \cos \alpha - c \omega^2 \sin^2 \alpha}{r \omega^2 \sin^2 \alpha + g \cos \alpha + \omega \sin \alpha \sqrt{(r^2 - c^2)\omega^2 \sin^2 \alpha + 2 g \cos \alpha (r + c)}}$$

Geht man zur Potenz über, so folgt:

$$e^{\varphi \sin \alpha} \omega \sin \alpha \sqrt{(r^2 - c^2)\omega^2 \sin^2 \alpha + 2 g \cos \alpha (r + c)} = g \cos \alpha \left(1 - e^{\varphi \sin \alpha}\right)$$

$$- \omega^2 \sin^2 \alpha \left(c + r e^{\varphi \sin \alpha}\right)$$

Daraus folgt:

$$r = \left(e^{\varphi \sin \alpha} + e^{- \varphi \sin \alpha}\right)\left(\frac{g \cos \alpha}{2 \omega^2 \sin^2 \alpha} - \frac{c}{2}\right) - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

Hiernach ist in diesem Falle r stets negativ und absolut größer als c, da hier $\frac{c}{2} > \frac{g \cos \alpha}{2 \omega^2 \sin^2 \alpha}$ ist.

Der Punkt steigt also unbegrenzt auf der starren Linie aufwärts der Schwere entgegengesetzt.

Ganz allgemein lautet nun die Gleichung der Bahn:

$$r = \left(e^{\varphi \sin \alpha} + e^{- \varphi \sin \alpha}\right)\left(\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \pm \frac{c}{2}\right) - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

und darin ist die anfängliche Entfernung des materiellen Punktes vom Drehungspunkt für c mit dem positiven Zeichen zu setzen, wenn der Punkt unterhalb, mit dem negativen Zeichen, wenn er oberhalb des Drehungspunktes stand.

Nach dieser Gleichung ist die Entfernung, welche der Punkt für eine bestimmte Drehung der starren Linie erreicht, nicht, wie es bei der Bewegung in der Horizontalebene war, unabhängig von der Winkelgeschwindigkeit, sondern sie wird durch dieselbe wesentlich modificirt, so daß es sogar durch die Größe derselben bedingt wird, ob der Punkt, wenn er oberhalb des Drehungspunktes war, steigt, fällt, oder in der Horizontalebene bleibt, in der er sich anfangs befindet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus der Gleichung ergiebt sich ferner, daß der Punkt, wenn er anfänglich im Drehungspunkt selbst steht, nicht ruht, wie es bei der horizontalen Bewegung war, sondern daß er die Curve:

$$r = \left( e^{\varphi \sin \alpha} + e^{-\varphi \sin \alpha} \right) \frac{g \cos \alpha}{2 \omega^2 \sin^2 \alpha} - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

beschreibt.

Setzt man in der Bahngleichung $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so erhält man den unter I behandelten Fall; die Bewegung findet in der Horizontalebene statt und die Bahn wire die Spirale:

$$r = \pm \frac{c}{2} \left( e^{\varphi} + e^{-\varphi} \right)$$

Die Beschaffenheit der Bahncurve ergiebt sich, wenn wir sie auf die x y Ebene projiciren; es wird

$$r \sin \alpha = \sqrt{x^2 + y^2} = \left( e^{\varphi \sin \alpha} + e^{-\varphi \sin \alpha} \right) \left( \frac{g}{2 \omega^2 \operatorname{tang} \alpha} \pm \frac{c}{2} \sin \alpha \right) - \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tang} \alpha}$$

und dies ist ebenfalls eine Spirale in der Horizontalebene. Man erhält also die wirkliche Bahncurve als den Durchschnitt des über dieser Spirale auf der x y Ebene senkrecht errichteten Cylinders

$$x^2 + y^2 = \left[ \left( e^{\varphi \sin \alpha} + e^{-\varphi \sin \alpha} \right) \left( \frac{g}{2 \omega^2 \operatorname{tang} \alpha} \pm \frac{c}{2} \sin \alpha \right) - \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tang} \alpha} \right]^2$$

mit dem durch die rotirende Gerade beschriebenen Kegel

$$x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tang}^2 \alpha = 0$$

und der Punkt durchläuft also den unterhalb der Horizontalebene liegenden Theil dieser Schnittcurve, wenn er anfangs schon unterhalb sich befand; er durchläuft nur den oberen Theil, wenn er sich anfangs oberhalb befand und wenn $c > \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$ ist. Dagegen durchläuft er, wenn er sich anfangs oberhalb befand und $c < \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$ ist, erst den Theil der oberen Hälfte der Schnittcurve, welcher zwischen $r = -\frac{c}{2}$ und dem Drehungspunkt liegt, und darauf die untere Hälfte. Steht er anfangs im Drehungspunkt selbst, so durchläuft er den unteren Theil der Durchschnittscurve aus obigem Kegel und dem Cylinder:

$$x^2 + y^2 = \left[ \left( e^{\varphi \sin \alpha} + e^{-\varphi \sin \alpha} \right) \frac{g}{2 \omega^2 \operatorname{tang} \alpha} - \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tang} \alpha} \right]^2$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Endlich wenn er anfangs oberhalb steht und $c = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$ ist, so beschreibt er einen horizontalen Kreis.

## IV.

Ich will nun endlich die Bewegung bestimmen, welche das System bei constanter Winkelgeschwindigkeit macht, wenn sich auf der starren Linie 2 materielle Punkte von der Masse m und m' befinden, welche gezwungen sind, stets in constanter Entfernung a von einander zu bleiben. Die Bezeichnungen m und m', deren anfängliche Entfernungen vom Drehungspunkt bezüglich b und c seien, werden so gewählt, daß $c > b$, also $b = c - a$ ist. Die variablen Entfernungen seien r und r', die Coordinaten der Punkte x, y, z und x', y', z', der Drehungswinkel sei $\varphi = \omega t$.

Die Bedingungsgleichungen des Systems sind in diesem Falle:

$$\text{I.}\quad \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - a = 0 = r' - r - a$$

$$\text{II.}\quad y - x \operatorname{tang} \varphi = 0$$

$$\text{III.}\quad \frac{x}{\cos \varphi \operatorname{tang} \alpha} - z = 0$$

$$\text{IV.}\quad y' - x' \operatorname{tang} \varphi = 0$$

$$\text{V.}\quad \frac{x'}{\cos \varphi \operatorname{tang} \alpha} - z' = 0$$

Daraus ergeben sich folgende Gleichungen für die Bewegung:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = - \lambda_1 \operatorname{tang} \varphi + \lambda_2 \frac{1}{\cos \varphi \operatorname{tang} \alpha} - \lambda \frac{x}{r}$$

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = \lambda_1 - \lambda \frac{y}{r}$$

$$m \frac{d^2 z}{d t^2} = m g - \lambda_2 - \lambda \frac{z}{r}$$

$$m' \frac{d^2 x'}{d t^2} = - \lambda_3 \operatorname{tang} \varphi + \lambda_4 \frac{1}{\cos \varphi \operatorname{tang} \alpha} + \lambda \frac{x'}{r}$$

$$m' \frac{d^2 y'}{d t^2} = \lambda_3 + \lambda \frac{y'}{r}$$

$$m' \frac{d^2 z'}{d t^2} = m' g - \lambda_4 + \lambda \frac{z'}{r}$$



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus den drei ersten von diesen Gleichungen folgt:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m\frac{d^2y}{dt^2}\tang\varphi+m\frac{d^2z}{dt^2}\frac{1}{\cos\varphi\tang\alpha}=\frac{mg}{\cos\varphi\tang\alpha}-\frac{\lambda}{r}\left(x+y\tang\varphi+\frac{z}{\cos\varphi\tang\alpha}\right)$$

oder mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{y}{x}+m\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{z}{x}=mg\cdot\frac{z}{x}-\frac{\lambda}{r}\left(x+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{x}\right)\text{ oder:}$$

$$m\,x\frac{d^2x}{dt^2}+m\,y\frac{d^2y}{dt^2}+m\,z\frac{d^2z}{dt^2}=m\,g\,z-\lambda\,r$$

Analog ergiebt sich aus den 3 letzten der obigen Gleichungen:

$$m'x'\frac{d^2x'}{dt^2}+m'y'\frac{d^2y'}{dt^2}+m'z'\frac{d^2z'}{dt^2}=m'gz'+\lambda r'$$

Durch Elimination von $\lambda$ aus diesen 2 Gleichungen folgt:

$$m\,r'\left(x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}\right)+m'r\left(r'\frac{d^2x'}{dt^2}+y'\frac{d^2y'}{dt^2}+z'\frac{d^2z'}{dt^2}\right)=g(mzr'+m'z'r)$$

oder durch Einführung von Polarcoordinaten:

$$m\,r'\left(r\frac{d^2r}{dt^2}-\omega^2r^2\sin^2\alpha\right)+m'r\left(r'\frac{d^2r'}{dt^2}-\omega^2r'^2\sin\alpha\right)=g(mr'r\cos\alpha+m'r'r\cos\alpha)$$

d. h.:

$$m\frac{d^2r}{dt^2}+m'\frac{d^2r'}{dt^2}=\omega^2(m\,r+m'r')\sin^2\alpha+g(m+m')\cos\alpha$$

Nun ist: $r'-r-a=0$, $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d^2r'}{dt^2}$, $m\,r+m'r'=(m+m')\,r'-m\,a$

also geht die Gleichung über in:

$$\frac{d^2r'}{dt^2}=\omega^2\sin^2\alpha\,r'-\frac{\omega^2\sin^2\alpha\,m\,a}{m+m'}+g\cos\alpha$$

Wird das mit $2\frac{dr'}{dt}$ multiplicirt und integrirt, so entsteht:

$\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2=\omega^2\sin^2\alpha\,r'^2-\frac{2\,m\,a\,\omega^2\sin^2\alpha}{m+m'}\cdot r'+2\,g\cos\alpha\,r'+D$ und da $r'$ anfangs gleich $c$ und $\frac{dr'}{dt}$ anfangs gleich 0 ist: $D=-\omega^2\sin^2\alpha\,c^2+\frac{2\,m\,a\,\omega^2\sin^2\alpha\,c}{m+m'}-2\,g\cos\alpha\,c$

also: $\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2=\omega^2\sin^2\alpha\,(r'^2-c^2)+\left(2\,g\cos\alpha-\frac{2\,m\,a\,\omega^2\sin^2\alpha}{m+m'}\right)(r'-c)$ also:

$$\text{A)}\quad\frac{dr'}{dt}=\pm\omega\sin\alpha\sqrt{(r'-c)\left(r'+c+\frac{2g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}-\frac{2\,m\,a}{m+m'}\right)}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder wenn $c = -c'$ also negativ ist, d. h.: wenn der Punkt $m'$ oberhalb der Horizontalebene liegt und natürlich dann ebenfalls $m$, da $b = c - a = -c' - a$, also auch negativ ist:

$$B)\ \frac{d\,r'}{d\,t} = \pm\,\omega \sin\alpha \sqrt{(r'+c')\left(r' - c' + \frac{2\,g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} - \frac{2\,m\,a}{m+m'}\right)}$$

Es ist nun zu untersuchen, welches Vorzeichen die Wurzel für die verschiedenen möglichen Anfangslagen der Punkte erhalten muß.

Es liege zunächst der Punkt $m'$ unterhalb der $x\,y$ Ebene, d. h.: $c$ sei positiv, dann gilt die Gleichung A.

Der zweite Factor des Radicanden ist zunächst stets positiv, da $r'$ von dem Werth $+\,c$ ausgeht,

$$1)\ \text{wenn}\ c + \frac{2\,g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} > \frac{2\,m\,a}{m+m'}$$

Er ist ferner anfangs positiv, wenn zwar

$$2)\ c + \frac{2\,g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} < \frac{2\,m\,a}{m+m'},\ \text{aber}\ \frac{2\,m\,a}{m+m'} - c - \frac{2\,g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} < c\ \text{ist,}$$

$$\text{d. h.: wenn}\ \frac{m\,a}{m+m'} - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} < c\ \text{ist.}$$

Diese Bedingung ist stets erfüllt, wenn beide Punkte anfangs unterhalb der Horizontalebene liegen, wenn also auch $b$ positiv ist, $c > a$, $a = c - b$; denn setzte man für $a$ seinen Werth, so lautet die Bedingung:

$$m\,c - m\,b - \frac{g\cos\alpha\,(m+m')}{\omega^2 \sin^2\alpha} < c\,m + c\,m'$$

$$\text{oder}\ c\,m' > -\,m\,b - \frac{g\cos\alpha\,(m+m')}{\omega^2 \sin^2\alpha}$$

und das ist stets erfüllt.

Liegt aber $m$ auf der negativen Seite, so daß $b = -\,b'$, $a = c + b'$ ist, dann lautet die zu erfüllende Bedingung:

$$c\,m' > m\,b' - \frac{g\cos\alpha\,(m+m')}{\omega^2 \sin^2\alpha}$$

Dieser zweite Fall schließt übrigens den ersten schon mit ein.

In beiden Fällen ist also der zweite Factor des Radicanden positiv, es muß daher, damit die Wurzel reell sei, auch der erste positiv sein, d. h.: $r'$ muß von $+\,c$ an wachsen.

Der zweite Factor wird dagegen negativ, wenn

$$3)\ \frac{2\,m\,a}{m+m'} > c + \frac{2\,g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}\ \text{und}\ \frac{2\,m\,a}{m+m'} - c - \frac{2\,g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} > c$$



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{d. h.: } \frac{m\,a}{m+m'} - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} > c$$

Dieses tritt niemals ein, wenn auch der Punkt m auf der positiven Seite liegt, sondern nur, wenn $b = -b'$ ist und wenn

$$c\,m' < m\,b' - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(m + m') \text{ ist.}$$

In diesem Falle muß also auch der erste Factor negativ sein, d. h.: $r'$ muß von $+c$ an abnehmen.

4) Zwischen den beiden vorhergehenden Fällen liegt derjenige, in welchem

$$c\,m' = m\,b' - \frac{g \cos \alpha\,(m + m')}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

ist, während der Punkt m also oberhalb der x y Ebene steht. Dann wird

$$c = \frac{m\,a}{m + m'} - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

und folglich der zweite Factor des Radicanden gleich dem ersten.

Es liege nun auch der Punkt $m'$ oberhalb vom Drehungspunkt, so daß $c = -c'$, $b = -b'$, $a = b' - c'$, dann gilt die Gleichung B. Wenn nun darin:

5) $\frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} < c' + \frac{2\,m\,a}{m + m,}$, dann ist der zweite Factor des Radicanden negativ, es muß folglich auch $(r' + c')$ negativ sein, d. h.: $r'$ muß von $-c'$ an abnehmen.

6) Wenn dagegen $\frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} > c' + \frac{2\,m\,a}{m + m'}$ und wenn nur

$$\frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - c' - \frac{2\,m\,a}{m + m'} < c' \text{ d. h.: } m'\,c' > \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(m + m') - m\,b',$$

so ist der zweite Factor ebenfalls negativ, also muß auch $r'$ von $c'$ an abnehmen. Dieser Fall begreift wieder den Fall 5) schon in sich.

7) Ist aber $\frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} > c' + \frac{2\,m\,a}{m + m'}$ und $\frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - c' - \frac{2\,m\,a}{m + m'} > c'$

d. h.: $m'\,c' < \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(m + m') - m\,b'$, dann wird der zweite Factor zunächst jedenfalls positiv, es muß mithin $r'$ von $-c'$ an wachsen.

8) Ist endlich $c'\,m' = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(m + m') - m\,b'$, dann wird

$$c = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - \frac{m\,a}{m + m'}, \text{ und beide Factoren sind wieder gleich.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Bedingungen, welche sich in diesen vier letzten Fällen für die beiden verschiedenen Zeichen der Wurzel ergeben haben, sind natürlich genau dieselben, wie die in den vier ersten Fällen gewonnenen, wie sich durch Einsetzung von $-c$ für $c'$ leicht ergibt, denn die Gleichung **A** galt ja ganz allgemein für jedes c ohne Rücksicht auf dessen Vorzeichen; ich habe nur die Gleichung **B** besonders betrachtet, weil sich so die einzelnen Fälle besser übersehen lassen.

Es ist also allgemein:

$$\text{C)}\ \frac{d\,r'}{d\,t} = \pm\,\omega \sin\alpha \sqrt{(r'-c)\left(r' + c + \frac{2\,g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} - \frac{2\,m\,a}{m+m'}\right)}$$

und darin ist das positive Zeichen zu wählen

1) wenn beide Massen unterhalb des Drehungspunktes liegen,

2) wenn m allein oder beide Massen oberhalb liegen und $c\,m' > m\,b' - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}(m + m')$

ist, worin $b' = -b$.

Das negative Zeichen ist zu wählen, wenn

3) m allein oder beide Massen oberhalb liegen und $c\,m' < m\,b' - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}(m + m')$ ist.

c ist darin positiv oder negativ, je nachdem der Punkt m' unterhalb oder oberhalb liegt.

Der Fall, in welchem m' unterhalb, m im Drehungspunkt selbst steht, gehört zu dem ersten von diesen drei Fällen und bedingt also das positive Zeichen; derjenige, in welchem m oberhalb, m' im Drehungspunkt steht, also $c = 0$ ist, bedingt das positive oder negative Zeichen, je nachdem

$$0 > \text{oder} < m\,b' - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}(m + m') \text{ ist.}$$

Wenn endlich

$$4)\ c\,m' = m\,b' - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}(m + m') \text{ ist, so wird } \frac{d\,r'}{d\,t} = \pm\,\omega \sin\alpha\,(r' - c)$$

$$\omega\,t \sin\alpha = \pm \int_c^{r'} \frac{d\,r'}{r' - c} = \pm\left(\text{Log}\,(r' - c) - \text{Log}\,0\right) = \pm\,\infty$$

d. h.: es giebt keine endliche Zeit, in welcher r' einen anderen Werth erlangt, als c; r' bleibt also unveränderlich gleich c, damit also auch stets $r = b$. Mithin bleiben die beiden Massen beständig an der Stelle auf der starren Linie, an welcher sie sich anfangs befanden, und bewegen sich also mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf horizontalen Kreisen.

Betrachten wir nun die anderen Fälle.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus der Gleichung C folgt:

$$\pm \omega t \sin \alpha = \int_c^{r'} \frac{d r'}{\sqrt{r'^2 - c^2 + \frac{2 g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} r' - \frac{2 m \alpha}{m + m'} r' - \frac{2 g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} c + \frac{2 m a}{m + m'} c}}$$

D)

$$\pm \omega t \sin \alpha =$$

$$= \mathrm{Log} \frac{r' + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - \frac{m a}{m + m'} + \sqrt{r'^2 + r' \left( \frac{2 g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - \frac{2 m a}{m + m'} \right) + \frac{2 m a c}{m + m'} - \frac{2 g \cos \alpha . c}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - c^2}}{c + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - \frac{m a}{m + m'}}$$

und wenn man bedenkt, daß

$$c (m + m') - m a = m' c + m b \text{ ist,}$$

$$\pm \omega t \sin \alpha = \mathrm{Log} \Big[ r' (m + m') \omega^2 \sin^2 \alpha + g \cos \alpha (m + m') - m a \omega^2 \sin^2 \alpha +$$

$$+ \omega \sin a \sqrt{m + m'} \sqrt{r'^2 (m + m') \omega^2 \sin^2 \alpha + r' [2 g \cos \alpha (m' + m') - 2 m a \omega^2 \sin^2 \alpha] +}$$

$$\overline{+ 2 m a c \omega^2 \sin^2 \alpha - 2 g \cos \alpha c (m + m') - c^2 (m + m') \omega^2 \sin^2 \alpha} \Big] . \Big[$$

$$. \left[ \frac{1}{(m' c + m b) \omega^2 \sin^2 \alpha + g \cos \alpha (m + m')} \right]$$

daraus folgt, wenn man zur Potenz übergeht, und die lange Wurzel kurz W nennt.

$$\omega \sin \alpha \sqrt{m + m'} . W = g \cos \alpha (m + m') \left( e^{\pm \varphi \sin \alpha} . - 1 \right) +$$

$$+ \omega^2 \sin^2 \alpha \left[ (m' c + m b) e^{\pm \varphi \sin \alpha} - r' (m + m') + m a \right]$$

Quadrirt man nun, so folgt:

$$- 2 \omega^2 \sin^2 \alpha (m + m') r' e^{\pm \varphi \sin \alpha} \left[ \omega^2 \sin^2 \alpha (m' c + m b) + g \cos \alpha (m + m') \right] +$$

$$+ e^{\pm 2 \varphi \sin \alpha} . \Big[ \omega^4 \sin^4 \alpha (m' c + m b)^2 + g^2 \cos^2 \alpha (m + m')^2 + 2 \omega^2 \sin^2 \alpha g \cos \alpha (m + m')$$

$$(m' c + m b) \Big] +$$

$$+ e^{\pm \varphi \sin \alpha} . \Big[ 2 \omega^4 \sin^4 \alpha m a (m' c + m b) - 2 g^2 \cos^2 \alpha (m + m')^2 + 2 \omega^2 \sin^2 \alpha g \cos \alpha (m + m').$$

$$\big( m a - (m c + m b) \big) \Big] +$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$+ g^2 \cos^2 \alpha (m + m')^2 + \omega^4 \sin^4 \alpha (m + m')^2 c^2 + 2 \omega^2 \sin^2 \alpha g \cos \alpha (m + m')^2 c + \omega^4 \sin^4 \alpha m^2 a^2 -$$
$$- 2 \omega^4 \sin^4 \alpha (m + m') m a c - 2 \omega^2 \sin^2 \alpha g \cos \alpha (m + m') m a = 0$$

Darin ist der mit $\omega^4 \sin^4 \alpha$ multiplicirte Ausdruck:

$$m^2 a^2 + c^2 (m + m')^2 - 2 m a c (m + m') = (m' c + m b)^2$$

ferner der mit $2 \omega^2 \sin^2 \alpha g \cos \alpha (m + m')$ multiplicirte: $(m + m') c - m a = m' c + m b$

Die Summa der constanten Glieder obiger Gleichung ist also:

$$g^2 \cos^2 \alpha (m + m')^2 + 2 \omega^2 \sin^2 \alpha g \cos \alpha (m + m') (m' c + m b) +$$
$$+ \omega^4 \sin^4 \alpha (m' c + m b)^2 = [\omega^2 \sin^2 \alpha (m' c + m b) + g \cos \alpha (m + m')]^2$$

Ebenso groß ist der Coefficient von $e^{\pm 2 \varphi \sin \alpha}$.

Der Coefficient von $e^{\pm \varphi \sin \alpha}$ ist:

$$[\omega^2 \sin^2 \alpha (m' c + m b) + g \cos \alpha (m + m')] . [2 m a \omega^2 \sin^2 \alpha - 2 (m + m') g \cos \alpha]$$

Führt man diese Werthe ein, so geht die Gleichung über in:

$$2 \omega^2 \sin^2 \alpha (m + m') e^{\pm \varphi \sin \alpha} . r' = \left[ e^{\pm 2 \varphi \sin \alpha} + 1 \right] . \left[ \omega^2 \sin^2 \alpha (m' c + m b) + \right.$$
$$\left. + g \cos \alpha (m + m' \right] + e^{\pm \varphi \sin \alpha} \left[ 2 m a \omega^2 \sin^2 \alpha - 2 g \cos \alpha (m + m') \right]$$

und daraus folgt für beide Vorzeichen:

$$\text{E)} \quad r' = \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha (m' c + m b) + g \cos \alpha (m + m)}{2 \omega^2 \sin^2 \alpha (m + m)} \left( e^{\varphi \sin \alpha} + e^{-\varphi \sin \alpha} \right)$$
$$+ \frac{m a \omega^2 \sin^2 \alpha - (m + m') g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha (m + m')}$$

Die entsprechende Gleichung für r kann nun entweder aus der vorstehenden durch die Relation $r' - r - a = 0$, oder durch eine der bisher durchgeführten analoge Entwickelung gefunden werden. Es ergibt sich:

$$\text{F)} \quad \frac{d r}{d t} = \pm \omega \sin \alpha \sqrt{r^2 - b^2 + \left( \frac{2 g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} + \frac{2 m' a}{m + m'} \right) r - \left( \frac{2 g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} + \frac{2 m a}{m + m'} \right) b}$$
$$\pm \omega t \sin \alpha =$$
$$= \mathrm{Log} \left( \frac{r + \frac{g \cos \alpha}{m^2 \sin^2 \alpha} + \frac{m' a}{m + m'} + \sqrt{r^2 - b^2 + \left( \frac{2 g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} + \frac{2 m' a}{m + m'} \right) r - \left( \frac{2 g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} + \frac{2 m' a}{m + m'} \right) b}}{b + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} + \frac{m' a}{m + m'}} \right)$$

$$\text{G)} \quad r = \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha (m' c + m b) + g \cos \alpha (m + m')}{2 \omega^2 \sin^2 \alpha (m + m')} \left( e^{\varphi \sin \alpha} + e^{-\varphi \sin \alpha} \right)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$- \frac{m' a \omega^2 \sin^2 \alpha + g \cos \alpha (m + m')}{\omega^2 \sin^2 \alpha (m + m')}$$

Die Bahncurven der Punkte sind hiernach die Durchschnitte des Kegels, welchen die rotirende Gerade beschreibt und der auf der Horizontalebene senkrecht stehenden Cylinder: für m' :

$$x^2 + y^2 = \left\{ \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha (m' c + m' b) + g \cos \alpha (m + m')}{2 \omega^2 \sin \alpha (m + m')} \left( e^{\varphi \sin \alpha} + e^{-\varphi \sin \alpha} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{m a \omega^2 \sin^2 \alpha - (m + m') g \cos \alpha}{\omega^2 \sin \alpha (m + m')} \right\}^2$$

für m:

$$x^2 + y^2 = \left\{ \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha (m' c + m b) + g \cos \alpha (m + m')}{2 \omega^2 \sin \alpha (m + m)} \left( e^{\varphi \sin \alpha} + c^{-\varphi \sin \alpha} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{m' a \omega^2 \sin^2 \alpha + (m + m') g \cos \alpha}{\omega^2 \sin \alpha (m + m')} \right\}^2$$

Die Verschiedenheit der Zeichen von $\varphi \sin \alpha$ in den Gleichungen D, und F, bewirkt keinen Unterschied für die Resultate, die Gleichungen E, und G, gelten also ganz allgemein ohne Ausnahme, auch für den oben erwähnten Fall, in welchem kein Fortrücken der Massen auf der starren Linie stattfindet und r und r' konstant bleiben, weil der erste Summand in den Formeln für beide 0 wird.

Aus diesen Gleichungen ist also die eigenthümliche Bewegung der Massen für alle besonderen durch die verschiedenartigen Anfangslagen bestimmten Fälle einzusehen.

Die noch übrigen Fälle sind nun:

I. Wenn beide Punkte unterhalb der Horizontalebene liegen, welche durch den Drehungspunkt gelegt ist, wenn also a, b, c, positiv sind, so nimmt für $\varphi = 0$ r' den Werth c und r den Werth b an. Mit wachsendem $\varphi$ wächst der erste in beiden Gleichungen E und G identische und positive Summand, während der zweite in beiden konstant bleibt. r und r' wachsen also positiv unbegrenzt, und beide Punkte durchlaufen mithin die unteren Hälften der Durchschnittskurven aus den oben bestimmten Cylindern und dem Kegel.

II. Wenn der Punkt m' unterhalb, der Punkt m oberhalb der x y Ebene liegt, also $b = - b'$ ist und wenn

$$c m' > m b' - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} (m + m')$$

dann ist der erste Summand der Ausdrücke in E und G stets positiv; r' wächst ebenfalls beständig von + c an nur langsamer als im ersten Falle, weil jetzt $m' c - m b'$ kleiner als vorhin $m' c + m b'$, vorausgesetzt, daß die Absolutwerthe von b und c , m und m' dieselben sind. r da-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gegen ist anfangs negativ gleich $-b'$, indem zunächst der negative constante Summand größer ist als der positive variable. Da aber der positive Summand mit wachsendem $\varphi$ zunimmt, so bleiben die Werthe von r zunächst negativ, werden aber dem Absolutwerth nach kleiner, bis r den Werth 0 erreicht zur Zeit:

$$t = \frac{1}{\omega \sin \alpha} \operatorname{Log} \frac{\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} + \frac{m' a}{m + m'} + \sqrt{\left(\frac{2 m' a}{m + m'} + \frac{2 g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}\right) b' - b'^2}}{-b' + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} + \frac{m' a}{m + m'}}$$

Nach dieser Zeit wird r positiv und wächst im Positiven ohne Ende fort. Der Punkt m' also durchläuft nur die untere Hälfte der Schnittcurve aus dem Kegel und dem oben bestimmten Cylinder, für welchen jetzt b negativ ist, indem er sich aus der Entfernung c vom Drehungspunkt beständig entfernt. Der Punkt m dagegen durchläuft erst das Stück der oberen Hälfte der ihm zugehörigen Curve, welches zwischen den Werthen $-b'$ und 0 für r liegt, indem er aus seiner Anfangslage sich abwärts bewegt und sich in entgegengesetztem Sinne dreht wie der Punkt m'. Dann überschreitet er den Drehpunkt und folgt nun dem Punkt m' auf die untere Seite, indem er nun dieselbe Drehung annimmt wie jener, und durchläuft nun in beständiger Entfernung vom Drehpunkt begriffen die untere Hälfte der erwähnten Curve.

III. Wenn der Punkt m' unterhalb, m oberhalb der x y Ebene liegt, aber

$$c\, m' < m\, b' - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} (m + m') \quad \text{ist,}$$

dann ist der erste Summand in den Werthen beider radii vect. negativ. Für r ist auch der zweite Summand negativ; r nimmt also von dem Werth $-b'$ an unbegrenzt ab, d. h. der Punkt m steigt auf der oberen Seite der starren Linie beständig aufwärts, durchläuft also nur die obere Hälfte der erwähnten Durchschnittscurve aus Kegel und Cylinder. Für r' dagegen ist der zweite Summand positiv. Denn weil sich aus der Gleichung E, wenn man $\varphi = 0$ setzt, $r' = c$ ergiebt, so muß, da der erste Summand negativ ist, der zweite positiv und größer als der erste sein. Mit Vergrößerung von $\varphi$ wächst aber der negative Theil, r' wird kleiner, bleibt aber noch positiv, bis es zur Zeit

$$t = \frac{1}{\omega \sin \alpha} \operatorname{Log} \frac{c + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - \frac{m a}{m + m'}}{\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - \frac{m a}{m + m'} + \sqrt{\frac{2 m a c}{m + m'} - \frac{2 g \cos \alpha . c}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - c^2}}$$

gleich 0 wird, dann in's Negative übergeht und nun beständig immer mehr abnimmt. Der Punkt m' steigt also (natürlich, da er mit m fest verbunden ist) beständig von seiner anfänglichen Stellung auf der unteren Seite der starren Linie aufwärts, überschreitet den Drehpunkt und fährt auf der



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oberen Seite fort, sich aufwärts zu bewegen, indem er im Drehungspunkt die Richtung seiner Drehung um die Vertikale wechselt. Er durchläuft also den unteren Theil des Durchschnitts aus dem Kegel und dem Cylinder (für $b = - b'$), welcher zwischen den Werthen von $r' : c$ und 0 liegt, und dann die obere Hälfte.

IV. Wenn beide Punkte zu Anfang oberhalb der x y Ebene liegen, also $c = - c'$, $b = - b'$ ist, und wenn

$$c\,m' > m\,b' - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(m + m') \text{ d. h.: wenn } c'\,m' < \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(m + m') - m\,b',$$

dann ist der erste Summand in den Gleichungen E und G, welcher nun lautet:

$$\frac{\omega^2 \sin^2 \alpha\,(- m'\,c' - m\,b') + g \cos \alpha\,(m + m')}{2\,\omega^2 \sin^2 \alpha\,(m + m')}\left(e^{\varphi \sin \alpha} + e^{- \varphi \sin \alpha}\right) \text{ stets positiv,}$$

weil $m'\,c'$ positiv ist, mithin $\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(m + m') - m\,b'$ auch positiv sein muß, und weil letzteres größer als $m'\,c'$ ist. Der zweite Summand in den Werthen beider radii vect. ist negativ, wie auch in Bezug auf die Gleichung E, leicht einzusehen ist. Denn nach Nr. 7 ist die oben angegebene Bedingung für $c'\,m'$ gefolgert aus der Bedingung:

$$\frac{\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(m + m') - m\,\alpha}{m + m} > c' \quad \text{folglich ist} \quad \frac{m\,a - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(m + m')}{m + m'} < - c',$$

also negativ.

Anfänglich überwiegen in den Ausdrücken für r und r' die negativen Summanden; mit wachsendem $\varphi$ aber wächst der positive Summund, wird erst dem negativen in der Gleichung E gleich und übertrifft ihn dann, später wird er auch dem negativen Summanden in der Gleichung G gleich und übertrifft dann auch diesen.

Beide Punkte bewegen sich also aus ihren ursprünglichen Stellungen abwärts, erreichen nach einander den Drehpunkt und zwar m' zuerst nach der Zeit:

$$t = \frac{1}{\omega \sin \alpha} \operatorname{Log} \frac{\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - \frac{m\,a}{m + m'} + \sqrt{\left(\frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - \frac{2\,m\,a}{m + m'}\right) c' - c'^2}}{- c' + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - \frac{m\,a}{m + m'}}$$

dann m nach der Zeit:

$$t = \frac{1}{\omega \sin \alpha} \operatorname{Log} \frac{\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} + \frac{m'\,a}{m + m'} + \sqrt{\left(\frac{2\,g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} + \frac{2\,m'\,a}{m + m'}\right) b' - b'^2}}{- b' + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} - \frac{m'\,a}{m + m'}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in welchen Momenten beide die Richtung ihrer Drehung wechseln, auf die untere Seite der starren Linie übertreten und auf derselben beständig weiter abwärts rücken.

V. Wenn endlich beide Punkte sich anfangs oberhalb der x y Ebene befinden und

$c\,m' < m\,b' - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(m + m')$ d. h. $c'\,m' < \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}(m + m') - m\,b'$ ist, so ist der erste Summand in den Werthen für r und r' negativ, und da nun für $\varphi = 0$, $r' = -c'$, $r = -b'$ wird, die beide zweiten Summanden aber constant sind, so können mit wachsendem $\varphi$ nur die ersten Summanden ihren absoluten Werthen nach wachsen. Die Größen r und r' werden also beständig kleiner, und beide Punkte steigen daher auf der oberen Seite der starren Linie ohne Aufhören aufwärts.

Die Fälle, in welchen einer der Punkte anfangs im Drehungspunkt selbst steht, gehören natürlich mit unter die vorstehenden, und zwar unter I, wenn m, unter IV oder V, wenn m' sich im Drehungspunkt befindet.

Natürlich können die beiden radii vectores ebensogut durch die Zeit ausgedrückt werden, als durch den Winkel $\varphi$, um welchen sich das System in dieser Zeit drehte, da zwischen beiden die Gleichung $\varphi = \omega\,t$ besteht, und man also nur diesen Werth in die Gleichungen E und G für $\varphi$ einzuführen nöthig hat.

Auch bei diesem Falle sieht man, daß die Entfernungen, in welche die Punkte rücken, nicht wie bei der horizontalen Bewegung unabhängig von der Winkelgeschwindigkeit des Systems sind, sondern daß die letztere, wenn sie verschiedene Größen annimmt, auch den Punkten verschiedene Entfernungen für denselben Drehungswinkel mittheilt, da sie auch in dem Coefficienten des Gliedes

$$\left(e^{\varphi \sin \alpha} + e^{-\varphi \sin \alpha}\right)$$

enthalten ist, daß sie sogar unter den besprochenen Bedingungen die Ursache einer der Schwere entgegengesetzten Bewegung der Massen werden kann. Für die abwärts gerichtete Bewegung, (wenn der erwähnte Coefficient positiv ist) bewirkt die größere Winkelgeschwindigkeit, daß die Punkte nach einer bestimmten Umdrehung des Systems eine kleinere Entfernung von ihrer anfänglichen Lage erhalten, als sie bei einer kleineren Winkelgeschwindigkeit und gleicher Drehung erhalten haben würden. Im ersteren Falle wird ja die bestimmte Ablenkung früher erreicht, und die Schwere kann daher nur kürzere Zeit wirken. Für die aufwärts gerichtete Bewegung dagegen wird die größere Winkelgeschwindigkeit auch zur Folge haben, daß die Massen bei gleicher Drehung in größere Entfernungen rücken, als es bei geringerer Winkelgeschwindigkeit geschehen würde, denn der besprochene Coefficient ist nun negativ und absolut genommen um so größer, je kleiner das positive Glied $\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$ d. h. je größer $\omega$ ist.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die vorstehenden Bemerkungen gelten übrigens auch für das unter III behandelte Problem der Bewegung eines einzelnen Punktes.

Es bleibt jetzt nur noch übrig die Geschwindigkeit der Massen festzustellen.

Die Geschwindigkeitskomponenten in der Richtung der starren Linie sind für beide Punkte einander gleich:

$$\frac{dr}{dt} = \omega \sin\alpha \sqrt{r^2 + \left(\frac{2g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} + \frac{2m'a}{m+m'}\right) r - \left(\frac{2g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} + \frac{2m'a}{m+m'}\right) b - b^2} =$$

$$= \frac{dr'}{dt} = \omega \sin\alpha \sqrt{r'^2 + \left(\frac{2g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} - \frac{2ma}{m+m'}\right) r' - \left(\frac{2g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} - \frac{2ma}{m+m'}\right) c - c^2} =$$

$$= \frac{\omega^2\sin^2\alpha\,(m'c + mb) + g\cos\alpha\,(m+m')}{\omega\sin\alpha\,(m+m')} \sqrt{\frac{\left(e^{\varphi\sin\alpha} + e^{-\varphi\sin\alpha}\right)^2}{4} - 1}$$

Die darauf senkrechten horizontalen Componenten der Geschwindigkeiten sind für den Punkt m:

$$r\frac{d\varphi}{dt} = r\,\omega\sin\alpha$$

für m':

$$r'\frac{d\varphi}{dt} = r'\,\omega\sin\alpha$$

Die Gesammtgeschwindigkeiten sind mithin für m:

$$v = \omega\sin\alpha \sqrt{2r^2 + \left(\frac{2g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} + \frac{2m'a}{m+m'}\right) r - \left(\frac{2g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} + \frac{2m'a}{m+m'}\right) b - b^2}$$

$$= \omega\sin\alpha \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2\sin^2\alpha\,(m'c+mb) + g\cos\alpha\,(m+m')}{\omega^2\sin^2\alpha\,(m+m')}\right)^2 \cdot \left(e^{\varphi\sin\alpha} + e^{-\varphi\sin\alpha}\right)^2 -}$$

$$\overline{- \left(\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} + \frac{m'a}{m+m'}\right)\left(\frac{\omega^2\sin^2\alpha\,(m'c+mb) + g\cos\alpha\,(m+m')}{\omega^2\sin^2\alpha\,(m+m')}\right)\left(e^{\varphi\sin\alpha} + e^{-\varphi\sin\alpha}\right) -}$$

$$\overline{- \left(\frac{2g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} + \frac{2m'a}{m+m'}\right) b - b^2}$$

und für m':

$$v' = \omega\sin\alpha \sqrt{2r'^2 + \left(\frac{2g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} - \frac{2ma}{m+m'}\right) r' - \left(\frac{2g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} - \frac{2ma}{m+m'}\right) c - c^2}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$= \omega \sin\alpha \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2 \sin^2\alpha\,(m'c + mb) + g\cos\alpha(m+m')}{\omega^2 \sin^2\alpha\,(m+m'}\right)^2 \cdot \left(e^{\varphi\sin\alpha} + e^{-\varphi\sin\alpha}\right)^2 -}$$

$$-\left(\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} - \frac{m\,a}{m+m'}\right)\cdot\left(\frac{\omega^2\sin^2\alpha(m'c+mb)+g\cos\alpha(m+m')}{\omega^2\sin^2\alpha\,(m+m')}\right)\cdot\left(e^{\varphi\sin\alpha} + e^{-\varphi\sin\alpha}\right) -$$

$$-\left(\frac{2\,g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} - \frac{2\,m\,a}{m+m'}\right)c - c^2$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Punkte auf der starren Linie fortbewegen, nimmt hiernach, ihrem Absolutwerth nach, beständig zu. Auch die Geschwindigkeit parallel der Horizontalebene nimmt für beide Punkte zu, wenn sie anfangs auf derselben Seite vom Drehungspunkt sich befinden und auf derselben bleiben. Wenn aber beide Punkte oder nur einer den Drehungspunkt überschreitet, so nimmt die in Rede stehende Geschwindigkeitscomponente für diesen Punkt so lange ab, bis er den Drehungspunkt erreicht, wird hier zu 0 und nimmt dann zu, während sie für einen Punkt, welcher den Drehungspunkt nicht passirt, beständig zunimmt.

Die Bewegung des Systems ist nunmehr vollständig bestimmt.

**Dr. Bresina.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf