WISSENSCHAFTLICHE BEILAGE ZUM JAHRESBERICHT
DES REALGYMNASIUMS ZU WITTEN. OSTERN 1906.

DIE ELEMENTE DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG.

FÜR DIE SCHÜLER DER HÖHEREN LEHRANSTALTEN
BEARBEITET VON

PROF. H. STECKELBERG.

Bibliothek des Städt. Gymnasiums * Düsseldorf *

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

Progr. Nr. 460.

qwi
33 (1906)

460 b

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die vorliegende Arbeit ist in erster Linie für die Schüler bestimmt. Den Anregungen des Herrn Geheimrats Felix Klein in Göttingen folgend, habe ich seit einigen Jahren den Versuch gemacht, den Schülern der oberen Klassen die Elemente der Differential- und Integralrechnung in Verbindung mit der analytischen Geometrie zum Verständnis zu bringen. Es bestand bei mir von vornherein kein Zweifel, daß dieser Versuch erfolgreich sein müsse und auch zweckmäßig sei; denn ich selbst hatte schon als Primaner in einem vorzüglichen mathematischen Unterricht die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung kennen gelernt und an mir selbst die großen Vorteile dieser Kenntnis erfahren. Schwierigkeiten bieten die Erörterungen einem Durchschnittsprimaner nicht, und selbst schwächere Schüler bringen den Erläuterungen ein lebhaftes Interesse entgegen. Ganze Gruppen von Aufgaben lassen sich spielend lösen, und dem angehenden Studenten, was er auch immer studieren möge, sind die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung ein willkommener Besitz, da er bei seinen Studien vielfach auf Differentiale und Integrale stößt.

Im letzten Jahre habe ich schon in Unterprima, ohne besondere Rücksicht auf die analytische Geometrie zu nehmen, die Differential- und Integralrechnung durchgenommen. Auch dieser Versuch erscheint mir gut gelungen und bietet gegenüber meinen früheren Versuchen den wesentlichen Vorteil, daß die Anwendungen vielseitiger sind und nachher große Erleichterungen auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik und Physik gewähren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ich will nicht unerwähnt lassen, daß von hervorragenden Mathematikern vor Jahren schon mit bestem Erfolge Versuche gemacht worden sind, die Elemente der Differential- und Integralrechnung in der Schule einzuführen; ich erinnere an Seeger*), Direktor in Güstrow, Most**), Direktor in Coblenz, und in neuester Zeit Schröder***), Direktor in Groß-Lichterfelde.

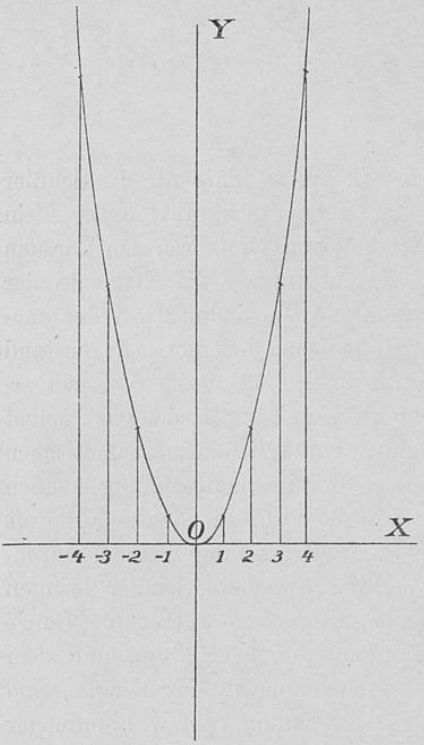

Fig. 1.

§ 1. Der Funktionsbegriff.

Wenn eine Größe y mit einer veränderlichen Größe x in der Weise zusammenhängt, daß jedem Werte von x ein bestimmter Wert von y zugeordnet ist, so nennt man y eine Funktion von x und drückt diese Abhängigkeit allgemein dadurch aus, daß man schreibt $y = f(x)$. Die Größe x ist die unabhängige und y die abhängige Veränderliche oder Variable.

---

*) Seeger, Elemente der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Wismar 1894.

**) Most, Der mathematische Unterrichtsstoff in den oberen Klassen. Coblenz 1901.

***) Schröder, Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1905.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In der folgenden Tabelle sind eine Reihe von zusammengehörigen Werten der Veränderlichen x und y zusammengestellt für die Funktion $y = x^2$:

$x =$	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$y =$	$\cdots$	16	9	4	1	0	1	4	9	16	$\cdots$

Trägt man die verschiedenen Werte von x als Abscissen und die von y als Ordinaten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, so erhält man eine Reihe von Punkten (Fig. 1), welche der gegebenen Funktion entsprechen. Werden diese Punkte durch einen freien Kurvenzug verbunden, so entspricht die entstehende Kurve der gegebenen Funktion. Der Gleichung $y = x^2$ entspricht die in Fig. 1 gezeichnete Parabel. Die Funktion $y = \sqrt{16 - x^2}$ liefert einen Kreis mit dem Radius $r = 4$ (Fig. 2), $y = \sin x$ eine Wellenlinie (Fig. 3), $y = \operatorname{tang} x$ eine Kurve, welche aus unendlich vielen kongruenten Teilen

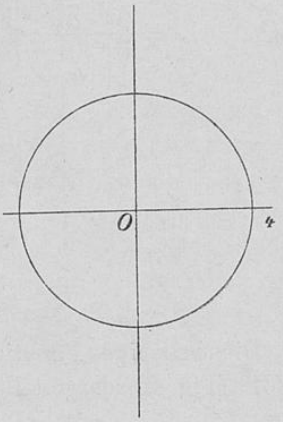

Fig. 2.

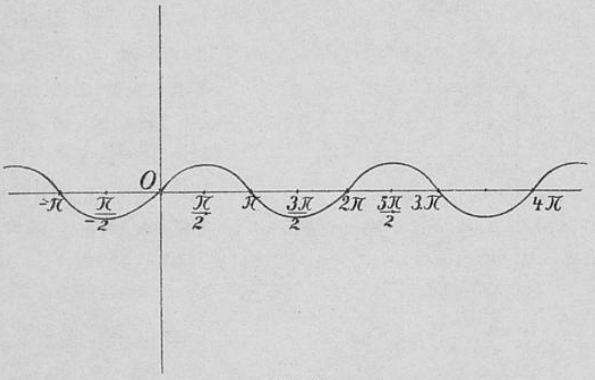

Fig. 3.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

besteht (Fig. 4). In gleicher Weise lassen sich von ähnlichen Funktionen auf Grund einer tabellarischen Zusammenstellung die Zeichnungen entwerfen.

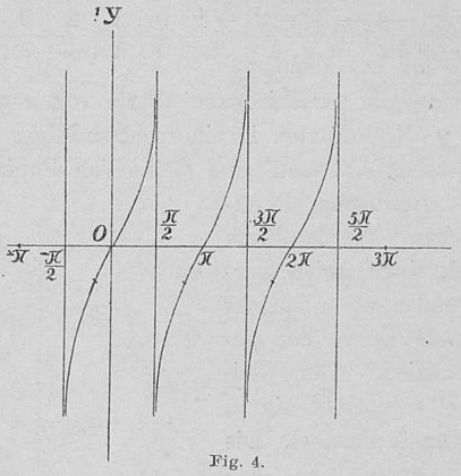

Fig. 4.

§ 2. Der Differentialquotient.

Die beliebige Funktion $y = f(x)$ sei durch eine Kurve UVW (Fig. 5) dargestellt. Die Koordinaten eines beliebig gewählten Punktes P und eines benachbarten Punktes P_1 auf dieser Kurve genügen alsdann der Funktionsgleichung; es ist also auch $y_1 = f(x_1)$. Die Sekante PP_1 bilde mit der positiven Seite der X-Achse den Winkel α, dann ist auch $\sphericalangle P_1PC = \alpha$; also wird

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_1C}{PC} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$

Man bezeichnet $y_1 - y$ mit

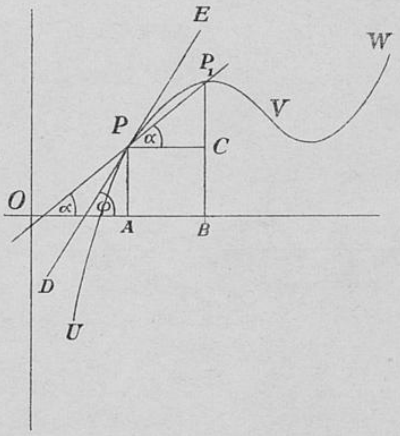

Fig. 5.

Δy und $x_1 - x$ mit Δx und nennt Δy den Zuwachs, den y erfährt, wenn man von einem Punkte P zu einem benachbarten Punkte P_1 übergeht. Ebenso ist Δx der Zuwachs von x. Es wird also $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Rückt nun der Punkt P_1 auf der Kurve näher und näher, schließlich unendlich nahe an P heran, so dreht sich die Sekante um den Punkt P und geht schließlich in die Tangente DE des Punktes P über. Dabei werden Δy und Δx allmählich immer kleiner und gehen zuletzt in unendlich kleine Größen über, die man mit dy und dx bezeichnet und die Differentiale von y und x nennt. Δy war also ein endlicher Zuwachs von y, das Differential dy ist dagegen ein unendlich kleiner Zuwachs von y, welcher im Vergleich mit einer endlichen Größe gleich Null ist. Man hat also $dy = \lim \Delta y$, d. h. gleich dem Grenzwert (limes), in welchen das endliche Δy übergeht, wenn P_1 mit P zusammenfällt. Ebenso ist $dx = \lim \Delta x$.

Bildet die Tangente DE den Winkel φ mit der positiven Seite der X-Achse, so wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

das soll heißen: Wenn P_1 mit P zusammenfällt, wird Δy zu dy, Δx zu dx und Winkel α zum Winkel φ. Man nennt $\frac{dy}{dx}$ den Differentialquotienten von y nach x und hat somit den

Lehrsatz: Der Differentialquotient ist gleich dem Tangens des Winkels, welchen die Tangente eines beliebigen Punktes der Kurve mit der positiven Seite der X-Achse bildet.

In Fig. 5 ist $x = OA$; $\Delta x = AB$; $x_1 = OB = x + \Delta x$. Ferner ist $y = PA$; $\Delta y = P_1C$; $y_1 = P_1B = y + \Delta y$. Ist nun $y = f(x)$, so ist $y_1 = f(x_1) = f(x + \Delta x)$; andererseits ist $y_1 = y + \Delta y = f(x) + \Delta f(x)$; folglich drittens $P_1B = y_1 = f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x)$.

Man findet dann

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim \frac{f(x_1) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Da $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$ ist, so erhält man auch, wenn man zum Grenzwert übergeht:

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx = \frac{df(x)}{dx} \cdot dx,$$

d. h. man darf mit einem Differential dx wie mit einem endlichen Faktor multiplizieren.

§ 3. Differentiieren einfacher algebraischer Funktionen.

1. Regel: Konstante Summanden verschwinden beim Differentiieren.

Voraussetzung: $y = f(x) + a$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$.

Beweis: Es ist $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{[f(x_1) + a] - [f(x) + a]}{\Delta x}$

$$= \lim \frac{f(x_1) - f(x)}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{df(x)}{dx}.$$

2. Regel: Konstante Faktoren bleiben unverändert.

Voraussetzung: $y = a \cdot f(x)$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{df(x)}{dx}$.

Beweis: $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{a \cdot f(x_1) - a \cdot f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim a \cdot \frac{f(x_1) - f(x)}{\Delta x} = \lim a \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= a \cdot \frac{df(x)}{dx}.$$

3. Regel: Man differentiiert eine Summe, indem man die Summanden einzeln differentiiert und die einzelnen Differentialquotienten addiert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Voraussetzung: $y = f(x) \pm \varphi(x)$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{d\varphi(x)}{dx}$.

Beweis: $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{[f(x_1) \pm \varphi(x_1)] - [f(x) \pm \varphi(x)]}{\Delta x}$

$$= \lim \left[\frac{f(x_1) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

4. Regel: Man differentiiert eine Potenz, indem man den Exponenten mit einer Potenz multipliziert, deren Exponent um 1 kleiner ist als in der gegebenen Potenz.

Voraussetzung: $y = x^n$; n eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$.

Beweis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{x_1{}^n - x^n}{\Delta x} = \lim \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{x^n \cdot \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{x^n \cdot \left[1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{\Delta x}{x} + \binom{n}{2} \cdot \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \binom{n}{3} \cdot \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 + \cdots\right] - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{x^n + \binom{n}{1} \cdot \Delta x \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot (\Delta x)^2 \cdot x^{n-2} + \binom{n}{3} \cdot (\Delta x)^3 \cdot x^{n-3} + \cdots - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim \left[\binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot \Delta x \cdot x^{n-2} + \binom{n}{3} \cdot (\Delta x)^2 \cdot x^{n-3} + \cdots\right]$$

$= \binom{n}{1} \cdot x^{n-1}$, wenn man zum Grenzwert übergeht, d. h. wenn Δx unendlich klein wird.

Also $\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$; $dy = n \cdot x^{n-1} \cdot dx$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beispiele:

1) $y = 3x^3 - x^2 + 5x - 7$; $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 2x + 5$;

$$dy = (9x^2 - 2x + 5) \cdot dx.$$

2) $y = \frac{4}{x^2} = 4 \cdot x^{-2}$; $\frac{dy}{dx} = 4 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{8}{x^3}$; $dy = -\frac{8}{x^3} \cdot dx$.

3) $y = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5} \cdot x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5 \cdot \sqrt[5]{x^2}}$; $dy = \frac{3 \cdot dx}{5 \cdot \sqrt[5]{x^2}}$.

§ 4. Differentiieren zusammengesetzter algebraischer Funktionen.

1. Regel: Ein Produkt wird differentiiert, indem man den ersten Faktor mit dem Differentialquotienten des zweiten und den zweiten Faktor mit dem Differentialquotienten des ersten Faktors multipliziert und die entstehenden Produkte addiert.

Voraussetzung: $y = f(x) \cdot \varphi(x)$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x) \cdot \frac{df(x)}{dx}$.

1. Beweis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x_1) \cdot \varphi(x_1) - f(x) \cdot \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{f(x + \Delta x) \cdot \varphi(x + \Delta x) - f(x) \cdot \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{f(x+\Delta x) \cdot \varphi(x+\Delta x) - f(x) \cdot \varphi(x+\Delta x) + f(x) \cdot \varphi(x+\Delta x) - f(x)\ \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \varphi(x + \Delta x) + \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \cdot f(x)\right]$$

$= \frac{df(x)}{dx} \cdot \varphi(x) + \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot f(x)$; denn im Faktor $\varphi(x + \Delta x)$ verschwindet Δx gegenüber x, wenn man zur Grenze übergeht.

2. Beweis: Es war soeben

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{f(x + \Delta x) \cdot \varphi(x + \Delta x) - f(x) \cdot \varphi(x)}{\Delta x}.$$

Nun ist nach § 2: $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x)$ und

$\varphi(x + \Delta x) = \varphi(x) + \Delta\varphi(x)$; folglich

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{[f(x) + \Delta f(x)] \cdot [\varphi(x) + \Delta\varphi(x)] - f(x) \cdot \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{f(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot \Delta\varphi(x) + \varphi(x) \cdot \Delta f(x) + \Delta f(x) \cdot \Delta\varphi(x) - f(x) \cdot \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim \left[f(x) \cdot \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} + \varphi(x) \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \Delta f(x) \cdot \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} \right].$$

Geht man zum Grenzwert über, so wird $\lim \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} = \frac{d\varphi(x)}{dx}$, $\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}$ und $\lim \Delta f(x) = df(x)$. Da dieser Faktor des dritten Gliedes unendlich klein wird, so wird das ganze dritte Glied $= 0$; also bleibt

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x) \cdot \frac{df(x)}{dx}.$$

Beispiel:

$$y = (x^2 - 5) \cdot (2x^3 - 2x + 3);$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 - 5) \cdot \frac{d(2x^3 - 2x + 3)}{dx} + (2x^3 - 2x + 3) \cdot \frac{d(x^2 - 5)}{dx}$$

$$= (x^2 - 5) \cdot (6x^2 - 2) + (2x^3 - 2x + 3) \cdot 2x$$

$$= 10x^4 - 36x^2 + 6x + 10.$$

Multipliziert man das Produkt $y = (x^2 - 5) \cdot (2x^2 - 2x + 3)$ aus, so wird

$$y = 2x^5 - 12x^3 + 3x^2 + 10x - 15;$$

folglich nach § 3, 3

$$\frac{dy}{dx} = 10x^4 - 36x^2 + 6x + 10; \quad dy = (10x^4 - 36x^2 + 6x + 10) \cdot dx.$$

2. Regel: Ein Bruch wird differentiiert, indem man den Nenner mit dem Differentialquotienten des Zählers, den Zähler mit dem des Nenners multipliziert, das zweite Produkt vom ersten subtrahiert und die Differenz durch das Quadrat des Nenners dividiert.

Voraussetzung: $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} - f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}}{[\varphi(x)]^2}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Beweis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\frac{f(x)+\Delta f(x)}{\varphi(x)+\Delta\varphi(x)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{f(x)\cdot\varphi(x) + \varphi(x)\cdot\Delta f(x) - f(x)\cdot\varphi(x) - f(x)\cdot\Delta\varphi(x)}{\varphi(x)\cdot[\varphi(x)+\Delta\varphi(x)]\cdot\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\varphi(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f(x)\cdot\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}}{\varphi(x)\cdot[\varphi(x)+\Delta\varphi(x)]}.$$

Geht man zum Grenzwert über, so verschwindet im Nenner $\Delta\varphi(x)$ gegenüber $\varphi(x)$, also erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)\cdot\frac{df(x)}{dx} - f(x)\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}}{[\varphi(x)]^2}.$$

2. Beweis: Ist $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, so wird $f(x) = y\cdot\varphi(x)$; folglich nach der ersten Regel

$$\frac{df(x)}{dx} = y\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x)\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{df(x)}{dx} - y\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}}{\varphi(x)}$$

$$= \frac{\frac{df(x)}{dx} - \frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}}{\varphi(x)}$$

$$= \frac{\varphi(x)\cdot\frac{df(x)}{dx} - f(x)\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}}{[\varphi(x)]^2}.$$

Beispiele:

1) $y = \frac{x^2 - 3}{x - 4}$;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-4)\cdot\frac{d(x^2-3)}{dx} - (x^2-3)\cdot\frac{d(x-4)}{dx}}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{(x-4)\cdot 2x - (x^2-3)}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{x^2-8x+3}{x^2-8x+16};$$

$$dy = \frac{x^2-8x+3}{x^2-8x+16}\cdot dx.$$

2) $y = x^{-n}$ (vergl. § 3, 4) $= \frac{1}{x^n}$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^n\cdot\frac{d(1)}{dx} - 1\cdot\frac{d(x^n)}{dx}}{(x^n)^2}. \quad \text{Da } \frac{d(1)}{dx} = 0, \text{ so}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-n\cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n\cdot x^{-n-1}.$$

3. Regel: Differentiieren einer Funktion von einer Funktion:

Ist y eine Funktion von u und u eine Funktion von x, so findet man den Differentialquotienten von y nach x, indem man y nach u und u nach x differentiiert und die beiden Differentialquotienten multipliziert.

Voraussetzung: $y = f(u)$; $u = \varphi(x)$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

Beweis: $\frac{dy}{dx} = \lim\frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim\frac{f(u_1) - f(u)}{\Delta x}$

$$= \lim\frac{f(u_1) - f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Geht man zum Grenzwert über, so wird der erste Faktor zu $\frac{df(u)}{du}$ oder zu $\frac{dy}{dx}$, der zweite zu $\frac{du}{dx}$.

Also entsteht schließlich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beispiele: 1) $y = x^{\frac{p}{q}}$, folglich $y^q = x^p$ und

$$\frac{d(y^q)}{dx} = \frac{d(x^p)}{dx} \text{ oder}$$

$$\frac{d(y^q)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot x^{p-1} \text{ oder } q \cdot y^{q-1} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot x^{p-1};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p \cdot x^{p-1}}{q \cdot y^{q-1}} = \frac{p \cdot x^{p-1}}{q \cdot \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}}$$

$$= \frac{p \cdot x^{p-1}}{q \cdot x^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} \qquad \text{(vergl. § 3, 4).}$$

2) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$. Ich setze $u = x^2 - 2x$, so ist

$y = \sqrt[3]{u} = u^{\frac{1}{3}}$, folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(u^{\frac{1}{3}}\right)}{dx} = \frac{d\left(u^{\frac{1}{3}}\right)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \tfrac{1}{3} \cdot u^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - 2)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{x - 1}{\sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}}.$$

§ 5. Differentiieren trigonometrischer Funktionen.

Lehrsatz: Der Grenzwert, in welchen $\frac{\sin x}{x}$ für $x = 0$ übergeht, ist $= 1$.

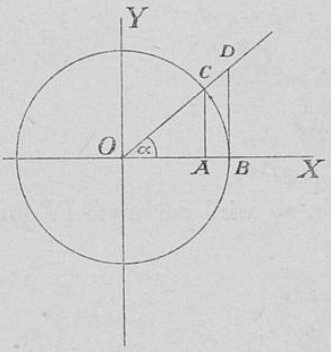

Fig. 6.

1. Beweis: Der Radius des Kreises (Fig. 6) sei $= 1$, so ist $\sin\alpha = CA$; $\sphericalangle\alpha = \widehat{CB}$; $\operatorname{tg}\alpha = BD$.

Man erhält also

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{CA}{\widehat{CB}}.$$

Dieser Bruch ist ein echter Bruch; denn die Senkrechte CA ist kleiner als der Bogen CB. Wenn der Winkel α kleiner wird, dann wird der Unterschied

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zwischen der Senkrechten und dem Bogen immer geringer, d. h. der Wert des Bruches wird größer, muß aber kleiner als 1 bleiben. Wird $\sphericalangle \alpha$ schließlich gleich Null, so fallen die (unendlich klein gewordenen) Größen CA und $\widehat{CB}$ zusammen, d. h. der Bruch wird $= 1$; also

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

2. Beweis: Für einen beliebigen Wert von α ist (Fig. 6)

$$CA < \widehat{CB} < DB \text{ oder}$$

$$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha; \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} > \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \text{ und}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \text{ oder}$$

$$1 > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \cos \alpha.$$

Nimmt α ab bis 0, so wird $\cos \alpha = 1$ und der Quotient $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ liegt zwischen einer oberen Grenze 1 und einer unteren Grenze 1, muß also selbst $= 1$ sein, d. h.

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

3. Beweis: Es ist (Fig. 6)

$$\triangle OCA < \text{Sektor } OCB < \triangle OBD \text{ oder}$$

$$\frac{OA \cdot AC}{2} < \frac{r^2 \cdot \alpha}{2} < \frac{OB \cdot BD}{2}.$$

Nun ist $r = OB = 1$ und $\cos \alpha = OA$; folglich

$$\cos \alpha \cdot \sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} > \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \cos \alpha.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wird $\alpha = 0$, so $\frac{1}{\cos \alpha} = 1$ und $\cos \alpha = 1$, d. h.

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

a) Voraussetzung: $y = \sin x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \cos x$.

1. Beweis: $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{\sin x_1 - \sin x}{\Delta x}$

$$= \lim \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{2 \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Geht man zum Grenzwert über, so verschwindet im ersten Faktor $\frac{\Delta x}{2}$ gegenüber x, und $\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ wird gleich 1.

Also $\frac{dy}{dx} = \cos x$ und $dy = \cos x \cdot dx$.

2. Beweis:

Eben war $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$, folglich

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\sin x \cdot \cos \Delta x + \cos x \cdot \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}.$$

Wird nun $\Delta x = 0$, so $\cos \Delta x = 1$, und es hebt sich dann das erste gegen das letzte Glied; es bleibt

$$\frac{dy}{dx} = \lim \cos x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \cos x.$$

b) Voraussetzung: $y = \cos x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = -\sin x$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Beweis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{\cos x_1 - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim \frac{-[\cos x - \cos(x + \Delta x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{-2 \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{-\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= -\sin x \text{ (wie bei a, 1).}$$

2. Beweis:

Es war $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$

$$= \lim \frac{\cos x \cdot \cos \Delta x - \sin x \cdot \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x}.$$

Nun ist wieder $\lim \cos \Delta x = 1$, so daß sich im Grenzfalle das erste gegen das letzte Glied hebt; es bleibt

$$\frac{dy}{dx} = \lim\left(-\sin x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}\right)$$

$$= -\sin x;$$

$$dy = -\sin x \cdot dx.$$

c) Voraussetzung: $y = \operatorname{tg} x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

1. Beweis: Es ist $y = \frac{\sin x}{\cos x}$; folglich nach § 4, 2:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cdot \frac{d \sin x}{dx} - \sin x \cdot \frac{d \cos x}{dx}}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$= 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \text{oder}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. Beweis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \Delta x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x} - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \Delta x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} \Delta x}{(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x) \cdot \Delta x}$$

$$= \lim \frac{\sin \Delta x + \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin \Delta x}{(\cos \Delta x - \operatorname{tg} x \cdot \sin \Delta x) \cdot \Delta x}$$

$$= \lim \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\cos \Delta x - \operatorname{tg} x \cdot \sin \Delta x} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}.$$

Im Grenzfalle wird $\cos \Delta x = 1$, $\sin \Delta x = 0$ und $\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$;

also

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$dy = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot dx = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx.$$

d) Voraussetzung: $y = \operatorname{cotg} x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$.

1. Beweis: $y = \frac{\cos x}{\sin x}$; folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \cdot \dfrac{d \cos x}{dx} - \cos x \cdot \dfrac{d \sin x}{dx}}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= -1 - \operatorname{cotg}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Beweis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{\operatorname{cotg} x_1 - \operatorname{cotg} x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\operatorname{cotg}(x + \Delta x) - \operatorname{cotg} x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\dfrac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} \Delta x - 1}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} \Delta x} - \operatorname{cotg} x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} \Delta x - 1 - \operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} \Delta x}{(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} \Delta x) \cdot \Delta x}$$

$$= \lim \frac{-1 - \operatorname{cotg}^2 x}{\operatorname{cotg} x \cdot \sin \Delta x + \cos \Delta x} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x},$$

wenn man mit $\sin \Delta x$ erweitert.

Nun ist $\lim \cos \Delta x = 1$, $\lim \sin \Delta x = 0$ und $\lim \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$; folglich

$$\frac{dy}{dx} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$dy = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) \cdot dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

§ 6. Differentiieren der Kreisfunktionen.

Ist $m = \sin \alpha$, so ist α der Bogen, dessen Sinus gleich m ist. Man schreibt hierfür kurz $\alpha = \arcsin m$ und nennt diese Funktion eine Kreis- oder zyklometrische Funktion.

a) Voraussetzung: $y = \arcsin x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Beweis: Wenn $y = \arcsin x$ ist, so wird $x = \sin y$; folglich

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d \sin y}{dx} = \frac{d \sin y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ oder}$$

$$1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}; \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) Voraussetzung: $y = \arccos x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Beweis: Es wird $x = \cos y$; folglich

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d\cos y}{dx} = \frac{d\cos y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ oder}$$

$$1 = -\sin y \cdot \frac{dy}{dx}; \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

c) Voraussetzung: $y = \operatorname{arctg} x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

Beweis: Es ist $x = \operatorname{tg} y$; folglich

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d\operatorname{tg} y}{dx} = \frac{d\operatorname{tg} y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ oder}$$

$$1 = (1 + \operatorname{tg}^2 y) \cdot \frac{dy}{dx}; \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$dy = \frac{dx}{1+x^2}.$$

d) Voraussetzung: $y = \operatorname{arccotg} x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$.

Beweis: Es ist $x = \operatorname{cotg} y$; folglich

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d\operatorname{cotg} y}{dx} = \frac{d\operatorname{cotg} y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ oder}$$

$$1 = -(1 + \operatorname{cotg}^2 y) \cdot \frac{dy}{dx}; \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$dy = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 7. Differentiieren der Exponential- und der logarithmischen Funktionen.

Nach dem binomischen Lehrsatze erhält man, wenn x ein echter Bruch ist, für jeden Wert von n:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot x + \binom{n}{2} \cdot x^2 + \binom{n}{3} \cdot x^3 + \cdots.$$

Nehme ich $n > 1$ und $x = \frac{1}{n}$, so entsteht:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$+ \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots.$$

Wenn n jetzt bis ins Unendliche wächst, so werden die Brüche $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \cdots$ einzeln $= 0$.

Also entsteht

$$\lim_{n=\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots.$$

Man bezeichnet die entstehende Konstante mit e; ihr Wert ist 2,7182818..; e ist die Basis des natürlichen Logarithmensystems.

Man hat somit $\lim\limits_{n=\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Hieraus folgt:

$$e^x = \lim_{n=\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x = \lim_{n=\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}\right]$$

$$= \lim_{n=\infty} \left[1 + \binom{nx}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{nx}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{nx}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots\right]$$

$$= \lim_{n=\infty} \left[1 + x + \frac{x \cdot \left(x - \frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{x \cdot \left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \cdots\right]$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Reihe konvergiert für jeden endlichen Wert von x; denn der Quotient

$$\frac{x^k}{k!} : \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{x}{k}$$

wird, wenn k ins Unendliche wächst, $= 0$, also kleiner als 1. Die Funktion e^x heißt Exponentialfunktion.

a) Voraussetzung: $y = e^x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = e^x$.

1. Beweis: $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{e^{x_1} - e^x}{\Delta^x}$

$$= \lim \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta^x}$$

$$= \lim \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta^x}$$

$$= \lim \frac{e^x \cdot (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

Nun ist $e^{\Delta x} = 1 + \Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \cdots$; folglich entsteht:

$$\frac{dy}{dx} = \lim e^x \cdot \frac{1 + \Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \cdots - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim e^x \cdot \left(1 + \frac{\Delta x}{2!} + \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \cdots\right)$$

$$= e^x;$$

$$dy = e^x \cdot dx.$$

2. Beweis: Wenn man die Reihe

$$y = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

gliedweise differentiiert, erhält man nach § 3, 3 und 4:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^x)}{dx} = 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= e^x.$$

b) Voraussetzung: $y = a^x$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{\log a}{\log e} \cdot a^x = \log \text{nat}\, a \cdot a^x$.

Beweis: Es sei $a = e^m$, so wird bei beliebiger Basis des Logarithmensystems $\log a = m \cdot \log e$, also

$$m = \frac{\log a}{\log e}.$$

Nimmt man e als Basis des Systems, so entsteht, da $\overset{e}{\log} e = 1$ ist, $m = \overset{e}{\log} a = \log \text{nat}\, a = \ln a$.

Man erhält nun $y = (e^m)^x = e^{mx}$. Setze ich $u = mx$, so ist $y = e^u$ also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^u)}{dx} = \frac{d(e^u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= e^u \cdot m; \text{ folglich}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot m = a^x \cdot \ln a.$$

$$dy = \ln a \cdot a^x \cdot dx.$$

c) Voraussetzung: $y = \ln x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.

1. Beweis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim \frac{\ln x_1 - \ln x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\ln \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \lim \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \lim \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setze ich $\frac{x}{\Delta x} = n$, also $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}$, so ist, da Δx im Vergleich mit x sehr klein genommen werden kann, n größer als 1.

Wird dann beim Übergang zum Grenzwert Δx unendlich klein, so wird $n = \infty$ und $\lim\limits_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Folglich entsteht $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x}$;

$$\text{also } dy = \frac{dx}{x}.$$

2. Beweis: Wenn $y = \ln x$ ist, so wird

$$x = e^y; \text{ folglich}$$

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d(e^y)}{dx} = \frac{d(e^y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ oder}$$

$$1 = e^y \cdot \frac{dy}{dx}; \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

d) Voraussetzung: $y = \overset{a}{\log} x$.

Behauptung: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$.

Beweis: Man erhält aus $y = \overset{a}{\log} x$

$$x = a^y; \text{ folglich}$$

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d(a^y)}{dx} = \frac{d(a^y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ oder}$$

$$1 = \ln a \cdot a^y \cdot \frac{dy}{dx}; \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{a^y} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x};$$

$$dy = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{dx}{x} \text{ oder} = \log e \cdot \frac{dx}{x}.$$

(In § 7, b war gefunden, daß $\frac{\log a}{\log e} = \ln a$ ist. Nimmt man auf der linken Seite a als Basis, so wird

$$\frac{1}{\overset{a}{\log} e} = \ln a \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\ln a} = \overset{a}{\log} e.)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beispiele: 1) Es sei $y = u \cdot v$; u und v seien Funktionen von x. Dann ist

$$\ln y = \ln u + \ln v; \quad \text{folglich}$$

$$\frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{d(\ln u)}{dx} + \frac{d(\ln v)}{dx} \quad \text{oder}$$

$$\frac{d(\ln y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{d(\ln v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx}; \quad \text{also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{y}{v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx} \quad \text{(entsprechend § 4, 1).}$$

Multipliziert man mit dx, so folgt

$$dy = v \cdot du + u \cdot dv \quad \text{oder}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{v \cdot du}{y} + \frac{u \cdot dv}{y} \quad \text{oder}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$$

2) $y = u \cdot v \cdot w$, folglich durch Logarithmieren

$\ln y = \ln \mathrm{u} + \ln v + \ln w$ und durch Differentiieren:

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}.$$

3) $y = \frac{u}{v}$, folglich durch Logarithmieren

$\ln y = \ln u - \ln v$ und durch Differentiieren:

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v},$$

$$dy = \frac{y}{u} \cdot du - \frac{y}{v} \cdot dv$$

$$= \frac{1}{v} \cdot du - \frac{u}{v^2} \cdot dv$$

$$= \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2} \quad \text{und}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2} \quad \text{(entsprechend § 4, 2).}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 8. Höhere Differentialquotienten. Maclaurinsche und Taylorsche Reihe.

1) Ist $y = f(x)$ gegeben, so erhält man $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$ im allgemeinen wieder als eine Funktion von x, die man kurz mit y' oder mit $f'(x)$ zu bezeichnen pflegt und welche auch erste Ableitung oder Derivierte genannt wird. Differentiiert man diese neue Funktion $y' = f'(x)$ nochmals, so erhält man den 2. Differentialquotienten oder die 2. Ableitung oder Derivierte $y'' = f''(x)$. In gleicher Weise entstehen die höheren Ableitungen y''', $y^{\mathrm{IV}} \cdots$. Man schreibt den 2. Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, den 3. $\frac{d^3y}{dx^3} \cdots$.

2) Ist z. B. eine ganze rationale Funktion vom n-ten Grade gegeben:

$$y = f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots + a_n \cdot x^n,$$

so erhält man

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2 + \cdots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1},$$

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 \cdot x + 3 \cdot 4 \cdot a_4 \cdot x^2 + \cdots + (n-1) \cdot n \cdot a_n \cdot x^{n-2},$$

$$y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4 \cdot x + \cdots + (n-2)(n-1) \cdot n \cdot a_n \cdot x^{n-3}.$$

Schließlich $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = n! \cdot a_n$.

Die $(n+1)$-te Ableitung und alle folgenden werden $= 0$.

Setzt man in den erhaltenen Gleichungen überall $x = 0$, so wird $f(0) = a_0$; $f'(0) = a_1$; $f''(0) = 2a_2$; $f'''(0) = 3! \cdot a_3$; $f^{\mathrm{IV}}(x) = 4! \cdot a_4$; $\cdots f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$; folglich

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!}; \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}; \quad a_4 = \frac{f^{\mathrm{IV}}(0)}{4!} \cdots; \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Somit läßt sich die gegebene Funktion schreiben in der Form:

$$y = f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) Nimmt man an, daß sich eine Funktion $y = f(x)$ in eine Reihe entwickeln läßt, z. B.

$$y = f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots + \text{ in inf.},$$

so wird wieder $f(0) = a_0$, und die übrigen Koeffizienten lassen sich wie oben durch die höheren Differentialquotienten bestimmen. Man erhält

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \cdots \text{ in inf.}$$

Diese Reihe heißt die Maclaurinsche Reihe.

4) Angenommen, die Funktion $f(x+h)$ lasse sich nach Potenzen von h in eine Reihe entwickeln, es sei

$$f(x+h) = a_0 + a_1 \cdot h + a_2 \cdot h^2 + h_3 \cdot h^3 + \cdots; \text{ dann ist}$$
$$f(x) \quad = a_0 .$$

Durch Differentiieren erhält man, wenn $u = x + h$ gesetzt wird:

$$\frac{df(x+h)}{dh} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dh} = f'(u) \cdot \frac{du}{dh} = f'(u) = f'(x+h)$$
$$= a_1 + 2a_2 \cdot h + 3a_3 \cdot h^2 + \cdots;$$

ferner

$$f''(x+h) = 2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 \cdot h + \cdots,$$
$$f'''(x+h) = 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \cdots \text{ usw.}$$

Setzt man überall $h = 0$, so wird

$$a_1 = f'(x); \quad a_2 = \frac{f''(x)}{2!}; \quad a_3 = \frac{f'''(x)}{3!} \cdots;$$

folglich

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f''(x)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(x)}{3!} \cdot h^3 + \cdots.$$

Diese letztere Reihe heißt die Taylorsche Reihe.

Beispiele: 1) Es sei $y = f(x) = e^x$; dann ist

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = e^x;$$

folglich

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = 1;$$

also entsteht nach der Maclaurinschen Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \text{(entsprechend § 7).}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Es sei $y = \sin x$; dann ist

$$f'(x) = \cos x; \quad f''(x) = -\sin x;$$
$$f'''(x) = -\cos x; \quad f^{\mathrm{IV}}(x) = \sin x \cdots;$$

hieraus folgt:

$$f(0) = 0; \; f'(0) = 1; \; f''(0) = 0; \; f'''(0) = -1; \; f^{\mathrm{IV}}(0) = 0 \cdots.$$

Also wird

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots.$$

Die Reihe konvergiert für jeden Wert von x.

3) Es sei $y = \cos x$; dann ist

$$f'(x) = -\sin x; \quad f''(x) = -\cos x;$$
$$f'''(x) = \sin x; \quad f^{\mathrm{IV}}(x) = \cos x \cdots;$$

folglich

$$f(0) = 1; \; f'(0) = 0; \; f''(0) = -1; \; f'''(0) = 0; \; f^{\mathrm{IV}}(0) = 1 \cdots.$$

Also wird

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots.$$

Die Reihe konvergiert für jeden Wert von x.

4) Es sei $y = \ln(1 + x)$; dann ist

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \; f''(x) = \frac{d\frac{1}{1+x}}{dx} = \frac{d(1+x)^{-1}}{dx} = \frac{du^{-1}}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

(wenn man $1 + x = u$ setzt)

$$= -1 \cdot u^{-2} = \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

Ebenso erhält man

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}; \; f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \cdots.$$

Folglich wird

$$f(0) = \ln 1 = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = -1;$$
$$f'''(0) = 2; \quad f^{\mathrm{IV}}(0) = -3! \text{ usw.}$$

Also entsteht

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert, wenn $-1 < x < 1$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man hätte die letzte Funktion auch nach der Taylorschen Reihe entwickeln können.

§ 9. Maxima und Minima. Inflexionspunkte. Unbestimmte Ausdrücke.

1) Die Funktion $y = f(x)$ sei durch die Kurve in Fig. 7 dargestellt. Legt man in einem beliebigen Punkte P_1 die

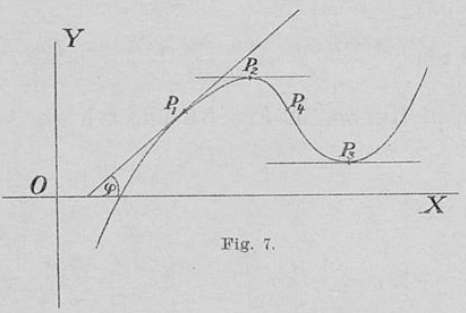

Fig. 7.

Tangente an die Kurve, welche mit der positiven Seite der X-Achse den Winkel φ bildet, so ist nach § 2:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Bei P_2 hat die Kurve einen höchsten Punkt, ein Maximum, erreicht. Hier ist die Tangente der X-Achse parallel, sie bildet mit der X-Achse einen Winkel von 0^0; also wird hier $\operatorname{tg} \varphi = 0$. Dasselbe gilt für die Tangente im tiefsten Punkte P_3, der ein Minimum der Kurve anzeigt. Die Kurve und damit auch die Funktion $y = f(x)$ hat folglich an den Stellen ein Maximum oder ein Minimum, wo $\operatorname{tg} \varphi$ oder der erste Differentialquotient gleich Null wird. Um zu entscheiden, ob an diesen Stellen das Eine oder das Andere eintritt, muß man den zweiten Differentialquotienten benutzen.

Da $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, so wird in derselben Weise

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \lim \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Nun entsteht $f'(x + \Delta x)$ aus $f'(x)$, wenn man $(x + \Delta x)$ für x einsetzt, d. h.

$$f'(x + \Delta x) = \lim \frac{f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x};$$

folglich

$$f''(x) = \lim \frac{\dfrac{f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} - \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{f(x + 2\Delta x) - 2 \cdot f(x + \Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2}.$$

Bei den beiden Kurven in Fig. 8a und 8b sei

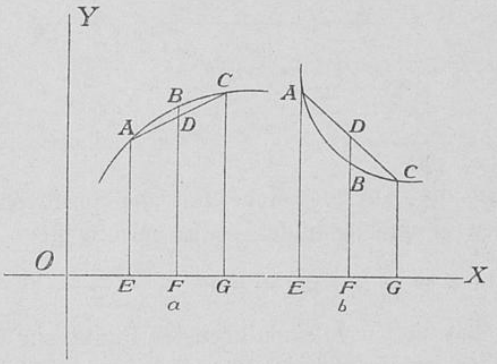

Fig. 8.

$$OE = x; \quad EF = FG = \Delta x,$$

so ist

$$AE = f(x); \; BF = f(x + \Delta x); \; CG = f(x + 2\Delta x).$$

Nun ist

$$DF = \frac{AE + CG}{2} = \frac{f(x) + f(x + 2\Delta x)}{2};$$

folglich

$$DF - BF = \frac{f(x) + f(x + 2\Delta x)}{2} - f(x + \Delta x)$$

$$= \frac{f(x + 2\Delta x) - 2 \cdot f(x + \Delta x) + f(x)}{2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Differenz $DF - BF$ ändert das Vorzeichen nicht beim Multiplizieren mit 2 und beim Dividieren mit $(\Delta x)^2$ und auch dann nicht, wenn man nachher zum Grenzwert übergeht, d. h. wenn schließlich Δx unendlich klein wird. Durch diese Operationen erhält man aber den obigen Ausdruck für $f''(x)$. Somit muß das Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten mit dem Vorzeichen der Differenz $DF - BF$ übereinstimmen Bei der konkaven Kurve (Fig. 8a) ist die Differenz negativ, bei der konvexen (Fig. 8b) positiv. Wenn folglich der zweite Differentialquotient negativ ist, muß die Kurve konkav, wenn er positiv ist, konvex sein.

Ein Maximum kann nur bei konkaver Krümmung, ein Minimum nur bei konvexer Krümmung eintreten (wobei die Krümmung von unten her zu betrachten ist). Somit ergibt sich folgende Regel zur Bestimmung eines Maximums oder Minimums:

Ein Maximum befindet sich da, wo der erste Differentialquotient $= 0$ und der zweite Differentialquotient negativ ist; ein Minimum ist da vorhanden, wo der erste Differentialquotient $= 0$ und der zweite positiv ist.

2) Wie verhält sich nun die Kurve an einer Stelle, wo der zweite Differentialquotient $= 0$ ist? Hier kann die Kurve weder konkav noch konvex sein, sie muß vielmehr aus der konkaven in die konvexe Krümmung (oder umgekehrt) übergehen; an dieser Stelle befindet sich ein Inflexions- oder Wendepunkt (P_4 in Fig. 7). Also ergibt sich die weitere Regel:

Ein Inflexionspunkt liegt da, wo der zweite Differentialquotient $= 0$ wird.

Beispiel: Wo hat die Funktion $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ ein Maximum, ein Minimum oder einen Inflexionspunkt?

Auflösung: Man erhält

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 12x^2 - 24x \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 - 24x - 24.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man den ersten Differentialquotienten $= 0$, so entsteht $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$.

Für $x_1 = 0$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = -24$;

für $x_2 = 2$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = 72$, und

für $x_3 = -1$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = 36$.

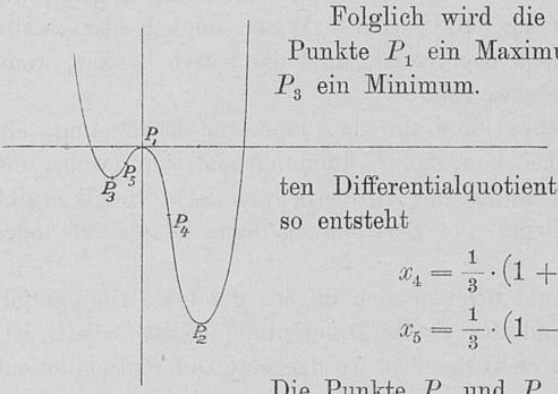

Fig. 9.

Folglich wird die Funktion beim Punkte P_1 ein Maximum, bei P_2 und P_3 ein Minimum.

Setze ich ferner den zweiten Differentialquotienten gleich Null, so entsteht

$$x_4 = \frac{1}{3} \cdot (1 + \sqrt{7}) \quad \text{und}$$

$$x_5 = \frac{1}{3} \cdot (1 - \sqrt{7}).$$

Die Punkte P_4 und P_5 sind Inflexionspunkte. Fig. 9 gibt ein Bild der Kurve, wobei die Ordinaten auf ein Fünftel verkürzt sind.

3) Die Funktion $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ gehe für $x = a$ in den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ über, d. h. es sei $f(a) = 0$ und $\varphi(a) = 0$. Entwickelt man die Funktion $f(a + h)$ nach der Taylorschen Reihe, so ergibt sich:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot h^3 + \cdots$$

Ebenso

$$\varphi(a + h) = \varphi(a) + \varphi'(a) \cdot h + \frac{\varphi''(a)}{2!} \cdot h^2 + \frac{\varphi'''(a)}{3!} \cdot h^3 + \cdots$$

Da nun $f(a) = \varphi(a) = 0$ ist, so wird

$$\frac{f(a + h)}{\varphi(a + h)} = \frac{f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot h^3 + \cdots}{\varphi'(a) \cdot h + \frac{\varphi''(a)}{2!} \cdot h^2 + \frac{\varphi'''(a)}{3!} \cdot h^3 + \cdots}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn man nun durch h hebt und darauf h unendlich klein werden läßt, erhält man

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Hieraus ergibt sich die Regel zur Bestimmung des unbestimmten Ausdrucks $\frac{0}{0}$:

Man sucht vom Zähler und vom Nenner der gegebenen Funktion den ersten Differentialquotienten, setzt $x = a$ ein und dividiert die erhaltenen Ausdrücke.

Sollte der neue Quotient wieder die Form $\frac{0}{0}$ haben, so behandelt man ihn ebenso wie die gegebene Funktion, d. h. man bildet die zweiten Differentialquotienten, setzt hierin $x = a$ und dividiert.

Auch folgende Überlegung führt zu demselben Resultat:

Es ist $f(a) = \lim f(a + \Delta a)$ und da $f(a) = 0$ ist, so wird auch $f(a) = \lim [f(a + \Delta a) - f(a)]$; ebenso ist

$$\varphi(a) = \lim [\varphi(a + \Delta a) - \varphi(a)].$$

Folglich $\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \lim \frac{f(a + \Delta a) - f(a)}{\varphi(a + \Delta a) - \varphi(a)}$,

und wenn man Zähler und Nenner durch Δa dividiert:

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \lim \frac{\frac{f(a + \Delta a) - f(a)}{\Delta a}}{\frac{\varphi(a + \Delta a) - \varphi(a)}{\Delta a}}.$$

Im Grenzfalle wird der Zähler zu $f'(a)$, der Nenner zu $\varphi'(a)$; also

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Beispiel: Welchen Wert hat $y = \frac{x^5 - a^5}{x^2 - a^2}$ für $x = a$?

Auflösung: Es ist $f(x) = x^5 - a^5$, folglich

$$f'(x) = 5 \cdot x^4 \quad \text{und}$$

$$f'(a) = 5 \cdot a^4.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ferner ist $\varphi(x) = x^2 - a^2$, folglich
$\varphi'(x) = 2x$ und
$\varphi'(a) = 2a$.

Also wird

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{5a^4}{2a} = \frac{5}{2} \cdot a^3.$$

§ 10. Das Integrieren. Unbestimmtes Integral.

Die Funktion $y = f(x)$ liefert durch Differentiieren

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \quad \text{oder} \quad dy = f'(x) \cdot dx.$$

Nehmen wir nun an, die abgeleitete Funktion $u = f'(x)$ sei gegeben, so besteht die Aufgabe des Integrierens darin, die zugehörige ursprüngliche Funktion $y = f(x)$ zu finden. Es sei also jetzt $dy = f'(x) \cdot dx$ gegeben, so erhält man umgekehrt $y = f(x) = \int dy = \int f'(x) \cdot dx$ und liest:

$y = f(x)$ ist das Integral von dy oder von $f'(x) \cdot dx$.

Wenn z. B. $y = ax^2 + bx + c$ gegeben ist, so wird

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2ax + b.$$

Wäre nun umgekehrt $dy = f'(x) \cdot dx = (2ax + b) \cdot dx$ gegeben, so würde man als zugehörige ursprüngliche Funktion $y = \int (2ax + b) \cdot dx = ax^2 + bx + c$ finden. Differentiieren und Integrieren sind demnach umgekehrte Operationen, die sich gegenseitig aufheben. Es ist $y = \int dy = d \int y$, d. h. wenn man eine Funktion erst differentiiert und das Resultat integriert oder umgekehrt, so bleibt sie unverändert.

Die Funktionen $u = f(x)$ und $v = f(x) + C$, die sich nur durch die Konstante C unterscheiden, liefern beide $du = f'(x) \cdot dx$ und $dv = f'(x) \cdot dx$. Durch Umkehrung erhalte ich für $\int f'(x) \cdot dx$ einmal $\int du = u$ und einmal $\int dv = v$, d. h. dasselbe Integral $\int f'(x) \cdot dx$ kann verschiedene Resultate u und v liefern, die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sich durch die Größe C unterscheiden. Da C unendlich viele Werte haben kann, so gehören zu einer Funktion $f'(x)$ unendlich viele Integralfunktionen v, oder das Integral

$\int f'(x) \cdot dx$ ist noch ein unbestimmtes Integral.

Man fügt jedem unbestimmten Integral eine „Integrationskonstante“ bei, die in besonderen Fällen besonders bestimmt werden muß. Man erhält z. B.

$$\int n \cdot x^{n-1} \cdot dx = x^n + C; \text{ denn}$$

$$\frac{d(x^n + C)}{dx} = n \cdot x^{n-1} \text{ oder}$$

$$d(x^n + C) = n \cdot x^{n-1} \cdot dx \text{ und}$$

$$\int d(x^n + C) \text{ oder } (x^n + C) = \int n \cdot x^{n-1} \cdot dx.$$

Aus den Regeln in § 3 ergibt sich durch Umkehrung:

1. Regel: Man integriert eine Summe, indem man die Summanden einzeln integriert; es ist

$$\int [f(x) + \varphi(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx + \int \varphi(x) \cdot dx.$$

2. Regel: Konstante Faktoren darf man vor das Integralzeichen setzen; es ist $\int a \cdot f(x) \cdot dx = a \cdot \int f(x) \cdot dx$.

Hat man $dy = x^m \cdot dx$, so ist auch durch Erweitern mit $(m + 1)$:

$$dy = \frac{1}{m+1} \cdot (m+1) \cdot x^m \cdot dx.$$

Hieraus ergibt sich $y = \int dy = \int x^m \cdot dx$

$$= \int \frac{1}{m+1} \cdot (m+1) \cdot x^m \cdot dx$$

$$= \frac{1}{m+1} \cdot \int (m+1) \cdot x^m \cdot dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Daß das Resultat richtig ist, wird bestätigt, wenn man rückwärts differentiiert. Somit folgt weiter die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Regel: Will man eine Potenz integrieren, so erweitert man mit einer Zahl, die um 1 größer ist als der Exponent der Potenz, und integriert dann.

Beispiel: Es sei $dy = (5x^2 - 3x + 4) \cdot dx$, so wird

$$\begin{aligned} y &= \int dy = \int (5x^2 - 3x + 4) \cdot dx \\ &= \int 5x^2 \cdot dx - \int 3x \cdot dx + \int 4 \cdot dx \\ &= \frac{5}{3} \int 3x^2 \cdot dx - \frac{3}{2} \cdot \int 2x \cdot dx + 4 \cdot \int dx \\ &= \frac{5}{3} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 + 4x + C. \end{aligned}$$

§ 11. Integrationsformeln.

Aus den durch Differentiieren in den §§ 2 bis 8 gefundenen Formeln ergeben sich durch Umkehrung folgende Integrationsformeln:

1) $dy = n \cdot x^{n-1} \cdot dx;$

$$y = \int n \cdot x^{n-1} \cdot dx = x^n + C.$$

2) $dy = -n \cdot x^{-n-1} \cdot dx = -\frac{n}{x^{n+1}} \cdot dx;$

$$y = \int -\frac{n}{x^{n+1}} \cdot dx = x^{-n} + C = \frac{1}{x^n} + C.$$

3) $dy = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} \cdot dx;$

$$y = \int \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} \cdot dx = x^{\frac{p}{q}} + C = \sqrt[q]{x^p} + C.$$

4) $dy = \cos x \cdot dx;$

$$y = \int \cos x \cdot dx = \sin x + C.$$

5) $dy = -\sin x \cdot dx;$

$$y = \int -\sin x \cdot dx = \cos x + C.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6) $dy = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot dx = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx;$

$$y = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \operatorname{tg} x + C.$$

7) $dy = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) \cdot dx = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx;$

$$y = \int -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) \cdot dx = \int -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = \operatorname{cotg} x + C.$$

8) $dy = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx;$

$$y = \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = \arcsin x + C.$$

9) $dy = -\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx;$

$$y = \int -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = \arccos x + C.$$

Anmerkung: Es ist $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = -\int -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx;$ folglich, wenn man die Integrationskonstanten in 8) und 9) als C und C_1 unterscheidet:

$$\arcsin x + C = -\arccos x + C_1 \quad \text{und}$$
$$\arcsin x + \arccos x = -C + C_1.$$

Nun ist $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; denn der Sinus eines Winkels ist gleich dem Kosinus seines Komplements; $\sin \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. Folglich müssen die Konstanten C und C_1 so gewählt werden, daß $-C + C_1 = \frac{\pi}{2}$ ist.

10) $dy = \frac{1}{1 + x^2} \cdot dx;$

$$y = \int \frac{1}{1 + x^2} \cdot dx = \operatorname{arctg} x + C.$$

11) $dy = -\frac{1}{1 + x^2} \cdot dx;$

$$y = \int -\frac{1}{1 + x^2} \cdot dx = \operatorname{arccotg} x + C_1.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anmerkung: Für 10) und 11) gilt dieselbe Bedingung wie für 8) und 9), daß $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$; also auch $-C + C_1 = \frac{\pi}{2}$.

12) $dy = e^x \cdot dx$;

$$y = \int e^x \cdot dx = e^x + C.$$

13) $dy = \ln a \cdot a^x \cdot dx$;

$$y = \int \ln a \cdot a^x \cdot dx = a^x + C.$$

14) $dy = \frac{1}{x} \cdot dx$;

$$y = \int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x + C.$$

15) $dy = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$;

$$y = \int \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \overset{a}{\log} x + C.$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich eine ganze Reihe von Integrationen ausführen. Formelsammlungen liefern weitere Beispiele. Manche Funktionen lassen sich allerdings gar nicht, andere nur mit großen Schwierigkeiten integrieren.

§ 12. Quadratur einer Fläche. Bestimmtes Integral. Rektifikation einer Kurve. Kubatur eines Rotationskörpers.

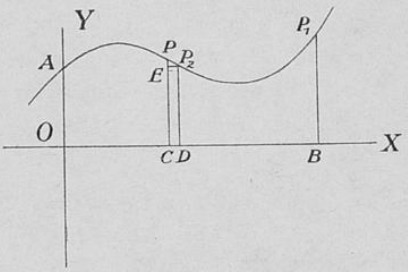

Fig. 10.

1) Die Funktion $y = f(x)$ sei durch eine Kurve dargestellt (Fig. 10). Man zerschneide die Fläche OAP_1B durch unendlich viele, unendlich nahe liegende Linien, welche der Y-Achse parallel laufen, in unendlich schmale Flächenstücke, z. B. CDP_2P. Ein solches

Flächenstück ist ein unendlich kleiner Zuwachs zu der Fläche $OAPC$. Bezeichnet man also $OAPC$ mit F, so ist $CDP_2P = dF$, d. h. gleich dem Differential von F. Da die Punkte P und P_2 unendlich nahe liegen, kann man CDP_2P als ein Rechteck ansehen mit der Grundlinie CD und der Höhe CP. Nun ist, wenn P ein beliebiger Punkt der Kurve ist, $OC = x$, folglich $CD = dx$; ferner ist $CP = y = f(x)$, folglich ist der Inhalt des Rechtecks $= y \cdot dx = f(x) \cdot dx$.

Also hat man jetzt

$$dF = f(x) \cdot dx.$$

Die ganze Fläche OAP_1B besteht aus unendlich vielen solchen Rechtecken. Durch Addition entsteht die Gesamtfläche F_{OAP_1B}. Andererseits ist $F = \int dF$; folglich erhält man auch $F = \int f(x) \cdot dx$.

Das Integral ist danach eine Summe aus unendlich vielen, unendlich kleinen Teilchen, und das Integralzeichen erklärt sich als ein in die Länge gezogenes Summenzeichen S.

Differentiieren heißt: Zerlegen in unendlich kleine Teile; Integrieren heißt: Addieren von unendlich vielen, unendlich kleinen Teilen.

Gelingt es nun, die Integration der Funktion $f(x)$ auszuführen, so ist die Fläche F gefunden, d. h. die Quadratur der Fläche ausgeführt, bis auf eine Konstante C; man muß zunächst schreiben:

$$\int f(x) \cdot dx = F + C.$$

2) Man erhält die Fläche OAP_1B, wenn man in der letzten Gleichung für x den Wert x_1 einsetzt, und die Fläche OAP_2D, wenn man für x den Wert x_2 einsetzt. Es ist

$$\left[\int f(x) \cdot dx\right]_{x=x_1} = F(x_1) + C \text{ und}$$

$$\left[\int f(x) \cdot dx\right]_{x=x_2} = F(x_2) + C.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch Subtrahieren fällt die Integrationskonstante fort, und man erhält für das Flächenstück DP_2P_1B:

$$\left[\int f(x)\cdot dx\right]_{x=x_1} - \left[\int f(x)\cdot dx\right]_{x=x_2} = F(x_1) - F(x_2).$$

Man schreibt hierfür kurz:

$$F_{DP_2P_1B} = \int_{x_2}^{x_1} f(x)\cdot dx.$$

Das Integral ist jetzt ein bestimmtes Integral, genommen zwischen den Grenzen x_1 und x_2. Fällt der Punkt P_2 mit A zusammen, so entsteht

$$F_{0AP_1B} = \int_{0}^{x_1} f(x)\cdot dx.$$

Regel: Man findet ein bestimmtes Integral, indem man in das unbestimmte Integral für die Veränderliche x erst die obere, dann die untere Grenze einsetzt und den zweiten Ausdruck vom ersten subtrahiert.

3) Bezeichnet man ein beliebiges Bogenstück AP (Fig. 10) mit s, so ist PP_2 ein unendlich kleiner Zuwachs von s, also gleich ds. In dem rechtwinkligen Dreieck PP_2E ist

$$PP_2^2 = PE^2 + P_2E^2 \text{ oder}$$

$$ds^2 = dy^2 + dx^2; \text{ folglich}$$

$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2}$$

$$= dx\cdot\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Also wird $s = \int ds = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx.$

Gelingt es also, diese Integration auszuführen, so ist damit die Länge eines Kurvenbogens bestimmt, also die Rektifikation der Kurve ausgeführt.

4) Die Kurve $y = f(x)$ (Fig. 10) rotiere um die X-Achse; es soll dann das Volumen des entstehenden Rotationskörpers bestimmt werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Denkt man den Körper durch unendlich viele, unendlich nahe liegende Ebenen, welche senkrecht zur X-Achse stehen, in unendlich viele, unendlich schmale Teile zerschnitten, so kann man wegen der unendlich kleinen Dicke jedes dieser Körperteilchen als Zylinder ansehen, dessen Höhe gleich dx, dessen Grundflächenradius gleich y, dessen Volumen also $= y^2 \cdot \pi \cdot dx$ ist. Ein einzelner kleiner Zylinder ist ein unendlich kleiner Zuwachs zu einem Volumen V, also gleich dV; folglich hat man

$$dV = y^2 \cdot \pi \cdot dx \text{ und}$$

$$V = \int dV = \int y^2 \cdot \pi \cdot dx$$

$$= \int [f(x)]^2 \cdot dx.$$

Man sieht wieder, daß Integrieren nichts anderes ist als ein Addieren von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen.

Gelingt die letzte Integration, so ist damit das Volumen des Körpers gefunden, d. h. die Kubatur eines Rotationskörpers ausgeführt.

Beispiele:

1) Quadratur der Parabel.

Auflösung: Für jeden Punkt der Parabel gilt die Gleichung $y^2 = 2px$; folglich ist $y = \sqrt{2px} = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}$. Nun ist, wenn man die Fläche OAP_1 (Fig. 11) in unendlich schmale Rechtecke zerschneidet:

$$dF = y \cdot dx = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx;$$

folglich $$F = \int \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2p} \cdot \int \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C.$$

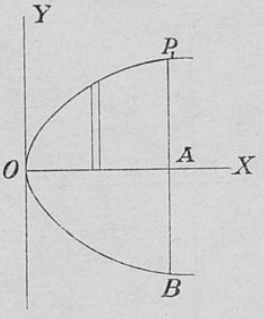

Fig. 11.

Nimmt man das Integral zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = x_1$, so

verschwindet die Integrationskonstante und man erhält das bestimmte Integral

$$F_{OAP} = \int_0^{x_1} \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{2p} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_{x=x_1} - \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2p} \cdot x_1^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2p} \cdot x_1 \cdot \sqrt{x_1}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot x_1 \cdot \sqrt{2px_1}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot x_1 \cdot y_1.$$

Folglich wird die ganze Fläche $OBP_1 = \frac{4}{3}\, x_1 \cdot y_1$.

2) Quadratur der Fläche, welche ein Bogen der Sinuskurve mit der X-Achse bildet.

Auflösung: Es ist $y = \sin x$ (Fig. 12):

$$F = \int y \cdot dx = \int^{\pi} \sin x \cdot dx = [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= [-\cos x]_{x=\pi}^{0} - [-\cos x]_{x=0}$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2 \text{ Quadrat-Einheiten.}$$

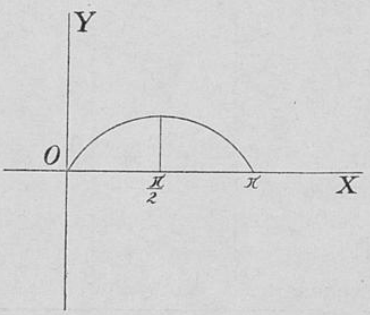

Fig. 12.

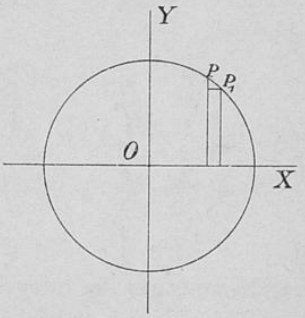

Fig. 13.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) Rektifikation des Kreises.

Auflösung: Für jeden Punkt der Peripherie (Fig. 13) gilt die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2; \text{ also } y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{d(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{dx}$; ich setze $u = r^2 - x^2$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(u^{\frac{1}{2}}\right)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Nach § 12, 3 ist ein Bogen $s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$; also entsteht

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx.$$

Die Länge eines Quadranten wird

$$Q = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx$$

$$= \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx$$

$$= \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx$$

$$= r \cdot \int_0^r \frac{1}{r \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}} \cdot dx.$$

Nun ist $d\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r} \cdot dx$; folglich

$$Q = r \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} \cdot d\left(\frac{x}{r}\right).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach § 11, 8 ist $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x + C$, folglich

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}} \cdot dx = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + C;$$

$$\text{also } Q = r \cdot \left[\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^r$$

$$= r \cdot \left[\arcsin \frac{r}{r} - \arcsin \frac{0}{r}\right]$$

$$= r \cdot \arcsin 1$$

$$= r \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Der Umfang des Kreises ist also $= 4 \cdot r \cdot \frac{\pi}{2} = 2r\pi$.

4) Kubatur eines Rotationsellipsoids.

Auflösung: Die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Fig. 14) rotiere um die X-Achse. Ich zerschneide den Körper in unendlich viele, unendlich schmale Zylinder mit dem Grundflächenradius $PC = y$ und der Höhe $DC = dx$; folglich ist der Inhalt eines Zylinders

$$dV = y^2 \cdot \pi \cdot dx \quad \text{und}$$

$$V = \int y^2 \cdot \pi \cdot dx = \int \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \cdot \pi dx.$$

Nehme ich das Integral zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = a$, so wird das Volumen des halben Rotationskörpers

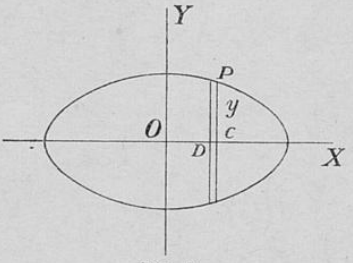

Fig. 14.

$$V = \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \cdot \pi \cdot dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^a \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2\right) \cdot dx$$

$$= \pi \cdot b^2 \cdot \int_0^a dx - \pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \int_0^a x^2 \cdot dx$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$= \pi \cdot b^2 \cdot a - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot a^3$$

$$= \frac{2}{3} \cdot b^2 \cdot \pi \cdot a.$$

Das Gesamtvolumen ist also $= \frac{4}{3} a b^2 \cdot \pi$.

§ 13. Freier Fall und senkrechter Wurf. Schiefer Wurf.

1) Bei gleichförmiger Bewegung eines Körpers ist die Geschwindigkeit konstant gleich dem Quotienten aus Weg und Zeit : $v = \frac{s}{t}$. Bei ungleichförmiger Bewegung ist die Geschwindigkeit veränderlich und zwar abhängig von der Zeit, also eine Funktion der Zeit. Man spricht dann von der Geschwindigkeit des Körpers zu einer gewissen Zeit oder in einem gewissen Punkte seiner Bahn. Befindet sich ein Körper nach t Sekunden in einem Punkte P seiner Bahn und legt er dann in der Zeit Δt den Weg Δs zurück, so hat er während dieser Zeit die mittlere Geschwindigkeit $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Lasse ich Δt unendlich klein werden, so wird auch Δs unendlich klein; der endliche Zuwachs Δs und Δt wird zum unendlich kleinen Zuwachs oder zum Differential des Weges und der Zeit ds und dt, und für die Geschwindigkeit im Punkte P erhält man die Gleichung:

$$v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt},$$

d. h. die Geschwindigkeit ist gleich dem Differentialquotienten des Weges nach der Zeit.

Die Geschwindigkeitsänderung wird durch eine Beschleunigung γ hervorgerufen, welche positiv oder negativ, konstant oder veränderlich sein kann. Unter der Beschleunigung versteht man den in der Zeiteinheit erlangten Zuwachs an Geschwindigkeit. Hat die Geschwindigkeit v in der Zeit Δt den Zuwachs Δv erfahren, so wird die mittlere Beschleunigung $\gamma = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Geht man zum Grenzwert über, so entsteht

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\gamma = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

d. h. die Beschleunigung ist gleich dem Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit.

Nun war $v = \frac{ds}{dt}$, folglich ist auch

$$\gamma = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

d. h. die Beschleunigung ist auch gleich dem zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit.

Beim freien Fall ist die Beschleunigung gleich einer konstanten Größe g, folglich hat man

$$g = \frac{dv}{dt};$$

$$dv = g \cdot dt;$$

$$v = \int dv = \int g \cdot dt = g \cdot t + C.$$

Für $t = 0$ entsteht $v_0 = C$, d. h. die Integrationskonstante ist gleich der Anfangsgeschwindigkeit v_0.

Ferner war

$$v = \frac{ds}{dt}, \text{ also}$$

$$ds = v \cdot dt = (g \cdot t + C) dt;$$

folglich $s = \int (gt + C) \cdot dt = \int gt \cdot dt + \int C \cdot dt$

$$= \frac{g}{2} \cdot t^2 + C \cdot t + C_1.$$

Setze ich t wieder $= 0$, so wird $s_0 = C_1$, d. h. die Integrationskonstante C_1 bedeutet den Weg, den der Körper vor der zu untersuchenden Bewegung zurückgelegt hatte. Man erhält also die bekannten Formeln für den freien Fall: $v = g \cdot t$ und $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ und für den senkrechten Wurf (nach unten oder oben), wenn c die Anfangsgeschwindigkeit ist:

$$v = c \pm g \cdot t \text{ und } s = c \cdot t \pm \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Schiefer Wurf.

Die Anfangsgeschwindigkeit $OA = c$ (Fig. 15) bilde mit der X-Achse den Winkel φ; sie wird zerlegt in

$$c_x = OB = c \cdot \cos\varphi \text{ und}$$
$$c_y = OC = c \cdot \sin\varphi.$$

Unter dem Einfluß der Schwerkraft ändert sich nur die senkrechte Komponente c_y, sie erleidet eine Beschleunigung, welche konstant gleich $-g$ ist. Die Beschleunigung in der Richtung der X-Achse ist $= 0$. Werden die in der Richtung der X- und Y-Achse zurückgelegten Wege mit x und y bezeichnet, so erhält man nach § 13, 1, wenn v_x und v_y die Geschwindigkeiten in der Richtung der X- und Y-Achse sind:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = 0 \text{ und}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -g.$$

Hieraus ergibt sich

$$v_x = \text{const.} = c_x = c \cdot \cos\varphi \text{ und}$$
$$v_y = \int -g \cdot dt = -gt + \text{const.}$$
$$= -g \cdot t + c \cdot \sin\varphi.$$

Die Integrationskonstanten sind also $c \cdot \cos\varphi$ und $c \cdot \sin\varphi$, wie sich ergibt, wenn man $t = 0$ nimmt.

Da ferner $v_x = \frac{dx}{dt}$ und $v_y = \frac{dy}{dt}$ ist, so entsteht weiter

$$dx = v_x \cdot dt \text{ und}$$
$$x = \int v_x \cdot dt$$
$$= \int c \cdot \cos\varphi \cdot dt$$
$$= c \cdot \cos\varphi \cdot t + \text{const.};$$
$$dy = v_y \cdot dt,$$
$$y = \int v_y \cdot dt$$

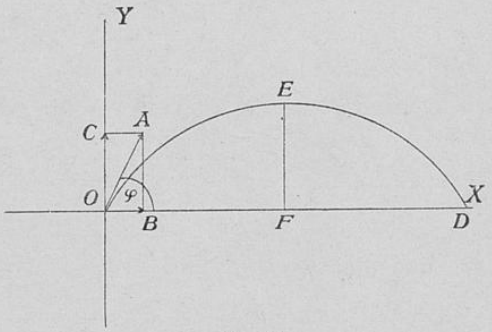

Fig. 15.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$= \int (-g \cdot t + c \cdot \sin\varphi) \cdot dt$$
$$= -\frac{g}{2} \cdot t^2 + c \cdot \sin\varphi \cdot t + \text{const.}$$

Die Integrationskonstanten werden, wenn man $t = 0$ setzt, selbst $= 0$.

Man erhält also für den schiefen Wurf:

$$1)\ x = c \cdot \cos\varphi \cdot t \text{ und}$$
$$2)\ y = c \cdot \sin\varphi \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

Die erste Gleichung liefert $t = \frac{x}{c \cdot \cos\varphi}$; durch Einsetzen in die zweite Gleichung entsteht

$$3)\ y = x \cdot \operatorname{tg}\varphi - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{c^2 \cdot \cos^2\varphi}.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel.

Setzen wir in 2) $y = 0$, so erhalten wir die Wurfdauer $T = \frac{2c \cdot \sin\varphi}{g}$, d. h. nach T Sekunden erreicht der Körper wieder die X-Achse in D. Wird dieser Wert für t in 1) eingesetzt, so erhält man die Wurfweite

$$w = OD = \frac{2 \cdot c^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{g} = \frac{c^2 \cdot \sin 2\varphi}{g}.$$

Der Körper erreicht den höchsten Punkt der Bahn, d. h. y wird ein Maximum, wenn $\frac{dy}{dt} = 0$ oder — was dasselbe ist — wenn $v_y = 0$ ist, d. h. wenn die senkrechte Geschwindigkeitskomponente $= 0$ ist. Es ist also dann

$$-g \cdot t + c \cdot \sin\varphi = 0, \text{ also}$$
$$T_1 = \frac{c \cdot \sin\varphi}{g},$$
$$\text{d. h. } T_1 = \frac{T}{2}.$$

Setzt man den Wert von T_1 für t in 1) und 2) ein, so entsteht:

$$OF = x_e = \frac{c^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{g} = \frac{w}{2}$$

und die Wurfhöhe

$$FE = y_e = \frac{c^2 \cdot \sin^2\varphi}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{c^2 \cdot \sin^2\varphi}{g^2} = \frac{c^2 \cdot \sin^2\varphi}{2g}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

n $\varphi) \cdot dt$

$\varphi \cdot t +$ const.

enn man $t = 0$ setzt,

selb

urf:

t^2.

$\frac{}{\varphi}$; durch Einsetzen in

die

.

wir die Wurfdauer

$T =$ erreicht der Körper

wied Wert für t in 1) ein-

gese

$\frac{c^2 \cdot \sin 2\varphi}{g}$.

nkt der Bahn, d. h.

y wi — was dasselbe ist —

wenn te Geschwindigkeits-

komp

lso

1) und 2) ein, so

entst

$\frac{w}{2}$

und

$= \frac{c^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2g}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf