Untersuchung von Kegelschnittsystemen mit Hülfe der projektivischen Drehung.

Zweiter Teil.

§ 14.

Übertragungssätze aus der Theorie der Kegelschnitte.

Wenn ein Punkt P′ in der X′-Ebene auf einer Geraden g′ liegt, so müssen auch die entsprechenden Gebilde der X-Ebene P und C^2 inzident sein; da nun überhaupt durch die projektivische Drehung Lagenbeziehungen nicht geändert werden, so können wir eine Reihe von Sätzen aus der Theorie der Kegelschnitte in andere auf unser System bezügliche transformieren. Dem Satze von Brianchon z. B. steht folgender zur Seite:

„Greift man aus einem Systeme unter einander ähnlicher Kegelschnitte, welche durch 3 feste Punkte A, B, C gehen, irgend 6 heraus, welche mit 1, 2, 3, ... 6 bezeichnet werden mögen, so schneiden sich je zwei derselben, etwa 1 und 2, noch in einem 4ten Punkte (12). Legt man nun durch A, B, C und je die Schnittpunkte

$$(12),\ (45);\ (23),\ (56);\ (34),\ (61)$$

einen Kegelschnitt, so schneiden sich die 3 so erhaltenen Kegelschnitte außer in A, B, C in einem und demselben 4ten Punkte, gehören also zu demselben Büschel."

Dem Paskal'schen Satze läuft folgender parallel:

„Wählt man auf der Enveloppe E^4 eines Systemes unter einander ähnlicher Kegelschnitte, welche durch 3 feste Punkte A, B, C gehen, irgend 6 Punkte 1, 2, . . . 6, und legt durch A, B, C und je die Punkte:

$$(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 1)$$

6 Kurven 2ter Ordnung, so schneiden sich die Kegelschnitte:

$$\text{A, B, C}\left\{\begin{array}{l}(1{,}2),\ (4{,}5);\\(2{,}3),\ (5{,}6);\\(3{,}4),\ (6{,}1)\end{array}\right.$$

außer in A, B, C in 3 Punkten, welche mit A, B, C zusammen auf demselben Kegelschnitte liegen."

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man sieht, wie man ohne Schwierigkeit die analogen Sätze zu jenen über das einem Kegelschnitte ein- resp. umschriebene Fünfeck, Viereck und Dreieck bilden würde. So gilt, um nur noch Eins hervorzuheben, folgender Satz:

„Drei unter einander ähnliche Kegelschnitte, welche durch 3 feste Punkte A, B, C gehen, schneiden sich noch in 3 weiteren Punkten. Legt man nun durch A, B, C, den Schnittpunkt irgend zweier und den Berührungspunkt des 3ten Kegelschnitts mit der Enveloppe ihres Systems je einen Kegelschnitt, so schneiden sich die 3 so erhaltenen Kurven 2ter Ordnung außer in A, B, C noch in einem und demselben 4ten Punkte, gehören also zu demselben Büschel."

Von besonderem Interesse ist es noch, die Polaritätsbeziehungen eines Kegelschnitts in unsere Untersuchung zu übertragen. Wir finden so, daß in derselben Weise, wie irgend einem Punkte P' in der X'-Ebene in Bezug auf K'_0 seine Polare p', die Verbindungslinie der Berührungspunkte der reellen oder imaginären, von P' aus an K'_0 gelegten Tangenten, zugeordnet ist, in der X-Ebene einem Punkte P in Bezug auf E^4 ein Kegelschnitt C^2p zugeordnet ist, welcher durch A, B, C geht und E^4 in denjenigen 2 Punkten schneidet, in denen E^4 von den beiden reellen oder imaginären ähnlichen Kegelschnitten des Systems, welche durch P gehen, berührt wird.

Umgekehrt ist jedem dem Dreiecke ABC umschriebenen Kegelschnitte C^2 in Bezug auf E^4 ein gewisser Punkt P zugeordnet, nämlich der 4te Schnittpunkt derjenigen beiden ähnlichen Kegelschnitte, welche E^4 in den Durchschnitten von C^2 mit E^4 berühren und durch A, B, C hindurchgehen.

Aus diesem Verhalten ließe sich wieder eine Menge von Sätzen ableiten; hier mögen nur folgende Platz finden:

„Jeder Kegelschnitt C^2, welcher durch 4 Punkte A, B, C, P hindurchgeht, schneidet die Enveloppe eines Systems ähnlicher Kegelschnitte, die dem Dreiecke ABC umschrieben sind, in 2 Punkten D, E, welche von P durch den 4ten Schnittpunkt Q von C^2 mit demjenigen Kegelschnitte, welcher P in Bezug auf E^4 zugeordnet ist, harmonisch getrennt werden, sodaß jeder Punkt von C^2 die 4 Punkte DQEP durch 4 harmonische Strahlen projiziert."

„Durchläuft der Punkt P einen Kegelschnitt C^2q, welcher durch A, B, C geht, so schlingen sich die in Bezug auf E^4 zugeordneten Kegelschnitte um die Punkte A, B, C und einen 4ten Punkt Q, dessen zugeordneter Kegelschnitt in Bezug auf E^4 eben C^2q ist."

Die Polaren eines Punktes P' in Bezug auf sämtliche K'_0 gehen durch einen Punkt, der auf g_∞ liegt; folglich laufen die zu irgend einem Punkte P in Bezug auf sämtliche E^4 zugeordneten Kegelschnitte durch einen Punkt, der auf dem Kreise K liegt. Da ferner die Polare zum Mittelpunkte O' in Bezug auf alle K'_0 g_∞ ist, so schließen wir, daß dem Höhenpunkte H des Dreiecks ABC in Bezug auf sämtliche E^4 der Kreis K zugeordnet ist.

Die ersten Sätze dieses Paragraphen lassen sich leicht verallgemeinern; da nämlich der Kreis K'_0 darin nur in seiner Eigenschaft als Kegelschnitt auftritt, jeder Kegelschnitt $C^{2\prime}$ der X'-Ebene aber durch die projektivische Drehung in eine Kurve 4ter Ordnung mit 3 Doppelpunkten in A, B, C verwandelt wird (§ 1), so müssen die Punkte der X-Ebene und diejenigen Kegelschnitte, welche durch die 3 Punkte A, B, C hindurchgehen, in Bezug auf diese Kurve dieselbe polare Beziehung zu einander haben, wie die Punkte und Geraden der X'-Ebene in Bezug auf $C^{2\prime}$ sie besitzen.

Die betrachtete Enveloppe E^4 nimmt folglich unter den Kurven 4ter Ordnung mit 3 Doppelpunkten eine ähnliche Stellung ein, wie der Kreis unter den Kegelschnitten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 15.

Der Büschel der Enveloppen E^4.

Da die konzentrischen Kreise K'_0 sich in keinem reellen Punkte schneiden, so können auch keine zwei Kurven des Systems der E^4 sich, außer in den 3 Doppelpunkten, in einem reellen Punkte schneiden. Wir vergleichen dieses Resultat mit dem Bezout'schen Satze, nach welchem 2 Kurven 4ter Ordnung 16 Durchschnittspunkte besitzen. Da jede der beiden E^4 in den Ecken A, B, C Doppelpunkte besitzt, so muß jeder dieser Punkte als 4facher Schnittpunkt gerechnet werden, wodurch wir 12 Durchschnitte erhalten. Die 4 übrigen Schnittpunkte sind imaginär und leicht anzugeben, da wir im § 11 den Nachweis geführt haben, daß jede Enveloppe E^4 g_∞ in den beiden Kreispunkten I und J berührt. Wir finden also, daß in derselben Weise, wie sämtliche K'_0 in I und J sich berühren, alle E^4 sich gleichfalls in denselben Punkten berühren müssen. Ebenso, wie K_0' durch einen Punkt seiner Peripherie bestimmt wird, da sein Mittelpunkt gegeben ist, muß auch E^4 durch einen einzigen weiteren Punkt vollständig bestimmt sein.

Nun lehrt die allgemeine Theorie der höheren Kurven, daß eine Kurve 4ter Ordnung durch 14 lineare Bedingungen vollständig und eindeutig bestimmt ist; da A, B, C als gegebene Doppelpunkte dreifach und die beiden Kreispunkte I und J je zweifach zu nehmen sind, so sehen wir, daß für jede E^4 13 lineare Bedingungen gegeben sind; hieraus schließen wir, daß das ganze System der Enveloppen der gegebenen ähnlichen Kegelschnitte einen Kurvenbüschel 4ter Ordnung bilden.

Die besondere Kurve E^4, welche beim gleichseitigen Dreiecke auftritt und die Enveloppe ähnlicher Hyperbeln ist, deren Asymptotenwinkel 60^0 resp. 120^0 ist, besitzt 3 Rückkehrpunkte in den Ecken des Dreiecks (§ 9, Fig. 8).

Nun ist jede Kurve 4ter Ordnung mit 3 Rückkehrpunkten, welche g_∞ in I und J berührt, eine Hypocycloide mit 3 Rückkehrpunkten, wie dies Cremona im 64. Bande des Crelle'schen Journales, Seite 105, nachweist. Diese besondere Kurve E^4 kann folglich auch durch Rollen eines Kreises vom Radius $\frac{r}{3}$ auf der Innenseite von K erzeugt werden; sie ist die berühmte, mit vielen merkwürdigen Eigenschaften ausgestattete Kurve, welche Steiner, Cremona und Andere unter den verschiedenartigsten Gesichtspunkten aufgefaßt und diskutiert haben.

§ 16.

Die Kurve R^4.

Allen Kegelschnitten, welche durch A, B, C und einen 4ten Punkt P hindurchgehen, entspricht in der X'-Ebene ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der zu P homologe Punkt P' ist. Je zwei dieser Strahlen berühren einen Kreis K'_0, der Ort dieser Berührungspunkte ist ein Kreis K'_r, welcher O'P' zum Durchmesser besitzt. Nun wird jeder Kreis der X'-Ebene durch die projektivische Drehung in eine Kurve 4ter Ordnung verwandelt, welche in A, B, C je einen Doppelpunkt besitzt und durch I und J hindurchgeht; letzteres ist deshalb der Fall, weil jeder Kreis den Drehkreis K' außer in anderen Punkten dort schneidet, wo K' von g_∞ getroffen wird, und weil den Schnittpunkten von K' und g_∞ die Durchschnitte von g_∞ und K entsprechen. Der Strahlenbüschel P' bestimmt auf K' eine krumme, involutorische Punktreihe, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte von K'_r mit K' sind. Übertragen wir dieses Verhalten auf die X-Ebene, so ergiebt sich unmittelbar der Satz:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

„In jedem Kegelschnittbüschel mit 4 reellen Grundpunkten A, B, C, P sind je 2 Kegelschnitte C^2 und $C^{2\prime}$ einander ähnlich; die Berührungspunkte derselben mit der jedesmaligen Enveloppe E^4 des Systemes von Kegelschnitten, welche zu C^2 und $C^{2\prime}$ ähnlich sind und durch 3 der Grundpunkte, etwa A, B, C, hindurchgehen, liegen auf einer Kurve 4ter Ordnung R^4, welche in A, B, C je einen Doppelpunkt besitzt; dieselbe geht durch den Punkt P und den Höhenpunkt H des Dreiecks ABC, außerdem durch die beiden Kreispunkte I und J und schneidet die unendlich ferne Gerade weiterhin in den Doppelpunkten der Involution, welche durch den Kegelschnittbüschel auf g_∞ eingeschnitten wird."

Der Kreis K'_r schneidet K' oder trifft K' nicht, je nachdem P' außerhalb oder innerhalb K' liegt; fällt P' auf K', so findet Berührung statt. Nach den in § 8 festgesetzten Lagenbeziehungen zwischen entsprechenden Punkten der X'- und X-Ebene können wir folgende Aussagen machen. Bewegt sich P in den hyperbolischen Räumen vom Dreiecke ABC, so besteht der Kegelschnittbüschel (ABCP) aus lauter Hyperbeln; da die durch P' auf K' induzierte Involution elliptisch ist, so sind die 2 ferneren Schnittpunkte von R^4 mit g_∞ imaginär. Fällt P in den Höhenpunkt H, so besteht R^4 wie E^4 aus den 4 isolierten Punkten A, B, C, P; rückt P in's Unendliche, so berührt R^4 g_∞ in P, welcher Punkt zugleich der unendlich ferne Punkt der einzigen Parabel des Büschels ist. Fällt P schließlich in einen der 3 elliptischen Räume von ABC, so wird R^4 g_∞ außer in I und J noch in 2 reellen Punkten treffen; die beiden reellen Asymptoten von R^4 laufen den Axen der beiden Parabeln des Büschels parallel. Ist insbesondere P ein Punkt von K, so liegt P' unendlich fern und K'_r zerfällt in g_∞ und diejenige Gerade durch O', welche mit der Richtung nach P' einen rechten Winkel bildet; folglich zerfällt R^4 in den Kreis K und diejenige gleichseitige Hyperbel, welche durch A, B, C geht und zur Mittelpunktskurve des Büschels ähnlich und ähnlich gelegen ist (vergl. § 7).

Es kann der Fall eintreten, daß K'_r durch einen oder zwei der Punkte A, B, C' hindurchgeht; im ersten Falle muß R^4 nach § 1 in eine Seite des Dreiecks ABC und eine Kurve 3ter Ordnung zerfallen, welche in der Gegenecke einen Doppelpunkt, in den beiden andern Ecken einen einfachen Punkt besitzt und durch I und J geht; die reelle Asymptote dieser Kurve ist leicht zu finden, da ihr reeller unendlich ferner Punkt dem 2ten Schnittpunkte von K'_r mit K' entspricht. Im zweiten Falle zerfällt R^4 in 2 Seiten von ABC und einen Kegelschnitt durch die Endpunkte der 3ten Seite, welcher, da er durch I und J gehen muß, ein Kreis ist.

Wir können leicht den Ort der Punkte P' angeben, für welche K'_r durch einen der Eckpunkte von ABC', etwa C', hindurchgeht.

Alle Kreise nämlich, welche durch O' und C' laufen, haben ihre Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten von $O'C'$; verbindet man nun O' mit irgend einem Punkte X' derselben und verlängert $O'X'$ um sich selbst bis zum Punkte P', so wird offenbar der Kreis über $O'P'$ als Durchmesser durch C' gehen. Hieraus folgt, daß der gesuchte Ort für P' die Tangente an K' in C' ist; die entsprechenden Punkte P liegen auf einer Parallelen durch C zu AB.

Offenbar kann der zweite Fall nur für diejenigen 3 Punkte P eintreten, welche mit A, B, C zusammen je ein Parallelogramm bilden.

Da sämtliche K'_r durch 3 Punkte hindurchgehen, nämlich durch O' und die beiden Kreispunkte I und J, also ein Kreisnetz bilden, so müssen auch sämtliche R^4 ein besonderes Kurvennetz 4ter Ordnung bilden. Dieses Resultat wird auch durch die Abzählung der für R^4 gegebenen Bedingungen bestätigt; da nämlich jede R^4 in A, B, C je einen Doppelpunkt besitzt und außerdem durch den Höhenpunkt des Dreiecks ABC und durch die beiden Kreispunkte I und J geht, so sind für sie 12 lineare Bedingungen gegeben, und weil erst 14 lineare Bedingungen eine Kurve 4ter Ordnung eindeutig bestimmen, so müssen sämtliche R^4 ein Netz bilden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 17.

Die Kurve C^3.

Die sämtlichen konzentrischen Kreise K'_0 bilden einen Büschel sich doppelt berührender Kegelschnitte, deren gemeinschaftliche Berührungssehne g_∞ ist. Jede Gerade schneidet den Büschel in Punkten einer gleichseitig hyperbolischen Involution, da der eine Doppelpunkt stets unendlich fern liegt; der andere Doppelpunkt ist derjenige Punkt, in welchem ein bestimmter Kreis des Büschels die Gerade berührt. Wir werden hierdurch zu folgendem Satze geführt:

„Die sämtlichen Enveloppen E^4 der Systeme ähnlicher Kegelschnitte, welche einem Dreiecke ABC umschrieben sind, schneiden irgend einen, gleichfalls dem Dreiecke umschriebenen, Kegelschnitt C^2 außer in A, B, C in den konjugierten Punkten einer hyperbolischen Involution. Da die beiden unendlich fernen Punkte von C^2 gleichfalls konjugierte Punkte sind, so liegt das Involutionszentrum auf g_∞, und sämtliche Verbindungslinien konjugierter Punkte laufen einander parallel. Der eine Doppelpunkt der Involution ist der 4te Schnittpunkt von C^2 mit K, während der andere der Berührungspunkt von C^2 mit einer bestimmten E^4 ist."

Diejenigen Geraden g′, welche durch die Punkte A, B, C′ gehen, werden durch die Drehung nicht in Kegelschnitte verwandelt, sondern gehen nach § 2 in Geraden g über, welche resp. durch A, B, C laufen. Da die Involution, welche durch den Büschel der K'_0 auf g′ bestimmt wird, sich in die Involution verwandelt, welche durch das System der E^4 auf g ausgeschnitten wird, so können wir dem obigen Satze folgenden an die Seite stellen:

„Die Enveloppen aller Systeme unter einander ähnlicher Kegelschnitte, welche einem Dreiecke umschrieben sind, schneiden irgend eine Gerade g, welche durch einen der Eckpunkte des Dreiecks gelegt ist, in den konjugierten Punkten einer hyperbolischen Involution."

Da der Kreis K, doppelt gerechnet, mit zum Systeme der E^4 gehört (§ 9), so ist der Schnittpunkt M von g mit K der eine Doppelpunkt der erwähnten Involution. Der andere Doppelpunkt N ist derjenige Punkt, in welchem g von einer bestimmten E^4 berührt wird; daß es nur eine Kurve E^4 von dieser Beschaffenheit giebt, geht unmittelbar daraus hervor, daß die entsprechende Gerade g′ nur von einem Kreise K'_0 berührt wird.

Wir wollen uns die Aufgabe stellen, den Ort dieses zweiten Doppelpunktes N für alle Geraden g, die durch einen der Eckpunkte, etwa C, hindurchgehen, aufzusuchen.

Wir finden ihn leicht aus der Bemerkung, daß die entsprechenden Berührungspunkte der Geraden g′ mit den Kreisen K'_0 wieder auf einem Kreise K′ liegen, welcher über O′C′ als Durchmesser beschrieben ist. Da K′ in C′ den Drehkreis K′ berührt, so wird nach § 1 die entsprechende Kurve in der X-Ebene in die Gerade AB und eine Kurve 3ter Ordnung C^3 zerfallen, welche durch A und B einfach hindurchgeht, in C dagegen einen Doppelpunkt besitzt; sie schneidet g_∞ außer in I und J im unendlich fernen Punkte der Linie AB, woraus wir schließen, daß die reelle Asymptote derselben der Geraden AB parallel läuft.

Die Kurve C^3 ist somit der gesuchte Ort der Punkte N. Wir finden eine sehr leichte Konstruktion von C^3, wenn wir beachten, daß auch das System der Seiten des Dreiecks ABC mit g_∞ zusammen eine spezielle Kurve des Büschels der E^4 bildet, sodaß die beiden Schnittpunkte von g mit AB und g_∞ stets 2 konjugierte Punkte der auf g befindlichen Punktinvolution sind. Der Schnittpunkt L von g mit AB ist demnach der Mittelpunkt dieser Involution und halbiert die Strecke MN. Hieraus ergiebt sich folgende Konstruktion von C^3:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auf jeder Geraden g des Strahlenbüschels C bestimme man die Punkte L und M, in denen g die Linie AB trifft und den Kreis K zum 2ten male schneidet, und trage auf g von L aus das Stück LM nach entgegengesetzter Richtung ab; die Endpunkte N aller dieser Strecken bilden die Kurve C^3 (vergl. Fig. 11).

Aus dieser Konstruktion ersehen wir gleichfalls, daß der reelle unendlich ferne Punkt von C^3 in der Richtung der Geraden AB liegt. Hat der Strahl g eine sehr geringe Neigung zur Geraden AB, so ist die Strecke CM gegen CL verschwindend klein, und im Grenzfalle, wo g parallel zu AB wird, darf CL gleich LN angenommen werden. Wir erkennen hieraus, daß C^3 bei ihrem Verlaufe in's Unendliche sich immer mehr der Geraden s nähert, welche der Ort aller Punkte N′ von der Beschaffenheit ist, daß CL = LN′ ist. Es ist demnach die Gerade s, welche zu AB parallel läuft und von dieser Linie nach entgegengesetzter Seite dieselbe Entfernung hat, wie C von AB, die reelle Asymptote von C^3.

Verbindet man den Punkt S, in welchem s C^3 zum 3ten male schneidet, mit C, so ist LS sowohl gleich LC als auch gleich LM, folglich muß M mit C zusammenfallen oder die Gerade CS ist Tangente an K im Punkte C. Wir können demnach behaupten:

„Die reelle Asymptote trifft die Kurve C^3 zum 3ten male in demjenigen Punkte, in welchem die Tangente von K in C dieselbe außer im Doppelpunkte C schneidet."

Ist CA = CB, so wird die Tangente von K in C parallel zur Asymptote s und der Punkt S rückt in die Unendlichkeit. In diesem Falle berührt s C^3 in 3 auf einander folgenden Punkten, die unendlich fern liegen; C^3 besitzt also eine Inflexionsasymptote. Hierbei ist C^3 symmetrisch in Bezug auf die von C auf AB gefällte Senkrechte, da auch der entsprechende Kreis K′ in Bezug auf die Senkrechte, welche von C′ auf AB gefällt wird, symmetrisch liegt (vergl. § 9); dies folgt jedoch auch unmittelbar aus der Konstruktion von C^3.

Da K′ durch den Punkt O′ geht, so muß C^3 durch den entsprechenden Punkt H, den Höhenpunkt des Dreiecks ABC laufen (Fig. 11). Ferner schneidet K′ die Seiten C′A und C′B in ihren Mitten; mit Berücksichtigung des im § 2 und § 11 Gesagten findet man leicht die Konstruktion der Tangenten von C^3 in A und B, indem man A und B resp. mit den Durchschnittspunkten der Tangenten von K in C, B und C, A verbindet. In gleicher Weise könnte man die Tangenten von C^3 im Doppelpunkte C bestimmen, indem man die entsprechenden Geraden zu den Verbindungslinien von C′ mit den Punkten, in welchen K′AB schneidet, aufsuchte. Wir erkennen jedoch unmittelbar aus der Konstruktion von C^3, daß die Asymptote s den Kreis K in denjenigen Punkten F und G schneidet, in welchen die Tangenten C^3 im Doppelpunkte C denselben treffen, denn die Geraden CF und CG werden durch AB halbiert und wir bemerken, daß, wenn g seinen Strahlenbüschel durchläuft, der die Kurve C^3 beschreibende Punkt für die Strahlen CF und CG in C hineinfällt.

Ist $\sphericalangle \gamma > 90°$, so muß s K in 2 reellen und verschiedenen Punkten schneiden; da die beiden Tangenten von C^3 in C ebenfalls reell und verschieden sein müssen, so besitzt C^3 einen eigentlichen Doppelpunkt und hat die in Figur 11 gezeichnete Gestalt.

Wenn $\sphericalangle \gamma = 90°$ ist, so geht AB durch den Mittelpunkt O von K; der zu C in Bezug auf AB symmetrisch gelegene Punkt fällt auf K und s schneidet im Allgemeinen K in zwei reellen und verschiedenen Punkten. Ist jedoch das Dreieck ABC zugleich gleichschenklig, so berührt s den Kreis K; die beiden Tangenten im Doppelpunkte fallen in eine zusammen, C^3 erhält einen Rückkehrpunkt. Nennen wir den Schnittpunkt einer beliebigen Geraden g des Strahlenbüschels C mit AB und s resp. L und L′, mit K und C^3 resp. M und N, so ist, weil CL = LL′, und LM = LN ist, ersichtlich, daß auch CN = ML′ sein muß; folglich ist in dem zuletzt betrachteten Falle C^3 eine Kurve 3ter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte, mit

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kreisasymptoten und einer reellen Inflexionsasymptote, außerdem symmetrisch in Bezug auf die Rückkehrtangente, die unter dem Namen der Cissoide bekannte Kurve.

Wenn schließlich $\sphericalangle \gamma < 90°$ ist, so liegen C und O auf derselben Seite von AB; C^3 besitzt in C einen eigentlichen Doppelpunkt, einen Rückkehrpunkt oder einen isolierten Punkt, je nachdem die reelle Asymptote s K schneidet, berührt oder nicht schneidet, oder je nachdem, wenn h_c die zur Seite c zugehörige Höhe bedeutet:

$$h_c \lesseqgtr r - \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}.$$

Es ist sehr leicht, die Gleichung von C^3 aufzustellen. Nehmen wir die Gerade AB zur x-Axe und die Senkrechte zu derselben durch C zur y-Axe, so können die Glieder 3ter Dimension sofort bestimmt werden; weil nämlich in der Gleichung jeder Kurve die Glieder höchster Dimension, gleich Null gesetzt, das System der Parallelen aus dem Anfangspunkte der Koordinaten zu den Asymptoten der Kurve darstellen, in unserem Falle aber C^3 durch I und J und den unendlich fernen Punkt von AB hindurchgeht, so müssen die Glieder 3ter Dimension

$$(x^2 + y^2)\, y$$

sein. Demnach hat die Gleichung von C^3 die Gestalt:

$$u \equiv (x^2 + y^2)\, y + Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0.$$

Die 6 Koeffizienten A, . . . F lassen sich nun durch die C^3 weiter auferlegten Bedingungen bestimmen; C^3 muß nämlich durch A (a, 0), B (b, 0) hindurchgehen und in C (0, c) einen Doppelpunkt besitzen, außerdem liegt der Höhenpunkt H $\left(0, -\frac{ab}{c}\right)$ des Dreiecks ABC auf der Kurve.

Die 3 Gleichungen, welche die Bedingung des Doppelpunktes in C liefern, werden nach dem Satze erhalten, daß die Koordinaten von C die 3 partiellen Differentialquotienten nach x, y, z der homogen gemachten Form u zum Verschwinden bringen müssen. Wir gelangen so zu folgenden 6 Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
&1) \qquad Aa^2 + 2\,Da + F = 0,\\
&2) \qquad Ab^2 + 2\,Db + F = 0,\\
&3) \qquad Bc + D = 0,\\
&4) \qquad 3\,c^2 + 2\,Cc + 2\,E = 0,\\
&5) \qquad Cc^2 + 4\,Ec + 3\,F = 0,\\
&6) \qquad -a^3 b^3 + Ca^2 b^2 c - 2\,E\,abc^2 + Fc^3 = 0.
\end{aligned}$$

Aus 5) und 6) eliminiere man F, bestimme aus der resultierenden Gleichung und 4) C und E, dann aus 5) F, aus 1) und 2) A und D und schließlich aus 3) B; man erhält als Werte der Koeffizienten:

$$A = c,\ 2\,B = a + b,\ C = \frac{ab}{c} - 2\,c,$$

$$2\,D = -\,c\,(a + b),\ 2\,E = c^2 - 2\,ab,\ F = abc.$$

Die Kurve C^3 wird demnach durch folgende Gleichung dargestellt:

$$u \equiv (x^2 + y^2)\, y + c\,x^2 + (a + b)\,xy + \left(\frac{ab}{c} - 2\,c\right) y^2 - c\,(a + b)\,x + (c^2 - 2\,ab)\, y + abc = 0.$$

Wenn im Dreiecke ABC CA = CB ist, so muß $b = -a$ sein

oder $a + b = 0$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichung von C^3 erhält dann die Form:

$$u \equiv (x^2 + y^2)\, y + c\, x^2 - \frac{a^2 + 2\, c^2}{c}\, y^2 + (c^2 + 2\, a^2)\, y - a^2\, c = 0,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$u \equiv (x^2 + y^2)\, (y + c) - \frac{a^2 + 3\, c^2}{c}\, y^2 + (c^2 + 2\, a^2)\, y - a^2\, c = 0.$$

Aus dieser Gestalt der Gleichung schließen wir, daß die Gerade

$$y + c = 0$$

C^3 dort schneidet, wo sie die unendlich ferne Gerade und das Geradenpaar:

$$\frac{a^2 + 3\, c^2}{c}\, y^2 - (c^2 + 2\, a^2)\, y + a^2\, c = 0$$

trifft. Da letzteres aus 2 Parallelen zur Linie

$$y + c = 0$$

besteht, so sehen wir, daß alle 3 Schnittpunkte dieser Geraden mit C^3 unendlich fern liegen, oder daß dieselbe eine Inflexionsasymptote von C^3 ist.

Ist außerdem noch $\sphericalangle\, \gamma = 90°$, so muß nach dem bekannten Satze über das rechtwinklige Dreieck sein:

$$ab = -c^2;$$

da ferner $b = -a$, so ist $a = c$.

Wir erhalten demnach als Gleichung der Cissoide:

$$u \equiv (x^2 + y^2)\, y + c\, x^2 - 3\, c\, y^2 + 3\, c^2\, y - c^3 = 0, \text{ oder anders geordnet:}$$

$$u \equiv x^2\, (y + c) + (y - c)^3 = 0.$$

§ 18.

E^4 als bizirkulare Kurve.

In § 11 haben wir gesehen, daß die Enveloppe E^4 des Systems ähnlicher Kegelschnitte, welche einem Dreiecke umschrieben sind, die unendlich ferne Gerade in den beiden Kreispunkten I und J berührt. Beziehen wir nun E^4 auf irgend ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so kann die Gleichung von E^4 ihrer Form nach leicht angegeben werden. Da nämlich bei einer Kurve 4ter Ordnung die Glieder 4ter Dimension, gleich Null gesetzt, die 4 Geraden aus dem Anfangspunkte der Koordinaten nach den unendlich fernen Punkten der Kurve darstellen, da ferner das Geradenpaar aus dem Anfangspunkte nach den Punkten I und J durch die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 0,$$

dargestellt wird und bei unserer Kurve E^4 doppelt genommen werden muß, so hat die Gleichung von E^4 folgende Form:

1) $(x^2 + y^2)^2 + Ax^3 + 3\, Bx^2 y + 3\, Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + 2\, Fxy + Gy^2 + Hx + Jy + K = 0.$

Bedeuten nun $S = 0$, $S' = 0$ die Gleichungen zweier Kreise, ferner $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ die Gleichungen dreier Geraden, schließlich k eine Konstante, so sieht man leicht, daß 1) auf unendlich viele Weisen auf die Form gebracht werden kann:

2) $$S\, S' + k\, \alpha\, \beta\, \gamma = 0.$$

Es liefert nämlich 2) dieselben Glieder höchster Dimension wie 1), und zur Bestimmung von k und der Konstanten in den Formen S, S', α, β, γ erhalten wir durch Vergleichung mit den Gliedern 3ter bis 0ter

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dimension in 1) 10 Gleichungen, sodaß die Anzahl der Unbekannten die der bestimmenden Gleichungen übersteigt. Selbst wenn die Form S willkürlich gegeben ist, lassen sich k, S′, α, β, γ so bestimmen, daß 2) ≡ 1) wird.

Aus Gleichung 2) ersehen wir nun, daß

1) $S = 0$ die Kurve E^4 in den Punkten schneidet, in welchen $S = 0$ von den Geraden $k = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ getroffen wird,

2) $S' = 0$ die Geraden $k = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ gleichfalls in Punkten von E^4 schneidet.

Da $k = 0$ die unendlich ferne Gerade darstellt, so finden wir aus 2) bestätigt, daß E^4 durch die beiden Kreispunkte I und J doppelt hindurchgeht, also bizirkular ist.

Da der Kreis $S = 0$ willkürlich angenommen werden darf, so können wir folgenden interessanten Satz aussprechen:

„Schneidet man die Enveloppe E^4 eines Systems unter einander ähnlicher Kegelschnitte, welche einem Dreiecke umschrieben sind, durch irgend einen Kreis, und verbindet die 6 Schnittpunkte zu je zweien durch 3 Geraden, sodaß keiner dieser Punkte auf 2 Geraden zugleich liegt, so treffen diese 3 Verbindungslinien die Enveloppe in weiteren 6 Punkten, welche gleichfalls auf einem Kreise liegen.“ (Fig. 12.)

Dieser Satz ist nur von der Voraussetzung abhängig, daß E^4 g_∞ nur in den unendlich fernen imaginären Kreispunkten trifft, er gilt demnach auch von allen Kurven 4ter Ordnung, welche in I und J je einen Doppelpunkt besitzen.

Die Schnittpunkte von $S = 0$ mit E^4 mögen mit den Ziffern 1, 2, . . . 6 bezeichnet werden; hält man die Gerade (12) fest und verbindet 3, 4, 5, 6 durch die 3 möglichen Geradenpaare und bringt dieselben jedesmal zum Schnitte mit E^4, so liegen die 4 Schnittpunkte je auf einem Kreise, welcher auch durch die 2 weiteren Schnittpunkte von (12) mit E^4 hindurchgeht; alle 3 Kreise gehören demnach zu einem Büschel. (Vergl. Fig. 12.)

Verbindet man den Punkt 1 der Reihe nach mit 2, 3, 4, 5, 6 und sucht jedesmal die Schnittpunkte der 3 Geradenpaare, welche durch die 4 übrigen Punkte gelegt werden können, mit E^4 auf, so sieht man, daß man von dem gegebenen Kreise $S = 0$ auf dem vorgeschriebenen Wege zu 15 neuen Kreisen $S' = 0$ gelangt, welche zu je dreien in 5 Büschel verteilt sind. Weitere Kreise induziert der gegebene Kreis nicht, denn die Kombination von 2 anderen Punkten und das Aufsuchen der Geradenpaare durch die 4 übrigen Punkte würde einen schon angegebenen Kreis reproduzieren; so z. B. sind die Schnittpunkte von

$$(34),\ (16),\ (52) \text{ mit } E^4$$

identisch mit den Durchschnitten von

$$(16),\ (25),\ (34) \text{ mit } E^4.$$

Indessen sehen wir hieraus, daß die 15 erhaltenen Kreise so oft zu dreien in einen Büschel gruppiert werden können, als 6 Elemente zu zweien zu kombinieren möglich ist, also 15 mal.

Da S und S′ die Quadrate der Tangenten von einem Punkte (xy) an $S = 0$ und $S' = 0$ bedeuten, α, β, γ hingegen den Entfernungen des Punktes (xy) von den Geraden $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ proportional sind, so lesen wir aus Gleichung 2) folgenden Satz heraus:

„Der Ort aller Punkte, für welche das Produkt der Quadrate der Tangenten, welche von ihnen aus an 2 feste Kreise gezogen werden, proportional ist zu dem Produkte der Abstände von 3 festen Geraden, ist eine Kurve 4ter Ordnung, welche durch die Schnittpunkte der Geraden mit den beiden Kreisen hindurchgeht und g_∞ nur in den Punkten I und J trifft.“

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 19.

Fortsetzung.

Einige interessante Sätze ergeben sich aus der Spezialisierung der obigen Betrachtung. Wenn die Schnittpunkte 1, 2 von $S = 0$ mit E^4 in einen der Berührungspunkte einer Doppeltangente zusammenfallen, so müssen die 3 Kreise $S' = 0$, welche durch die weiteren Schnittpunkte der 3 Geradenpaare

$$(34), (56); (35), (46); (36), (45)$$

mit E^4 gelegt werden können, E^4 in dem 2ten Berührungspunkte der Doppeltangente berühren.

Legen wir $S = 0$ durch die beiden Berührungspunkte einer Doppeltangente mit E^4, so müssen die 3 auf dieselbe Weise wie vorhin induzierten Kreise offenbar durch dieselben beiden Berührungspunkte hindurchgehen.

Derjenige Kreis endlich, welcher außer durch die beiden Berührungspunkte einer Doppeltangente noch durch einen der Berührungspunkte einer 2ten Doppeltangente hindurchgeht, läuft nach dem in § 11 angeführten Satze durch alle 6 Berührungspunkte der drei endlichen Doppeltangenten von E^4. Einer der induzierten Kreise $S' = 0$ fällt mit $S = 0$ zusammen, wenn wir nämlich die 3 Doppeltangenten zu Verbindungslinien wählen. Demnach muß die Gleichung von E^4 aus der Form 2) des vorigen § sich in folgende Gestalt überführen lassen:

$$1) \qquad S^2 + k\,\alpha\,\beta\,\gamma = 0,$$

worin $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ die Gleichungen der 3 Doppeltangenten bedeuten und $S = 0$ den Kreis durch die Berührungspunkte derselben mit E^4 darstellt. Wir finden dies auch durch die Form von 1) bestätigt; denn machen wir 1) homogen, sodaß die Gleichung die Gestalt:

$$1)^* \qquad S^2 + k\,\alpha\,\beta\,\gamma\,z = 0$$

annimmt, so sehen wir, daß die Geraden $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $z = 0$ die Kurve E^4 in den Punkten schneiden, in welchen sie den doppelt gerechneten Kreis $S = 0$ treffen, woraus hervorgeht, daß sie in diesen Punkten E^4 berühren.

Eine andere Gruppe bemerkenswerter Sätze finden wir, wenn wir $S = 0$ durch einen, zwei oder alle drei Doppelpunkte hindurchlegen. Hierbei fallen 2 der Schnittpunkte mit E^4 zusammen und die Verbindungslinie derselben ist Tangente an $S = 0$.

Wir erhalten so folgenden Satz:

„Schneidet ein Kreis $S = 0$ die Enveloppe E^4 in einem ihrer drei Doppelpunkte, etwa in A (1, 2), so trifft er dieselbe noch in 4 weiteren Punkten, welche mit 3, 4, 5, 6 bezeichnet werden mögen. Die weiteren Schnittpunkte der 3 Geradenpaare

$$(34), (56); (35), (46); (36), (45)$$

mit E^4 liegen bez. auf 3 Kreisen, welche auch durch die 2 weiteren Schnittpunkte der Tangente von $S = 0$ in A mit E^4 hindurchgehen."

Geht $S = 0$ durch 2 Doppelpunkte, etwa A und B, so fallen in A die Punkte 1, 2 und in B die Punkte 3, 4 zusammen, während 5, 6 irgendwo anders liegen. Die Geraden (12) und (34) sind die Tangenten an $S = 0$ resp. in A und B, dagegen bedeuten (13), (14), (23), (24) sämtlich die Gerade AB. Mit der Aufstellung und Erklärung der beiden Schemata:

$$(12), (34), (56); (13), (24), (56);$$

sind folgende 2 Sätze gegeben:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

„Schneidet der Kreis $S = 0$ die Enveloppe E^4 in den Doppelpunkten A und B und außerdem in den Punkten M, N, so liegen die 4 weiteren Schnittpunkte der Tangenten von $S = 0$ in A und B mit E^4 auf einem Kreise $S' = 0$, welcher auch durch die 2 weiteren Schnittpunkte von MN mit E^4 hindurchgeht."

„Legt man durch 2 der Doppelpunkte A, B von E^4 irgend einen Kreis, welcher E^4 noch in 2 weiteren Punkten M, N schneidet, so liegen die beiden Schnittpunkte M', N', in welchen MN E^4 noch weiterhin trifft, mit A, B auf einem und demselben Kreise."

In gleicher Weise führen die Schemata: (12), (35), (46); (13), (25), (46); u. s. w. leicht zu einigen Sätzen von untergeordnetem Interesse.

Geht der Kreis $S = 0$ schließlich durch alle 3 Doppelpunkte A (1, 2), B (3, 4), C (5, 6), so ergeben sich aus den Zusammenstellungen: (12), (34), (56); (12), (35), (46); folgende Sätze:

„Die 3 Tangenten des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises in den Eckpunkten A, B, C schneiden die Enveloppe E^4 weiterhin in 6 Punkten, welche wieder auf einem Kreise liegen." (In Fig. 10 ist dieser Kreis mit K_2 bezeichnet.)

„Die Tangente des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises in einem der Eckpunkte schneidet E^4 in 2 weiteren Punkten, welche mit den beiden andern Ecken des Dreiecks zusammen auf einem Kreise liegen." (In Fig. 13 ist dieser Kreis mit K' bezeichnet.)

Betrachten wir noch das Schema: (13), (45), (62), so sehen wir, daß der induzierte Kreis $S' = 0$ mit $S = 0$ zusammenfällt, da er durch die Eckpunkte A, B, C hindurchgehen muß. Die Verbindungslinien der Schnittpunkte sind hier die Seiten des Dreiecks ABC; folglich wird die Gleichung von E^4 auf die Form gebracht werden können:

$$S^2 + k\,\alpha\,\beta\,\gamma = 0, \tag{2}$$

in welcher $S = 0$ die Gleichung des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ die Gleichungen der Dreiecksseiten sind.

Aus 2) ersehen wir, daß die Linie $\alpha = 0$ die Kurve E^4 je in 2 Punkten dort schneidet, wo sie $S = 0$ trifft, desgleichen $\beta = 0$ und $\gamma = 0$; da jedoch die Punkte $(\alpha = 0, \beta = 0)$, $(\alpha = 0, \gamma = 0)$, $(\beta = 0, \gamma = 0)$ zugleich auf $S = 0$ liegen, so können die Geraden $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ nicht Tangenten an E^4 sein, und wir schließen daher aus der Form von 2), daß die Punkte $(\alpha = 0, \beta = 0)$, $(\alpha = 0, \gamma = 0)$, $(\beta = 0, \gamma = 0)$ Doppelpunkte von E^4 sind.

Wir wissen aus früheren Betrachtungen (§ 9), daß die Enveloppe sämtlicher Parabeln, welche einem Dreiecke ABC umschrieben sind, aus den 3 Seiten a, b, c des Dreiecks und der unendlich fernen Geraden g_∞ besteht. Wir wenden auf dieses System von Geraden, welches wir als eine Kurve 4ter Ordnung auffassen müssen, den in § 18 gefundenen Hauptsatz an.

Die Schnittpunkte irgend eines Kreises $S = 0$ mit c seien 2, 3, mit a 4, 5, mit b 6, 1; die Linien (12), (34), (56) schneiden E^4 weiterhin in den 6 Punkten:

$$[(1\,2), a], [(1\,2), g_\infty]; [(3\,4), b], [(3\,4), g_\infty); [(5\,6), c], [(5\,6), g_\infty].$$

Nach unserem Satze müssen alle 6 Schnittpunkte auf einem Kreise liegen; da nun 3 derselben auf g_∞ fallen, so müssen die drei übrigen $[(1\,2), a]$, $[(3\,4), b]$, $[(5\,6), c]$ auf einer Geraden liegen, weil das System von g_∞ und irgend einer Geraden als ein Kreis betrachtet werden kann. (Vergl. Fig. 14.)

Der Satz, den wir so eben gefunden haben, ist kein anderer, als der aus der Kegelschnittstheorie bekannte und auf den Kreis angewandte Paskal'sche Satz.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da der dem Dreiecke ABC umschriebene Kreis K, doppelt gerechnet, auch als eine Kurve des Systems der E^4 betrachtet werden muß, so schließen wir, daß der in § 18 abgeleitete Satz sich auch auf diesen Fall anwenden lassen muß. Der beliebige Kreis $S = 0$ schneidet den Kreis K in 2 Punkten M (1, 2) und N (3, 4), in welchen je 2 Schnittpunkte vereinigt gedacht werden müssen; die Verbindungslinien (1 2) und (3 4) sind die Tangenten m und n an $S = 0$ in den Punkten M und N. (Vergl. Fig. 15.) Letztere Geraden schneiden K weiterhin in 2 Punkten M′, N′, welche wieder zweifach gezählt werden müssen; es muß deshalb der induzierte Kreis $S' = 0$ die Geraden m und n in den Punkten M′ und N′ berühren.

Dies ist der bekannte Satz, daß die 4 Berührungspunkte der gemeinschaftlichen, äußeren oder inneren, Tangenten m, n zweier Kreise $S = 0$, $S' = 0$ auf einem dritten Kreise K liegen.

§ 20.

Die Gleichung von E^4.

Wir gehen jetzt dazu über, die Gleichung der Enveloppe E^4 aufzustellen, indem wir die Koeffizienten der Gleichung 1) des § 18 aus den Eigenschaften der Kurve bestimmen. Wir nehmen als x-Axe die Gerade AB und als y-Axe die Senkrechte vom Punkte C auf dieselbe; die Koordinaten von A, B, C seien bez. a, 0; b, 0; 0, c, gerade so wie bei der Ableitung der Gleichung von C^3 in § 17. Die Kurve E^4 muß nun in den Punkten A, B, C je einen Doppelpunkt besitzen; ist nun u die Funktion von x, y, welche, gleich Null gesetzt, E^4 darstellt, so wird bekanntlich das Vorhandensein eines Doppelpunktes an bestimmter Stelle durch das Verschwinden der Differentialquotienten $\frac{\delta u}{\delta x}, \frac{\delta u}{\delta y}, \frac{\delta u}{\delta z}$ der homogen gemachten Form u nach Einsetzung der Koordinaten des Doppelpunktes ausgedrückt. Wir haben demnach:

$$\text{I)}\quad u \equiv (x^2 + y^2)^2 + Ax^3 + 3\,Bx^2 y + 3\,Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + 2\,Fxy + Gy^2 + Hx + Jy + K = 0,$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} \equiv 4\,x\,(x^2 + y^2) + 3\,(Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2) + 2\,(Ex + Fy) + H = 0,$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} \equiv 4\,y\,(x^2 + y^2) + 3\,(Bx^2 + 2\,Cxy + Dy^2) + 2\,(Fx + Gy) + J = 0,$$

$$\frac{\delta u}{\delta z} \equiv Ax^3 + 3\,Bx^2 y + 3\,Cxy^2 + Dy^3 + 2\,(Ex^2 + 2\,Fxy + Gy^2) + 3\,(Hx + Jy) + 4\,K = 0,$$

wobei die Formen wieder unhomogen gemacht erscheinen. Setzen wir nun in diese Gleichungen die Koordinaten der Punkte A, B, C ein, so erhalten wir zur Bestimmung der 10 Koeffizienten A, B, ... K folgende 9 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&1) \quad 4\,a^3 + 3\,Aa^2 + 2\,Ea + H = 0,\\
&2) \quad 3\,Ba^2 + 2\,Fa + J = 0,\\
&3) \quad Aa^3 + 2\,Ea^2 + 3\,Ha + 4\,K = 0;\\
&4) \quad 4\,b^3 + 3\,Ab^2 + 2\,Eb + H = 0,\\
&5) \quad 3\,Bb^2 + 2\,Fb + J = 0,\\
&6) \quad Ab^3 + 2\,Eb^2 + 3\,Hb + 4\,K = 0;\\
&7) \quad 3\,Cc^2 + 2\,Fc + H = 0,\\
&8) \quad 4\,c^3 + 3\,Dc^2 + 2\,Gc + J = 0,\\
&9) \quad Dc^3 + 2\,Gc^2 + 3\,Jc + 4\,K = 0.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich 9 Koeffizienten berechnen, der 10te, als welchen wir J nehmen wollen, muß durch das Hinzutreten einer neuen Bedingung bestimmt werden, möge jedoch vorläufig unbestimmt bleiben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man subtrahiere 6) von 3), dann ergiebt sich:

$$10) \qquad A(a^2 + ab + b^2) + 2E(a + b) + 3H = 0.$$

Aus 1), 4), 10) werden A, E, H berechnet; substituieren wir ihre Werte in die übrigen Gleichungen, so erhalten wir für die gesuchten Koeffizienten leicht folgende Werte:

$$A = -2(a + b),\ 3B = \frac{J}{ab},\ 3C = (a + b)\left\{\frac{2ab}{c^2} + \frac{J}{abc}\right\},$$

$$D = -2c + \frac{2a^2b^2}{c^3} + \frac{J}{c^2},\ E = (a + b)^2 + 2ab,\ 2F = -\frac{a + b}{ab}J,$$

$$G = c^2 - \frac{3a^2b^2}{c^2} - \frac{2J}{c},\ H = -2ab(a + b),\ J = J,\ K = a^2b^2.$$

Durch Einführung dieser Größen in Gleichung I) erhält dieselbe, nachdem noch nach J geordnet ist, folgende Gestalt:

$$\text{II)}\ u \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2(a + b)x^3 + \frac{2ab(a + b)}{c^2}xy^2 + 2\frac{a^2b^2 - c^4}{c^3}y^3 + \Big((a + b)^2 + 2ab\Big)x^2$$

$$+ \frac{c^4 - 3a^2b^2}{c^2}y^2 - 2(a + b)abx + a^2b^2$$

$$+ Jy\left\{\frac{x^2}{ab} + \frac{a + b}{abc}xy + \frac{y^2}{c^2} - \frac{a + b}{ab}x - \frac{2}{c}y + 1\right\} = 0.$$

Die Gleichung des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises K ist:

$$S \equiv x^2 + y^2 - (a + b)x - \frac{c^2 + ab}{c}y + ab = 0,$$

wie man sich leicht durch Einsetzen der Koordinaten der Eckpunkte A (a, 0), B (b, 0), C (0, c), überzeugt.

Die Seiten des Dreiecks werden durch die Gleichungen dargestellt:

$$y = 0,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{c} - 1 = 0,\ \frac{x}{b} + \frac{y}{c} - 1 = 0.$$

Indem wir die Form S^2 entwickeln und mit dem von J freien Teile in II) vergleichen, gelangen mir leicht zu folgender Darstellung von II):

$$\text{II*)}\ u \equiv S^2 + \frac{2ab(c^2 + ab)}{c}y\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{c} - 1\right)\left(\frac{x}{b} + \frac{y}{c} - 1\right) + Jy\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{c} - 1\right)\left(\frac{x}{b} + \frac{y}{c} - 1\right) = 0;$$

setzen wir noch

$$2\frac{ab(c^2 + ab)}{c} + J = \lambda,\ \text{und}\ \frac{x}{b} + \frac{y}{c} - 1 \equiv \alpha,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{c} - 1 \equiv \beta,\ y \equiv \gamma,$$

so erhalten wir die Gleichung der Enveloppe E^4 in der einfachen Gestalt:

$$\text{III)} \qquad u \equiv S^2 + \lambda\alpha\beta\gamma = 0,$$

welche Form wir schon auf anderem Wege (§ 19) als möglich nachgewiesen haben. Wir sehen aus III), daß E^4 durch einen weiteren Punkt vollständig und eindeutig bestimmt ist, da Gleichung III) in dem noch unbestimmten Koeffizienten λ resp. J linear ist.

Ferner erkennen wir, daß sämtliche E^4 einen Kurvenbüschel 4ter Ordnung bilden. Setzen wir $\lambda = 0$, so erhalten wir als eine Kurve des Büschels: $S^2 = 0$, folglich den doppelt gerechneten Kreis K; machen wir jedoch III) homogen, dividieren durch λ und setzen $\lambda = \infty$, so ergiebt sich als eine 2te Kurve des Büschels: $\alpha\beta\gamma z = 0$, welche Gleichung das System von 4 Geraden, der 3 Dreiecksseiten und der unendlich fernen Geraden, darstellt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus der Form von III) lesen wir folgenden Satz heraus:

„Die Enveloppe eines Systems ähnlicher Kegelschnitte, welche durch 3 Punkte A, B, C gehen, ist der Ort aller Punkte von der Beschaffenheit, daß das Produkt der Abstände derselben von den 3 Seiten des Dreiecks ABC in konstantem Verhältnisse steht zu dem Quadrate der Potenz der Punkte in Bezug auf den dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreis."

Nach diesem Satze läßt sich leicht festsetzen, ob E^4 in den hyperbolischen oder elliptischen Räumen des Dreiecks ABC verläuft.

§ 21.

Kombination von E^4 mit dem Kreisbüschel, dessen Grundpunkte 2 der Doppelpunkte von E^4 sind.

Die Gleichung des Kreises, welcher dem aus den Seiten $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ gebildeten Dreiecke umschrieben ist, läßt sich unter der Form darstellen:

1) $S \equiv \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = 0$, (Salmon, Kegelschn. S. 208);

die Tangente von $S = 0$ im Punkte A ($\beta = 0$, $\gamma = 0$) wird durch die Gleichung gegeben:

2) $\beta \sin C + \gamma \sin B = 0$. (Salmon, S. 208).

Irgend ein Kreis, welcher durch die Punkte B, C hindurchgeht, besitzt eine Gleichung von der Form:

3) $S + k\alpha \equiv \alpha(\gamma \sin B + \beta \sin C + k) + \beta\gamma \sin A = 0$;

um die Schnittpunkte dieses Kreises mit E^4 zu erhalten, haben wir 3) mit der Gleichung von E^4:

4) $S^2 + \lambda\alpha\beta\gamma = 0$ zu kombinieren.

Aus 3) ergiebt sich: $S^2 = k^2\alpha^2$; dies in 4) substituiert, liefert die Gleichung: $\alpha(k^2\alpha + \lambda\beta\gamma) = 0$, welcher offenbar die Koordinaten der Schnittpunkte beider Kurven genügen müssen. Wir ersehen aus derselben, daß der Kreis 3) die Enveloppe 4) außer in den Punkten B, C noch in denjenigen 4 Punkten trifft, in welchen 3) den Kegelschnitt schneidet, der folgende Gleichung besitzt:

5) $k^2\alpha + \lambda\beta\gamma = 0$.

Derselbe ist offenbar eine Hyperbel, welche durch B, C und die unendlich fernen Punkte von $\beta = 0$ und $\gamma = 0$ hindurchgeht, was unmittelbar aus der homogen gemachten Gleichung 5) ersichtlich ist. Wir multiplizieren 5) mit $-\frac{\sin A}{\lambda}$ und addieren 3); wir erhalten als Folgegleichung:

$$\alpha\left(\gamma \sin B + \beta \sin C + k - \frac{k^2 \sin A}{\lambda}\right) = 0.$$

Hieraus geht hervor, daß

6) $$\gamma \sin B + \beta \sin C + k - \frac{k^2 \sin A}{\lambda} = 0$$

diejenige Gerade darstellt, welche die zwei von B, C verschiedenen Schnittpunkte von 3) mit 4) verbindet. Vergleichen wir 6) mit 2), so erkennen wir sofort, daß die Gerade 6) stets parallel zu 2) ist, wie beschaffen auch die Parameter k und λ sein mögen. Wir haben hierdurch folgenden Satz bewiesen:

„Legt man durch irgend 2 Doppelpunkte, etwa B und C, der Enveloppe E^4 einen Kreisbüschel, so schneidet jeder Kreis desselben E^4 außer in den beiden Doppelpunkten noch in 2 anderen Punkten, deren Verbindungslinie der Tangente von K im 3ten Doppelpunkte A parallel läuft." (Vergl. Fig. 13.)

Da wir schon wissen, daß eine der 3 endlichen Doppeltangenten von E^4 der Tangente von K in A parallel ist (§ 11), so können wir sofort folgenden Satz hinzufügen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

„Irgend 2 der Doppelpunkte von E^4 liegen mit den Berührungspunkten derjenigen Doppeltangente, welche zur Tangente von K im 3ten Doppelpunkte parallel ist, auf einem und demselben Kreise.“ (In Fig. 13 ist dieser Kreis mit K_2 bezeichnet.)

Wendet man den Hauptsatz dieses § auf das System der Dreiecksseiten und der unendlich fernen Geraden, einer besonderen E^4, an, so erscheint derselbe als ein Spezialfall des folgenden Satzes aus der Kegelschnittstheorie:

„Legt man durch 2 von den 4 Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels einen beliebigen Kegelschnitt, so hat derselbe mit jedem Kegelschnitte des Büschels im Allgemeinen noch 2 Punkte gemein, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt läuft; dieser feste Punkt liegt auf der Verbindungslinie der beiden übrigen Grundpunkte des Büschels.“ (Schröter, Kegelschn. S. 239.)

In unserem Falle besteht der Kegelschnittbüschel aus lauter Kreisen, die eine Dreiecksseite verbindet die beiden Grundpunkte, während das System der beiden anderen Seiten als ein durch die 2 Grundpunkte gelegter Kegelschnitt aufgefaßt werden kann; da der feste Punkt, durch welchen die Verbindungslinien der 2 weiteren Schnittpunkte jedes Kreises des Büschels mit den letzteren Seiten hindurchlaufen, auf der Verbindungslinie von I und J oder auf g_∞ liegen muß, so laufen sämtliche Verbindungslinien einander parallel. Die Richtung dieser Strahlen läßt sich sogleich angeben, denn da der Kreis K, welcher durch den Schnittpunkt A der beiden Dreiecksseiten hindurchgeht, auch zum Büschel gehört, so sieht man, daß alle Verbindungslinien die Richtung der Tangente von K in A besitzen, wie auch der allgemeine Satz aussagt. (Vergl. Fig. 13.)

§ 22.

Konjugierte Kurven des Büschels der E^4.

Wir kehren noch einmal zur synthetischen Betrachtung des Büschels der Enveloppen E^4 zurück, indem wir das System der konzentrischen Kreise K'_0 in's Auge fassen, aus denen vermittelst der projektivischen Drehung die E^4 entstehen. Wie jedem Punkte der X'-Ebene in Bezug auf K'_0 seine Polare, so ist auch jedem Punkte der X-Ebene in Bezug auf E^4 ein gewisser Kegelschnitt, der durch A, B, C hindurchgehen muß, zugeordnet (§ 14).

Betrachten wir nun irgend einen Kreis K'_0 und fassen diejenigen Tangenten desselben in's Auge, welche sich in den Punkten eines zu K'_0 konzentrischen Kreises $K'_{0\alpha}$ schneiden, so umhüllen die Verbindungslinien der Berührungspunkte dieser Tangenten oder allgemeiner, die Polaren der Punkte von $K'_{0\alpha}$ in Bezug auf K'_0, einen zweiten konzentrischen Kreis $K'_{0\beta}$, welcher die reziproke Kurve von $K'_{0\alpha}$ nach K'_0 ist; umgekehrt ist $K'_{0\alpha}$ die inverse Kurve zu $K'_{0\beta}$.

Da dieses Verhalten als reine Lagenbeziehung sich auf die X-Ebene überträgt, so geht aus dieser Betrachtung folgender Satz hervor:

„Die zugeordneten Kegelschnitte der Punkte irgend einer Enveloppe E^4_α in Bezug auf eine andere bestimmte E^4 bilden wieder ein System ähnlicher und dem Dreiecke ABC umschriebener Kegelschnitte und umhüllen demnach eine Kurve E^4_β, welche dem Systeme der E^4 angehört und in gewissem Sinne die reziproke Kurve zu E^4_α in Bezug auf E^4 genannt werden kann. Umgekehrt umhüllen die zugeordneten Kegelschnitte der Punkte von E^4_β in Bezug auf E^4 die Kurve E^4_α; je zwei Kurven des Büschels der E^4 sind in Bezug auf eine bestimmte E^4 in der angegebenen Weise einander zugeordnet oder konjugiert.“

Nehmen wir insbesondere den Drehkreis K' als Kernkurve und polarisieren irgend einen außerhalb K' gelegenen Kreis $K'_{0\alpha}$ nach K', so muß der reziproke Kreis $K'_{0\beta}$ innerhalb K' liegen und umgekehrt;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist der Radius von K' r und von $K'_{0\alpha}$ d, so ist der Radius von $K'_{0\beta}$ $\frac{r^2}{d'}$, sodaß z. B. dem Kreise mit unendlich großem Radius d der Nullkreis zugeordnet ist.

Da die Tangenten von K' in Parabeln umgewandelt werden, so findet man leicht den Satz:

„Legt man durch jeden Punkt einer Enveloppe E^4_α die beiden reellen oder imaginären Parabeln, welche durch A, B, C gehen, ferner durch die unendlich fernen Punkte dieser Parabeln denjenigen Kegelschnitt, welcher dem Dreiecke ABC umschrieben ist, so sind sämtliche so erhaltene Kegelschnitte einander ähnlich und umhüllen demnach eine andere Kurve E^4_β; wird E^4_α von einem Systeme unter einander ähnlicher Hyperbeln berührt, so umhüllt E^4_β ähnliche Ellipsen, deren Axenverhältnis $\frac{b}{a}$ dieselbe Größe besitzt wie bei den ähnlichen Hyperbeln, oder deren Winkel zwischen den gleichen konjugierten Durchmessern gleich dem Asymptotenwinkel der Hyperbeln ist."

Die letztere Behauptung folgt aus der Gleichung 2) des § 4:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{d - r}{d + r}};$$

diese Gleichung gilt im Falle der Ellipse, wo $d > r$ ist. Setzen wir nun an Stelle von d den Radius des reziproken Kreises, welcher gleich $\frac{r^2}{d}$ ist, und an Stelle von b die Größe $b\sqrt{-1}$, wie dies beim Übergange von der Ellipse zur Hyperbel notwendig ist, so erhalten wir für das Axenverhältnis der konjugierten Hyperbel genau denselben Wert.

Wenn E^4_α der dem Dreiecke ABC umschriebene Kreis K ist, so reduziert sich die konjugierte E^4_β auf den Höhenpunkt des Dreiecks, und das einhüllende System unter einander ähnlicher Kegelschnitte ist der Büschel gleichseitiger Hyperbeln. Wir finden hier den bekannten Satz wieder, daß die unendlich fernen Punkte der beiden Parabeln eines Kegelschnittbüschels, dessen 4 Grundpunkte auf einem Kreise liegen, unter rechtem Winkel zu einander liegen, oder, was dasselbe ist, von einem endlichen Punkte aus durch 2 zu einander senkrechte Geraden projiziert werden.

§ 23.

Die Mittelpunktskurve M^4.

Einem Strahlenbüschel P' der X'-Ebene entspricht in der X-Ebene ein Kegelschnittbüschel, welches zu Grundpunkten A, B, C und den zu P' homologen Punkt P besitzt. Die Mittelpunkte der Kegelschnitte dieses Büschels liegen auf einem Kegelschnitte, von welchem sich sofort elf Punkte angeben lassen; derselbe geht durch die 3 Ecken des Diagonaldreiecks, durch die Mitten der 6 Seiten des vollständigen Vierecks ABCP und durch die unendlich fernen Punkte der beiden reellen oder imaginären Parabeln des Büschels (Schröter, Kegelschn. S. 304). Alle Kegelschnittbüschel, welche den sämtlichen Strahlenbüscheln der X'-Ebene entsprechen, haben die 3 Grundpunkte A, B, C gemeinschaftlich, folglich gehen ihre Mittelpunktskegelschnitte sämtlich durch die 3 Mitten D, E, F der Seiten des Dreiecks ABC.

Um nun den Ort der Mittelpunkte aller unter einander ähnlicher und dem Dreiecke ABC umschriebener Kegelschnitte zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein. In einem Punkte P_1 der Enveloppe E^4 schneiden sich zwei unendlich nahe Kegelschnitte C^2_α und C^2_β des gegebenen Systems; ihre Mittelpunkte M_α, M_β sind zwei unmittelbar auf einander folgende Punkte desjenigen Mittelpunktskegelschnitts C^2_1, welcher zum Büschel $ABCP_1$ gehört. Gehen wir zu dem P_1 unendlich nahen Punkte P_2 auf E^4 über, in welchem sich

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2 benachbarte Kegelschnitte C^2_β und C^2_γ des Systems schneiden, so ist klar, daß in gleicher Weise ihre Mittelpunkte M_β und M_γ 2 unendlich nahe Punkte des Kegelschnitts C^2_2 sind, welcher die Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels $(ABCP_2)$ enthält. Der 4te Schnittpunkt der unendlich nahen Kegelschnitte $C_1{}^2$ und $C_2{}^2$, welche beide durch D, E, F hindurchgehen, ist folglich M_β. Lassen wir P die ganze Enveloppe E^4 durchlaufen, so erhalten wir in den successiven 4ten Schnittpunkten M der Mittelpunktskegelschnitte C^2_m die sämtlichen Mittelpunkte der Kegelschnitte des gegebenen Systems.

Während P die Enveloppe E^4 durchläuft, bewegt sich der entsprechende Punkt P′ auf dem zu E^4 homologen Kreise K'_0; den unendlich fernen Punkten der beiden Parabeln des Büschels ABCP, durch welche C^2_m jedesmal hindurchgeht, entsprechen die 2 reellen oder imaginären Berührungspunkte derjenigen beiden Tangenten, welche von P′ aus an den Drehkreis K′ gelegt sind. Derjenige Kegelschnitt C^2_s, welcher der Verbindungslinie s dieser Berührungspunkte entspricht, geht folglich durch dieselben unendlich fernen Punkte, wie der zugehörige Mittelpunktskegelschnitt C^2_m; beide Kurven sind somit ähnlich und in ähnlicher Lage.

Da nun bei der Bewegung von P′ auf K'_0 die Berührungssehne s einen neuen konzentrischen Kreis K'_{0s} einhüllt, welcher die inverse Figur zu K'_0 in Bezug auf K′ ist (§ 22), so müssen auch sämtliche C^2_m unter einander ähnlich sein und eine Kurve derselben Art, wie E^4, umhüllen, die wir mit M^4 bezeichnen wollen. Sind die Kurven C^2, welche E^4 einhüllen, unter einander ähnliche Hyperbeln mit dem Asymptotenwinkel δ, so sind sämtliche C^2_m nach § 22 unter einander ähnliche Ellipsen, deren Winkel zwischen den gleichen konjugierten Durchmessern ebenfalls δ ist, oder die Axenverhältnisse von C^2 und C^2_m sind einander gleich; ist umgekehrt C^2 eine Ellipse, so ist C^2_m eine Hyperbel von demselben Axenverhältnisse. Da die Kurve M^4 die gesuchte Mittelpunktskurve ist, so können wir die vorigen Betrachtungen in folgendem Satze zusammenfassen:

„Der Ort der Mittelpunkte aller unter einander ähnlicher und einem Dreiecke ABC umschriebener Kegelschnitte C^2 ist eine Kurve 4ter Ordnung und 6ter Klasse M^4, welche g_∞ in I und J berührt und in den Mitten D, E, F der Dreiecksseiten je einen Doppelpunkt besitzt. Sie ist eine Kurve derselben Art, wie die Enveloppe E^4 sämtlicher C^2 und wird in gleicher Art wie diese von einem Systeme unter einander ähnlicher und dem Dreiecke DEF umschriebener Kegelschnitte C^2_m eingehüllt. Die beiden Kurven C^2 und C^2_m stehen allemal in der Beziehung zu einander, daß die eine Kurve Ellipse, die andere Hyperbel ist, beide jedoch dasselbe Axenverhältnis besitzen." (Vergl. Fig. 10 u. 16.)

In derselben Weise, wie wir mit Hülfe der projektivischen Drehung die Enveloppe E^4 konstruiert haben (§ 9), läßt sich auch die Mittelpunktskurve M^4 punktweise bestimmen. Da das Ähnlichkeitsverhältnis der beiden Dreiecke ABC und DEF 2 : 1 ist, so muß auch der Radius ρ des Kreises K_m, welcher dem Dreiecke DEF umschrieben ist, gleich $\frac{r}{2}$ sein.

In analoger Weise, wie wir zum Dreiecke ABC das Gegendreieck ABC′ konstruiert haben, stellen wir hier zu DEF das Gegendreieck DEF′ her, betrachten den durch D, E, F′ gehenden Kreis K'_m als Drehkreis, indem wir D und E als Projektionsmittelpunkte des neuen Systems wählen. Wir setzen dadurch eine neue Beziehung zwischen den Punkten der Ebene fest, die wir in derselben Weise, wie früher als X′- und X-Ebene, so jetzt als Y′- und Y-Ebene uns doppelt denken wollen. Alle zu K'_m konzentrischen Kreise werden durch die neue Drehung in Kurven 4ter Ordnung M^4 umgewandelt, welche in D, E, F je einen Doppelpunkt besitzen. Wählen wir nun denjenigen Kreis, welcher dem zu K'_0 im alten Systeme inversen Kreise K'_{0s} entspricht, dessen Radius also gleich der Hälfte des Radius von K'_{0s} ist, und führen ihn durch die projektivische Drehung in die entsprechende Kurve M^4 über, so erhalten wir in letzterer die Mittelpunkts-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

kurve des Systems unter einander ähnlicher Kegelschnitte, welche diejenige E^4, die dem Kreise K'_0 entspricht, einhüllen. (Vergl. Fig. 10 und 16.)

Aus den vorigen Betrachtungen geht hervor, daß, wenn E^4 sich in den hyperbolischen Räumen des Dreiecks ABC befindet, alsdann M^4 in den elliptischen des Dreiecks DEF liegen muß (Fig. 16); fällt aber E^4 in die elliptischen Räume von ABC, so haben wir M^4 nur in den hyperbolischen des Dreiecks DEF zu suchen (Fig. 10).

Wird E^4 von ähnlichen Hyperbeln eingehüllt, so muß M^4 auch durch die Schnittpunkte der 6 Geradenpaare hindurchgehen, welche im Systeme vorkommen (§ 5); folglich schneidet M^4 die Seiten des Dreiecks ABC außer in den Mitten D, E, F in je 2 Punkten, welche von der gegenüberliegenden Ecke gleichweit abstehen (Fig. 16).

Ist das System unter einander ähnlicher Kegelschnitte, welche durch A, B, C gehen, das Büschel gleichseitiger Hyperbeln, so besteht die Enveloppe E^4 aus dem Höhenpunkte H von ABC, dem als entsprechendes Gebilde in der X'-Ebene der Nullkreis O' gegenübersteht. Die inverse Kurve zu diesem Nullkreise in Bezug auf K' ist der Kreis mit unendlich großem Radius, welchem in der Y'-Ebene ein Kreis gleichfalls mit unendlich großem Radius entspricht. Letzterer wird durch die Drehung in den Kreis K_m übergeführt, welcher dem Dreiecke DEF umschrieben ist; folglich enthält dieser Kreis die Mittelpunkte des betrachteten Büschels gleichseitiger Hyperbeln. Dies ist der bekannte Satz:

„Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche einem Dreiecke umschrieben sind, liegen auf einem Kreise, welcher durch die Mitten der Seiten und die Höhenfußpunkte des Dreiecks hindurchgeht." (Feuerbach'scher Kreis.)

Die Mittelpunkte der Parabeln, welche dem Dreiecke ABC umschrieben sind, liegen auf der unendlich fernen Geraden und den Seiten des Dreiecks DEF; letztere erscheinen als Ort der Mittelpunkte derjenigen Parabeln, welche aus den Seiten des Dreiecks ABC und den Parallelen durch die gegenüberliegenden Ecken bestehen.

Dem unendlich fernen Kreise der X'-Ebene entspricht als inverse Figur in Bezug auf K' der Nullkreis O' und diesem in der Y'-Ebene gleichfalls der Nullkreis; da letzterer in den Höhenpunkt des Dreiecks DEF übergeführt wird, so muß der Höhenpunkt des Dreiecks DEF zugleich der Mittelpunkt des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises K sein, wie bekannt ist.

Die allgemeinen Eigenschaften von M^4 sind genau dieselben wie die von E^4, was keiner weiteren Auseinandersetzung bedarf.

Die Doppeltangenten von E^4 laufen den Tangenten von K in den Eckpunkten von ABC parallel (§ 11); folglich müssen auch die Doppeltangenten von M^4 dieselbe Richtung besitzen, wie die Tangenten von K_m in den Punkten D, E, F. Da nun der Schwerpunkt S des Dreiecks ABC, welcher zugleich Schwerpunkt des Dreiecks DEF ist, der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise K und K_m ist, wie weiter unten folgt (§ 24), so laufen die Tangenten von K und K_m in den Ecken A, B, C und D, E, F zu je zweien einander parallel. Aus diesem Verhalten schließen wir, daß die Doppeltangenten von E^4 und der zugehörigen M^4 paarweise dieselbe Richtung besitzen. (Vergl. Fig. 16).

Wir können weiterhin nach dem Orte der Mittelpunkte der Kegelschnitte C^2_m fragen, welche M^4 einhüllen. Da sämtliche C^2_m einander ähnlich sind, so gelangen wir zu dem gesuchten Orte in derselben Weise, wie vom Systeme der C^2 zur Kurve M^4; folglich liegen die Mittelpunkte sämtlicher C^2_m auf einer neuen Kurve M^4_1, welche g_∞ in I und J berührt, und in den Mitten D', E', F' der Seiten des Dreiecks DEF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

je einen Doppelpunkt besitzt. M^4_1 ist die Enveloppe einer neuen Schaar unter einander ähnlicher Kegelschnitte C^2_{m1}, welche dem Dreiecke D'E'F' umschrieben sind. Sind C^2_m Ellipsen oder Hyperbeln, so besteht das System der C^2_{m1} aus Hyperbeln oder Ellipsen von demselben Axenverhältnisse oder von gleichem Winkel zwischen den Asymptoten resp. den gleichen konjugierten Durchmessern. Die Kegelschnitte C^2_{m1} sind folglich den ursprünglichen C^2 ähnlich; da ferner Dreieck D'E'F' zum Dreiecke ABC ähnlich und ähnlich gelegen ist und das Ähnlichkeitsverhältnis beider Dreiecke 1 : 4 beträgt, so müssen alle C^2_{m1} zu den C^2 ähnlich und ähnlich gelegen sein und in ihren linearen Dimensionen sich wie 1 : 4 verhalten. Auch die beiden Kurven E^4 und M^4_1 haben genau dieselbe Gestalt und Lage; es erscheint M^4_1 als E^4 in vierfach verjüngtem Maßstabe.

Wir können weiter nach dem Orte der Mittelpunkte sämtlicher C^2_{m1} fragen und gelangen zu einer neuen Kurve M^4_2, welche dasselbe Verhältnis zu M^4 besitzt, wie M^4_1 zu E^4. Wir können so unbegrenzt fortfahren und finden auf diese Weise eine unendliche Reihe von Kurven 4ter Ordnung, welche sämtlich g_{∞} in I und J berühren und in den Mitten der Seiten der auf einander folgenden Dreiecke, welche alle ähnlich und ähnlich gelegen sind und den Schwerpunkt S vom ursprünglichen Dreiecke ABC zum gemeinsamen Schwerpunkte und Kollineationsmittelpunkte haben, je einen Doppelpunkt besitzen; die Kurven 4ter Ordnung werden dabei abwechselnd von Systemen unter einander ähnlicher Ellipsen und Hyperbeln, deren Axenverhältnis jedoch konstant bleibt, eingehüllt.

§ 24.

Der Büschel gleichseitiger Hyperbeln.

Eine hervorragende Stellung unter den Systemen ähnlicher Kegelschnitte, welche wir behandelt haben, nimmt der Büschel gleichseitiger Hyperbeln ein. Obwohl wir in den vorigen Paragraphen schon öfters Gelegenheit gehabt haben, zu beobachten, welche Vereinfachungen in Bezug auf die abgeleiteten und dort besprochenen Gebilde für diesen Fall eintreten, so möge es doch erlaubt sein, zum Schlusse noch einige kleinere auf dieses System bezügliche Untersuchungen zu führen.

Wir sind schon öfters dem Satze begegnet:

„Jede einem Dreiecke umschriebene gleichseitige Hyperbel geht durch den Höhenpunkt desselben."

Wird das gegebene Dreieck insbesondere rechtwinklig, so fällt der Höhenpunkt in den Scheitel des rechten Winkels; dabei muß derselbe jedoch in Richtung der Hypotenusenhöhe genommen werden. Wir gelangen deshalb sofort zu dem Satze:

„Alle gleichseitigen Hyperbeln, welche einem rechtwinkligen Dreiecke umschrieben sind, berühren sich im Scheitel des rechten Winkels und haben die Hypotenusenhöhe des Dreiecks zur gemeinsamen Tangente."

Aus diesem Satze läßt sich eine einfache Konstruktion der Tangente und Normale in einem Punkte P einer gleichseitigen Hyperbel ableiten. Wir ziehen durch P 2 Geraden, die auf einander senkrecht stehen; verbinden wir alsdann die zweiten Schnittpunkte Q und R dieser Geraden mit der Kurve, welche bei vollständig gezeichneter Kurve sofort gegeben sind oder bei genügender Anzahl bestimmender Punkte mit Hülfe des Paskal'schen Lehrsatzes leicht gefunden werden können, mit einander und fällen von P aus die Senkrechte PT auf QR, so ist PT die gesuchte Tangente und eine Parallele zu QR durch P die verlangte Normale (Fig. 17).

Da wir von den Linien QP und RP nur voraussetzen, daß sie durch P gehen und auf einander senkrecht stehen, so erhalten wir, weil QR stets parallel zu der unveränderlichen Normale in P ist, folgenden Satz:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

„Dreht man um einen Punkt P einer gleichseitigen Hyperbel einen rechten Winkel, so laufen alle Durchschnittssehnen desselben mit der Kurve einander parallel und besitzen dieselbe Richtung wie die Normale der Kurve im Punkte P.“ (Fig. 17.)

Der eben abgeleitete Satz kann leicht auf anderem Wege nachgewiesen werden und erscheint dann als Spezialfall eines allgemeinen, auf alle Kegelschnitte bezüglichen Lehrsatzes. Denken wir uns nämlich einen Punkt einer Kurve 2ter Ordnung als Mittelpunkt einer zirkularen Strahleninvolution, so müssen bekanntlich die Durchschnittssehnen der Paare zugeordneter Strahlen mit der Kurve durch einen Punkt laufen, welcher auf der Normalen des Punktes liegt, da Tangente und Normale desselben auch als ein Paar konjugierter Strahlen auftreten. Bei der gleichseitigen Hyperbel wird nun dasjenige Paar, dessen Geraden aus Parallelen zu den Asymptoten bestehen, die unendlich ferne Gerade zur Durchschnittssehne haben, woraus folgt, daß alle Durchschnittssehnen einander parallel laufen.

Wir haben in § 23 gefunden, daß der Ort der Mittelpunkte des gegebenen Büschels gleichseitiger Hyperbeln der Kreis K_m ist, welcher durch die Höhenfußpunkte und die Mitten der Seiten des Dreiecks ABC geht. Wir geben noch eine andere Ableitung dieses Satzes, welche über die Beziehung des merkwürdigen Kreises K_m zum gegebenen Dreiecke nähere Aufschlüsse erteilt.

Wir benutzen den in § 7 bewiesenen Satz, daß durch die projektivische Drehung die Involution konjugierter Punkte auf irgend einer Geraden g′ in Bezug auf den Drehkreis K′ in diejenige Punktinvolution auf dem entsprechenden Kegelschnitte C^2 verwandelt wird, deren Involutionszentrum der Mittelpunkt von C^2 ist. Nun entsteht der betrachtete Büschel gleichseitiger Hyperbeln, die wir kurz mit C^2_0 bezeichnen wollen, aus demjenigen Strahlenbüschel der X′-Ebene, dessen Mittelpunkt O′, das Zentrum von K′, ist. Da auf jeder Geraden g′ dieses Büschels O′ und der unendlich ferne Punkt konjugiert in Bezug auf K′ sind, da ferner dem Punkte O′ der Höhenpunkt H des Dreiecks ABC entspricht und sämtliche unendlich ferne Punkte der X′-Ebene in die Punkte des ABC umschriebenen Kreises K übergehen, so folgt, daß H und sämtliche Punkte von K die Endpunkte eines Durchmessers je einer C^2_0 sind. Da nun der Mittelpunkt eines Kegelschnitts das von der Kurve begrenzte Stück eines Durchmessers halbiert, so erkennen wir den gesuchten Ort der Mittelpunktskurve von C^2_0 als identisch mit dem Orte derjenigen Punkte, welche die Strecken, gezogen von H bis zu allen Punkten von K, halbieren. Dieser Ort ist ein Kreis K_m, dessen Mittelpunkt die Mitte M der Strecke HO und dessen Radius gleich der Hälfte des Radius von K, also gleich $\frac{r}{2}$ ist. Verbinden wir nämlich einen Punkt Q von K mit H und O und die Mitte P von HQ mit M, so erkennen wir unmittelbar, daß $MP = \frac{OQ}{2} = \frac{r}{2}$ ist. (Fig. 18.)

Wir finden zugleich, daß der Höhenpunkt H äußeres Ähnlichkeitszentrum der beiden Kreise K und K_m und daß das Ähnlichkeitsverhältnis derselben 2 : 1 ist. Das innere Ähnlichkeitszentrum S muß die Zentrale OM in demselben Verhältnisse innerlich teilen, wie H äußerlich, folglich ist

$$OS = 2\,SM,\ OS = \frac{2}{3}\,MO = \frac{1}{3}\,OH.$$

Nach dem Euler'schen Satze kann S deshalb kein anderer Punkt als der Schwerpunkt des Dreiecks ABC sein. Die Punkte O und M werden durch S und H harmonisch getrennt.

Zieht man durch H und S irgend 2 Geraden, so werden durch dieselben in den Kreisen K und K_m je 4 Durchschnittssehnen bestimmt, welche paarweise einander parallel laufen, paarweise sich auf der gemeinsamen Potenzlinie von K und K_m schneiden. Fallen die beiden Strahlen zusammen, so gilt dasselbe,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

was eben von den Durchschnittssehnen behauptet wurde, von den Tangenten in den 4 Schnittpunkten. (Salmon, An. Geom. der Kegelschn., S. 192.)

Da H das äußere, S das innere Ähnlichkeitszentrum von K und K_m ist, so schneiden sich die äußeren gemeinsamen Tangenten beider Kreise in H, die innere in S. Beide Tangentenpaare sind bei einem spitzwinkligen Dreiecke imaginär, da S und H innerhalb des Dreiecks liegen; ist Dreieck ABC stumpfwinklig, so fällt H außerhalb beider Kreise und ist der Schnittpunkt der äußeren gemeinschaftlichen Tangenten, die hier reell vorhanden sind. Wird das Dreieck endlich rechtwinklig, so fällt H in den Scheitel des rechten Winkel; K_m ist dann derjenige Kreis, welcher über der Verbindungslinie dieses Scheitels mit der Mitte der Hypotenuse als Durchmesser beschrieben ist, er berührt K im Scheitel des rechten Winkels.

Der Kreis K_m enthält die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche dem Dreiecke ABC umschrieben sind; er muß demnach auch durch die Schnittpunkte der 3 Geradenpaare des Büschels, die Höhenfußpunkte hindurchgehen. Dies läßt sich auch leicht direkt zeigen; nennen wir die Schnittpunkte der Höhe BH mit AC und K resp. U und V, so ist:

$$\sphericalangle\ VAC = \sphericalangle\ VBC = \sphericalangle\ CAH, \text{ folglich } \triangle\ AUV \cong \triangle\ AHU,$$

woraus folgt, daß HU = UV ist; mithin muß U ein Punkt von K_m sein. Dieser Kreis geht außerdem durch die Halbierungspunkte der oberen Segmente der Höhen und die Mitten der Dreiecksseiten. Ersteres folgt unmittelbar aus der Entstehungsweise, letzteres ist sofort einleuchtend, wenn man erwägt, daß die Verbindungslinien der Ecken mit den Mitten der Gegenseiten sich im Schwerpunkte treffen und letzterer inneres Ähnlichkeitszentrum von K und K_m ist; vom Schwerpunkte S wissen wir nämlich, daß

$$SB = 2\ SE.$$

Nach dem Gesagten liegen 9 hervorragende Punkte des Dreiecks ABC auf K_m, er wird deshalb kurz der „Neunpunktkreis" genannt. Wir können hiernach leicht den Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel erhalten, sobald zur Bestimmung derselben 4 Punkte gegeben sind, von denen jedoch keiner der Höhenpunkt des Dreiecks der drei übrigen ist. Wir haben nämlich nur je drei der Punkte zu einem Dreiecke zu verbinden und durch die Mitten der Seiten Kreise zu legen. Wir erhalten hierbei noch folgenden Satz:

„Verbindet man 4 Punkte auf alle möglichen Weisen zu je dreien und legt durch die Mitten der Seiten der 4 erhaltenen Dreiecke Kreise, so schneiden sich diese in einem Punkte."

Außerdem hat K_m die bemerkenswerte Eigenschaft, die 4 dem Dreiecke ABC eingeschriebenen Kreise sämtlich zu berühren; nach dem ersten Auffinder dieser Eigentümlichkeit heißt K_m gewöhnlich der Feuerbach'sche Kreis.

Verbindet man die Ecken des Dreiecks ABC mit dem Höhenpunkte H und dem Mittelpunkte O von K, so bilden diese Verbindungslinien mit den Dreiecksseiten gleiche Winkel. Daraus folgt nach einem bekannten Satze, daß H und O die Brennpunkte eines bestimmten Kegelschnitts C^2_f sind, welcher die Seiten des Dreiecks berührt. Nun liegen bei jedem Kegelschnitte die Fußpunkte der Lote, gefällt von den Brennpunkten auf die Tangenten des Kegelschnitts, auf demjenigen Kreise, welcher über der Hauptaxe als Durchmesser beschrieben ist. Da nun K_m durch die Mitten der Dreiecksseiten und die Höhenfußpunkte hindurchgeht, so muß er der über der Hauptaxe von C^2_f als Durchmesser beschriebene Kreis sein. Er berührt demnach C^2_f in den Scheiteln der Hauptaxe, deren Länge gleich r ist. Mit Hülfe von K_m kann man leicht beliebig viele Tangenten von C^2_f konstruieren, indem man irgend einen Punkt P von K_m mit O oder H verbindet und in P auf PO resp. PH die Senkrechte errichtet, oder einfacher:

Man ziehe durch O und H irgend 2 zu einander parallele Geraden und verbinde die auf derselben Seite von OH liegenden Schnittpunkte derselben mit K_m mit einander; dadurch erhält man je 2 parallele Tangenten von C^2_f.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Kreis K ist offenbar der Ort der Gegenpunkte von H in Bezug auf alle Tangenten von C^2_f; er erlaubt auf einfache Weise die Konstruktion des Berührungspunktes jeder Tangente. Um z. B. die Berührungspunkte auf den Seiten des Dreiecks ABC zu finden, hat man nur O mit den Punkten, in denen die Höhen K zum 2ten male treffen, zu verbinden und die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit den zugehörigen Dreiecksseiten aufzusuchen. (Fig. 18.)

Die Tangenten von K_m in den Endpunkten des Durchmessers OH, welche zugleich Scheiteltangenten von C^2_f sind, schneiden jede Tangente von C^2_f, insbesondere die Dreiecksseiten in solchen Punkten X, Y, daß sowohl $\sphericalangle$ XOY als auch $\sphericalangle$ XHY 90° beträgt. Dies folgt aus der bekannten Brennpunktseigenschaft, daß die Strecke einer veränderlichen Tangente, welche zwischen 2 festen Tangenten liegt, am Brennpunkte einen konstanten Winkel spannt; daß in vorliegendem Falle dieser Winkel ein rechter ist, erkennt man sofort, wenn man die variable Tangente im Grenzfalle mit der einen Scheiteltangente zusammenfallen läßt.

Ist Dreieck ABC spitzwinklig, so muß C^2_f eine Ellipse sein, da beide Brennpunkte innerhalb des Dreiecks liegen; hingegen fallen beim stumpfwinkligen Dreiecke beide Brennpunkte außerhalb desselben, woraus folgt, daß alsdann C^2_f eine Hyperbel ist. Im Übergangsfalle, wo ABC rechtwinklig ist, fallen H und O auf den Umfang des Dreiecks; C^2_f entartet in ein Punktepaar, den Scheitel des rechten Winkels und den Mittelpunkt der Hypotenuse.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

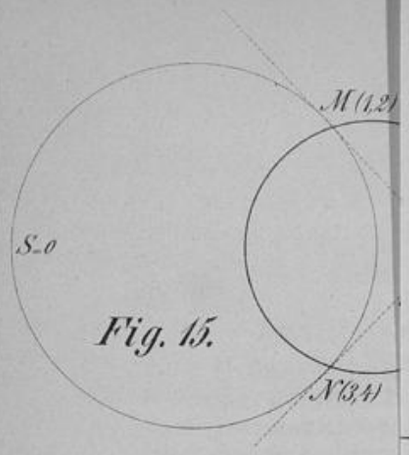


Fig. 15.

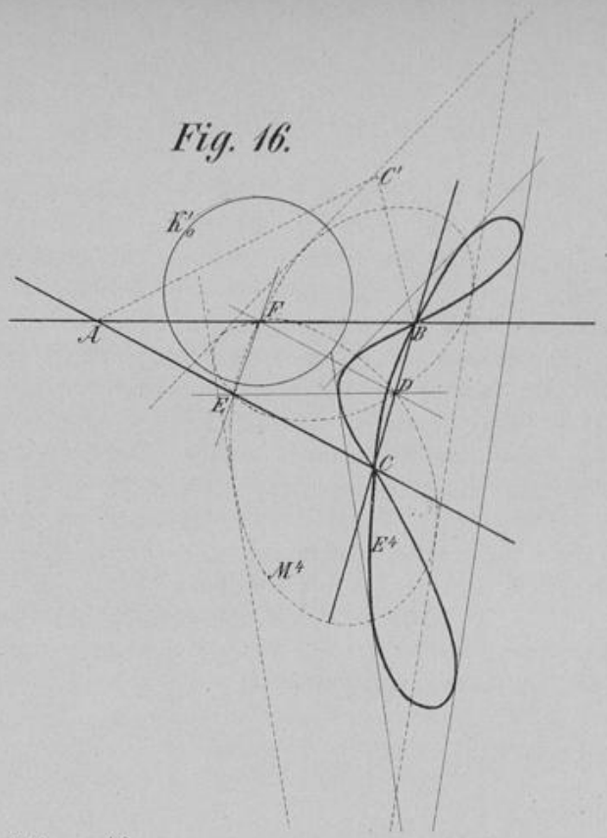


Fig. 16.

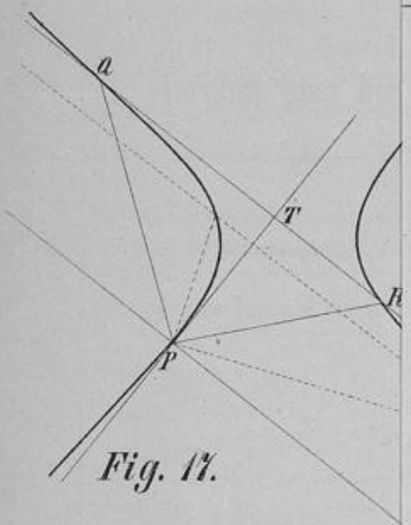
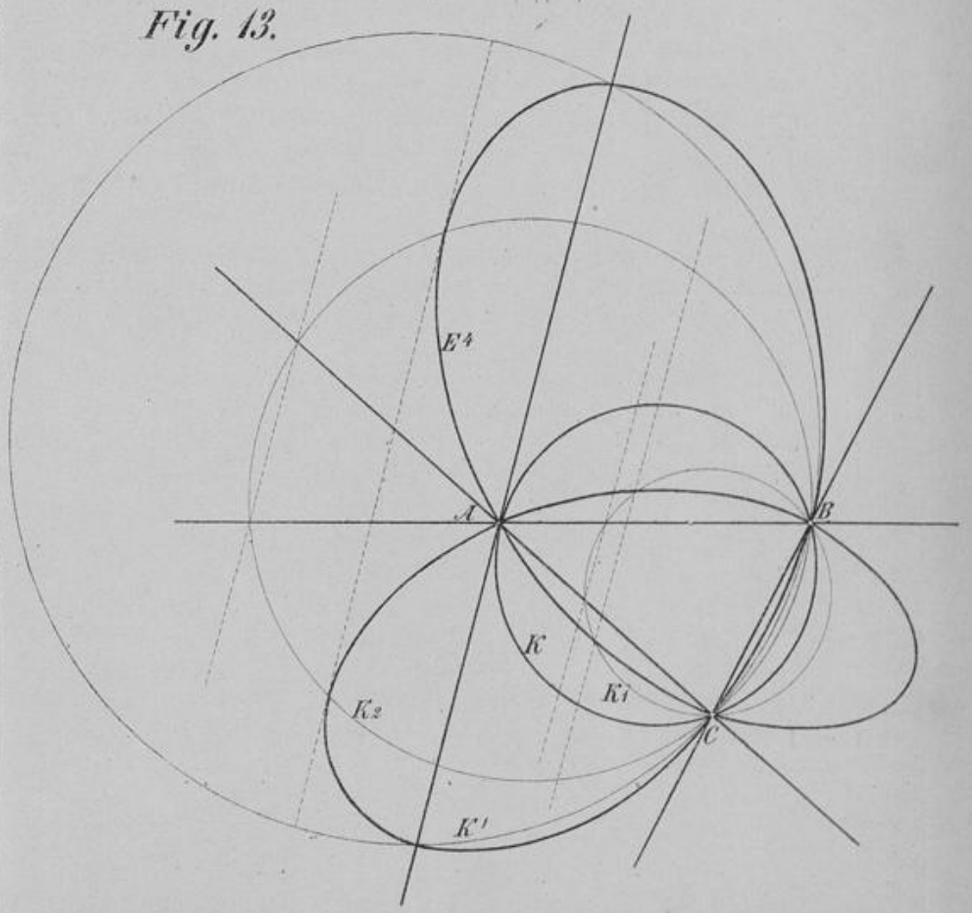


Fig. 17.

Fig. 13.



Fig

Lith. Louis Espagne, Münster.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

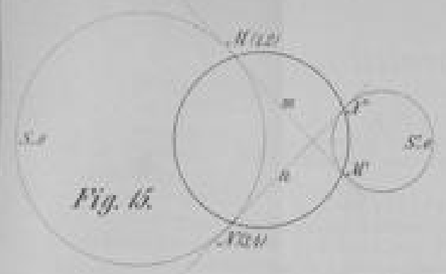


Fig. 15.

Fig. 14.

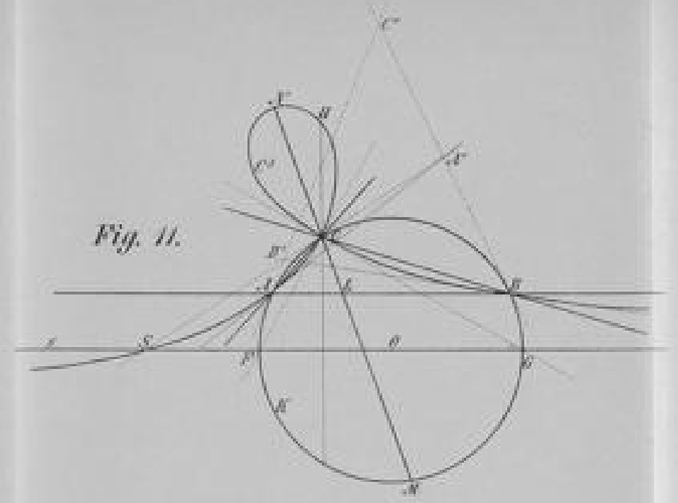


Fig. 11.

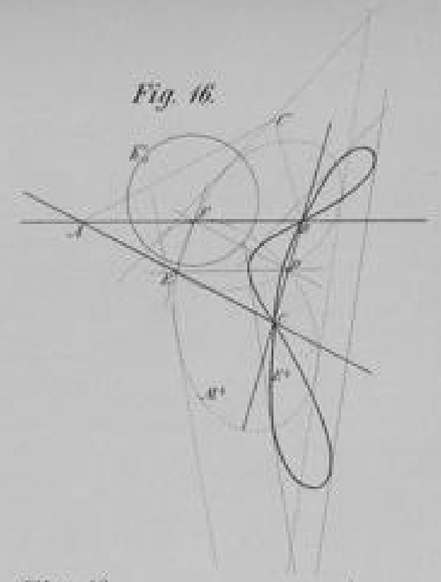


Fig. 16.

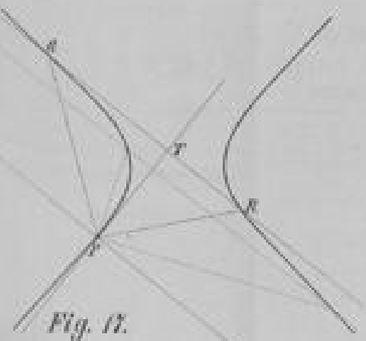


Fig. 17.

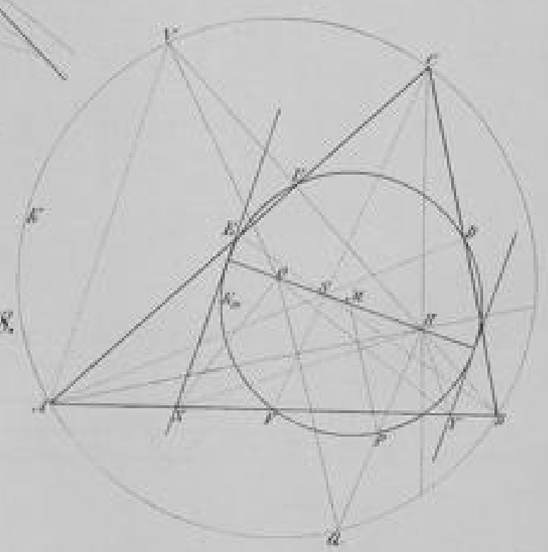


Fig. 18.

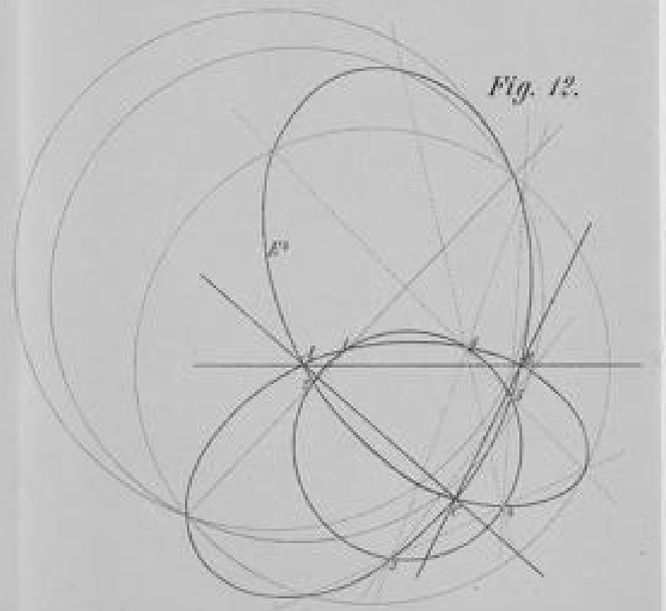


Fig. 12.

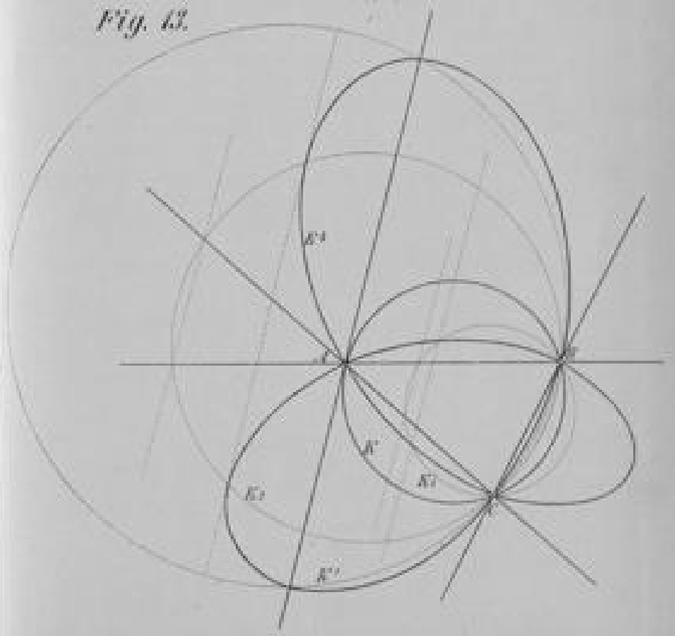


Fig. 13.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf