Beilage

zum

Programm des Kgl. Gymnasiums

zu

Warendorf.

Qwa (1894)
10

1894. Progr. № 366.

3666

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Grundlehren

der

analytischen Planimetrie.

Von

Dr. J. Temme,

Professor am Gymnasium zu Warendorf.

Warendorf.

Druck und Verlag der J. Schnell'schen Buchhandlung

(C. Leopold).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Grundlehren
der analytischen Planimetrie.

Gegenstand der sogenannten analytischen Geometrie ist die Bestimmung der Raumgebilde nach Lage, Gestalt und Größe mit Hülfe der Rechnung.

I. Der Punkt.

1. Um die Lage des Punktes P in einer Ebene zu bestimmen, zieht man in dieser Ebene (Fig. 1) XX_1 und $YOY_1 \perp XX_1$, ferner $PQ \perp XX_1$ und mißt OQ und PQ. Haben nun XX_1 und YY_1 eine feste Lage, und kennt man die Strecken OQ und PQ, so ist der Punkt P gegeben. Die Maßzahl der Strecke OQ heißt die Abscisse, die Maßzahl der Strecke PQ heißt die Ordinate des Punktes P; beide heißen Koordinaten, und zwar rechtwinklige, weil $YY_1 \perp XX_1$. XX_1 und YY_1 heißen Koordinatenaxen, und zwar XX_1 die Abscissenaxe oder X-Axe und YY_1 die Ordinatenaxe oder Y-Axe; der Punkt O heißt Anfang der Koordinaten.

Bewegt sich ein Punkt, so ändern sich seine Koordinaten. Die veränderlichen Koordinaten eines Punktes P bezeichnet man mit x und y, und zwar so, daß x die Abscisse und y die Ordinate ist; den Punkt selbst bezeichnet man durch P (x, y).

2. Es kann ein Punkt nach den vier Quadranten, in welche die Koordinatenaxen ihre Ebene teilen, eine vierfache Lage haben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um diese Verschiedenheit auszudrücken, denkt man die Koordinaten als Strecken, welche durch Bewegung eines Punktes entstehen, und zwar betrachtet man bei der Abscisse die durch Bewegung nach rechts, bei der Ordinate die durch Bewegung nach oben entstehende Strecke als die positive, so daß die durch entgegengesetzte Bewegung entstehenden Strecken negativ zu nehmen sind. Setzt man nun, absolut genommen, $OQ_1 = OQ_2 = a$ und $P_1Q_1 = P_2Q_2 = P_3Q_2 = P_4Q_1 = b$ (Fig. 1), so ist

für P_1 (x_1, y_1) . . . . . $x_1 = +a$, $y_1 = +b$,
„ P_2 (x_2, y_2) . . . . . $x_2 = -a$, $y_2 = +b$,
„ P_3 (x_3, y_3) . . . . . $x_3 = -a$, $y_3 = -b$,
„ P_4 (x_4, y_4) . . . . . $x_4 = +a$, $y_4 = -b$.

3. **Aufgaben.**

a) Suche P (3,2), P (3,—4), P (—3,2), P (—4,—5), P (0,—3), P (0,0).

b) Suche den Punkt, welcher durch die Gleichungen: $3x + 2y = 12$ und $5x + 3y = 19$ bestimmt wird.

c) Welche Punkte werden durch die Gleichungen: $x^2 + y^2 = 25$ und $3x + 4y = 24$ bestimmt?

d) Berechne die Entfernung der Punkte P_1 (5,2) und P_2 (4,—3).

Um eine Strecke d aus den Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der Endpunkte P_1 und P_2 zu berechnen, bedenkt man, daß die fragliche Strecke Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen eine Kathete die Differenz der Abscissen, dessen andere Kathete die Differenz der Ordinaten ist. Es ist (Fig. 2)

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Sind die Abscissen oder die Ordinaten entgegengesetzt, so verwandelt sich die betreffende Differenz in eine Summe.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

e) Suche den Punkt, welcher von den Punkten (6,—2), (5,3), (—1,4) gleiche Entfernung hat, und berechne die Entfernung.

Ist P (x, y) der fragliche Punkt, so ist $(x-6)^2 + (y+2)^2 = (y-5)^2 + (y-3)^2 = (x+1)^2 + (y-4)^2$.

f) Berechne den Inhalt J des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ aus den Koordinaten der Ecken.

Nimmt man die Koordinatenaxen so, daß die drei Ecken dem Quadranten XOY angehören, und zieht man P_1Q_1, P_2Q_2, $P_3Q_3 \perp XX_1$, so ist, wenn Q_3 zwischen Q_1 und Q_2 fällt,

$$J = P_1Q_1Q_3P_3 + P_2Q_2Q_3P_3 - P_1Q_1Q_2P_2$$
$$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\right].$$

II. Die Linie und ihre Gleichung.

1. Hat man eine Gleichung, worin das Abhängigkeitsverhältnis zwischen zwei noch nicht bestimmten Größen, etwa x und y, zum Ausdruck gebracht ist, und nimmt man beliebige Werte der Größe x als Abscissen und die zugehörigen Werte der Größe y als die entsprechenden Ordinaten von Punkten, so können diese als Punkte einer Linie gedacht werden, deren Lauf durch jene Gleichung ausgedrückt ist, welche als Gleichung der Linie bezeichnet wird. x und y heißen die laufenden Koordinaten des die Linie durch Bewegung bildenden Punktes.

2. Geometrische Deutung einiger Gleichungen.

a) $y = 2x$.

Setzt man $x = 0$, so ist $y = 0$; setzt man $x = \pm a$, so ist $y = \pm 2a$. Der Gleichung $y = 2x$ entspricht also der Koordinatenanfang und jeder andere Punkt, dessen Ordinate das Doppelte der Abscisse ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) $y = 2x - 3$ und $y = -3x + 5$.
Bestimme etwa zu den Werten: $-2, -1, 0, 1, 2$ für x die entsprechenden Werte von y.

c) $y = x^2$.
Den Werten: $0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ für x entsprechen die Werte: $0, 1, 4 \ldots$ für y.

d) $y^2 = 4x$. S. VII. 3.
Den Werten: $0, 1, 4, 9 \ldots$ für x entsprechen die Werte: $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6 \ldots$ für y. Für negative Werte von x gibt es keine Werte von y.

e) $x^2 + y^2 = 4$. S. IV. 2.
Den Werten: $0, 1, 2, 3 \ldots$ für x entsprechen die Werte: $\pm 2, \pm 1{,}7, 0, \pm \sqrt{-5} \ldots$ für y. Setzt man $x > 2$, so ist y imaginär.

f) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. S. V. 3.
Den Werten: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6 \ldots$ für x entsprechen die Werte: $\pm 3, \pm 2{,}9, \pm 2{,}7, \pm 2{,}4, \pm 1{,}8, 0 \pm \sqrt{-3{,}96} \ldots$ für y. y wird imaginär, sobald (absolut) $x > 5$. Ebenso wird x imaginär, sobald (absolut) $y > 3$.

g) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$. S. VI. 3.
So lange (absolut) $x < 5$, ist y imaginär; dagegen entspricht jedem positiven wie auch jedem negativen Werte von y ein reeller Wert von x.

Den Werten: $\pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8 \ldots$ für x entsprechen die Werte: $0, \pm 1{,}99, \pm 2{,}9, \pm 3{,}7 \ldots$ für y.

h) $y = r. \sin \varphi$, wo r eine unveränderliche Gerade und φ einen veränderlichen Winkel oder Bogen bezeichnet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nimmt man (Fig. 3) auf der positiven Seite der Abscissenaxe $OA = 6{,}28\ r = 2\pi r$, so ist OA annähernd der rektifizierte Kreis vom Radius r. Nun nimmt man als Abscisse OQ eine nach einem Teil von OA gemessene Strecke und betrachtet OQ als rektifizierten Kreisbogen zum Centriwinkel φ; dann ist y die entsprechende Ordinate.

Setzt man etwa der Reihe nach als Werte von $\pm$ OQ: $0, \frac{1}{12} OA, \frac{1}{4} OA, \frac{5}{12} OA, \frac{1}{2} OA, \frac{7}{12} OA, \frac{3}{4} OA, \frac{11}{12} OA,$ OA u. s. w., so sind die entsprechenden Werte von φ: $0, \pm 30^0, \pm 90^0, \pm 150^0, \pm 180^0, \pm 210^0, \pm 270^0, \pm 330^0, \pm 360^0$ u. s. w., und die entsprechenden Werte von y: $0, \pm \frac{1}{2} r, \pm r, \pm \frac{1}{2} r, 0, \mp \frac{1}{2} r, \mp r, \mp \frac{1}{2} r, 0$ u. s. w.

i) $y = r. \cos \varphi$.

Man verfahre wie in h, nehme aber (Fig. 4) als Werte von $\pm$ OQ: $0, \frac{1}{6} OA, \frac{1}{4} OA, \frac{1}{3} OA, \frac{1}{2} OA, \frac{2}{3} OA, \frac{3}{4} OA, \frac{5}{6} OA,$ OA u. s. w., so sind die entsprechenden Werte von φ: $0, \pm 60^0, \pm 90^0, \pm 120^0, \pm 180^0, \pm 240^0, \pm 270^0, \pm 300^0, \pm 360^0$ u. s. w., und die entsprechenden Werte von y: $r, \frac{1}{2} r, 0, -\frac{1}{2} r, -r, -\frac{1}{2} r, 0, \frac{1}{2} r, r$ u. s. w.

k) $y = r. \operatorname{tang} \varphi$.

Man verfahre wie in h, nehme aber (Fig. 5) als Werte von $\pm$ OQ: $0, \frac{1}{8} OA, \frac{1}{4} OA, \frac{3}{8} OA, \frac{1}{2} OA, \frac{5}{8} OA, \frac{3}{4} OA, \frac{7}{8} OA,$ OA u. s. w., dann sind die entsprechenden Werte von φ: $0, \pm 45^0, \pm 90^0, \pm 135^0, \pm 180^0, \pm 225^0, \pm 270^0, \pm 315^0, \pm 360^0$ u. s. w., und die entsprechenden Werte von y: $0, \pm 1, \infty, \mp 1, 0, \pm 1, \infty, \mp 1, 0$ u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) $y = r. \cot \varphi$.

Man verfahre wie in k (Fig. 6).

Anmerkung. Die Zeichnung der Punkte läßt erkennen, daß diese bei a und b einer geraden Linie, in den übrigen Fällen einer Kurve angehören. Es wird später (III. 2) gezeigt werden, daß eine Gleichung, welche rücksichtlich ihrer veränderlichen Größen dem ersten Grade angehört, die Gleichung einer geraden Linie ist. Jeder Gleichung anderer Art entspricht eine Kurve.

III. Die gerade Linie.

1. **Aufgabe.** Bilde die Gleichung der geraden Linie.

Lösung. Die gerade Linie ist bestimmt a) durch zwei ihrer Punkte, b) durch einen ihrer Punkte und den Winkel, welchen sie mit einer festen geraden Linie bildet.

a) Um die Gleichung der durch die Punkte A und B gehenden Geraden zu bilden, nimmt man die Koordinatenaxen so, daß A in OX und B in OY liegt, mißt OA und OB und bezeichnet die entsprechenden Maßzahlen mit a und b. Es kommt nun darauf an, eine Gleichung zu bilden zwischen den Koordinaten eines beliebigen Punktes P der gegebenen Linie und den Zahlen a und b. Ist nun (Fig. 7) $PQ \perp OX$, so ist, weil AB eine gerade Linie sein soll, $\frac{PQ}{BO} = \frac{AQ}{AO}$ oder $\frac{y}{b} = \frac{a - x}{a}$ oder

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

und dies ist die Gleichung der geraden Linie, welche vom Anfang der Koordinaten aus auf der Abscissenaxe die Strecke a und auf der Ordinatenaxe die Strecke b abschneidet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Größen a und b heißen konstant, weil sie einen bestimmten, also unveränderlichen Wert haben; die Größen x und y ändern sich mit dem Punkte P. Ist etwa $a = 3$ und $b = 4$, so ist, wenn $x = 1$, $y = 2^2/_3$. Es ist also P ein Punkt der fraglichen geraden Linie, wenn $OQ = 1$ cm und $PQ = 2^2/_3$ cm. Für $x = 3$ ist $y = 0$, d. h. A ist der fragliche Punkt.

b) Um die Gleichung der geraden Linie zu bilden, welche durch den gegebenen Punkt B geht (Fig. 8) und die gegebene MN unter dem gegebenen Winkel α schneidet, zieht man $XAX_1 \parallel MN$, $YOY_1 \perp XX_1$ durch B und setzt $BO = b$. Um nun zu einer Gleichung zu gelangen zwischen den Koordinaten eines beliebigen Punktes P der gedachten Linie und den konstanten Größen α und b, zieht man $PQ \perp XX_1$ und $BR \perp PQ$. Dann ist $\frac{PR}{BR} = \text{tang}\ \alpha = \frac{y - b}{x}$ oder $y = x\ \text{tang}\ \alpha + b$. Nun setzt man $\text{tang}\ \alpha = a$, und es ist

$$y = ax + b$$

die Gleichung der geraden Linie, welche durch den Punkt B geht, so daß $BO = b$, und die Abscissenaxe unter dem Winkel α schneidet, so daß $\text{tang}\ \alpha = a$.

Die Größe a wird Richtungskonstante genannt. Der Winkel α wird so gerechnet, daß die Drehung von der positiven Richtung der Abscissenaxe aus von rechts nach links erfolgt.

Der Gleichung $y = ax + b$ läßt sich auch die Form $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (III. 1. a) geben, und umgekehrt.

2. **Lehrsatz.** Der geometrische Ort des Punktes, dessen Koordinaten der Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ genügen, ist die Gerade AB, wenn auf OX die $OA = a$ und auf OY die $OB = b$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. Ist etwa $\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} = 1$ für P_1 (x_1, y_1), so muß P_1 in AB liegen. Sollte nämlich P_1 nicht in AB liegen (Fig. 7), und zöge man $P_1Q_1 \perp XX_1$, so schnitte P_1Q_1 die AB etwa in R. Nun wäre $\frac{OQ_1}{a} + \frac{RQ_1}{b} = 1$ und auch $\frac{OQ_1}{a} + \frac{P_1Q_1}{b} = 1$ (beachte, daß OQ_1 negativ ist), also $RQ_1 = P_1Q_1$.

3. **Diskussion der Gleichung** $y = ax + b$.

a) Setzt man $b = o$, so erhält man $y = ax$ als die Gleichung einer durch den Koordinatenanfang gehenden Geraden, was sich auch unmittelbar ergibt aus: $\frac{y}{x} = \text{tang } \alpha$.

$y = ax$ wird die Gleichung der Abscissenaxe, wenn $\alpha = o$, also $a = o$. Die Gleichung der Abscissenaxe ist also $y = o$, wobei x jeden beliebigen Wert haben kann. Ebenso ist $x = o$ die Gleichung der Ordinatenaxe, wobei y jeden beliebigen Wert haben kann.

b) Soll die gerade Linie, deren Gleichung $y = ax + b$ ist, zur Abscissenaxe im Abstande b parallel sein, so muß $\alpha = o$, also auch $a = o$ sein. Daher ist $y = b$ die Gleichung der im Abstande b zur Abscissenaxe parallelen Linie. Ebenso ist $x = b$ die Gleichung der im Abstande b zur Ordinatenaxe parallelen Linie.

c) Soll die gerade Linie, deren Gleichung $y = ax + b$ ist, gezogen werden, so bestimmt man die Punkte, worin sie die Axen schneidet, indem man einmal $y = o$ und dann $x = o$ setzt.

4. **Aufgaben.**

a) Bilde die Gleichung der Geraden, welche auf der Abscissenaxe die Strecke -4 und auf der Ordinatenaxe die Strecke 2 abschneidet, und berechne den Winkel, unter welchem sie die Abscissenaxe schneidet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) Bilde die Gleichung der Geraden, welche die Abscissenaxe unter einem Winkel von 45^0 schneidet und auf der Ordinatenaxe die Strecke -3 abschneidet.

c) Ziehe die Linien, deren Gleichungen sind: $y = 2x - 3$, $y = -3x + 5$, $y = 4x$.

d) Bilde die Gleichung der Geraden, welche durch P_1 (x_1, y_1) geht.

Lösung. Soll die Linie, deren Gleichung $y = ax + b$ ist, durch P_1 gehen, so müssen jener Gleichung auch die Koordinaten x_1 und y_1 genügen, so daß auch $y_1 = ax_1 + b$. Verschmilzt man nun die beiden Gleichungen durch Subtraktion, so erhält man

$$y - y_1 = a\,(x - x_1)$$

als Gleichung der geraden Linie, welche durch P_1 (x_1, y_1) geht.

Die Konstante b ist verschwunden, was wegen der Bedingung, daß die Linie durch P_1 gehen soll, notwendig war.

e) Bilde die Gleichung der Geraden, welche durch $P\,(-3, 2)$ geht und die Abscissenaxe unter einem Winkel von 135^0 schneidet.

Lösung. Da tang $135^0 = -1$, so lautet die fragliche Gleichung: $y - 2 = -x - 3$ oder $y = -x - 1$.

f) Bilde die Gleichung der Geraden, welche durch P_1 (x_1, y_1) und P_2 (x_2, y_2) geht.

Lösung. Der allgemeinen Gleichung der geraden Linie müssen, wenn diese durch P_1 und P_2 gehen soll, auch die Koordinaten dieser Punkte genügen, so daß neben der Gleichung $y = ax + b$ auch die Gleichungen $y_1 = ax_1 + b$ und $y_2 = ax_2 + b$ bestehen. Die gesuchte Gleichung erhält man nun durch Verschmelzung dieser drei Gleichungen in eine. Zu diesem Zwecke verbindet man eine der besonderen Gleichungen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

mit der allgemeinen und die beiden besonderen mit einander durch Subtraktion und erhält die beiden Gleichungen:

$$y - y_1 = a(x - x_1) \text{ und } y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

Nun verschmilzt man diese beiden Gleichungen durch Division, um a zu beseitigen, und erhält

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{ oder } \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

als die Gleichung der geraden Linie, welche durch die Punkte P_1 und P_2 geht.

Es sind beide Konstanten der allgemeinen Gleichung verschwunden, was bei der vollständigen Bestimmtheit der Linie notwendig war.

g) Bilde die Gleichung der Geraden, welche durch P (1, —1) und P (—2, 2) geht, und ziehe die Linie.

Lösung. Es ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{y + 1}{x - 1} = \frac{2 + 1}{-2 - 1}, \text{ also } y = -x.$$

Die Linie geht also durch den Koordinatenanfang (III. 3. a) und bildet, weil tang $\alpha = -1 =$ tang 135^0 ist, mit der Abscissenaxe einen Winkel von 135^0.

h) Bilde die Gleichung der Geraden, welche auf der Abscissenaxe die Strecke p und auf der Ordinatenaxe die Strecke q abschneidet, durch Anwendung von III. 4. f.

Lösung. Man erhält die fragliche Gleichung, wenn man in der Gleichung der geraden Linie, die durch P_1 (x_1, y_1) und P_2 (x_2, y_2) geht, $x_1 = p$, $y_1 = o$, $x_2 = o$, $y_2 = q$ setzt. Es ist dann $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. (Vgl. III. 1. a.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

i) Bestimme den Durchschnittspunkt und den Winkel zweier Geraden, deren Gleichungen sind

$$y = ax + b \text{ und } y = a_1 x + b_1.$$

Lösung. Man erhält als Koordinaten des fraglichen Punktes

$$x = \frac{b - b_1}{a_1 - a} \text{ und } y = \frac{a_1 b - a b_1}{a_1 - a}.$$

Der gesuchte Winkel φ ist die Differenz zwischen den Winkeln α_1 und α, welche die beiden Linien mit der Abscissenaxe bilden. Ist nun $\alpha_1 > \alpha$, so setzt man

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} (\alpha_1 - \alpha) = \frac{\operatorname{tang} \alpha_1 - \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang} \alpha_1 \operatorname{tang} \alpha} = \frac{a_1 - a}{1 + a_1 a}.$$

Sind die beiden Linien parallel, so ist $\alpha_1 = \alpha$, also $a_1 = a$, und umgekehrt; sind die Linien zu einander senkrecht, so ist $\alpha_1 = 90^0 + \alpha$, also $\operatorname{tang} \alpha_1 = - \cot \alpha$, somit $a_1 = - \frac{1}{a}$, und umgekehrt.

k) Bestimme den Durchschnittspunkt und den Winkel der Linien, deren Gleichungen sind: $y = 2x - 3$ und $y = -3x + 2$.

l) Berechne Seiten und Winkel eines Dreiecks, wenn die Gleichungen der Seiten gegeben sind.

Lösung. Die Länge der Seiten berechnet man nach I. 3. c, nachdem man die Koordinaten der Ecken nach III. 4. i berechnet hat, und die Winkel nach III. 4. i.

m) Bilde die Gleichung der Geraden, welche durch P (3, —2) geht und zu der Linie, deren Gleichung $y = 4x + 1$ ist, parallel ist. (S. III. 4. d u. i.)

n) Bilde die Gleichung der Geraden, welche durch P (3, 0) geht und zu der Linie, deren Gleichung $y = -2x + 3$ ist, senkrecht ist. (S. III. 4. d u. i.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

IV. Der Kreis.

1. Ein Kreis ist der geometrische Ort des Punktes, welcher von einem festen Punkte eine konstante Entfernung hat.

2. **Aufgabe.** Bilde die Gleichung des Kreises.

Lösung. Das Abhängigkeitsverhältnis zwischen den Koordinaten eines beliebigen Punktes P (x, y) der Peripherie und dem konstanten Radius r findet, wenn man den Mittelpunkt des Kreises als Anfang der Koordinaten nimmt, seinen Ausdruck in der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Diese Gleichung wird Mittelpunktsgleichung des Kreises genannt.

3. **Aufgabe.** Bilde die Gleichung des Kreises so, daß der Anfang der Koordinaten in die Peripherie fällt.

Lösung. Man erhält die fragliche Gleichung, wenn man in der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ (IV. 2) $x - r$ für x setzt. Dann ist

$$x^2 + y^2 = 2rx.$$

Diese Gleichung wird Scheitelgleichung des Kreises genannt.

4. **Lehrsatz.** Der geometrische Ort des Punktes, dessen Koordinaten der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ genügen, ist der Kreis vom Radius r.

Beweis. Sollte der gedachte Punkt P nicht in der Peripherie des Kreises liegen, und zöge man $PQ \perp XX_1$, so schnitte PQ den Kreis etwa in R, und es wäre $x^2 + RQ^2 = r^2$, so daß $RQ = PQ$ sein müßte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. **Aufgabe.** Bilde die Gleichung der Tangente eines Kreises.

Lösung. Man stellt die Gleichung der den Kreis in P_1 (x_1, y_1) und P_2 (x_2, y_2) schneidenden Sekante auf und läßt diese zur Tangente werden, indem man P_2 mit P_1 zusammenfallen läßt.

Die Gleichung der durch P_1 und P_2 gehenden Geraden ist $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (III. 4. f). Da nun P_1 und P_2 Punkte des Kreises sein sollen, so bestehen auch die Gleichungen:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \text{ und } x_2^2 + y_2^2 = r^2.$$

Die Gleichung der Sekante erhält man nun durch Verschmelzung dieser drei Gleichungen. Durch Verbindung der beiden letzteren Gleichungen ergibt sich

$$y_2^2 - y_1^2 = -(x_2^2 - x_1^2) \text{ oder } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der ersten, so erhält man

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$$

als Gleichung der Sekante. Setzt man nun $x_2 = x_1$ und $y_2 = y_1$, so wird die Sekante zur Tangente in P_1, und diese hat die Gleichung

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \text{ oder } xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$$

oder

$$xx_1 + yy_1 = r^2.$$

6. **Lehrsatz.** Der Berührungsradius ist zur Tangente senkrecht.

Beweis. Die Gleichung jenes Radius erhält man für P_1 (x_1, y_1), wenn man in der Gleichung der durch P_1 und P_2 gehenden Geraden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ (III. 4. f)}$$

$x_2 = y_2 = 0$ setzt, so daß

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1).$$

Stellt man dieser Gleichung des Radius OP_1 die Gleichung der durch P_1 gehenden Tangente

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

gegenüber, so erkennt man (III. 4. i), daß die beiden Linien zu einander senkrecht sind.

7. **Aufgabe.** Untersuche die gegenseitige Lage des Kreises und der geraden Linie in ihrer Abhängigkeit vom Radius und von dem Abstande des Kreismittelpunkts von der Geraden.

Lösung. Es kommt zunächst darauf an, den gedachten Abstand auszudrücken. Zu diesem Zwecke müssen die Koordinaten des Fußpunkts der vom Kreismittelpunkte zu der Geraden ($y = ax + b$) gezogenen Senkrechten bestimmt werden. Da die Senkrechte durch den Anfang der Koordinaten geht, so hat ihre Gleichung die Form $y = a_1 x$ (III. 3. a). Wegen des Senkrechtseins ist aber (III. 4. i) $a_1 = -\frac{1}{a}$, also $y = -\frac{1}{a}x$. Man erhält nun als die Koordinaten des Durchschnittspunkts der beiden Linien (III. 4. i)

$$x = \frac{-ab}{a^2 + 1} \text{ und } y = \frac{b}{a^2 + 1}.$$

Bezeichnet nun d den Abstand dieses Punktes vom Kreismittelpunkte, dessen Koordinaten (o, o) sind, so ist $d = \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}}$ (I. 3. d). Um nun zu untersuchen, ob die Linie, deren Gleichung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$y = ax + b$ ist, und der Kreis von der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ gemeinsame Punkte haben, bestimmt man x und y aus diesen Gleichungen. Reelle Werte von x und y sind dann die Koordinaten eines gemeinsamen Punktes. Es ist aber

$$x = \frac{-ab \pm \sqrt{(a^2+1)r^2 - b^2}}{a^2+1} \text{ und } y = \frac{b \pm a\sqrt{(a^2+1)r^2 - b^2}}{a^2+1}.$$

Es sind nun x und y reell, wenn $r \geqq \frac{b}{\sqrt{a^2+1}}$ oder wenn $r \geqq d$, und es schneidet die gerade Linie den Kreis in zwei Punkten, wenn $r > d$; es berührt die Linie den Kreis, wenn $r = d$. Ist aber $r < d$, so sind x und y imaginär, d. h. die gerade Linie und der Kreis haben keinen gemeinsamen Punkt.

8. **Aufgabe.** Untersuche die gegenseitige Lage zweier Kreise in ihrer Abhängigkeit von den Radien und der Centrale.

Lösung. Um die Bedingungen für die gegenseitige Lage der Kreise mit den Radien R und r und der Centrale c rechnerisch zum Ausdruck zu bringen, nehmen wir den Mittelpunkt des Kreises vom Radius R zum Anfang der Koordinaten und den Mittelpunkt des anderen Kreises in der Abscissenaxe; es sind dann

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ und } (x - c)^2 + y^2 = r^2$$

die Gleichungen der beiden Kreise. Bestimmt man aus diesen Gleichungen x und y, so hat man die Koordinaten der den beiden Kreisen etwa gemeinsamen Punkte. Man erhält

$$x = \frac{c^2 + R^2 - r^2}{2c} \text{ und}$$

$$y = \pm \frac{1}{2c}\sqrt{(c+R+r)(c+R-r)(c-R+r)(R+r-c)}.$$

Betreffs der Ordinate y sind nun drei Fälle zu unterscheiden. Ist der Radikandus positiv, so hat y zwei entgegengesetzte Werte

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von gleicher Größe; ist der Radikandus o, so ist $y = o$; ist der Radikandus negativ, so ist y imaginär. Welcher von diesen Fällen eintritt, hängt von den Faktoren $c - R + r$ und $R + r - c$ ab, da die beiden andern Faktoren, wenn $R \geqq r$, was immer sein kann, positiv sind.

a) Haben die Faktoren $c - R + r = c - (R - r)$ und $R + r - c$ gleiche Vorzeichen, so können sie nur positiv sein, weil nicht zugleich $c < R - r$ und $c > R + r$ sein kann, so daß also $c > R - r$ und $c < R + r$ sein muß. In diesem Falle hat y zwei reelle entgegengesetzte Werte von gleicher Größe, d. h. die Kreise schneiden sich in zwei Punkten, welche dieselbe Abscisse, aber entgegengesetzte Ordinaten von gleicher Größe haben.

b) Ist einer der Faktoren $c - (R - r)$ und $R + r - c$ gleich o, was der Fall ist, wenn entweder $c = R - r$ oder $c = R + r$, so ist $y = o$, d. h. die Kreise haben nur einen gemeinsamen Punkt in der Abscissenaxe; sie berühren sich, und zwar innerlich, wenn $c = R - r$, äußerlich, wenn $c = R + r$.

c) Haben die Faktoren $c - (R - r)$ und $R + r - c$ verschiedene Vorzeichen, was der Fall ist, wenn entweder $c > R + r$, also auch $c > R - r$, oder $c < R - r$, also auch $c < R + r$, so ist y imaginär, d. h. die beiden Kreise haben keinen gemeinsamen Punkt, und es liegt der eine Kreis ganz außerhalb des anderen, wenn $c > R + r$, ganz innerhalb des anderen, wenn $c < R - r$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

V. Die Ellipse.

1. Eine Ellipse ist der geometrische Ort des Punktes, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten eine konstante Summe bilden.

2. **Aufgabe.** Konstruiere eine Ellipse.

a) Fadenkonstruktion.

Sind F und F_1 die festen Punkte, 2a die konstante Summe, so befestigt man in F und F_1 die Endpunkte eines Fadens von der Länge 2a, spannt ihn mit einem Stift und führt diesen bei gespanntem Faden in der Konstruktionsebene herum; die entstehende Kurve ist eine Ellipse. (V. 1.)

Die Punkte F und F_1 heißen Brennpunkte; die Verbindungslinie zwischen einem Punkte der Ellipse und einem Brennpunkte wird Brennstrahl genannt. Die Punkte A und B der Ellipse, welche auf der Verlängerung von FF_1 so liegen, daß $AB = 2a$ und $AF = BF_1$ ist, heißen die Scheitel der Ellipse, und AB die große Axe (Fig. 9). Nimmt man O in AB so, daß $AO = BO$, so heißt O Mittelpunkt und $FO = F_1O = e$ die Excentricität der Ellipse. Je kleiner FO ist bei konstanter AB, desto mehr nähert sich die Ellipse dem Kreise; sie wird zum Kreise mit dem Radius a, wenn $FO = 0$. Anderseits wird die Ellipse zur geraden Linie FF_1, wenn $FO = a$.

b) Bestimmung einzelner Punkte der Ellipse.

Jeder Punkt der Ellipse mit den Brennpunkten F und F_1 und den Scheiteln A und B kann gedacht werden als Punkt, in welchem zwei Kreise sich treffen, die um F und F_1 mit Radien, deren Summe AB ist, beschrieben werden. Man erhält daher je vier Punkte der Ellipse, wenn man in AB zwischen F und F_1 beliebig den Punkt C nimmt und um F und F_1 mit den Radien AC und BC Kreise beschreibt, indem diese Kreise sich schneiden, weil die Centrale FF_1 kleiner als die Summe und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

größer als die Differenz der Radien ist. Läßt man C mit F oder F_1 zusammenfallen, so berühren sich die Kreise in den Scheiteln der Ellipse, indem die Centrale gleich der Differenz der Radien ist. Nimmt man C in der Verlängerung von FF_1, so treffen sich die Kreise nicht, weil die Centrale kleiner als die Differenz der Radien ist.

3. **Aufgabe.** Bilde die Gleichung der Ellipse.

Lösung. Es kommt darauf an, eine Gleichung herzustellen, in welcher die Koordinaten irgend eines Punktes P der Ellipse abhängig erscheinen von der Bedingung, daß $FP + F_1P = 2a$ und $FO = F_1O = e$ konstant ist. Nimmt man nun (Fig. 9) die große Axe der Ellipse als Abscissenaxe, O als Anfang der Koordinaten und $PQ \perp OX$, so ist $OQ = x$ und $PQ = y$. Es ist

$$y^2 = F_1P^2 - F_1Q^2 = F_1P^2 - (e + x)^2.$$

Man muß nun F_1P durch Größen, welche die gesuchte Gleichung enthalten soll, ausdrücken. Zu diesem Zwecke bildet man mit Rücksicht darauf, daß $F_1P + FP = 2a$, einen Ausdruck für $F_1P - FP$, indem man bedenkt, daß $F_1P - FP = \frac{F_1P^2 - FP^2}{F_1P + FP}$. Es ist nämlich

$$F_1P^2 - FP^2 = F_1Q^2 - FQ^2 = (e + x)^2 - (e - x)^2 = 4ex.$$

Daher ist $F_1P - FP = \frac{2\,ex}{a}$, also $F_1P = a + \frac{ex}{a}$ und

$$y^2 = (a + \frac{ex}{a})^2 - (e + x)^2$$

$$= a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} - e^2 - x^2; \text{ daher}$$

$$a^2y^2 = a^4 + e^2x^2 - a^2e^2 - a^2x^2$$

$$= a^2\,(a^2 - e^2) - (a^2 - e^2)\,x^2 \text{ oder}$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ oder}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn $a^2 - e^2 = b^2$ gesetzt wird, und dieses ist die Mittelpunktsgleichung der Ellipse.

4. Diskussion der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

a) Es ist $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$ und $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

Daher entsprechen jedem Werte von x zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von y, und umgekehrt, vorausgesetzt, daß $x < a$ und $y < b$, d. h. die Ellipse wird durch die Koordinatenaxen in vier kongruente Äste geteilt. In diesem Sinne wird O Mittelpunkt der Ellipse genannt.

b) Für $x = o$ ist $y = \pm b$, und für $y = o$ ist $x = \pm a$; umgekehrt ist $x = o$, wenn $y = \pm b$, und $y = o$, wenn $x = \pm a$. Die Ellipse schneidet also die Abscissenaxe in den Abständen $+ a$ und $- a$ und die Ordinatenaxe in den Abständen $+ b$ und $- b$ von O. Setzt man $x > a$, so wird y imaginär; ebenso wird x imaginär, wenn $y > b$. Es sind also $+ a$ und $- a$ die Grenzwerte für x sowie $+ b$ und $- b$ die Grenzwerte für y. Daher ist die Ellipse eine geschlossene Kurve.

c) Es ist $OP = d = \pm \sqrt{x^2 + y^2} = \pm \sqrt{x^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2}$

$$= \pm \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2}.$$

Es erlangt d seinen größten Wert, wenn x^2 seinen größten Wert hat, und dies ist der Fall, wenn $x = \pm a$ (V. 4. b). Es ist dann $d = \pm a$. Die größte der durch den Mittelpunkt gehenden Sehnen ($= 2a$) ist daher diejenige, welche durch die Brennpunkte geht; daher heißt sie die große Axe der Ellipse. Es erlangt d den kleinsten Wert, wenn $x = o$; dann ist $d = \pm b$. Die kleinste der durch den Mittelpunkt gehenden Sehnen ($= 2b$)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist daher diejenige, welche zur großen Axe senkrecht ist; sie heißt die kleine Axe der Ellipse. Der Abstand ihres Endpunktes vom Brennpunkte ist gleich der großen Halbaxe, weil $e^2 + b^2 = a^2$ (V. 3).

d) Da $e^2 = a^2 - b^2$, so verkleinert sich mit e auch der Unterschied von a und b, und es nähert sich die Ellipse dem Kreise. Für $e = o$ wird $a = b$, und die Gleichung der Ellipse: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ verwandelt sich in: $x^2 + y^2 = a^2$, d. i. die Gleichung des Kreises vom Radius a.

e) Für $x = e = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Es wird nun die im Brennpunkte zur großen Axe senkrechte Sehne $\frac{2b^2}{a} = 2p$ gesetzt und Parameter der Ellipse genannt. Es ist p die dritte Proportionale zu a und b.

f) Aus V. 4. a folgt:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{x} \text{ und } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{y}, \text{ d. h.:}$$

Die Abscisse x ist die vierte Proportionale zu den Linien b, a, $\sqrt{b^2 - y^2}$, und die Ordinate y ist die vierte Proportionale zu den Linien a, b, $\sqrt{a^2 - x^2}$.

5. **Aufgabe.** Bilde die Scheitelgleichung der Ellipse.

Lösung. Will man den Anfang der Koordinaten in den Scheitel der Ellipse verlegen, ohne sonst etwas zu ändern, so hat man $x - a$ für x zu setzen, und es geht die Mittelpunktsgleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \text{ über in die Scheitelgleichung}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) \text{ oder, da } \frac{b^2}{a} = p \text{ (V. 4. e),}$$

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6. **Lehrsatz.** Der geometrische Ort des Punktes, dessen Koordinaten der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ genügen, ist eine Ellipse.

Beweis. Nimmt man die gerade Linie AOB so, daß $AO = BO = a$ (Fig. 10), ferner $OF = OF_1 = \sqrt{a^2 - b^2}$, und denkt man, P sei ein Punkt, dessen Koordinaten OQ und PQ der obigen Gleichung genügen, so daß $OQ = x$ und $PQ = y$, so ist

$$F_1P^2 = (x + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2$$
$$= x^2 + 2x\sqrt{a^2 - b^2} + a^2 - b^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$
$$= a^2 + 2x\sqrt{a^2 - b^2} + \frac{x^2}{a^2}(a^2 - b^2)$$
$$= (a + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2})^2, \text{ also (absolut)}$$
$$F_1P = a + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2}. \text{ Ebenso ergibt sich}$$
$$FP = a - \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2}. \text{ Daher ist}$$

$F_1P + FP = 2a$, d. h. P ist Punkt einer Ellipse, deren große Axe AB ist.

7. **Aufgabe.** Konstruiere die Ellipse, deren Axen gegeben sind.

Konstruktion. Sind AOB und COD (Fig. 11) die gegebenen Axen, so beschreibt man gemäß V. 4. f um O mit dem Radius OA den Kreis, zieht $EQ \perp AB$, zieht OE, nimmt auf OE die $OF = OC$, zieht $FP \perp EQ$, so ist P ein Punkt der fraglichen Ellipse.

Beweis zurückzuführen auf V. 6.

8. **Aufgabe.** Bilde die Gleichung der Tangente einer Ellipse.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lösung. Man bildet (vgl. IV. 5) die Gleichung einer Sekante und läßt diese zur Tangente werden. Die Gleichung der durch P_1 und P_2 gehenden Geraden ist (III. 4. f)

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Sollen nun P_1 und P_2 Punkte einer Ellipse sein, deren Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist, so bestehen auch die Gleichungen:

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2 \text{ und } b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2.$$

Zur Bildung der Gleichung der durch P_1 und P_2 gehenden Sekante kommt es darauf an, diese drei Gleichungen in eine zu verschmelzen. Aus den beiden letzteren Gleichungen erhält man

$$b^2(x_2^2 - x_1^2) + a^2(y_2^2 - y_1^2) = 0, \text{ und hieraus}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der ersten, so ergibt sich

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$$

als Gleichung der die Ellipse in P_1 und P_2 schneidenden Sekante. Läßt man nun P_2 mit P_1 zusammenfallen, indem man $x_2 = x_1$ und $y_2 = y_1$ setzt, so erscheint

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

als die Gleichung der die Ellipse in P_1 berührenden Tangente. Diese Gleichung nimmt die Form

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$$

an, wenn man $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$ (Gleichung der durch P_1 gehenden Ellipse) setzt.

Anmerkung. Die Gleichung der Tangente einer Ellipse wird zur Gleichung der Ellipse, wenn man $x_1 = x$ und $y_1 = y$ setzt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9. **Lehrsatz.** Die Tangente der Ellipse bildet mit den Brennstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel (Fig. 9).

Beweis. Es läßt sich zeigen, daß die Tangente des Punktes P_1 (x_1, y_1) mit der Halbierungslinie des Nebenwinkels von F_1P_1F identisch ist.

Es schneide die Halbierungslinie die große Axe in E; dann ist

$$\frac{F_1E}{FE} = \frac{F_1P_1}{FP_1} \text{ oder } \frac{OE + e}{OE - e} = \frac{a + \frac{ex_1}{a}}{a - \frac{ex_1}{a}} \text{ (V. 3).}$$

Daher ist $OE = \frac{a^2}{x_1}$. Derselbe Wert ergibt sich für OE, wenn man in der Gleichung der durch P_1 gehenden Tangente

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2 \text{ (V. 8)}$$

die Abscisse des Punktes bestimmt, worin die Tangente die Abscissenaxe schneidet, indem man $y = o$ setzt. Daher fällt jene Halbierungslinie mit dieser Tangente zusammen. Hieraus folgt sofort, daß die Winkel, welche die Tangente mit den Brennstrahlen des Berührungspunktes bildet, gleich sind.

Anmerkung. Von einer elliptischen Fläche werden Strahlen, die von dem einen Brennpunkte ausgehen, zum andern Brennpunkte hin reflektiert.

10. **Aufgabe.** An eine Ellipse durch einen Punkt derselben die Tangente zu ziehen.

Konstruktion. Ist P_1 der gegebene Punkt (Fig. 9), so zieht man F_1P_1G und P_1E so, daß $\sphericalangle FP_1E = GP_1E$, dann ist P_1E die verlangte Tangente.

Erster Beweis. Sollte eine andere Linie, als P_1E die Tangente sein, so müßte diese Linie den Winkel FP_1G halbieren (V. 9).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zweiter Beweis. Zieht man $FHJ \perp P_1E$, so ist $P_1J = P_1F$, also $F_1J = 2a$. Nimmt man nun in P_1E beliebig den Punkt K, so ist $KF = KJ$. Nun ist $KF_1 + KJ > F_1J$, also $> 2a$. Daher ist auch $KF_1 + KF > 2a$, und darum liegt der Punkt K außerhalb der Ellipse, wie sich indirekt auf Grund von V. 1 leicht ergibt.

11. **Aufgabe.** An eine Ellipse durch einen Punkt außerhalb derselben eine Tangente zu ziehen.

Konstruktion. Ist K (Fig. 9) der gegebene Punkt, so beschreibt man um F_1 mit dem Radius 2a und um K mit dem Radius KF einen Kreis; die Kreise treffen sich in J. Nun zieht man F_1J, welche die Ellipse in P_1 schneidet, dann ist P_1K die verlangte Tangente.

Beweis. Es ist $\sphericalangle FP_1H = JP_1H$, daher ist P_1K Tangente (V. 9).

12. **Lehrsatz.** Die derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten der Ellipse und des Kreises, der die große Axe der Ellipse zum Durchmesser hat, verhalten sich wie die kleine und die große Axe.

Beweis. Ist x die gedachte Abscisse, y die zugehörige Ordinate der Ellipse, z die des Kreises, so ist

$$\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a} \text{ (V. 4. f) und } z = \sqrt{a^2 - x^2}; \text{ daher}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{a}.$$

13. **Aufgabe.** Den Flächeninhalt der Ellipse aus ihren Axen 2a und 2b zu berechnen.

Lösung. Es seien (Fig. 12) $P, P_1 \ldots$ Punkte der Ellipse, die zugehörigen Ordinaten schneiden den über der großen Axe beschriebenen Halbkreis in $R, R_1 \ldots$ Bildet man nun Rechtecke,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

deren Grundlinien die Abstände der auf einander folgenden Ordinaten, und deren Höhen je eine Ellipsenordinate und die zugehörige Kreisordinate sind, so verhalten sich je zwei solche Rechtecke, etwa PQ_1 und RQ_1, und daher auch die beiderseitigen Summen aller Rechtecke wie b zu a (V. 12). Läßt man nun die Punkte $P, P_1 \ldots$ einander bis zur Berührung sich nähern, so wird die erstere Summe zur Ellipsenfläche, die andere zur Kreisfläche. Daher ist, wenn J den Inhalt der Ellipse bezeichnet, $\frac{J}{\pi a^2} = \frac{b}{a}$, also $J = \pi ab$.

VI. Die Hyperbel.

1. Eine Hyperbel ist der geometrische Ort des Punktes, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten eine konstante Differenz bilden.

2. **Aufgabe.** Bestimme einzelne Punkte einer Hyperbel.

Lösung. Sind F und F_1 die festen Punkte (Brennpunkte) und 2a die konstante Differenz, so muß, da für jeden Punkt P der Hyperbel (Fig. 13) $F_1P - FP < FF_1$ ist, $2a < FF_1$ sein. Nimmt man daher auf FF_1 die Punkte A und B so, daß $AB = 2a$ und $AF = BF_1$ ist, so sind A und B Punkte der Hyperbel und heißen Scheitel derselben. AB wird Axe genannt, FP und F_1P heißen die Brennstrahlen des Punktes P der Hyperbel.

Jeder Punkt der Hyperbel kann nun gedacht werden als ein Punkt, in welchem sich zwei Kreise treffen, die um F und F_1 mit Radien, deren Differenz AB ist, beschrieben werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man erhält daher je vier Punkte der Hyperbel, wenn man in der Verlängerung von FF_1 beliebig den Punkt C nimmt und um F und F_1 mit den Radien AC und BC Kreise beschreibt, indem diese Kreise sich schneiden, weil die Centrale kleiner als die Summe und größer als die Differenz der Radien ist. Läßt man C mit F oder F_1 zusammenfallen, so berühren sich die Kreise in den Scheiteln der Hyperbel.

3. **Aufgabe.** Bilde die Gleichung der Hyperbel.

Lösung. Um die Gleichung der Hyperbel aufzustellen, bringt man die Abhängigkeit der Koordinaten eines beliebigen Punktes P derselben von der Bedingung, daß die Differenz der Abstände des Punktes P von den festen Punkten F und F_1 konstant ist, also $F_1P - FP = 2a$ (Fig. 13), zum Ausdruck.

Nimmt man FF_1 als Abscissenaxe, ihren Halbierungspunkt O als Anfang der Koordinaten und setzt $FO = e$ (Excentricität), so ist für P (x, y)

$$y^2 = F_1P^2 - (e + x)^2.$$

Es kommt nun darauf an, F_1P zu eliminieren. Bedenkt man, daß $F_1P - FP = 2a$, so sucht man $F_1P + FP$ auszudrücken. Wie in V. 3 erhält man

$$F_1P^2 - FP^2 = 4ex, \text{ so daß, da } F_1P - FP = 2a,$$

$$F_1P + FP = \frac{2ex}{a}, \text{ also } F_1P = a + \frac{ex}{a} \text{ und}$$

$$y^2 = (a + \frac{ex}{a})^2 - (e + x)^2$$

$$= a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} - e^2 - x^2.$$

Da $F_1P - FP < FF_1$, also $a < e$, so ist $e^2 - a^2$ positiv. Man erhält nun

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$y^2 = \frac{e^2 - a^2}{a^2} x^2 - (e^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2 \text{ oder}$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \text{ oder}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wenn $e^2 - a^2 = b^2$ gesetzt wird, und das ist die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel.

4. Diskussion der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

a) Es ist $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}$ und $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. Daher entsprechen jedem Werte von y zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von x und jedem Werte von x, wenn $x > a$, zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von y. Für die Vergrößerung von x und y besteht keine Grenze. Die Hyperbel hat daher vier kongruente, ins Unendliche sich ausdehnende Äste in übereinstimmender Lage zwischen den Koordinatenaxen. In diesem Sinne wird O Mittelpunkt der Hyperbel genannt.

b) Für $y = o$ ist $x = \pm a$. Die Hyperbel schneidet also die Abscissenaxe in A und B in den Abständen $+ a$ und $- a$ vom Anfangspunkte; die Strecke $AB = 2a$ heißt Hauptaxe der Hyperbel. Für $x = o$ ist $y = \pm b \sqrt{-1}$. Die Ordinatenaxe wird also von der Hyperbel nicht geschnitten. Man nimmt auf ihr die Strecke $OC = + b$ und $OD = - b$ und nennt CD die Nebenaxe der Hyperbel.

c) Für $x = e = \sqrt{a^2 + b^2}$ (VI. 3) ist $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Es wird nun die im Brennpunkte zur Hauptaxe senkrechte Sehne $\frac{2b^2}{a} = 2p$ gesetzt und Parameter der Hyperbel genannt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

d) Ist $a = b$, so heißt die Hyperbel gleichseitig; ihre Gleichung ist $x^2 - y^2 = a^2$. (Vgl. V. 4. d.)

e) Aus VI. 4. a folgt:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{y^2 + b^2}}{x} \text{ und } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{y}, \text{ d. h.:}$$

Die Abscisse x ist die vierte Proportionale zu den Linien b, a, $\sqrt{y^2 + b^2}$, und die Ordinate y ist die vierte Proportionale zu den Linien a, b, $\sqrt{x^2 - a^2}$.

5. **Aufgabe.** Bilde die Scheitelgleichung der Hyperbel.

Lösung. Will man den Anfang der Koordinaten in den Scheitel B der Hyperbel (Fig. 13) verlegen, ohne sonst etwas zu ändern, so hat man $x + a$ für x zu setzen, und so geht die Mittelpunktsgleichung

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ über in die Scheitelgleichung

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$ oder, da $\frac{b^2}{a} = p$ (VI. 4. c),

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Anmerkung. Wäre P ein Punkt des linken Armes der Hyperbel (Fig. 13), so würde behufs Umwandlung der Mittelpunktsgleichung in die Scheitelgleichung, wenn der Anfang der Koordinaten nach B verlegt werden soll, $x - a$ für x zu setzen sein, und die Scheitelgleichung würde sein

$$y^2 = -2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Diese Gleichung fällt unter die vorige, insofern für den Fall, daß die Gleichung $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$ auf den linken Arm der Parabel bezogen werden soll, x negativ zu setzen ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6. **Lehrsatz.** Der geometrische Ort des Punktes, dessen Koordinaten der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ genügen, ist eine Hyperbel.

Beweis. Nimmt man die AOB (Fig. 13), so daß AO = BO = a, ferner $FO = F_1O = \sqrt{a^2 + b^2}$, und denkt man, P sei ein Punkt, dessen Koordinaten OQ und PQ der obigen Gleichung genügen, so daß OQ = x und PQ = y, so ist

$$F_1P^2 = (x + \sqrt{a^2 + b^2})^2 + y^2$$
$$= x^2 + 2x\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$$
$$= a^2 + 2x\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{x^2}{a^2}(a^2 + b^2)$$
$$= (a + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 + b^2})^2, \text{ also (absolut)}$$

$F_1P = a + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 + b^2}$. Ebenso ergibt sich

$FP = -a + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 + b^2}$. Daher ist

$F_1P - FP = 2a$, d. h. P ist Punkt einer Hyperbel, deren Hauptaxe AB ist.

7. **Aufgabe.** Konstruiere die Hyperbel, deren Axen gegeben sind.

Konstruktion. Man nimmt gemäß VI. 4. e die Abscisse OQ, beschreibt um OQ als Durchmesser den Kreis, zieht darin die Sehne OE = a, nimmt auf dieser OF = b, zieht durch F zu OQ die Parallele, welche die EQ in G schneidet, zieht QP ⊥ OQ und gleich QG, so ist P ein Punkt der fraglichen Hyperbel.

Beweis zurückzuführen auf VI. 6.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

8. **Aufgabe.** Bilde die Gleichung der Tangente einer Hyperbel.

Lösung. Man verfährt wie V. 8 und findet die Gleichung

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2.$$

9. **Lehrsatz.** Die Tangente der Hyperbel bildet mit den Brennstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel.

Beweis. Vgl. V. 9.

10. **Aufgabe.** An eine Hyperbel durch einen Punkt derselben die Tangente zu ziehen.

Lösung. Vgl. V. 10.

11. **Aufgabe.** An eine Hyperbel durch einen Punkt außerhalb derselben eine Tangente zu ziehen.

Lösung. Vgl. V. 11.

12. **Die Asymptoten der Hyperbel.** Verbindet man die Gleichung $y = a_1x$ einer durch den Anfang der Koordinaten gehenden Geraden (S. III. 3. a) mit der Gleichung der Hyperbel, so erhält man für die beiden Linien etwa gemeinsamen Punkte die Koordinaten

$$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - a^2a_1^2}} \text{ und } y = \frac{\pm aa_1b}{\sqrt{b^2 - a^2a_1^2}}.$$

Hieraus folgt, daß jene Gerade die Hyperbel nur dann schneiden kann, wenn $b^2 > a^2a_1^2$ oder $a_1 < \frac{b}{a}$ ist. Setzt man aber $a_1 = \pm\frac{b}{a}$, so geht die Gleichung der gedachten Geraden über in $y = \pm\frac{b}{a}x$. Die Konstruktion der entsprechenden Linie ist sehr einfach. Man hat nur in einem Scheitel der Hyperbel, etwa in A die $EAE_1 \perp OA$ zu nehmen (Fig. 13), so daß $AE_1 = AE = b$; dann sind OE und OE_1 die Linien, deren Gleichung $y = \pm\frac{b}{a}x$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es schneide nun PQ die OE in R. Gemäß der Gleichung der OE ist $RQ^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2$, gemäß der Gleichung der Hyperbel ist $PQ^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$; daher ist

$$RQ^2 - PQ^2 = b^2 \text{ oder } RQ - PQ = \frac{b^2}{RQ + PQ}.$$

Mit dem Wachsen von x wachsen auch RQ und PQ; daher nimmt $RQ - PQ = RP$ mit dem Wachsen von x ab, und es nähert sich RP dem Grenzwert 0, wenn sich x dem Grenzwert ∞ nähert, d. h. die Hyperbel nähert sich den Linien EO und E_1O, ohne sie zu erreichen. Daher werden diese Linien Asymptoten der Hyperbel genannt.

VII. Die Parabel.

1. Eine Parabel ist der geometrische Ort des Punktes, dessen Entfernung von einem festen Punkte seiner Entfernung von einer festen geraden Linie gleich ist.

Ist F der feste Punkt und AB (Fig. 14) die feste Linie, so ist P Punkt einer Parabel, wenn $PD \perp AB$ und $PD = PF$. Der Punkt F heißt Brennpunkt, AB Leitlinie und FP Brennstrahl.

2. **Aufgabe.** Konstruiere eine Parabel.

a) Fadenkonstruktion.

Man befestigt in der Konstruktionsebene ein Lineal, dessen Kante mit der Leitlinie AB zusammenfällt, legt vor dieses ein rechtwinkliges Dreieck mit der einen Kathete, so daß die andere Kathete durch den Brennpunkt F geht, befestigt in dem nicht

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in AB fallenden Endpunkte der einen Kathete einerseits und in F anderseits den Endpunkt eines Fadens von der Länge letzterer Kathete, spannt den Faden längs dieser Kathete durch einen Stift und schiebt das Dreieck längs der AB fort, während man den Stift bei gespanntem Faden sich nicht vom Dreieck entfernen läßt. Der Stift beschreibt dann die Parabel.

b) Bestimmung einzelner Punkte einer Parabel. Man zieht FC $\perp$ AB und nimmt O in FC so, daß FO = CO, so ist O ein Punkt der Parabel, deren Brennpunkt F, und deren Leitlinie AB ist, und wird Scheitel der Parabel genannt. Nun nimmt man in der OF oder in ihrer Verlängerung über F hinaus den Punkt D beliebig, errichtet in D auf OF die Senkrechte und beschreibt um F mit dem Radius DC den Kreis, dann sind die Punkte, in welchen die in D errichtete Senkrechte von dem Kreise geschnitten wird, Punkte einer Parabel.

3. **Aufgabe.** Bilde die Gleichung der Parabel.

Lösung. Man erhält die fragliche Gleichung, wenn man die Abhängigkeit der Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kurve von der Bedingung, daß FP = DP (Fig. 14) zum Ausdruck bringt. Nimmt man nun OFX als Abscissenaxe, O als Anfang der Koordinaten und setzt FC = p, so ist für P (x, y)

$$y^2 = FP^2 - FQ^2 = CQ^2 - FQ^2 = (x + \frac{p}{2})^2 - (x - \frac{p}{2})^2;$$

$$y^2 = 2px.$$

Es ist dies die Scheitelgleichung der Parabel. OFX wird Axe der Parabel genannt.

4. **Diskussion der Gleichung** $y^2 = 2px$.

a) Es ist $y = \pm \sqrt{2px}$. Daher gehören zu jeder positiven Abscisse zwei entgegengesetzte Ordinaten von gleicher Größe, und zwar können x und y ohne Ende wachsen. Die Parabel erstreckt sich daher in zwei kongruenten Ästen auf beiden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Seiten der Abscissenaxe ins Unendliche. Nimmt man x negativ, so ist y imaginär.

b) Für $x = \frac{p}{2}$ ist $y = p$. Es ist also die im Brennpunkte zur Axe senkrechte Sehne gleich 2p und heißt Parameter der Parabel. Die Gleichung der Parabel läßt sich also in die Worte fassen:

Das Quadrat über der Ordinate eines Punktes der Parabel ist gleich dem aus der zugehörigen Abscisse und dem Parameter gebildeten Rechteck.

Von dieser Gleichheit hat die Parabel (παραβολή = Vergleichung) ihren Namen. Hierauf sind auch die Namen „Ellipse" (ἔλλειψις = Mangel) und „Hyperbel" (ὑπερβολή = Übermaß) aus den betreffenden Gleichungen zurückzuführen, weil bei jener $y^2 < 2px$, bei dieser $y^2 > 2px$, während bei der Parabel $y^2 = 2px$. Die Gleichung der Ellipse wie auch der Hyperbel geht in die der Parabel über, wenn bei unverändertem Parameter $a = \infty$ gesetzt wird.

c) Die Ordinate eines Parabelpunktes ist mittlere Proportionale zwischen der zugehörigen Abscisse und dem Parameter.

5. **Lehrsatz.** Der geometrische Ort des Punktes, dessen Koordinaten der Gleichung $y^2 = 2px$ genügen, ist eine Parabel.

Beweis. Nimmt man (Fig. 14) $OF = \frac{p}{2}$ und denkt, der Punkt P habe die Lage, daß, wenn $PQ \perp OF$, $OQ = x$ und $PQ = y$ gesetzt werden kann, so ist

$$FP^2 = (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = x^2 - px + (\frac{p}{2})^2 + 2px$$

$$= (x + \frac{p}{2})^2, \text{ also (absolut) } FP = x + \frac{p}{2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Verlängert man nun FO um CO = FO, zieht CA ⊥ CO und PD ⊥ CA, so ist

$$FP = x + \frac{p}{2} = OQ + OC = DP,$$

d. h. P ist Punkt einer Parabel, deren Brennpunkt F und deren Leitlinie CA ist.

6. **Aufgabe.** Konstruiere die Parabel, deren Parameter 2p ist.

Lösung. Man nimmt auf der negativen Seite der Abscissenaxe OA = 2p, auf der positiven Seite beliebig die Abscisse OQ, beschreibt um AQ als Durchmesser den Kreis, welcher die Ordinatenaxe in B schneidet, zieht QP ⊥ OQ und = OB, dann ist P ein Punkt der fraglichen Parabel.

Beweis. $y^2 = PQ^2 = OA . OQ = 2px$. (S. VII. 5.)

7. **Aufgabe.** Bestimme die Bahn eines nicht vertikal geworfenen Körpers.

Lösung. Um die betreffende Gleichung zu entwickeln, nimmt man den höchsten Punkt O der Bahn (Fig. 15) als Anfang der Koordinaten und die Vertikale OX als Abscissenaxe. Ist P ein Punkt der Bahn und PQ ⊥ OX, so sind OQ = x und PQ = y die Koordinaten des Punktes P, und es kommt darauf an, die Abhängigkeit derselben von den Wurfgesetzen in einer Gleichung zum Ausdruck zu bringen. Zu diesem Zwecke betrachtet man OQ als Differenz zwischen der Wurfhöhe und dem vertikalen Abstande PR des Punktes P vom Ausgangspunkte A der Bewegung und PQ als Differenz zwischen dem horizontalen Abstande des Punktes P von A und der halben Wurfweite AC. Um nun die Wurfhöhe OC = h auszudrücken, bildet man zunächst den Ausdruck für den vertikalen Abstand s_1, welchen ein unter einem Elevationswinkel α mit der Anfangs-

geschwindigkeit c geworfener Körper nach t Sekunden erlangt. Dann bestimmt man t als die Zeit, nach welcher die vertikale Komponente v_1 der Geschwindigkeit v, welche der Körper nach t Sekunden hat, gleich 0 wird. Um nun die erforderlichen Ausdrücke zu bilden, zerlegt man die Anfangsgeschwindigkeit c in die vertikale Komponente $c_1 = c \,.\, \sin \alpha$ und die horizontale $c_2 = c \,.\, \cos \alpha$. Es ist dann $s_1 = ct \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2$ und $v_1 = c \,.\, \sin \alpha - gt$. Nun ist $h = ct \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2$, wenn $v_1 = c \,.\, \sin \alpha - gt = 0$, also $t = \frac{c \sin \alpha}{g}$; daher ist $h = \frac{c^2 \,.\, \sin^2 \alpha}{2g}$ und

$$\text{I. } x = h - s_1 = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g} - ct \sin \alpha + \frac{g}{2} t^2.$$

Bezeichnet ferner s_2 den horizontalen Abstand des geworfenen Körpers vom Punkte A nach t Sekunden, so ist $s_2 = ct \cos \alpha$. Um die Wurfweite AB = w auszudrücken, bedenkt man, daß s_2 den Wert w in dem Momente erlangt, wo $s_1 = ct \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2 = 0$, also $t = \frac{2c \,.\, \sin \alpha}{g}$. Daher findet man $w = \frac{2c^2 \,.\, \sin \alpha \,.\, \cos \alpha}{g}$ und

$$\text{II. } y = ct \cos \alpha - \frac{c^2 \,.\, \sin \alpha \,.\, \cos \alpha}{g}.$$

Die Gleichung der Wurflinie erhält man durch Verbindung der Gleichungen I. und II. mittels Elimination von t. Man setzt

$$\text{II. } t = \frac{y}{c \,.\, \cos \alpha} + \frac{c \,.\, \sin \alpha}{g} \text{ und}$$

$$\text{I. } x = \frac{c^2 \,.\, \sin^2 \alpha}{2g} - y \,.\, \text{tang}\, \alpha - \frac{c^2 \,.\, \sin^2 \alpha}{g} + \frac{gy^2}{2c^2 \,.\, \cos^2 \alpha}$$
$$+ y \,.\, \text{tang}\, \alpha + \frac{c^2 \,.\, \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hieraus ergibt sich $y^2 = \frac{2c^2 . \cos^2 \alpha}{g} x$, d. h. die Wurflinie ist eine Parabel (VII. 5).

Anmerkung. Daß die Bahn eines horizontal geworfenen Körpers eine Parabel ist, ergibt sich sehr einfach. Es ist dann $x = \frac{g}{2} t^2$ und $y = ct$, also $y^2 = \frac{2c^2}{g} x$. (Vgl. VII. 7.)

8. **Aufgabe.** Bilde die Gleichung der Tangente einer Parabel.

Lösung. Man bildet die Gleichung einer Sekante und läßt diese zur Tangente werden. Die Gleichung der durch P_1 und P_2 gehenden Geraden ist (III. 4. f)

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Sollen nun P_1 und P_2 Punkte einer Parabel sein, so bestehen auch die Gleichungen:

$$y_1^2 = 2px_1 \text{ und } y_2^2 = 2px_2.$$

Die Gleichung der durch P_1 und P_2 gehenden Sekante der Parabel erhält man durch Verschmelzung dieser drei Gleichungen. Die Verbindung der beiden letzteren Gleichungen ergibt

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p\,(x_2 - x_1), \text{ also } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}.$$

Durch Verbindung dieser Gleichung mit der ersten erhält man

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}$$

als Gleichung der gedachten Sekante. Läßt man nun P_2 mit P_1 zusammenfallen, indem man $x_2 = x_1$ und $y_2 = y_1$ setzt, so findet man

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{p}{y_1} \text{ oder, da } y_1^2 = 2px_1,$$

$$yy_1 = p\,(x + x_1)$$

als Gleichung der die Parabel in P_1 berührenden Tangente.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9. **Lehrsatz.** Die Tangente der Parabel bildet mit dem Brennstrahl des Berührungspunktes und der durch diesen Punkt zur Axe parallelen Linie gleiche Winkel.

Beweis. Um die Gleichheit der genannten Winkel zu erkennen, bestimmt man zunächst die Abscisse des Punktes E (Fig. 14), in welchem die Tangente des Punktes P_1 (x_1, y_1) die Abscissenaxe schneidet. Man erhält diese Abscisse, wenn man in der Gleichung der Tangente (VII. 8) $y = o$ setzt. Es ergibt sich $x = -x_1$. Daher ist dem absoluten Werte nach $FE = x_1 + \frac{p}{2}$. Es ist aber auch $FP_1 = x_1 + \frac{p}{2}$ (VII. 1); daher ist $FE = FP_1$, folglich $\sphericalangle FP_1E = FEP_1 = GP_1H$, wenn $P_1H \parallel OF$.

Anmerkung. Eine parabolische Fläche reflektiert Strahlen, die zur Axe parallel sind, zum Brennpunkte, und Strahlen, die vom Brennpunkte ausgehen, parallel zur Axe.

10. **Aufgabe.** An eine Parabel durch einen Punkt derselben die Tangente zu ziehen.

Lösung. Man zieht (Fig. 14) $P_1H \parallel OX$ und EP_1G so, daß $\sphericalangle EP_1F = EP_1J$, so ist EP_1G die verlangte Tangente.

Erster Beweis. Sollte eine andere Linie, als EP_1G die fragliche Tangente sein, so müßte diese Linie den Winkel FP_1J halbieren (VII. 9).

Zweiter Beweis. Zieht man $FK \perp EG$, und schneidet FK die HJ in L, so ist $P_1F = P_1L$, also L ein Punkt der Leitlinie. Ferner ist $FK = LK$. Nimmt man nun in EG beliebig den Punkt M, so ist $MF = ML$. Es ist nun $ML > MN$, wenn $MN \perp AB$; daher ist auch $MF > MN$; folglich liegt der Punkt M außerhalb der Parabel (VII. 1).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

11. **Aufgabe.** Von dem Punkte M außerhalb einer Parabel an diese eine Tangente zu ziehen.

Konstruktion. Man beschreibt um M (Fig. 14) mit dem Radius MF den Kreis, welcher die Leitlinie in L trifft, zieht durch L zur Axe der Parabel die Parallele, welche die Kurve in P_1 schneidet, so ist P_1M die verlangte Tangente.

Beweis. Es ist $\sphericalangle FP_1M = LP_1M$; daher ist P_1M Tangente (VII. 9).

11. **Aufgabe.** Den Inhalt des durch zwei zusammengehörige Koordinaten und den entsprechenden parabolischen Bogen gebildeten Dreiecks zu bestimmen.

Lösung. Es seien P_1 (x_1, y_1) und P_2 (x_2, y_2) Punkte einer Parabel (Fig. 16), P_1Q_1 und $P_2Q_2 \perp OX$ sowie P_1R_1 und $P_2R_2 \perp OY$. Nun ist

Rechteck $P_1Q_2 = (x_1 - x_2)\, y_1 = \frac{y_1^2 - y_2^2}{2p}\, y_1$ und

Rechteck $P_1R_2 = x_1\,(y_1 - y_2)$. Daher ist

$$\frac{P_1Q_2}{P_1R_2} = \frac{(y_1 + y_2)\, y_1}{2px_1} = \frac{y_1 + y_2}{y_1}, \text{ weil } y_1^2 = 2px_1.$$

Nähert man nun den Punkt P_2 dem Punkt P_1, so nähert sich das Verhältnis $\frac{P_1Q_2}{P_1R_2}$ dem Grenzwert 2. Ebenso ist es mit je zwei folgenden Rechtecken derselben Art. Es ist aber OP_1Q_1 die Summe aller Rechtecke der ersten Art und OP_1R_1 die Summe aller Rechtecke der zweiten Art; daher ist auch $\frac{OP_1Q_1}{OP_1R_1} = 2$, folglich $OP_1Q_1 = \frac{2}{3}\, OQ_1P_1R_1 = \frac{2}{3}\, x_1\, y_1$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VIII. Ellipse, Hyperbel und Parabel als Kegelschnitte.

MAN (Fig. 17, 18, 19) sei ein zur Grundfläche senkrechter Axenschnitt eines (schiefen) Kegels, und es werde durch den Punkt O der AN eine zu MAN senkrechte Ebene E gelegt, welche die Ebene MAN in OX schneidet. Je nachdem nun OX die AM

1. auf Seite des Punktes M, oder
2. in der Verlängerung über A hinaus schneidet, oder
3. zu AM parallel ist,

wird der Kegelmantel von der Ebene E in einer Ellipse, oder in einer Hyperbel, oder in einer Parabel geschnitten.

Um den Charakter der betreffenden Kurve festzustellen, bildet man ihre Gleichung. Zu diesem Zwecke nimmt man OX als Abscissenaxe und den Punkt O als Anfang der Koordinaten, denkt dann durch einen beliebigen Punkt P der fraglichen Kurve eine zur Kegelgrundfläche parallele Ebene gelegt, welche den Kegelmantel in einem Kreise schneidet, dessen Durchmesser BC sei. Verbindet man nun P mit dem Punkte Q, in welchem BC die OX schneidet, so ist PQ als Durchschnittslinie zweier zur Ebene MAN senkrechten Ebenen senkrecht zur Ebene MAN, und somit senkrecht zu OX und BC. Es erscheint daher OQ als Abscisse und PQ als Ordinate des Punktes P. Man gelangt nun zu einer Gleichung, wenn man bedenkt, daß PQ mittlere Proportionale ist zu BQ und CQ, so daß $PQ^2 = BQ \cdot CQ$. Um nun von BC zur Abscissenaxe OX überzugehen, zieht man zu BC die Parallele OF und im ersten und zweiten Falle, wo die Abscissenaxe von der Kegelseite AB in D geschnitten wird, auch die Parallele DG. Nun ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. (Fig. 17) $\frac{BQ}{DQ} = \frac{FO}{DO}$ und $\frac{CQ}{OQ} = \frac{GD}{OD}$; daher

$$PQ^2 = BQ \,.\, CQ = \frac{DQ \,.\, FO}{DO} \cdot \frac{OQ \,.\, GD}{DO}$$

$$= \frac{FO \,.\, GD}{DO} \cdot \frac{DQ \,.\, OQ}{DO}.$$

Setzt man $DO = 2a$ und $\frac{FO \,.\, GD}{DO} = 2p$, so ist, da $PQ = y$ und $OQ = x$,

$$y^2 = 2p \frac{(2a - x)\,x}{2a} = 2px - \frac{p}{a} x^2,$$

und dieses ist die Gleichung der Ellipse (V. 5).

Anmerkung. Läßt man (Fig. 17) FO und DG gleich BC werden, so wird der Kegel zum Cylinder, und es verwandelt sich die Gleichung

$$PQ^2 = \frac{FO \,.\, GD}{DO} \cdot \frac{DQ \,.\, OQ}{DO} \text{ in die Gleichung}$$

$$PQ^2 = \frac{BC^2}{DO} \cdot \frac{DQ \,.\, OQ}{DO} \text{ oder}$$

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2, \text{ wenn } \frac{BC^2}{DO} = 2p.$$

Wird also ein (schiefer) Cylinder von einer Ebene so geschnitten, daß die Ebene auf einem zur Grundfläche des Cylinders senkrechten Axenschnitt senkrecht steht und durch die beiden Seitenlinien des Axenschnitts geht, so ist die Durchschnittsfigur des Cylindermantels eine Ellipse.

Will man dieses unabhängig vom Kegel beweisen, so denkt man (Fig. 20) AE als einen zur Grundfläche eines Cylinders senkrechten Axenschnitt, die Ebene des Halbkreises BC parallel zur Grundfläche und den Bogen DO als Bogen der fraglichen Kurve; dann ist $PQ^2 = BQ \,.\, CQ$. Es ist aber $\frac{BQ}{CQ} = \frac{DQ}{OQ}$; daher

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\frac{BQ}{BC} = \frac{DQ}{DO}$ und $\frac{CQ}{BC} = \frac{OQ}{DO}$; folglich $BQ \,.\, CQ = \frac{BC^2}{DO} \cdot \frac{DQ \,.\, OQ}{DO}$, wie vorher.

2. Es ist (Fig. 18) $\frac{BQ}{DQ} = \frac{FO}{DO}$ und $\frac{CQ}{OQ} = \frac{GD}{OD}$; daher

$$PQ^2 = BQ \,.\, CQ = \frac{DQ \,.\, FO}{DO} \cdot \frac{OQ \,.\, GD}{DO}$$
$$= \frac{FO \,.\, GD}{DO} \cdot \frac{DQ \,.\, OQ}{DO}.$$

Da nun $PQ = y$, $OQ = x$, $DO = 2a$ und $\frac{FO \,.\, GD}{DO} = 2p$,

so ist $\quad y^2 = 2p \frac{(2a + x)\, x}{2a} = 2px + \frac{p}{a} x^2$,

und dieses ist die Gleichung der Hyperbel (VI. 5).

Anmerkung. Man beachte die buchstäbliche Übereinstimmung von 1 und 2 und vergleiche V. 3 und VI. 3.

3. Es ist (Fig. 19) $\frac{CQ}{OQ} = \frac{OF}{AF}$; daher

$$PQ^2 = BQ \,.\, CQ = FO \,.\, CQ = \frac{FO^2}{AF} \,.\, OQ.$$

Setzt man nun $\frac{FO^2}{AF} = 2p$, so ist

$$y^2 = 2px,$$

und dieses ist die Gleichung der Parabel (VII. 3).

Anmerkung. Ist der Kegel ein gerader, so ist jeder Axenschnitt zur Grundfläche, und jede den Kegel schneidende Ebene zu irgend einem Axenschnitt senkrecht. Daher wird ein gerader Kegel von jeder Ebene, welche nicht ein Axenschnitt ist, entweder in einer Ellipse (einem Kreise), oder in einer Hyperbel, oder in einer Parabel geschnitten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\frac{BQ}{BC} =$ $\frac{BC^2}{DO} \cdot \frac{DQ \cdot OQ}{DO}$,

wie v

$= \frac{GD}{OD}$; daher

$\cdot GD$

DO

$\cdot OQ$

DO.

Da nu

$O \cdot GD$

DO $= 2p$,

so ist

x^2,

und d

5).

Übereinstimmung

von 1

$\cdot OQ$.

und di

3).

r, so ist jeder

Axensch

gel schneidende

Ebene

daher wird ein

gerader

Axenschnitt ist,

entwed

einer Hyperbel,

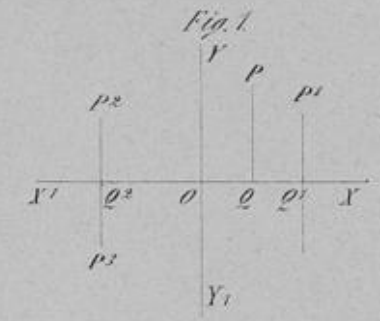
oder in

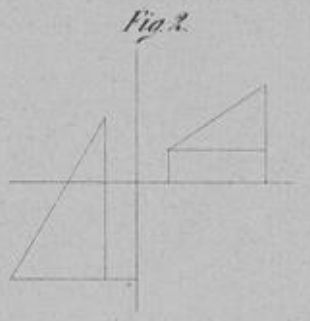
© The Tiffen Company, 2007

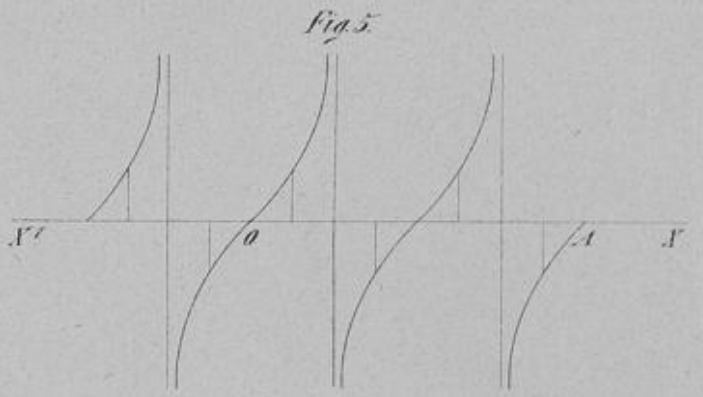
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf







Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 6.

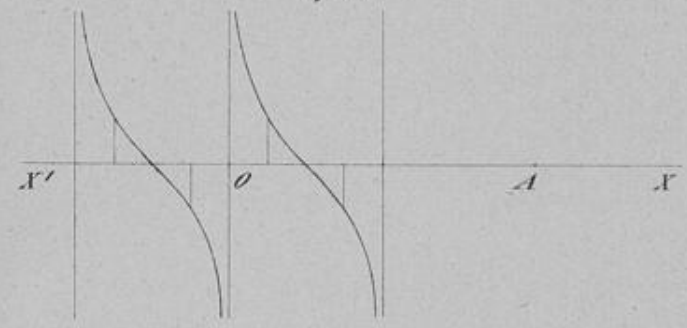


Fig. 7.

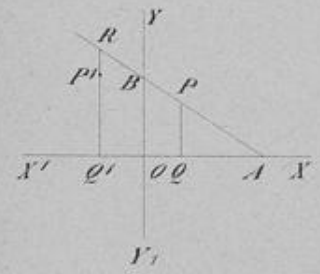


Fig. 8.

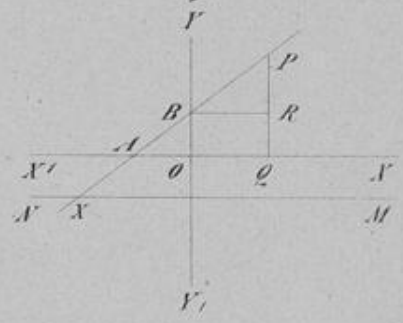


Fig. 9.

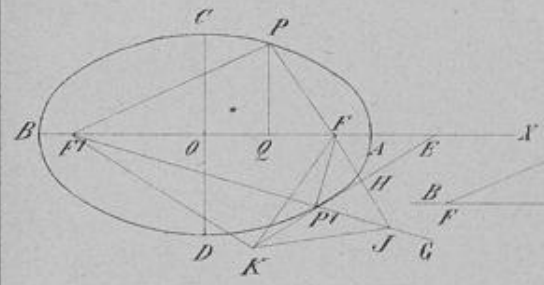
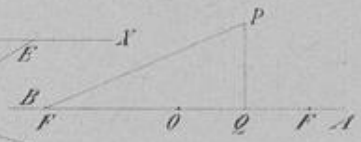


Fig. 10.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 11.

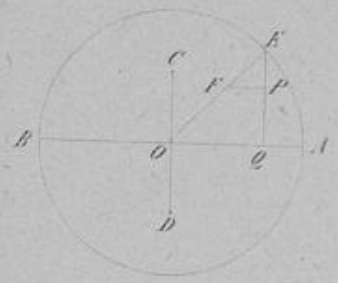


Fig. 12.

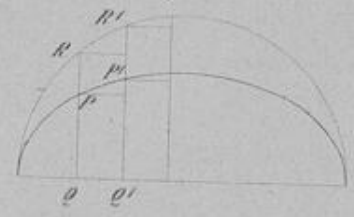


Fig. 13.

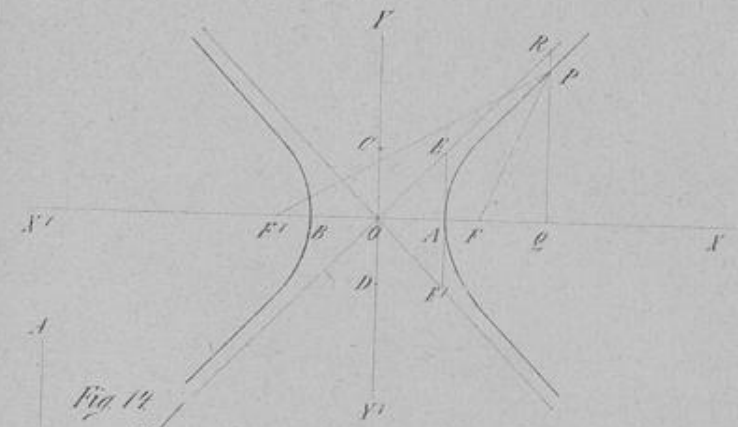


Fig. 14.

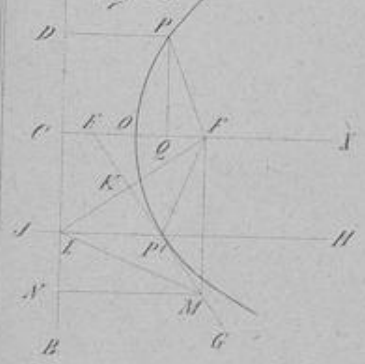
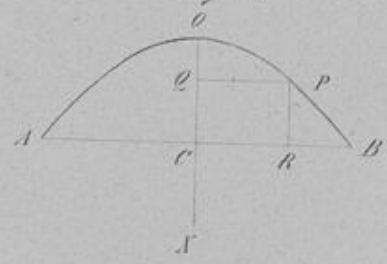


Fig. 15.

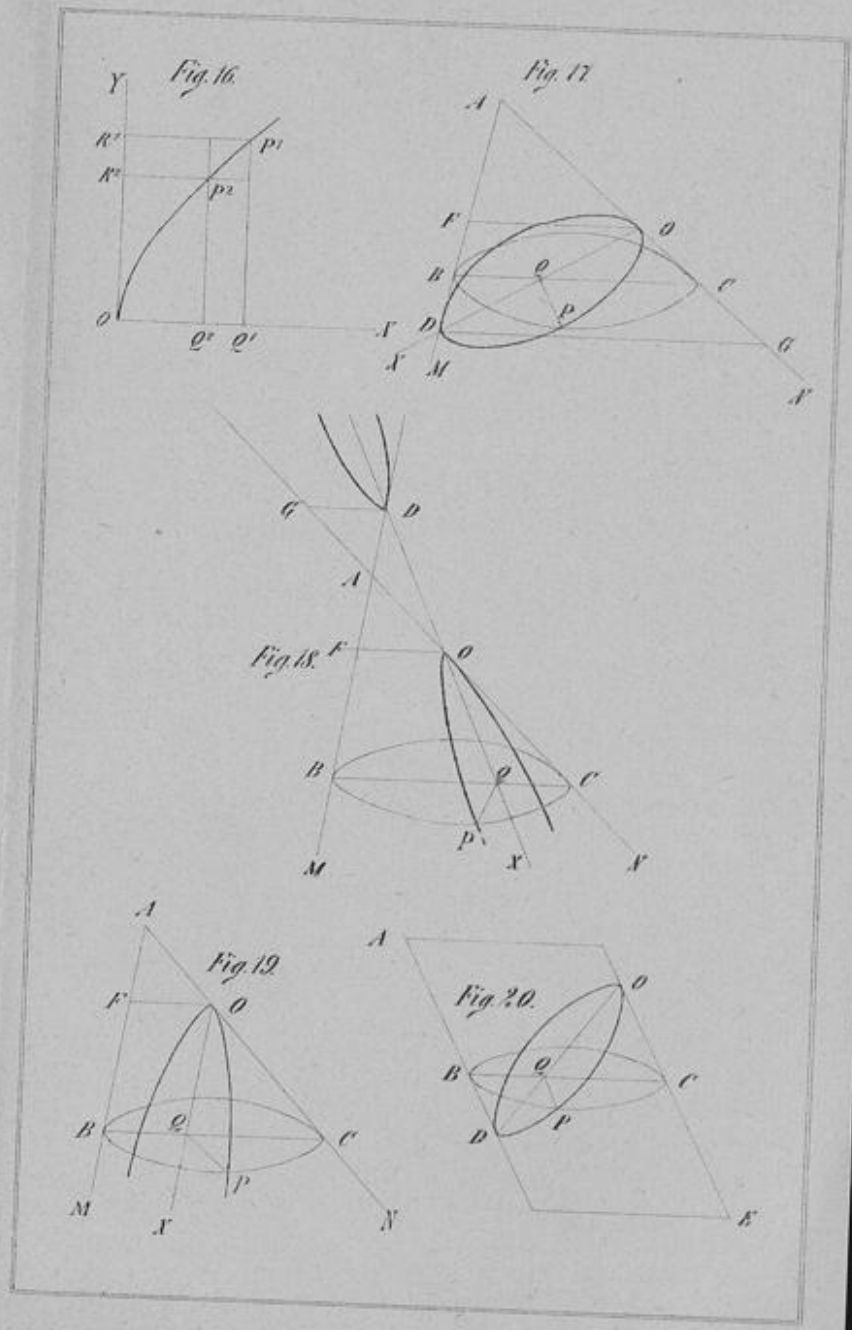


Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf