# Vorwort.

Die nachstehende Abhandlung über die Kegelschnitte habe ich für die Schüler der hiesigen Realprima geschrieben. Es soll dieser Abschnitt der Geometrie im zweiten Semester des ersten Jahres auf synthetischem, im zweiten Semester des zweiten Jahres auf analytischem Wege behandelt werden. Bei dem synthetischen Cursus habe ich die Sectiones conicae von R. Simson zum Grunde gelegt. Um nun den Schülern die Sache so leicht, wie möglich zu machen, mußte mir daran gelegen sein, nur diejenigen Sätze analytisch darzustellen, welche vorher synthetisch bewiesen worden waren. So entstand die gegenwärtige Abhandlung. Dieselbe enthält die Sätze der drei ersten Bücher der oben erwähnten Sectiones mit unbedeutenden Abweichungen. Einige Lehrsätze über Coordinatenaxen, über die Gleichung der geraden Linie, die Bedeutung der Constanten in dieser Gleichung, über die Bedingungen, denen dieselben genügen müssen, wenn zwei gerade Linien parallel sein, wenn sie senkrecht auf einander stehen, und wenn sie bestimmte Winkel mit einander bilden sollen, sind nicht mit aufgenommen. Dieselben müssen im Unterrichte natürlich den Kegelschnitten vorausgehen. Um den Schüler von vorn herein mit den geometrischen Oertern, um welche es sich handelt, bekannt zu machen, sind dieselben aus dem Kegel abgeleitet. Am Schlusse steht noch eine Discussion der geometrischen Oerter des zweiten Grades, gleichsam eine Recapitulation des Vorangegangenen.

---

1) Wird ein beliebiger gerader oder schiefer Kegel mit kreisförmiger Grundfläche durch eine beliebige Ebene geschnitten, so heißt der Durchschnitt ein Kegelschnitt. Es soll zunächst dieser Durchschnitt durch eine Gleichung dargestellt werden. Zu dem Zwecke lege man parallel zur Grundfläche eine zweite Ebene, welche die Ebene des Kegelschnitts in den Geraden $HH_1$ (Figur 1) schneiden möge, H und $H_1$ sollen dabei die Durchschnitte der Geraden mit dem Kegelmantel bezeichnen. Durch die Mitte C von $HH_1$ und die Axe des Kegels werde nun eine dritte Ebene gelegt, sie schneide den Kegelmantel in SM und SN, die erste Ebene in den Geraden DK,



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die zweite in den Geraden AB. Alsdann ist AB der Durchmesser des Durchschnittskreises der zweiten Ebene und des Kegels, und HC steht senkrecht auf AB, während HC mit DK im Allgemeinen keinen rechten Winkel bildet. E sei nun ein beliebiger Punkt der DK, dessen Entfernung von C mit x bezeichnet werde. Durch E werde wiederum eine Ebene parallel zur Grundfläche gelegt, ihr Durchschnitt mit der Ebene des Kegelschnittes sei $JJ_1$, ihr Durchschnitt mit der Axenebene FG. Es ist alsdann $JE = J_1E$ und Winkel FEJ ein Rechter. Der Uebersichtlichkeit wegen wollen wir folgende Bezeichnungen einführen, wir nennen die Geraden AC, BC, DC, HC, FE, GE, JE der Reihe nach n, m, p, q, t, s, y, die Winkel SAB, SBA, BCD der Reihe nach $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Wir erhalten dann folgende leicht zu beweisende Gleichungen:

$$y^2 = st$$
$$p : (x + p) = m : s$$
$$(n - t) : x = \sin(\alpha - \gamma) : \sin\alpha$$
$$p : m = \sin\beta : \sin(\gamma + \beta).$$

Betrachten wir nun $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, m und n als constant, x und y als veränderlich, so erhalten wir:

$$\text{(K)} \qquad \sin\alpha \sin\beta\, y^2 + \sin(\alpha - \gamma)\sin(\gamma + \beta)\, x^2 = (n \sin\alpha \sin[\gamma + \beta] - m \sin\beta \sin[\alpha - \gamma])\, x + nm \sin\alpha \sin\beta$$

als Gleichung des Kegelschnittes, im Allgemeinen, in schiefwinklichen Coordinaten.

2) Der Character desselben hängt, wie leicht zu ersehen, wesentlich von den Constanten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, m und n ab. Stellen wir uns vor, die Ebene des Kegelschnittes drehe sich um $HH_1$, so entsteht jedesmal eine geschlossene Curve, wenn SM und SN beide direkt geschnitten werden. Es geschieht dieß aber 1) wenn $\alpha > \gamma$, also $\alpha - \gamma$ positiv und $\gamma + \beta$ kleiner als zwei Rechte, 2) wenn $\gamma + \beta$ größer als zwei Rechte, also $\alpha - \gamma$ negativ ist. In beiden Fällen wird der Coefficient von $x^2$ positiv. Die Durchschnittscurve führt den Namen Ellipse. Fällt der Punkt C mit S zusammen, ist also m und n jedes gleich Null, so geht die Ellipse in einen Punkt über. Sind a und b demnach positive Größen, so hat die Gleichung der Ellipse die Form

$$ay^2 + bx^2 = cx + d,$$

die des Punktes

$$ax^2 + by^2 = o.$$

Schneidet aber die Ebene des Kegelschnittes die Seite SM direkt, die Seite SN in der Verlängerung über S hinaus oder umgekehrt, so wird sowohl der ursprüngliche, als dessen entgegengesetzter Kegel, jeder in einer ungeschlossenen Curve geschnitten. Wir werden uns später überzeugen, daß die Gleichung (K) beide Zweige zugleich darstellt. Es tritt dieser Fall im Allgemeinen ein, wenn $\alpha$ kleiner als $\gamma$, und $\gamma + \beta$ außerdem kleiner als zwei Rechte ist. Die Durchschnitts-Curve führt den Namen Hyperbel. Geht die Ebene des Kegelschnittes durch S, was geschieht, sobald entweder $-m \sin\beta \sin(\alpha - \gamma) = n \sin\alpha \sin(\beta + \gamma)$ ist, oder m und n jedes gleich Null wird, so erhalten wir anstatt der Hyperbel zwei sich schneidende gerade

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Linien. Beide Male wird der Coefficient von $x^2$ negativ, so daß die Gleichung (K) für die Hyperbel die Form

$$ay^2 - bx^2 = cx + d$$

für die beiden geraden Linien, sobald m und n jedes = o gesetzt wird, die Form

$$ay^2 - bx^2 = o$$

annimmt.

Ist endlich $\alpha = \gamma$, oder $\beta + \gamma = 2R$, so schneidet die Ebene des Kegelschnittes die Seite SN und ist der Seite SM parallel, oder sie schneidet die Seite SM und ist der Seite SN parallel, in beiden Fällen ist der Durchschnitt eine ungeschlossene, sich immer mehr erweiternde Curve, dieselbe heißt Parabel. Geht der Durchschnitt jedoch durch S, so erhalten wir statt dieser Curve eine gerade Linie, in welcher der Kegel von der Ebene berührt wird. Die Gleichung der Parabel hat demnach die Form:

$$ay^2 = cx + d,$$

die der Linie:

$$y^2 = o.$$

In dem bisher Gesagten haben wir den Fall gänzlich unberücksichtigt gelassen, wo $\alpha + \beta = 2R$ ist, der Scheitel des Kegels also unendlich weit rückt, und der Kegel in einen Cylinder übergeht. Man überzeugt sich leicht, daß alsdann, wenn $\gamma$ nicht gleich $\alpha$ ist, der Durchschnitt eine Ellipse, wenn aber $\gamma = \alpha$ ist, zwei parallele gerade Linien bildet, die Gleichung K geht für diesen letztern Fall über in

$$y^2 = nm.$$

Es gibt nach dem Vorstehenden also 7 verschiedene Kegelschnitte, nämlich die Ellipse, den Punkt, die Hyperbel, zwei einander schneidende gerade Linien, die Parabel, eine gerade Linie und zwei parallele Linien, von welchen jedoch die Ellipse, Hyperbel und Parabel vorzugsweise jenen Namen führen. Letztere sollen in dem Folgenden behandelt werden. Die von uns aufgestellten Gleichungen setzen zwar kein bestimmtes Coordinatensystem voraus, sie gelten für jedes mögliche recht- und schiefwinkliche, wir wollen jedoch in den folgenden Entwickelungen der Bequemlichkeit wegen, überall da ein rechtwinkliches voraussetzen, wo nicht besonders gesagt worden ist, daß dasselbe ein schiefwinkliches sein soll.

## Die Parabel.

3) Die Gleichung der Parabel ist

$$ay^2 = cx + d.$$

Durch Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten um ein Stück $x_1$, geht dieselbe über in

$$ay^2 = cx + cx_1 + d.$$

Bestimmt man $x_1$ in der Art, daß $cx_1 + d = o$ wird, so erhält man die einfachere Gleichung der Parabel

$$ay^2 = cx. \qquad (P)$$

Diese Umformung ist immer möglich, so lange nicht $c = o$ ist; in diesem Falle bedeutet (P) aber

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zwei reelle oder imaginäre parallele gerade Linien, deren Gleichungen $y = + \sqrt{-\frac{d}{a}}$ und $y = -\sqrt{-\frac{d}{a}}$ sind, ist außerdem $d = o$, so fallen die beiden Geraden in eine zusammen.

Wir nehmen nun an, in (P) sei die Constante c positiv.*) Alsdann erhält man für jeden positiven Werth von x zwei einander gleiche, durch das Vorzeichen verschiedene Werthe von y, die um so größer werden, je größer x ist. Dagegen gibt kein negativer Werth von x ein reelles y.

Die XAxe ist also der geometrische Ort der Mittelpunkte aller auf derselben senkrechten Sehnen der Parabel, diese erstreckt sich gleichmäßig zu beiden Seiten jener Axe bis in's Unendliche, indem sie sich immer mehr von derselben entfernt. Macht man $x = o$, so wird auch $y^2 = o$, die Axe der Y hat also nur einen Punkt mit der Parabel gemeinsam, jedoch in der Weise, daß gleichsam zwei Durchschnitte in einen zusammen fallen, diese Axe ist demnach zugleich eine Tangente der Curve.

Nun sei

$$(G) \qquad y = Ax + B$$

die Gleichung einer geraden Linie. Eliminirt man aus ihr und (P) die veränderliche y, so erhält man

$$(D) \qquad aA^2x^2 + (2aAB - c)\,x + aB^2 = o,$$

die Wurzeln dieser Gleichung geben die x der Durchschnittspunkte der Geraden (G) und der Parabel (P). Ist $A = o$, so geht dieselbe in eine Gleichung vom ersten Grade über, und es ist

$$x = \frac{aB}{c}.$$

Jede auf der YAxe senkrechte schneidet also die Curve nur in einem einzigen Punkte.

Ist A nicht gleich o, so erhalten wir für x im Allgemeinen zwei Werth, deren Reellität von dem Vorzeichen des Ausdrucks $c^2 - 4acAB$**) abhängt. Derselbe wird positiv, und die beiden x sind demnach reel, wenn A positiv und B kleiner als $\frac{c^2}{2acA}$ ist, (also namentlich auch für alle negativen Werthe von B), oder wenn A negativ und B größer als $\frac{c^2}{2acA}$ (also namentlich für alle positiven Werthe von B), ist endlich $B = \frac{c^2}{2acA}$, so fallen die beiden Werthe von x zusammen, und die Gerade (G) wird eine Tangente, in allen übrigen Fällen werden die x imaginär.

---

*) Anmerk. Wäre c negativ, so würde (P) dadurch, daß man $x = -\xi$ setzte, übergehen in $ay^2 = +c\xi$, worin der Coefficient von $\xi$ positiv wäre.

**) Anmerk. Man löse die Gleichung in Beziehung auf x.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Jede Gerade, also, welche nicht senkrecht auf der Y Axe ist, begegnet der Parabel in zwei, in einem, oder in keinem Punkte, in dem Falle, wo sie dieselben in einem Punkte begegnet, ist sie Tangente.

4) Dividirt man jedes Glied der Gleichung (D) durch $aA^2$, so ist der Coefficient von x negativ genommen, gleich der Summe der beiden Wurzeln, die Hälfte dieser Summe gibt also die X Coordinate der Mitte des durch die Curve interceptirten Stückes der Geraden das ist der Sehne. Sind $\xi$ und $\eta$ die Coordinaten dieses Mittelpunktes, so ist

$$-\frac{2AB - c}{2} = aA\xi$$

und, da der Punkt auch in der Geraden (G) liegt, also $B = \eta - A\xi$ sein muß, so ist auch

$$\text{(D)} \qquad 2aA\eta = c.$$

Welchen Werth man also der Größe B geben mag, der Werth von $\eta$ ändert sich nicht dadurch.

Die Mittelpunkte aller parallelen Sehnen liegen also in einer zur Axe der X parallel-geraden Linie.

Jede Gerade, welche parallele Sehnen halbirt, heißt Durchmesser der Parabel, die Hälfte jeder Sehne, welche durch den Durchmesser halbirt wird, eine Ordinate des Durchmessers, der Punkt, worin der Durchmesser die Parabel trifft, Scheitel des Durchmessers, das Stück desselben vom Scheitel bis zum Durchschnitte der Ordinate, Abscisse.

Jede der X Axe Parallele ist also ein Durchmesser der Parabel. Soll die Ordinate senkrecht auf ihrem Durchmesser stehen, so muß in der Gleichung derselben $y = Ax + B$, das A offenbar unendlich werden, alsdann wird aber die Gleichung des Durchmessers (D)

$$\eta = o.$$

Die X Axe ist also der einzige Durchmesser, zu welchem die Ordinaten senkrecht sind.

Dieser Durchmesser führt den Namen der Axe der Parabel, sein Scheitel heißt Hauptscheitel.

5) Wir verlegen den Anfangspunkt der Coordinaten vom Hauptscheitel ab nach der negativen Seite hin auf der X Axe um ein Stück gleich p. Die Gleichung p geht dann über in

$$y^2 = \frac{c}{a}(x - p).$$

Zieht man nun von einem Punkte der Hauptaxe im Innern der Parabel, dessen Entfernung vom Scheitel gleichfalls $= p$ ist, eine gerade r nach irgend einem Punkte der Parabel, dessen Coordinaten $x_1$ und $y_1$ sind, so ist

$$y_1^2 + x_1^2 - 4px_1 + 4p^2 = r^2.$$

Da der Punkt aber in der Parabel liegt, so ist

$$y_1^2 - \frac{c}{a}x_1 + \frac{c}{a}p = o$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

macht man also $\frac{c}{a} = 4p$, so erhält man

$$x_1^2 = r^2.$$

Es gibt also im Innern der Parabel auf der Hauptaxe immer einen Punkt, und außerhalb eine Senkrechte zur Hauptaxe von der Beschaffenheit, daß die Entfernung eines beliebigen Punktes der Parabel von dem Punkte auf der Hauptaxe, gleich der Entfernung eben jenes Punktes in der Parabel von der Senkrechten ist.

Man nennt diesen Punkt auf der Hauptaxe den Brennpunkt, die Senkrechte die Direktrix, den 4fachen Abstand des Hauptscheitels von der Direktrix den Parameter, die vom Brennpunkte nach einem Punkte der Parabel gezogene Gerade, den Radius vector der Parabel.

Aufg. 1. Den Durchschnitt einer auf der Hauptaxe senkrechten Geraden und der Parabel zu construiren, wenn die Direktrix und der Brennpunkt gegeben sind.

Aufg. 2. Es ist die Direktrix und der Brennpunkt gegeben, es soll derjenige Punkt bestimmt werden, worin eine auf der Direktrix senkrechte die Parabel schneidet.

Aufg. 3. Den Durchschnitt der Parabel und einer durch den Brennpunkt gezogenen Geraden durch Construction zu finden, wenn dieselben Stücke gegeben sind.

Nach dem in dieser Nummer Gesagten ist die Gleichung der Parabel, bezogen auf die Direktrix und die Axe

$$(P_1) \qquad y^2 = 4p\,(x - p),$$

die Gleichung der Parabel, bezogen auf die Tangente im Scheitel und die Axe

$$(P_2) \qquad y^2 = 4px.$$

Aus diesen beiden Gleichungen sollen nun die weiteren Eigenschaften des betreffenden Kegelschnitts entwickelt werden.

6) Es sei (G) wiederum die Gleichung einer geraden Linie, und $(P_1)$ die der Parabel, $y_1$ und $x_1$ die Coordinaten der Durchschnittspunkte, alsdann ist

$$y_1 = \frac{2p}{A} \pm \sqrt{\frac{4p^2}{A^2} - 4p^2 - \frac{4pB}{A}}$$

$$x_1 = \frac{2p - BA}{A^2} \pm \frac{1}{A}\sqrt{\frac{4p^2}{A^2} - 4p^2 - \frac{4pB}{A}}$$

Die Gleichung des Durchmessers aber, welcher alle der (G) parallelen Sehnen halbirt, wird

$$y = \frac{2p}{A},$$

ein Ausdruck, der sich leicht construiren läßt, wenn die Axe, der Brennpunkt, und die Gerade gegeben sind. Fällt man vom Brennpunkte einen Perpendikel auf die Gerade (G), so läßt sich zeigen, daß das Rechteck aus demselben gerechnet vom Brennpunkte bis zu dessen Durchschnitt mit der Direktrix, und der Differenz desselben und der doppelten Entfernung der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Geraden vom Brennpunkte, gleich $\frac{4p^2}{A^2} - 4p^2 - \frac{4pB}{A}$ ist. Darnach hat die Construction des $y_1$ keine Schwierigkeiten, es läßt sich also die

Aufg. 4, die Schneidepunkte einer geraden Linie und der Parabel zu finden, wenn der Brennpunkt und die Direktrix gegeben sind, darnach lösen.

Geht man von Gleichung $P_2$ aus, so wird

$$y_1 = \frac{2p}{A} \pm \sqrt{\frac{2p}{A}\left(\frac{2p}{A} - B\right)},$$

ein Ausdruck, dessen Construction gleichfalls ohne erhebliche Schwierigkeiten ist.

Aus den für $y_1$ und $x_1$ berechneten Werthen folgt 1) daß die von den Treffpunkten der Geraden auf den Durchmesser gefällten Perpendikel einander gleich sind, 2) daß deren Fußpunkte gleichweit von der Mitte der Sehne liegen. Die Entfernung des Scheitels dieses Durchmessers von der Direktrix ist $= \frac{p(1+A^2)}{A^2}$, ist (G) die Gleichung irgend einer Ordinate dieses Durchmessers, so ist die dazu gehörende Abscisse demnach $= \frac{p - pA^2 - AB}{A^2}$. Bezeichnet man nun den vom Treffpunkte der Geraden (G) auf den Durchmesser gefällten Perpendikel mit $\eta$, die Abscisse mit $\xi$, so ist $\eta^2 = 4p\xi$.

Es ist, demnach, das Quadrat des vom Endpunkte einer Ordinate auf den Durchmesser gefällten Perpendikels gleich dem Rechtecke aus der Abscisse der Ordinate und dem Parameter der Parabel.

Anderweitig ist das Quadrat der Ordinate gleich dem Quadrate jenes Perpendikels dividirt durch das Quadrat des Cosinus des Winkels, welchen die Ordinate mit dem Durchmesser bildet, also gleich $\left(\frac{4p^2 - 4p^2A^2 - 4pAB}{A^2}\right) \frac{1 + A^2}{A^2}$ oder $\left(\frac{p - pA^2 - AB}{A^2}\right) \frac{4p\,(1 + A^2)}{A^2}$. Nun ist aber $\frac{p\,(1 + A^2)}{A^2}$ der Abstand des Scheitels von der Direktrix, das 4fache dieses Abstandes heißt aber der Parameter des Durchmessers, es folgt also: daß das Quadrat der Ordinate gleich dem Rechtecke aus der Abscisse und dem Parameter des Durchmessers ist.

Bezeichnet man diesen Parameter mit $4p_1$, die Abscisse mit $\xi$, die Ordinate mit $\eta$, so wäre die Parabel durch die Gleichung $\eta^2 = 4p_1\xi$ eben so vollständig in schiefwinklichen Coordinaten bestimmt, als durch die Gleichung $y^2 = 4px$ in rechtwinklichen.

Hätten wir zu Anfange der dritten Nummer gar keine Voraussetzung über die Coordinatenwinkel gemacht, so würden wir durch Verlegung der YAxe ebenso, wie dort, zu der Gleichung $ay^2 = cx$ gekommen sein, welche mit $\eta^2 = 4p_1\xi$ identisch würde, sobald man $\frac{c}{a} = 4p_1$ setzt.

Aufg. 5. Der Scheitel eines Durchmessers, der Durchmesser und eine Ordinate seien



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gegeben, es sollen die Direktrix, der Parameter der Parabel, die Axe und der Brennpunkt gefunden werden.

Aufg. 6. Es sei ein beliebiges Stück der Parabel gegeben, man soll deren Direktrix, Axe, Brennpunkt finden.

7) Nach der vorigen Nummer sind die yCoordinaten der Treffpunkte der durch Gleichung (G) und ($P_2$) ausgedrückten Geraden und Parabel gleich

$$\frac{2p}{A} \pm \sqrt{\frac{4p}{A}\left(\frac{p}{A} - B\right)}.$$

Soll die Gerade (G) also eine Tangente der Parabel werden, so müssen die beiden Werthe von y zusammenfallen, d. h. es muß

$$p - AB = o$$

sein. Es folgt hieraus zunächst, daß jedem möglichen Werthe von A ein, aber auch nur ein einziger Werth von B entspricht.

Es gibt also immer eine Tangente, aber auch nur eine einzige, welche einer gegebenen Richtung parallel läuft. Es seien $x_1$ und $y_1$ die Coordinaten irgend eines Punktes außerhalb der Parabel, soll die Gerade $y = Ax + B$ durch diesen Punkt gehen und zugleich Tangente der Parabel sein, so muß den beiden Gleichungen

$$y_1 = Ax_1 + B$$
$$p = AB$$

Genüge geleistet werden, wir erhalten deßhalb zwei Werthe von A, und zu jedem derselben einen Werth für B.

Von einem Punkte außerhalb der Parabel lassen sich also jedesmal zwei Tangenten an dieselbe ziehen. Die beiden Bedingungsgleichungen geben

$$A = \frac{y_1}{2x_1} \pm \sqrt{\frac{y_1^2 - 4px_1}{4x_1^2}}.$$

Ist also $y_1^2 = 4px_1$, so erhalten wir anstatt zweier nur einen einzigen Werth für A. In diesem Falle liegt aber der Punkt in der Parabel.

In jedem Punkte der Parabel läßt sich also nur eine Tangente ziehen.

Ist aber $y_1^2 < 4px_1$, so liegt der Punkt innerhalb der Curve, und der Werth für A wird imaginär, für solche Punkte gibt es also keine Tangente.

Die Gleichung (G) verwandelt sich nach dem Gesagten, für den Fall, wo sie eine Tangente darstellen soll, in

$$y = Ax + \frac{p}{A}, \qquad (T)$$

und das y des Tangirungspunktes ist gleich $\frac{2p}{A}$. Nun ist aber $y = \frac{2p}{A}$ die Gleichung des Durchmessers, welcher der durch die Constante A bestimmten Richtung zugeordnet ist, es folgt daraus also, daß die im Scheitel eines Durchmessers gezogene Tangente den Ordinaten desselben parallel geht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus der für die Tangente aufgestellten Gleichung ergibt sich ferner, daß ihr Durchschnittspunkt mit der XAxe, d. i. mit der Axe der Parabel, vom Anfangspunkte der Coordinaten, d. i. vom Hauptscheitel, um ein Stück gleich $-\frac{p}{A^2}$ entfernt ist, es ist aber auch die xCoordinate des Berührungspunktes gleich $\frac{p}{A^2}$.

Zieht man, also, in irgend einem Punkte der Parabel eine Tangente, und fällt von demselben einen Perpendikel auf die Axe, so liegt der Hauptscheitel in der Mitte zwischen dem Treffpunkte der Tangente mit der Axe, und dem Fußpunkte des Perpendikels.

Aufg. 7. Ziehe im Tangirungspunkte eine Senkrechte auf die Tangente, verlängere sie bis zur Axe. Die Projection dieser Senkrechten auf die Axe heißt Subnormale. Wie groß ist dieselbe?

Aufg. 8. Es soll bewiesen werden, daß der Durchschnittspunkt der Tangente und Axe eben so weit von der Direktrix entfernt ist, als der Fußpunkt des vom Tangirungspunkte auf die Axe gefällten Perpendikels vom Brennpunkte.

In der vorigen Nummer ist gezeigt worden, daß die Gleichung der Parabel in schiefwinklichen Coordinaten dieselbe Form annimmt, wie die in rechtwinklichen, wenn man zum Anfangspunkte einen beliebigen Punkt der Parabel, zu der einen Coordinatenaxe den durch diesen Punkt gezogenen Durchmesser, zu der andern eine zu den Ordinaten des Durchmessers parallele Gerade, d. i. die Tangente in dem Punkte, macht.

Die Gleichung einer beliebigen Tangente müßte also auch genau die Form der Gleichung (T) haben, und der vorige Satz läßt sich demnach auf folgende Weise verallgemeinern:

Zieht man in irgend einem Punkte der Parabel eine Tangente und eine Ordinate zu einem beliebigen Durchmesser, so liegt der Scheitel desselben in der Mitte zwischen den Treffpunkten der Ordinate und der Tangente.

Aufg 9. Es sollen von einem Punkte außerhalb die beiden Tangenten an die Parabel gezogen werden.

Der Beweis des oben ausgesprochenen Lehrsatzes läßt sich auch folgendermaßen führen. Man ziehe irgend einen Durchmesser der Parabel, und in irgend einem Punkte derselben eine Tangente und eine Ordinate zum Durchmesser. Man bezeichne die Abscisse mit a, das Quadrat des von jenem Punkte auf den Durchmesser gefällten Perpendikels ist alsdann gleich 4pa (cf. Nr. 6). Man ziehe ferner einen zweiten Durchmesser durch den angenommenen Punkt, und vom Scheitel des ersten Durchmessers eine Ordinate zum zweiten Durchmesser. Man bezeichne die Abscisse dieser Ordinate mit $a_1$, dann ist das Quadrat jenes Perpendikels gleich $4pa_1$. Es ist also $a = a_1$. Nun bilden aber die Tangente, die zuletzt gezogene Ordinate und die betreffenden Stücke der Durchmesser ein Parallelogramm, wornach sich denn der obige Satz leicht ergibt.

8) In der 6. Nummer wurde bewiesen, daß das Quadrat einer Ordinate gleich dem



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Rechtecke aus der Abscisse und dem Parameter des zur Ordinate gehörenden Durchmessers sei. Zieht man also von der Mitte der Ordinate eine Parallele zum Durchmesser bis zur Parabel, so ist diese Parallele gleich $^3/_4$ der Abscisse; und, wenn man den Scheitel mit dem Endpunkte der Ordinate durch eine Gerade verbindet, so ist der dadurch bestimmte, an der Parabel liegende Abschnitt der Parallelen gleich $^1/_4$ der Abscisse. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß das von der Ordinate, Abscisse und Verbindungslinie gebildete Dreieck, viermal so groß ist als das Dreieck, welches man über der Verbindungslinie construirt, und dessen Spitze in dem Punkte liegt, wo die Parallele die Parabel schneidet. Verlängert man nun die Ordinate, bis sie die Parabel zum zweiten Male trifft, und wiederholt die vorigen Constructionen, so ist das über der durch die Verlängerung der Ordinate entstandenen Sehne construirte Dreieck, 4mal so groß, als die beiden über den Verbindungslinien entstandenen Dreiecke zusammengenommen.

Wiederholt man nun an den Verbindungslinien die sämmtlichen bis hieher gemachten Constructionen, und ebenso an den neu entstehenden u. s. f., so ist jedesmal die Summe der zunächst an der Parabel liegenden Dreieck das 4fache der vorhergehenden. Bezeichnet man also den Inhalt des über der anfänglichen Sehne construirten Dreiecks mit D, so ist die Summe der beiden folgenden gleich $^1/_4$ D, der vier darauf folgenden gleich $^1/_4{}^2$ D u. s. f. Die Summe sämmtlicher Dreiecke bildet also eine geometrische Reihe, deren Gliederzahl, im Falle es sich um die Berechnung des Parabelsegmentes handelt, unendlich groß genommen werden muß. In diesem Falle ist aber die Summe gleich $^4/_3$ D, wie leicht zu erweisen ist.

## Die Ellipse.

9) Die Gleichung der Ellipse hat noch Nr. 2 die Form

$$\text{(E)} \qquad ay^2 + bx^2 = cx + d$$

worin a und b positive Werthe haben. Durch einfache Verlegung der YAxe, in ähnlicher Weise, wie es in Nr. 3 geschehen ist, läßt sich dieselbe auf die Form

$$ay^2 + bx^2 = e$$

bringen. Wir wählen eine andere Methode, um zu demselben Ziele zu kommen. Es sei

$$\text{(G)} \qquad y = Ax + B$$

die Gleichung einer geraden Linie, welche die Ellipse schneidet. Eliminirt man aus (G) und (E) y, setzt, nachdem die Gleichung auf o gebracht worden, die Hälfte des Coefficienten von x negativ genommen gleich $\xi$, und in dem erhaltenen Ausdrucke für B seinen aus der Gleichung (G) genommenen Werth, nämlich $\eta - A\xi$ ein, so erhält man

$$2b\xi + 2aA\eta - c = o.$$

In diesem Ausdrucke bedeuten $\xi$ und $\eta$ die Coordinaten des Mittelpunktes des von der Ellipse interceptirten Stückes der Geraden (G). Da derselbe unabhängig ist von B, so gilt er von allen dieser Geraden parallelen Sehnen, betrachten wir also $\xi$ und $\eta$ als Veränderliche, so stellt die letzte Gleichung den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller derjenigen Sehnen vor, welche der durch A bestimmten Richtung parallel gehen. Dieser geometrische Ort ist demnach eine gerade Linie.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nehmen wir an, $\xi$ und $\eta$ seien die Coordinaten irgend eines beliebigen Punktes innerhalb der Ellipse, so gibt dieselbe Gleichung im Allgemeinen nur einen einzigen Werth für A. Es läßt sich, deßhalb, durch einen gegebenen Punkt im Allgemeinen nur eine einzige Sehne ziehen, welche in dem Punkte halbirt wird. Die Richtung der Sehne bleibt selbst dann noch reell, wenn der Punkt außerhalb der Ellipse liegt. Macht man aber $\eta = o$ und $\xi = \frac{c}{2b}$, so wird die in Rede stehende Gleichung durch jeden beliebigen Werth von A befriedigt.

Es gibt also einen Punkt in der Ellipse, der so beschaffen ist, daß alle durch denselben gezogenen Sehnen, in ihm halbirt werden. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt, und jede durch den Mittelpunkt gehende Sehne Durchmesser der Ellipse, die Endpunkte eines Durchmessers heißen Scheitel desselben.

Wir verlegen den Anfangspunkt der Coordinaten in diesen Mittelpunkt, dadurch geht die Gleichung (E) über in $ay^2 + bx^2 = e$, worin e eine leicht zu bestimmende positive Constante ist. Wir wollen statt $\frac{b}{a}$ schreiben $\frac{b_1^2}{a_1^2}$, und anstatt $\frac{e}{a}$, $b_1^2$, alsdann läßt sich die letzte Gleichung auch folgendermaßen schreiben

$$a_1^2 y_1^2 + b_1^2 x^2 = a_1^2 b_1^2$$

oder auch mit Weglassung der Accente

$$(E_1) \qquad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

in welcher Gleichung die Größen a und b natürlich nicht mehr dieselben Werthe haben, wie in Gleichung (E). Wir setzen bei den folgenden Entwickelungen voraus, daß der Coefficient von $y^2$ größer ist, als der von $x^2$, wäre das Umgekehrte der Fall, so würden alle speciell auf die XAxe bezüglichen Sätze von der YAxe gelten.

10) Löst man die Gleichung $(E_1)$ in Beziehung auf y auf, so überzeugt man sich leicht, daß man so lange zwei reelle, einander gleiche, im Vorzeichen verschiedene Werthe für y erhält, als x einen Werth hat, der zwischen $+ a$ und $- a$ liegt, und daß man dieselben Werthe für y erhält, für absolut gleiche und nur durch das Vorzeichen verschiedene Werthe von x. Das Maximum seines Werthes erreicht y, wenn $x = o$ ist, es wird alsdann gleich b. Löst man die Gleichung $(E_1)$ in Beziehung auf x, so erhält man ähnliche Resultate. Für jeden Werth von y, welcher zwischen $+ b$ und $- b$ liegt, werden die beiden gleichen, im Vorzeichen verschiedenen Werthe von x reell. Für $y = o$, erreicht x sein Maximum, nämlich a.

Errichtet man also auf der YAxe in einer Entfernung vom Mittelpunkte gleich $+ b$ und $- b$, und auf der XAxe in einer Entfernung von demselben Punkte gleich $+ a$ und $- a$, Perpendikel, so liegt die Ellipse innerhalb des von den 4 Perpendikeln eingeschlossenen Rechteckes. Sie wird von den beiden Axen in vier congruente Theile getheilt.

Zieht man eine Gerade durch den Mittelpunkt, deren Gleichung

$$x = Ax$$

ist, so erhält man die x der Schneidepunkte derselben und der Ellipse $(E_1)$ aus der Gleichung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(a^2A^2 + b^2)\, x^2 = a^2b^2,$$

diese Schneidepunkte sind also reell, welchen Werth A auch haben mag. Die Ellipse ist deßhalb eine in sich geschlossene Curve.

Bedeutet r die Länge einer vom Mittelpunkte nach einem Punkte der Ellipse gezogenen Geraden, und $\alpha$ den Winkel, welchen sie mit der XAxe bildet, so ist, indem wir r immer als positiv ansehen, $y = r \sin \alpha$ und $x = r \cos \alpha$, die Gleichung $(E_1)$ ergibt also

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{ab}{\sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2\alpha + b^2}}$$

Es erreicht also r sein Maximum nämlich a, wenn $\alpha$ gleich o oder $180^0$, sein Minimum b, wenn es $90^0$ oder $270^0$ wird. Wächst $\alpha$ von $0^0$ bis $90^0$, so nimmt der Werth von r stets ab; ist $\mu$ aber ein bestimmter Werth für $\alpha$, so erhält man für $\alpha = 360^0 - \mu$, $\alpha = 180^0 + \mu$ und $\alpha = 180^0 - \mu$ dieselben Werthe für r.

Zwei Durchmesser also, welche zu beiden Seiten der X oder YAxe gleiche Winkel mit diesen Axen bilden, sind gleich.

Aufg. 10. Die Ellipse sei gegeben, es soll 1) ihr Mittelpunkt, 2) der größte und kleinste Durchmesser gefunden werden.

Aufg. 11. Es seien die Durchmesser a und b gegeben, so wie der Winkel, den ein anderer Durchmesser mit a bildet, es soll die Größe desselben mit Hülfe der Proportion $r : b = a : \sqrt{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}$ durch Construktion gefunden werden.

11) Nach der 9. Nummer ist die Gleichung derjenigen Geraden, welche die dem Durchmesser $y = Ax$ parallelen Sehnen halbirt, da c in der Gleichung $(E_1) = o$ ist,

$$b^2x + a^2Ay = o$$

oder

$$y = -\frac{b^2}{a^2A}\, x,$$

die Gleichung der Geraden, also, welche die diesem Durchmesser parallelen Sehnen halbirt,

$$y = -\frac{b^2}{a^2\left(-\frac{b^2}{a^2A}\right)}\, x$$

oder

$$y = Ax.$$

Es sind also zwei Durchmesser stets einander in der Art zugeordnet, daß der eine die dem andern parallelen Sehnen halbirt. Solche Durchmesser heißen zugeordnete oder conjugirte Durchmesser. Ueber den Winkel, den sie mit einander bilden, kann man innerhalb gewisser Grenzen beliebige Voraussetzungen machen. Soll derselbe ein rechter sein, so muß

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{a^2A}{b^2} = A$$

sein, was offenbar nur geschehen kann, sobald $A = o$ ist. Dadurch gehen aber die Gleichungen $y = Ax$ und $bx^2 + a^2Ay = o$ über in

$$y = 0 \text{ und } x = o.$$

Die mit der X und YAxe zusammen fallenden Durchmesser sind also die einzigen auf einander senkrechten conjugirten Durchmesser, der eine von ihnen ist zugleich der größte, der andere der kleinste aller Durchmesser, sie führen den Namen der großen und kleinen Axe der Ellipse.

Aufg. 12. Die Ellipse und ein Durchmesser sind gegeben, es soll der demselben conjugirte durch Construction gefunden werden.

Aufg. 13. Die große und kleine Axe, so wie die Richtung eines Durchmessers seien gegeben, es soll der zu diesem Durchmesser conjugirte construirt werden (mit Anwendung der Gleichung $y = Ax$ und $y = -\frac{b^2}{a^2A}x$).

Nach der vorigen Nummer ist die Länge eines beliebigen Durchmessers, welcher mit der X Axe den Winkel $\alpha$ bildet durch die Gleichung

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}$$

gegeben. Ist die Gleichung dieses Durchmessers nun $y = Ax$, so wird

$$\sin \alpha = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}}, \text{ und } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}},$$

also

$$r^2 = \frac{a^2b^2 (1 + A^2)}{a^2A^2 + b^2}.$$

Die Länge des conjugirten Durchmessers, die wir mit $r_1$ bezeichnen wollen, würde also bestimmt durch die Gleichung

$$r_1{}^2 = \frac{a^4A^2 + b^4}{b^2 + a^2A^2}.$$

Addirt man die beiden Gleichungen, so erhält man nach einigen Reduktionen

$$r^2 + r_1{}^2 = a^2 + b^2.$$

Die Summe der Quadrate zweier beliebigen conjugirten Durchmesser ist also gleich der Summe der Quadrate der beiden Axen.

Bezeichnet man den Winkel, welchen die beiden conjugirten Durchmesser mit einander bilden, mit $\vartheta$, so ist

$$\text{tang } \vartheta = \frac{a^2A^2 + b^2}{(a^2 - b^2) A}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\sin \vartheta = \frac{a^2A + b^2}{\sqrt{(b^4 + a^4A^2)(1 + A^2)}},$$

also

$$rr_1 \sin \vartheta = ab.$$

Dies Produkt $rr_1 \sin \vartheta$ stellt aber den Inhalt eines Parallelogramms vor, dessen zusammenstoßende Seiten r und $r_1$ den Winkel $\vartheta$ mit einander bilden. Construirt man dies Parallelogramm mit der Ellipse, so werden die den Durchmessern r und $r_1$ gegenüberliegenden Seiten Tangenten, wie sich in der folgenden Nummer ergeben wird, entleihen wir also den Namen Tangente aus derselben, so läßt sich der aus der letzten Gleichung herzuleitende Satz folgendermaßen abfassen:

Jedes der Ellipse umschriebene Parallelogramm, dessen Seiten zweien conjugirten Durchmessern parallel laufen, ist dem Rechtecke aus den beiden Axen gleich.

Aufg. 14. Es sind zwei conjugirte Durchmesser der Größe und Lage nach gegeben, es sollen die beiden Axen durch Construction gefunden werden.

12) Suchen wir die Durchschnittspunkte der Geraden (G) und der Ellipse ($E_1$), so erhalten wir für das x desselben

$$x = -\frac{a^2AB}{a^2A^2 + b^2} \pm \frac{ab\sqrt{a^2A^2 + b^2 - B^2}}{a^2A^2 + b^2}.$$

Sollen die beiden Durchschnittspunkte zusammen fallen, die Gerade (G) also eine Tangente werden, so muß

$$B^2 = a^2A^2 + b^2$$

sein. Alsdann erhält man für die Coordinaten x und y des Berührungspunktes

$$x = -\frac{a^2A}{\sqrt{a^2A^2 + b^2}}, \quad y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2A^2 + b^2}}.$$

Es ist also auch $b^2x + a^2Ay = o$, folglich liegt der Berührungspunkt in dem Endpunkte desjenigen Durchmessers, welcher dem durch die Gleichung $y = Ax$ ausgedrückten Durchmesser conjugirt ist.

Zieht man also im Scheitel eines Durchmessers eine Parallele zu dem ihm conjugirten Durchmessers, so ist dieselbe eine Tangente der Ellipse.

Aufg. 15. In einem gegebenen Punkte der Ellipse eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

Setzt man in Gleichung (G) für B den, aus der Gleichung $B^2 = a^2A^2 + b^2$ entnommenen Werth ein, so geht dieselbe über in

$$y = Ax \pm \sqrt{a^2A^2 + b^2} \qquad (T)$$

Es lassen sich also zu einer gegebenen Richtung immer zwei parallele Tangenten an die Ellipse ziehen. Der Durchschnitt der Tangente mit der XAxe

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist gleich $-\frac{\sqrt{a^2A^2 + b^2}}{A}$, da nun ferner das x des Berührungspunktes gleich $-\frac{a^2A}{\sqrt{a^2A^2 + b^2}}$ ist, so erhält man die Proportion

$$\frac{\sqrt{a^2A^2 + b^2}}{A} : a = a : \frac{a^2A}{\sqrt{a^2A^2 + b^2}}.$$

Die geometrische Deutung dieses Ausdrucks ergibt sich unschwer:

Zieht man in irgend einem Punkte der Ellipse eine Tangente an dieselbe, fällt von demselben einen Perpendikel auf die große Axe, und verlängert denselben, bis er den über der großen Axe als Durchmesser construirten Kreis schneidet, und zieht dann in den Schneidepunkten Tangenten an den Kreis, so schneiden diese und die Tangente an der Ellipse die Verlängerung der großen Axe in demselben Punkte.

Aehnliche Schlüsse lassen sich in Beziehung auf die kleine Axe machen.

Aufg. 16. Von einem gegebenen Punkte in der Verlängerung der großen oder kleinen Axe eine Tangente an die Ellipse zu ziehen.

13) Wir nehmen auf der großen Axe der Ellipse zu beiden Seiten des Mittelpunktes zwei Punkte an, welche gleich weit von demselben entfernt sind. Wir bezeichnen diese Entfernung mit e. Ferner ziehen wir zwei Gerade nach dem Tangirungspunkte einer an die Ellipse gezogenen Tangente von den beiden Punkten aus; die Winkel, welche jene Geraden mit der positiven Richtung der x bilden, bezeichnen wir mit $\beta$ und $\gamma$, den Winkel, welchen die Tangente mit dieser Richtung bildet, mit $\alpha$. Sollen jene beiden Geraden nun gleiche Winkel mit der Tangente bilden, so muß $\operatorname{tang}(\gamma - \alpha) = -\operatorname{tang}(\beta - \alpha)$ sein. Bezeichnet man nun mit x und y die Coordinaten des Berührungspunktes, so ist, wie die Construction zeigt,

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{y}{x + e}, \quad \operatorname{tang}\gamma = \frac{y}{x - e}.$$

Ist (T) die Gleichung der Tangente, so ist ferner

$$\operatorname{tang}\alpha = A,$$

also

$$\operatorname{tang}(\gamma - \alpha) = \frac{y - A(x - e)}{x - e + Ay} \text{ und } \operatorname{tang}(\beta - \alpha) = \frac{y - A(x + e)}{x + e + Ay}.$$

Soll also $\operatorname{tang}(\gamma - \alpha) = -\operatorname{tang}(\beta - \alpha)$ sein, so erhält man

$$[y - A(x - e)][x + e + Ay] = [A(x + e) - y][x - e + Ay]$$

oder

$$xy + Ay^2 - Ax^2 - A^2xy = -Ae^2.$$

Setzt man für x und y ihre Werthe, wie sie in der vorigen Nummer für die Berührungspunkte aufgefunden sind, so erhält man nach einigen Reduktionen

$$e^2 = a^2 - b^2.$$

Da dieser Ausdruck unabhängig von A ist, so gilt er für jede mögliche Tangente.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es gibt, also, zwei Punkte in der großen Axe, die so beschaffen sind, daß, wenn man von ihnen Gerade nach einem beliebigen Punkte der Ellipse, und in diesem Punkte eine Tangente zieht, die Geraden mit der Tangente gleiche Winkel bilden.

Diese beiden Punkte heißen die Brennpunkte der Ellipse, ihre Entfernung vom Mittelpunkte führt den Namen der Excentricität. Sind die große und kleine Axe gegeben, so findet man die Brennpunkte durch eine leichte Construction. Dieselben haben noch eine andere bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit, welche wir zunächst entwickeln wollen.

Nehmen wir, zu dem Zwecke, wiederum zwei gleichweit vom Mittelpunkte entfernte Punkte in der großen Axe an. Die Entfernung setzen wir gleich e, und ziehen nun wie vorhin von denselben zwei Gerade nach irgend einem Punkte der Ellipse, dessen Coordinaten x und y sein mögen. Bezeichnet nun 2s die Summe der geraden Linien, so ist

$$\sqrt{y^2 + (x + e)^2} = 2s - \sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$

oder

$$e^2x^2 + s^4 = s^2 (x^2 + y^2 + e^2).$$

Da nun der Punkt xy in der Peripherie der Ellipse liegen soll, so muß das x und y dieses Ausdrucks auch die Gleichung der Ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

befriedigen, es muß also

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$$

sein. Setzt man diesen Werth ein und ordnet nach $x^2$, so kömmt:

$$(a^2e^2 - a^2s^2 + b^2s^2)\, x^2 + a^2s^2 (s^2 - e^2 - b^2) = o.$$

Soll dieser Ausdruck für jeden beliebigen Werth für $x^2$ befriedigt werden, so muß sowohl der Coefficient von $x^2$, als das von $x^2$ freie Glied verschwinden. Es muß also

$$s^2 - e^2 - b^2 = o \text{ und } a^2e^2 - a^2s^2 + b^2s^2 = o$$

sein, d. h. es muß

$$e^2 = a^2 - b^2 \text{ und } s^2 = a^2$$

sein. Es gibt also in der großen Axe zwei Punkte, welche so beschaffen sind, daß die Summe der beiden Geraden, welche von ihnen nach irgend einen beliebigen Punkt der Ellipse gezogen werden, gleich der großen Axe ist. Diese beiden Punkte sind die Brennpunkte.

14) Ehe wir weiter gehen, wollen wir in der gegenwärtigen Nummer zeigen, wie man von einem Coordinatensystem durch Drehung der Axen um den Anfangspunkt zu einem andern übergeht. Wir werden von dieser Verlegung der Axen bei den noch übrigen Sätzen über die Ellipse, und noch mehr, im nächsten Capitel, bei der Hyperbel Gebrauch machen.

Zunächst soll gezeigt werden, wie man von einem rechtwinklichen Systeme (yox Fig. 2) zu einem andern rechtwinklichen (qop) übergeht. Wir bezeichnen den Winkel pox mit $\varphi$. Die Coordinaten des beliebigen Punktes m, im ursprünglichen Systeme seien x und y, im neuen p und q.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir ziehen die Gerade mo, deren Länge mit r bezeichnet werden soll, außerdem bezeichnen wir den Winkel mop mit $\alpha$, alsdann ist

$$r\sin(\alpha + \varphi) = y \text{ und } r\cos(\alpha + \varphi) = x.$$

Nun ist aber $\frac{q}{r} = \sin\alpha$ und $\frac{p}{r} = \cos\alpha$, also $y = q\cos\varphi + p\sin\varphi$ und $x = -q\sin\varphi + p\cos\varphi$.

Es sei zweitens das ursprüngliche System yox (Fig. 3) ein rechtwinkliches, und qop dasjenige, zu welchem wir übergehen, ein schiefwinkliches. Winkel qox heiße $\psi$, außerdem fällen wir einen Perpendikel ms von m auf op, die Bezeichnung bleibe im Uebrigen dieselbe, wie im vorigen Falle. Dann ist wiederum

$$y = r\sin(\alpha + \varphi) \text{ und } x = r\cos(\alpha + \varphi).$$

Die Figur lehrt aber, daß

$$\sin\alpha = \frac{ms}{r} = \frac{q\sin(\psi - \varphi)}{r} \text{ und } \cos\alpha = \frac{so}{r} = \frac{p + q\cos(\psi - \varphi)}{r}$$

ist. Darnach wird

$$y = q\sin\psi + p\sin\varphi \text{ und } x = q\cos\psi + p\cos\varphi.$$

Es sei endlich drittens das ursprüngliche System sowohl, als dasjenige, wozu wir übergehen, ein schiefwinkliches. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes m im ursprünglichen Systeme seien p und q, im neuen $p_1$ und $q_1$. Den Winkel, welchen die QAxe mit der PAxe bildet, nennen wir $\vartheta$. Die $P_1$Axe bilde den Winkel $\varphi$, die $Q_1$Axe den Winkel $\psi$ mit der PAxe, indem wir diese Winkel von der PAxe aus nach der QAxe rechnen. Fällen wir nun von m einen Perpendikel auf die PAxe, so erhält man nach dem vorigen Falle, wie eine einfache Construction zeigt, zur Bestimmung dieses Perpendikels die Gleichung

$$q\sin\vartheta = p\sin\varphi + b\sin\psi.$$

Bezeichnen wir ferner den Winkel, welchen die $P_1$Axe mit der QAxe bildet, mit $\varphi_1$, und den Winkel, welchen die $Q_1$Axe mit der QAxe bildet, mit $\psi_1$, indem wir diese Winkel nach derselben Richtung hin rechnen, wie die Winkel $\varphi$ und $\psi$, fällen dann einen Perpendikel von m auf die QAxe, so bekömmt man, ähnlich, wie vorhin, die Gleichung

$$p\sin\vartheta = -p\sin\varphi_1 - q\sin\psi_1.\text{*)}$$

15) Wenden wir die in der vorigen Nummer entwickelten Transformationen auf die Gleichung $(E_1)$ an, indem wir von einem rechtwinklichen zu einem schiefwinklichen Systeme übergehen, so verwandelt sich dieselbe in

$$(a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi)\, q^2 + 2\,(a^2\sin\psi\sin\varphi + b^2\cos\psi\cos\varphi)\, pq + (a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\, p^2 = a^2b^2.$$

---

*) Anmerk. Man erhält dieselben Gleichungen auch folgendermaßen. Wir construiren ein ganz beliebiges rechtwinkliches Coordinatensystem, welches mit den beiden schiefwinklichen denselben Anfangspunkt hat. Die P und QAxe des ursprünglichen Systems mögen mit der XAxe des rechtwinklichen Hülfssystems beziehlich die Winkel $\alpha$ und $\beta$, die $P_1$ und $Q_1$Axe des Systems, wozu man übergehen soll, mit eben jener Axe die Winkel $\alpha_1$ und $\beta_1$ bilden. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes in den beziehlichen Systemen mögen pq, $p_1q_1$, xy sein, man hat alsdann



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In dieser Gleichung lassen sich die Winkel $\varphi$ und $\psi$ niemals so bestimmen, daß die Coefficienten von $q^2$ und $p^2$ verschwinden. Bestimmt man aber diese Winkel so, daß tang $\varphi = -\frac{b^2}{a^2 \tang \psi}$ wird, so verschwindet der Coefficient von pq. Ist demnach tang $\psi = A$, so muß $\varphi$ so bestimmt werden, daß tang $\varphi = -\frac{b^2}{a^2 A}$ ist. Die neuen Coordinatenaxen fallen also mit zwei conjugirten Durchmessern zusammen. Die ungeformte Gleichung geht alsdann über in

$$(a^2 \sin\psi + b^2 \cos\psi)\, q^2 + (a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)\, p^2 = a^2 b^2,$$

welche wir der Kürze wegen schreiben

$$(E_2) \qquad a_1{}^2 q^2 + b_1{}^2 p^2 = a_1{}^2 b_1{}^2,$$

indem wir anstatt $\frac{a^2 b^2}{a^2 \sin\psi + b^2 \cos^2\psi}$, $a_1{}^2$ und anstatt $\frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}$, $b_1{}^2$ setzen.

Die Gleichung $(E_2)$ gibt:

$$q^2 = \frac{b_1{}^2}{a_1{}^2}\,(a_1{}^2 - p^2).$$

Ziehen wir nun von zwei beliebigen Punkten der Ellipse die beiden qOrdinaten, und bezeichnen dieselben mit $q_1$ und $q_2$, so ist

$$q_1{}^2 : q_2{}^2 = (a_1{}^2 - p_1{}^2) : (a_1{}^2 - p_2{}^2) \text{ oder}$$
$$q_1{}^2 : q_2{}^2 = (a_1 + p_1)(a_1 - p_1) : (a_1 + p_2)(a_1 - p_2),$$

indem wir mit $p_1$ und $p_2$ die zu $q_1$ und $q_2$ gehörenden Abscissen bezeichnen.

Es verhalten sich also die Quadrate zweier Ordinaten, wie die Rechtecke aus den, durch die Fußpunkte der Ordinaten bestimmten, Abschnitten des conjugirten Durchmessers.

Construirt man nun über diesen Durchmesser einen Halbkreis und errichtet in den Fußpunkten der Ordinaten Perpendikel bis zu dessen Peripherie, so sind die Quadrate dieser Perpendikel gleich den obigen Rechtecken, bezeichnen wir die Perpendikel daher mit $s_1$ und $s_2$, so ist

$$q_1 : q_2 = s_1 : s_2.$$

Es verhalten sich also die Ordinaten, wie die construirten Perpendikel. Macht man $q_2 = b_1$, so wird $s_2 = a_1$, es ist also immer $q_1 : s_1 = b_1 : a_1$. Es verhält sich also auch

---

$$q \sin\beta + p \sin\alpha = q_1 \sin\beta_1 + p_1 \sin\alpha_1 \quad (= y)$$
$$q \cos\beta + p \cos\varphi = q_1 \cos\beta_1 + p_1 \cos\alpha_1 \quad (= x)$$

und

$$p\,(\sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha) = q_1\,(\sin\beta \cos\beta_1 - \sin\beta_1 \cos\beta) + p_1\,(\sin\beta \cos\alpha_1 - \sin\alpha_1 \cos\beta).$$
$$q\,(\sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha) = q_1\,(\sin\beta_1 \cos\alpha - \sin\alpha \cos\beta_1) + p_1\,(\sin\alpha_1 \cos\alpha - \sin\alpha \cos\alpha_1).$$

Bezeichnen wir nun, wie im Texte, den Winkel $\beta - \alpha$, welchen die ursprünglichen P und QAxen miteinander bilden, mit $\vartheta$, ferner die Winkel $\alpha_1 - \alpha$, $\beta_1 - \alpha_1$, $\alpha_1 - \beta$ und $\beta_1 - \beta$ der Reihe nach mit $\varphi$, $\psi$, $\psi_1$, $\varphi_1$, so gehen die letzten beiden Gleichungen in die im Texte entwickelten über.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Ordinate zum Perpendikel, wie der der Ordinate parallele Durchmesser, zu dem ihm conjugirten. Hiernach lassen sich dann leicht folgende Aufgaben lösen:

Aufg. 17. Es seien zwei beliebige conjugirte Durchmesser gegeben, es sollen die Punkte gefunden werden, worin eine beliebige, den einen Durchmesser schneidende und dem andern parallele, Gerade die Ellipse schneidet.

Aufg. 18. Es seien wiederum zwei beliebige conjugirte Durchmesser gegeben, es sollen die Schneidepunkte einer beliebigen Geraden und der Ellipse bestimmt werden.

Ist $q = Ap + B$ die Gleichung einer geraden Linie in dem neuen Coordinatensysteme, so findet man durch ähnliche Schlüsse, wie in der 12ten Nummer, daß dieselbe eine Tangente der Ellipse ($E_2$) sein muß, sobald $B = \pm \sqrt{a_1{}^2A^2 + b_1{}^2}$ ist, daß also

$$q = Ap \pm \sqrt{a_1{}^2A^2 + b_1{}^2}$$

die Gleichung einer Tangente vorstellt. Wendet man die Schlußreihe der obigen Nummer an, so erhält man folgende Verallgemeinerung des am Ende derselben ausgesprochenen Lehrsatzes:

Construirt man über irgend einen Durchmesser der Ellipse einen Halbkreis, fällt von einem Punkte der Peripherie desselben einen Perpendikel auf den Durchmesser, und zieht vom Fußpunkte desselben eine Ordinate an die Ellipse, so schneiden die beiden Tangenten, welche man die eine im Endpunkte der Ordinate an die Ellipse und die andere in dem angenommenen Punkte der Kreisperipherie an den Kreis zieht, einander in demselben Punkte des verlängerten Durchmessers.

Aufg. 19. Man soll von einem gegebenen Punkte außerhalb der Ellipse eine Tangente an dieselbe ziehen.

16) Den Inhalt der Ellipse bestimmt man auf folgende Weise. Man construire über der großen Axe einen Halbkreis, errichte in zwei beliebigen Punkten derselben Perpendikel. Die Stücke dieser Perpendikel bis zur Ellipse bezeichne man beziehlich mit $q_1$ und $q_2$, bis zur Kreisperipherie mit $s_1$ und $s_2$, ziehe darauf eine Gerade vom Endpunkte von $q_1$ nach dem Endpunkte von $q_2$, und vom Endpunkte von $s_1$ nach dem Endpunkte von $s_2$; den Abstand der beiden Punkte in der großen Axe bezeichnen wir mit l. Es entstehen dann zwei Paralleltrapeze, das eine mit den Seiten $q_1$ und $q_2$, das andere mit den Seiten $s_1$ und $s_2$. Der Inhalt des ersten ist gleich $\frac{(q_1 + q_2)\, l}{2}$, des zweiten $\frac{(s_1 + s_2)\, l}{2}$. Nun ist aber $\frac{q_1}{s_1}$ sowohl als $\frac{q_2}{s_2}$ gleich $\frac{b}{a}$. Es verhält sich also auch der Inhalt des ersten Trapezes zu dem des zweiten, wie b zu a. Theilt man nun die große Axe in beliebig viele Theile, errichtet in jedem Theilpunkte einen Perpendikel, verbindet die Schneidepunkte je zweier auf einander folgenden Perpendikel mit der Ellipse, ebenso wie ihre Schneidepunkte mit dem Kreise durch gerade Linien, so verhält sich die Summe aller entstehenden Ellipsentrapeze, zu der Summe aller Kreistrapeze, wie b zu a. Liegen die Theilpunkte auf der großen Axe einander unendlich nahe, so fällt die Summe der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ellipsentrapeze mit der halben Ellipse, die Summe der Kreistrapeze mit dem Halbkreise zusammen. Es erhält sich also auch der Inhalt der ganzen Ellipse zu dem des ganzen Kreises, wie b zu a, derselbe wird daher bestimmt durch den Ausdruck $ab\pi$.

## Die Hyperbel.

17. Die Gleichung der Hyperbel ist nach der zweiten Nummer

$$ay^2 - bx^2 = cx + d.$$

Durch eine Methode, welche der in Nr. 9 angewandten ganz analog ist, findet man, daß die Sätze, welche daselbst von der Ellipse aufgestellt worden sind, auch von der Hyperbel gelten, wir wiederholen sie deßhalb nicht. Ebenso verweisen wir in Beziehung auf die Erklärung von Mittelpunkt, Durchmesser, Scheitel, Sehne ꝛc. auf eben diese Nummer. Durch eine Verlegung des Coordinatenanfangspunktes nimmt die Gleichung der Hyperbel die Form

$$a^2q^2 - b^2x^2 = a^2b^2 \qquad \text{(H)}$$

an, unter welcher wir die Curve zunächst betrachten wollen. Man überzeugt sich bald, daß jeder positive und negative Werth von x, zwei reelle, einander gleiche, und durch das Vorzeichen verschiedene Werthe von y gibt und daß die Axe der X sowohl, als die der Y die Curve in congruente Hälften theilt. Man erhält aber

$$x = \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2}(y^2 - b^2)},$$

kein Werth für y, welcher zwischen $+ b$ und $- b$ liegt, gibt also einen reellen Werth für x, wohl aber jeder andere Werth dieser Veränderlichen.

Die Hyperbel besteht deßhalb aus zwei vollständig von einander gesonderten, congruenten Zweigen, welche zu beiden Seiten der XAxe liegen.

Ist

$$y = Ax$$

die Gleichung irgend einer mit einem Durchmesser zusammenfallenden Geraden, so erhält man für die xCoordinate der Durchschnitte derselben mit der Hyperbel

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2A^2 - b^2}}$$

Die Durchschnitte sind demnach reell, so lange $a^2A^2 - b^2$ eine positive Größe ist, d. h., so lange die Tangente (A) des Winkels, welchen die Gerade mit der XAxe bildet, größer ist, als $+ \frac{b}{a}$ und kleiner als $- \frac{b}{a}$. Wird aber $A = + \frac{b}{a}$ oder $= - \frac{b}{a}$, so wird der Nenner in dem Ausdrucke für x gleich o, also x selbst unendlich, für jeden Werth A aber, welcher kleiner als $+ \frac{b}{a}$ und größer als $- \frac{b}{a}$ ist, erhält man imaginäre Werthe für x. Jene beiden Geraden, welche den Uebergang, von den reellen Durchschnitten zu den imaginären bilden, heißen die Asymptoten der Hyperbel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es gibt also zwei durch den Mittelpunkt gehende Gerade zu beiden Seiten der YAxe, welche der Hyperbel in einer unendlich weit liegenden Entfernung begegnen. Zwei der Scheitelwinkel, welche sie bilden, werden von der YAxe halbirt. Alle innerhalb dieser Winkel gelegenen und durch den Mittelpunkt gehenden Geraden begegnen der Hyperbel, alle außerhalb gelegenen und durch den Mittelpunkt gehenden Geraden begegnen ihr nicht. Die Hyperbel liegt also gänzlich innerhalb jener Scheitelwinkel.

Bestimmt man, auf bekannte Weise, die Durchschnittspunkte der Hyperbel und einer beliebigen geraden Linie, welche nicht parallel einer Asymptote ist, so findet man, daß deren höchstens zwei vorhanden sind, welche für gewisse Fälle in einen zusammenfallen, für andere aber imaginär werden. Die Gleichung einer der Asymptote parallelen Geraden ist $ay = \pm bx + c$, sucht man die Coordinaten der Durchschnittspunkte derselben und der Hyperbel, so erhält man nur einen Werth für dieselben, es wird nämlich

$$x = \frac{a^2b^2 - c^2}{2bc} \text{ und } y = \frac{a^2b^2 + c^2}{2ac}.$$

Jede einer Asymptote parallele Gerade schneidet die Hyperbel also nur in einem Punkte.

18) Ist

$$y = Ax$$

die Gleichung irgend eines Durchmessers, so ist

$$a^2Ay - b^2x = o$$

die Gleichung des zugeordneten Durchmessers. Sollen dieselben senkrecht auf einander stehen, so muß, wie bei der Ellipse, $A = o$ sein, so daß also auch bei der Hyperbel die X und YAxe die einzigen conjugirten Durchmesser sind, welche senkrecht auf einander stehen. Man nennt dieselben wiederum die Axen der Hyperbel, und zwar die mit der YAxe zusammenfallende, welche der Hyperbel begegnet, die erste Axe, ihr Werth ist $2b$; die mit der XAxe zusammenfallende, welche ihr nicht begegnet, die zweite Axe, ihren Werth setzt man gleich $2a$.

Beziehen wir die Hyperbel auf schiefwinkliche Coordinaten, und behalten dabei die Bezeichnungen der Nr. 15 bei, so erhalten wir

$$(H_1) \qquad (a^2\sin^2\psi - b^2\cos^2\psi)\, q^2 + 2\,(a^2\sin\psi\,\sin\varphi - b^2\cos\psi\,\cos\varphi)\, pq + (a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi)\, p^2 = a^2b^2.$$

Ueber die Größe der Winkel $\psi$ und $\varphi$ können wir jede beliebige Voraussetzung machen, wir wollen dieselben zunächst so bestimmen, daß das zweite Glied der Gleichung $(H_1)$ wegfällt. Es muß alsdann $\frac{b^2}{a^2} = \text{tang}\varphi\ \text{tang}\psi$ werden. Ist also A der Werth von $\text{tang}\varphi$, so ist $\text{tang}\psi = \frac{b^2}{a^2A}$. Die neuen P und QAxen sind deßhalb zugeordnete Durchmesser. Wir schließen hierbei den Fall der Asymptoten aus, wo $A = \pm \frac{b}{a}$ ist, es würde nämlich alsdann auch $\frac{a^2}{b^2A} = \pm \frac{b}{a}$ werden, d. i. jede Asymptote würde ihr eigener coordinirter Durchmesser, und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Gleichung der Hyperbel nähme eine unbestimmte Form an. Für jeden andern Werth von A, nimmt aber die Gleichung ($H_1$) eine Form an, deren Characteristisches darin besteht, daß der Coefficient von $p^2$ dem von $q^2$ im Vorzeichen entgegengesetzt ist, wie sich leicht zeigen läßt. Wir dürfen dieselbe also folgendermaßen schreiben:

$$a_1^2q^2 - b_1^2p^2 = a_1^2b_1^2. \qquad (H_2)$$

Da hiernach $p^2 = \frac{a_1^2}{b_1^2}(q^2 - a_1^2)$ ist, so läßt sich auf ähnliche Weise, wie bei der Ellipse geschehen, der Satz herleiten, daß sich die Quadrate der Ordinaten, (welche hier der PAxe parallel gehen) verhalten wie die Rechtecke aus den Abscissen der Durchmesser, wenn man die Abscissen vom Fußpunkte der Ordinaten bis zu den Scheiteln der Durchmesser rechnet.

Es ist gemäß der Gleichung ($H_2$) aber $a_1^2 = \frac{a^2b^2(1 + A^2)}{b^2 - a^2A^2}$ und $b_1^2 = \frac{a^4A^2 + b^4}{b^2 - a^2A^2}$, also auch

$$a_1^2 - b_1^2 = \frac{a^2b^2 - a^4A^2 - b^4 + a^2b^2A^2}{b^2 - a^2A^2}$$

oder, indem man die Division auf der rechten Seite der Gleichung ausführt:

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2.$$

Wir erhalten also einen ähnlichen Satz, wie bei der Ellipse, dort war die Summe, hier ist:

Der Unterschied der Quadrate zweier conjugirten Durchmesser eine constante Größe.

Es ist der Sinus des Winkels, den die beiden conjugirten Durchmesser bilden gleich

$$\frac{a^2A^2 - b^2}{\sqrt{(a^4A^2 + b^2)(1 + A^2)}}$$

bezeichnen wir diesen Winkel mit $\vartheta$, so läßt sich leicht durch Ausführung der nöthigen Rechnungen zeigen, daß

$$a_1b_1\sin\vartheta = ab$$

ist. Ueber die geometrische Bedeutung dieses Ausdrucks siehe die ähnlichen Entwickelungen im vorigen Capitel über die Ellipse Nr. 11.

19) Wir wollen nun annehmen, daß die PAxe mit einer der beiden Asymptoten zusammen falle, etwa mit derjenigen, deren Gleichung $ay = bx$ ist, während die zweite Axe irgend einer geraden Linie parallel läuft. Die Gleichung ($H_1$) geht alsdann, da $\tang\varphi = \frac{b}{a}$ wird, über in

$$(H_3) \qquad (a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\psi)\,q^2 + \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a\sin\psi - b\cos\psi)\,pq = a^2b^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist nun die Gleichung derjenigen geraden Linie, welcher die zweite Axe parallel läuft, $p = c$, wo $c$ eine beliebige Constante bedeutet, so erhält man für die QCoordinaten der Durchschnittspunkte der Geraden und der Hyperbel, im Allgemeinen, zwei Werthe $q_1$ und $q_2$, das Product derselben ist gleich

$$\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\psi - a^2\sin^2\psi},$$

dasselbe ist also vollständig unabhängig von dem besonderen Werthe von $p$, es hängt nur von der Größe des Winkels $\psi$ ab, es ist constant, so lange $\psi$ denselben Werth behält. Bemerken wir außerdem, daß die Gleichung $(H_3)$ nur das Vorzeichen des mit $pq$ multiplicirten Gliedes ändert, wenn die PAxe mit derjenigen Asymptote zusammen fällt, deren Gleichung $ay = -bx$ ist, und daß also jenes Product unter ähnlichen Voraussetzungen dasselbe bleibt. Ist $p = c_1$ die Gleichung einer geraden Linie in dem zweiten Coordinatensysteme, sind ferner die Coordinaten der Durchschnittspunkte $q_3$ und $q_4$, so ist

$$q_1q_2 = q_3q_4.$$

Es folgt aus dem Vorstehenden demnach: daß, wenn man zwei beliebige Parallelen zieht, welche die Hyperbel und die Asymptoten schneiden, das Rechteck aus den Abschnitten der einen, gerechnet von einer Asymptote bis zu den beiden Durchschnittspunkten mit der Hyperbel, gleich ist dem Rechtecke der andern, gerechnet von der andern Asymptote bis zu den beiden Durchschnittspunkten mit der Hyperbel.

Läßt man die Linie $p = c$ im ersten Systeme mit der Geraden $p = c_1$ im zweiten zusammenfallen, so ergibt sich ferner: daß eine Gerade von den Asymptoten und der Hyperbel so geschnitten wird, daß die Abschnitte derselben von jeder Asymptote bis zum nächsten Durchschnitte mit der Hyperbel einander gleich sind.

Würde die Gerade also eine Tangente, so müßte der Tangirungspunkt in der Mitte des von den Asymptoten interceptirten Stückes derselben liegen.

Aufg. 20. Die Asymptoten und ein Punkt der Hyperbel seien gegeben, es sollen beliebig viele andere Punkte der Hyperbel gefunden werden.

Aufg. 21. Die Asymptoten und ein Punkt der Hyperbel seien gegeben, es soll eine Tangente in diesem Punkte gezogen werden.

Aufg. 22. Die Durchschnitte einer beliebigen Geraden und der Hyperbel sollen gefunden werden, wenn dieselben Stücke gegeben sind.

Da der für das Product $q_1q_2$ gefundene Ausdruck, wie aus der vorhergehenden Nummer hervorgeht, gleich dem Quadrate des mit der QAxe zusammenfallenden halben Durchmessers ist, so lassen sich noch leicht mehrere Sätze hier anknüpfen, die nicht besonders aufgeführt werden sollen.

20) Wir wollen nun endlich noch annehmen, daß die Winkel $\psi$ und $\varphi$ in der Gleichung $(H_1)$ so bestimmt würden, daß die Coefficienten von $p^2$ und $q^2$ gleich $o$ werden. Es geschieht dieß dadurch, daß man $\operatorname{tang}\psi = +\frac{b}{a}$ und $\operatorname{tang}\varphi = -\frac{b}{a}$ macht, oder umgekehrt, d. h.,



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

es geschieht dieß dadurch, daß man die Asymptoten zu Coordinatenaxen macht. Die Gleichung ($H_1$) geht alsdann über in

$$pq = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

oder

$$pq = c^2 \qquad (H_4)$$

indem man anstatt $\frac{a^2 + b^2}{4}$, $c^2$ schreibt.

Aus dieser Gleichung folgt nun sogleich, daß, wenn man durch irgend einen Punkt der Hyperbel Parallele zu den beiden Asymptoten zieht, bis jede derselben diejenige Asymptote schneidet, zu welcher sie nicht parallel ist, die entstandenen Parallelogramme jedesmal einander gleich sind.

Je größer ferner p wird, um so kleiner wird q, macht man $p = o$, so wird $q = \infty$ und umgekehrt. Die Asymptoten nähern sich also der Hyperbel ohne Ende, und erreichen dieselbe niemals.

Fällt man von irgend einem Punkte der Hyperbel Perpendikel auf die beiden Asymptoten, so läßt sich leicht zeigen, daß auch die Rechtecke aus diesen Perpendikeln einander gleich sein müssen, und daß ihr Werth $= c^2 \sin^2 \alpha$ ist, wenn man den Asymptotenwinkel mit $\alpha$ bezeichnet.

Ist

$$q = Ap + B$$

die Gleichung einer geraden Linie, so erhalten wir zur Bestimmung der Durchschnittspunkte, deren Coordinaten $p_1$ und $q_1$ sind, die Gleichungen

$$p_1^2 + \frac{B}{A} p_1 = \frac{c^2}{A}$$

$$q_1^2 - Bq_1 = c^2 A.$$

Da das von $p_1$ und $q_1$ freie Glied unabhängig von B ist, so folgt der Satz:

Wenn man durch die Durchschnittspunkte einer beliebigen Geraden und der Hyperbel, Parallele zu einer Asymptote zieht, bis sie die andere schneiden, so ist das Rechteck aus diesen Parallelen eine constante Größe, wie man jene Gerade auch parallel mit sich selber verschiebt.

Soll die durch die Gleichung $q = Ap + B$ ausgedrückte Gerade eine Tangente werden, so muß $A = -\frac{B^2}{4c^2}$ sein, jede Gleichung von der Form

$$q = -\frac{B^2}{4c^2} p + B$$

ist also die Gleichung einer Tangente der Hyperbel ($H_4$). Der Abschnitt, welchen dieselbe auf der QAxe abschneidet, ist gleich B, der auf der PAxe $\frac{4c^2}{B}$, das Product der beiden Abschnitte also $4c^2$.

Die Rechtecke, also, aus den Abschnitten der Asymptoten, welche durch zwei beliebige Tangenten bestimmt werden, sind unter einander gleich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für die Coordinaten $q_1$ und $p_1$ des Berührungspunktes erhält man $q_1 = \frac{B}{2}$ und $p_1 = -\frac{B}{2A}$, es läßt sich also auch hier leicht ein schon früher bewiesener Satz zeigen, wornach der Tangirungspunkt die Mitte des von den Asymptoten interceptirten Abschnittes der Tangente ist.

Aufg. 23. Von einem gegebenen Punkte der Asymptoten eine Tangente an die Hyperbel zu ziehen.

21) Wir gehen zu der Gleichung ($H_2$) der Hyperbel zurück, die Coordinatenaxen sind darin conjugirte Durchmesser. Soll die Gerade $q = Ap + B$ eine Tangente werden, so muß $B = \pm\sqrt{b_1^2 - a_1^2A^2}$ sein. Die Gleichung der Tangente, welche der Richtung A parallel geht, ist demnach

$$q = Ap \pm \sqrt{b_1^2 - a_1^2A^2} \qquad (T)$$

Es sind also im Allgemeinen jedesmal zwei Tangenten einer gegebenen Richtung parallel, dieselben fallen in eine zusammen, sobald $A = \pm\frac{b_1}{a_1}$ wird. Ist das Coordinatensystem ein rechtwinkliches, so bedeuten die Gleichungen $q = +\frac{b_1}{a_1}p$ und $q = -\frac{b_1}{a_1}p$ die beiden Asymptoten, in schiefwinklichen, worin die Coordinatenaxen mit zwei conjugirten Durchmessern zusammen fallen, bedeuten dieselben deßhalb ebenfalls die beiden Asymptoten.

Die Asymptoten haben also eine jede den Character zweier zusammenfallenden Tangenten, deren Tangirungspunkt unendlich weit liegt; denn die Coordinaten $p_1$ und $q_1$ dieses Punktes werden $= \pm\infty$, da

$$p_1 = \pm\frac{a_1^2A}{\sqrt{b_1^2 - a_1^4A^2}},\quad q_1 = \pm\frac{b_1^2}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2A^2}},$$

ist. Ist $b_1^2$ größer als $a_1^4A^2$, so erhält man imaginäre Ausdrücke für die Tangenten. Die reellen Tangenten laufen also nur denjenigen Durchmessern parallel, welche der Hyperbel nicht begegnen. Da $\pm\sqrt{b_1^2 - a_1^2A^2}$ der Abschnitt B ist, den die Tangente (T) auf der QAxe abschneidet, so erhält man

$$B : b_1 = b_1 : q_1.$$

Aufg. 24a. Die Hyperbel sei gegeben, von einem Punkte innerhalb des Asymptotenwinkels soll eine Tangente an die Hyperbel gelegt werden.

Da ferner der Abschnitt der Tangente auf der PAxe gleich $\mp\frac{\sqrt{b_1^2 - a_1^2A^2}}{A}$ ist, so erhält man die Proportion

$$B_1 : a_1 = a_1 : p_1,$$

worin $B_1$ den Abschnitt der Tangente auf der PAxe bedeutet.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufg. 24 b. Die Hyperbel sei gegeben, von einem Punkte, der in dem Nebenwinkel des Asymptotenwinkels liegt, soll eine Tangente an die Hyperbel gezogen werden.

Am Schlusse dieses Capitels wollen wir noch eine Untersuchung anstellen, welche der in Nr. 13 analog ist. Wir legen dabei die Gleichung (H) der Hyperbel zum Grunde. Wir nehmen auf der ersten Axe zu beiden Seiten des Mittelpunktes in gleicher Entfernung von demselben zwei Punkte an, ziehen von ihnen zwei Gerade nach demselben Punkte der Hyperbel, und in diesem Punkte eine Tangente an dieselbe. Die Länge der beiden Geraden bezeichnen wir mit $r$ und $r_1$, die Entfernung der beiden Punkte in der Axe von dem Mittelpunkte mit $e$. Es sollen nun zunächst die Bedingungen aufgefunden werden, unter denen die Geraden mit der Tangente gleiche Winkel bilden. Die Gleichung der Tangente sei $y = Ax + B$, die Coordinaten des Tangirungspunktes in der Hyperbel $\xi$ und $\eta$. Dann muß nach einem bekannten Satze der Dreieckslehre

$$e + B : e - B = \sqrt{\xi^2 + (\eta + e)^2} : \sqrt{\xi^2 + (\eta - e)^2},$$

oder

$$(e^2 + B^2)\,\eta = B\,(\xi^2 + \eta^2 + e^2)$$

sein. Nach der vorigen Nummer ist aber

$$B = \sqrt{b^2 - a^2A^2},\quad \xi = \frac{a^2A}{\sqrt{b^2 - a^2A}},$$

$$\eta = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2A^2}}.$$

Setzt man diese Werthe in die letzte Gleichung ein, so reducirt sich dieselbe auf

$$e^2 = b^2 + a^2.$$

Da der Werth von $e$ ganz unabhängig von $A$ ist, so folgt daraus der Satz: es gibt in der ersten Axe der Hyperbel zwei Punkte, die so beschaffen sind, daß die von denselben an einen Punkt derselben gezogenen Geraden mit der Tangente in diesem Punkte gleiche Winkel bilden. Diese beiden Punkte heißen die Brennpunkte der Hyperbel.

Auf ähnliche Weise, wie es in Nr. 13 bei der Ellipse geschehen ist, zeigt man, daß die Differenz der beiden von den Brennpunkten nach einem Punkte der Hyperbel gezogenen Geraden gleich der ersten Axe ist.

---

## Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades.

22) Es soll in diesem Kapitel noch gezeigt werden, daß jede Gleichung vom zweiten Grade zwischen $x$ und $y$ einen Kegelschnitt bedeutet, gleichgültig, welche Voraussetzung man über den Coordinatenwinkel macht. Da jedoch der Grad der Gleichung durch eine Transformation der Coordinaten, wie sie in der 14ten Nummer gezeigt worden ist, nicht erhöht

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wird, so können wir unbeschadet der Allgemeinheit der Frage, sogleich rechtwinkliche Coordinaten annehmen, wodurch wir manchen Weitläufigkeiten in der Berechnung aus dem Wege gehen. Die allgemeine Form der in Rede stehenden Gleichung ist alsdann:

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + \eta = o. \qquad (C)$$

Wir nehmen dabei an, daß $\alpha$ eine positive Größe sei. Suchen wir nun die Durchschnittspunkte des durch diese Gleichung dargestellten geometrischen Ortes und der geraden Linie $y = Ax + B$ (G), indem wir das y aus derselben mit Hülfe der letzten Gleichung eliminiren, setzen alsdann die Hälfte des Coefficienten von x negativ genommen gleich $x_1$, und statt B seinen Werth $y_1 - Ax_1$, so heißt die nach A geordnete Schlußgleichung

$$(\beta x_1 + \gamma y_1 + \varepsilon)\, A + \alpha x_1 + \beta y_1 + \delta = o. \qquad (M)$$

$x_1$ und $y_1$ bedeuten in dieser Gleichung die Coordinaten des Mittelpunktes des von dem geometrischen Orte (C) interceptirten Stückes der Geraden (G). Setzt man nun

$$\beta x_1 + \gamma y_1 + \varepsilon = o \text{ und } \alpha x_1 + \beta y_1 + \delta = o,$$

so wird die Gleichung (M) für jeden beliebigen Werth von A befriedigt. Wenn die durch die beiden letzten Gleichungen dargestellten geraden Linien einander schneiden, so hat der geometrische Ort (C) einen Mittelpunkt. Als Coordinaten desselben ergeben sich

$$x = \frac{\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\beta^2 - \alpha\gamma},\ y = \frac{\alpha\varepsilon - \beta\delta}{\beta^2 - \alpha\gamma}.$$

Ist demnach $\beta^2 - \alpha\gamma = o$, so liegt dieser Mittelpunkt unendlich weit, ist aber außerdem auch noch $\gamma\delta - \beta\varepsilon = o$ also auch $\alpha\varepsilon - \beta\delta = o$, so wird die Lage desselben unbestimmt. Wir schließen diese Fälle vorläufig aus, setzen also voraus, der geometrische Ort (C) habe einen Mittelpunkt, und verlegen den Anfangspunkt der Coordinaten in diesen Punkt, es geht alsdann die Gleichung (C) über in:

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \eta_1 = o \qquad (C_1)$$

indem wir anstatt

$$\frac{\gamma\delta^2 + \alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon + \eta(\beta^2 - \alpha\gamma)}{\beta^2 - \alpha\gamma}$$

$\eta_1$ schreiben. Beziehen wir nun die Gleichung ($C_1$) auf schiefwinkliche Coordinaten, indem wir

$$y = q\sin\psi + p\sin\varphi$$
$$x = q\cos\psi + p\cos\varphi$$

machen, worin $\varphi$ und $\psi$ die Winkel bedeuten, welche die neuen P und QAxen mit der XAxe bilden, so erhalten wir

$$(\alpha\cos^2\psi + 2\beta\sin\psi\cos\psi + \gamma\sin^2\psi)\, q^2 + 2\,(\alpha\cos\varphi\cos\psi + \beta\sin\varphi\cos\psi + \beta\sin\psi\cos\varphi + \gamma\sin\varphi\sin\psi)\, pq + (\alpha\cos^2\varphi + 2\beta\sin\varphi\cos\varphi + \gamma\sin^2\varphi)\, p^2 + \eta_1 = o. \qquad (C_2)$$

Soll in dieser Gleichung aber der Coefficient von $q^2$ verschwinden, so muß

$$\alpha + 2\beta\,\mathrm{tang}\varphi + \gamma\,\mathrm{tang}^2\varphi = o,$$

also $\mathrm{tang}\varphi = -\frac{\beta}{\gamma} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\gamma}$ werden, ein Ausdruck, welcher nur reelle Werthe gibt,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn $\beta^2 - \alpha\gamma$ positiv, also $> 0$ ist. Setzt man den einen dieser Werthe gleich $\tang\varphi$, den andern gleich $\tang\psi$, so wird auch der Coefficient von $p^2$ gleich 0. Die Gleichung nimmt alsdann die Form

$$pq = \frac{\eta_1}{m}$$

an, und bedeutet jedesmal eine Hyperbel (s. Nr. 20), es sei denn, daß $\eta_1$ gleich 0 wird, in welchem Falle die Gleichung $pq = 0$, also auch die Gleichung C, zwei gerade Linien vorstellt.

Ist aber $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$, so wird der Ausdruck $\alpha + 2\beta \tang\varphi + \gamma \tang^2\varphi$, sowohl als $\alpha + 2\beta \tang\psi + \gamma \tang^2\psi$ für jeden Werth von $\varphi$ und $\psi$ positiv, da $\frac{\alpha}{\gamma}$ stets positiv sein muß, indem die Bedingung $\frac{\alpha}{\gamma}$ negativ, der Annahme $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ widerspricht. Da man nun das mit pq multiplicirte Glied immer fortschaffen kann, so läßt sich die Gleichung ($C_1$) bei der gemachten Voraussetzung stets auf die Form

$$ay^2 + bx^2 = -\eta_1$$

bringen. Sie stellt also (cf. Nr. 15) eine Ellipse vor, wenn $\eta_1$ negativ, gibt aber keine reelle Werthe für x und y, wenn $\eta_1$ positiv ist. Ist $\eta_1$ aber gleich 0, so werden die Axen der Ellipse ebenfalls gleich 0, und es stellt die Gleichung (C) einen Punkt dar.

Wir haben nun noch den Fall zu betrachten, wo der durch (C) dargestellte geometrische Ort keinen Mittelpunkt hat, oder wo dieser Mittelpunkt unendlich weit liegt. Beiden Fällen entspricht zunächst die Bedingung $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$. Alsdann müssen die beiden Geraden

$$\beta x + \gamma y + \varepsilon = 0 \text{ und } \alpha x + \beta y + \delta = 0$$

entweder parallel laufen oder in eine gerade Linie zusammen fallen. Verlegt man nun die Coordinatenaxen parallel mit sich selber, so erhält man, anstatt der Gleichung (C), die Gleichung

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2(\alpha x_1 + \beta y_1 + \delta)\, x + 2(\gamma y_1 + \beta x_1 + \varepsilon)\, y$$
$$+ \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 y_1 + 2\delta x_1 + 2\varepsilon y_1 + \eta = 0 \qquad (C_4)$$

worin $x_1$ und $y_1$ die Coordinaten des neuen Anfangspunktes im ursprünglichen Systeme sind. Liegt dieser Anfangspunkt in der Geraden $\gamma y + \beta x + \varepsilon = 0$, so muß auch $2\gamma y_1^2 + 2\beta x_1 y_1 + 2\varepsilon y_1 = 0$ sein. Dadurch reducirt sich das constante Glied auf

$$\alpha x_1^2 - \gamma y_1^2 + 2\delta x_1 + \eta.$$

Liegt nun der Anfangspunkt auch noch in der durch

$$\alpha x^2 - \gamma y^2 + 2\delta x + \eta = 0$$

dargestellten Curve, so hat man zur Bestimmung von $y_1$ und $x_1$ zwei Gleichungen. Darnach ist

$$y_1^2 = \frac{\alpha x_1^2 + 2\delta x_1 + \gamma}{\gamma} \text{ und } = \left(\frac{\beta x_1 + \varepsilon}{\gamma}\right)^2.$$

Es folgt hieraus, daß

$$(\alpha\gamma - \beta^2)\, x_1^2 + 2(\gamma\delta - \beta\varepsilon)\, x_1 + \gamma\eta - \varepsilon^2 = 0$$

sein muß. Da nun aber $\beta^2 - \alpha\gamma$ nach der Voraussetzung $= 0$ ist, so erhält man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$x_1 = \frac{\varepsilon^2 - \gamma\eta}{2(\gamma\delta - \beta\varepsilon)}$$

und

$$y_1 = \frac{\beta(\gamma\eta + \varepsilon^2) - 2\gamma\delta\varepsilon}{2\gamma\,(\gamma\delta - \beta\varepsilon)}.$$

Durch diese Umwandlung geht nun die Gleichung (C) über in

$$\alpha x^2 + 2\beta x\eta + \gamma y^2 + 2\delta_1 x = o,$$

worin $\delta_1$ eine bestimmte Constante bedeutet. Drehen wir nun das Coordinatensystem um einen Winkel $\varphi$, so erhält man als Coefficienten von $x^2$ den Ausdruck $\sqrt{\alpha}\cos\varphi + \sqrt{\gamma}\sin\varphi$. Setzt man also $\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} = -\operatorname{tang}\varphi$, was immer möglich ist, da $\alpha$ und $\gamma$ vermöge der Bedingung $\beta^2 - \alpha\gamma = o$ gleiche und zwar positive Vorzeichen haben müssen, so wird derselbe gleich o. Durch diese Substitution wird aber auch der Coefficient von xy gleich o, so daß die Gleichung (C) durch alle diese Umwandlungen auf die Form

$$y^2 + mx = o$$

gebracht werden kann, welche nach Nr. 3 die Gleichung einer Parabel ist. Die ganze letzte Umformung ist aber unmöglich, wenn $\gamma\delta - \beta\varepsilon = o$ ist, weil alsdann der neue Anfangspunkt unendlich weit rücken würde.

Diese Bedingung aber zusammengenommen mit der Bedingung

$$\beta^2 - \alpha\gamma = o$$

ist genau erforderlich, wenn die beiden Geraden

$$\alpha x + \beta y + \delta = o \text{ und } \beta x + \gamma y + \varepsilon = o$$

in eine zusammen fallen sollen, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die erste dieser Gleichungen durch $\beta$ und die zweite durch $\gamma$ dividirt, wodurch dieselben, unter obigen Voraussetzungen, zu identischen werden. Verlegt man nun den Anfangspunkt in die erste der durch die beiden letzten Gleichungen ausgedrückten Geraden, indem man dessen Coordinaten mit $x_1$ und $y_1$ bezeichnet, und multiplicirt die erste mit $x_1$, die zweite mit $y_1$, so erhält man

$$\alpha x_1^2 + 2\beta x_1 y_1 + \gamma y_1^2 + \delta x_1 + \varepsilon x_1 = o,$$

wodurch die Gleichung ($C_4$) übergeht in

$$\alpha x^2 + 2\sqrt{\alpha\gamma}xy + \gamma y^2 + \delta x_1 + \varepsilon\eta_1 + \eta = o,$$

oder wenn man das constante Glied gleich $-p$ setzt

$$(\sqrt{\alpha}x + \sqrt{\gamma}y)^2 - p = o,$$

es ist in diesem Ausdrucke $p = \frac{1}{\alpha}(\delta^2 - \eta\alpha)$. Die Gleichung ist identisch mit folgender

$$(\sqrt{\alpha}x + \sqrt{\gamma}y + \sqrt{p})\,(\sqrt{\alpha}x + \sqrt{\gamma}y - \sqrt{p}) = o,$$

bedeutet also zwei parallele gerade Linien, so lange $\sqrt{p}$ reell ist, dieselben fallen in eine zusammen, wenn $p = o$ ist, und werden imaginär, sobald diese Größe negativ wird.

Fassen wir nun die Resultate dieses Capitels zusammen, so lassen sich die geometrischen Oerter, welche durch eine Gleichung vom zweiten Gerade zwischen x und y dargestellt werden,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zunächst in drei Gruppen bringen, je nachdem $\beta^2 - \alpha\gamma$ negativ, positiv oder Null ist. Ist $\beta^2 - \alpha\gamma$ negativ, so stellt jene Gleichung eine Ellipse vor, wenn außerdem noch $\eta_1 < 0$, einen Punkt, wenn $\eta_1 = 0$, und sie gibt gar keine reelle Werthe für x und y, wenn $\eta_1 > 0$ ist. Sobald zweitens $\beta^2 - \alpha\gamma$ positiv ist, so bedeutet die Gleichung eine Hyperbel, wenn außerdem $\eta_1$ irgend einen positiven oder negativen Werth hat, ist hingegen $\eta_1$ gleich Null, so erhält man statt der Hyperbel zwei einander schneidende gerade Linien. Wenn endlich drittens $\beta^2 - \alpha\gamma$ gleich Null ist, und wenn zugleich $\beta\delta - \alpha\varepsilon$ irgend einen reellen positiven oder negativen Werth hat, so ist der geometrische Ort eine Parabel. Ist aber zugleich $\beta\delta - \alpha\varepsilon = 0$, so können wiederum drei verschiedene Fälle eintreten, je nach dem Vorzeichen des Ausdrucks $\delta^2 - \alpha\gamma$. Ist derselbe nämlich größer als Null, so bedeutet die Gleichung des zweiten Gerades zwei parallele gerade Linien, ist er gleich Null, so erhält man anstatt derselben eine einzige gerade Linie, und ist er endlich kleiner als Null, so erhält man keine reelle x und y. Da demnach die Gleichung des zweiten Grades, die Fälle abgerechnet, wo dieselbe keine Bedeutung hat, nur eine Ellipse und einen Punkt, eine Hyperbel und zwei sich schneidende gerade Linien, eine Parabel, zwei Parallellinien und eine gerade Linie vorstellen kann, so ist die zu Anfang dieses Kapitels aufgestellte Behauptung bewiesen.

**Dr. Dornheim.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf