Cap. 1. Geradlinige Ausbreitung des Lichts.

Grundsätze und Erklärungen. 1. Das von jedem Punkte eines leuchtenden Körpers ausgehende Licht breitet sich in einem homogenen Medium geradlinig nach allen Richtungen aus. Die von einem Punkte des leuchtenden Körpers nach einem Punkte des Mediums gezogene, von Licht erfüllte Linie heisst ein Lichtstrahl.

2. Die Lichtstärke oder Intensität einer Lichtquelle wird durch die von ihr in jeder Sekunde ausströmende Lichtmenge gemessen. Die Lichtmenge, welche sie in jeder Sekunde der Flächeneinheit erteilt, drückt die Stärke oder Intensität der Beleuchtung aus.

Lehrsatz. Die Stärke der Beleuchtung, welche einem Kugelflächenelemente von einer im Mittelpunkte befindlichen Lichtquelle erteilt wird, ist dem Quadrate der Entfernung von der Lichtquelle umgekehrt proportional.

Beweis. Beschreibt man um die als Punkt gedachte Lichtquelle von der Intensität J mit der Längeneinheit, dann mit der Strecke r als Halbmesser Kugelflächen, so empfängt in jeder Sekunde die Flächeneinheit im ersten Falle die Lichtmenge $i = J : 4\pi$, im zweiten Falle die Lichtmenge $i' = J : (4 r^2 \pi)$, folglich

$$i' = i : r^2. \quad (1).$$

Folgerung. Der Satz gilt für jedes quadratische oder kreisförmige Flächenelement, vorausgesetzt dass der leuchtende Punkt in der Mittelsenkrechten des Flächenelements sich befindet.

Erklärung. Ist die Lichtquelle von der beleuchteten Ebene sehr weit entfernt, so darf man das sie treffende Strahlenbüschel als ein Strahlenbündel ansehen. Trifft ein Strahl SA desselben die Ebene schief in A, und errichtet man in A auf ihr das Lot AN, so heist AN das Einfallslot, $\sphericalangle SAN$ der Einfallswinkel, Ebene SAN die Einfallsebene.

Lehrsatz. Die Stärke der Beleuchtung, welche einer ebenen Fläche durch ein schief auf sie fallendes Strahlenbündel erteilt wird, ist gleich dem Produkte aus der Stärke der Beleuchtung bei senkrechter Incidenz in den Kosinus des Einfallswinkels.

Beweis. Bezeichnet J die Lichtmenge, welche durch einen zu den Strahlen senkrechten Querschnitt f in der Zeiteinheit geht, so geht durch die Flächeneinheit des Schnittes die Licht-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

menge $i = J : f$, durch die Flächeneinheit eines zu den Strahlen schiefen Querschnittes f' die Lichtmenge $i' = J : f'$. Es ist aber $f = f' \cos (f, f') = f' \cos \varepsilon$, wenn ε den Einfallswinkel bezeichnet, daher:

$$i' = i f : f' = i \cos (f, f') = i \,.\, \cos \varepsilon. \quad (2).$$

Lehrsatz. Wird ein Flächenelement durch zwei Lichtquellen, welche in der Mittelsenkrechten desselben sich befinden und von ihnen die Entfernungen r_1 und r_2 haben, gleich stark beleuchtet, so verhalten sich die Intensitäten J_1 und J_2 der beiden Lichtquellen wie die Quadrate dieser Entfernungen.

Beweis. Nach dem Obigen ist die dem Flächenelemente durch die Lichtquellen erteilte Stärke der Beleuchtung bezüglich gleich $J_1 : (4 r_1{}^2 \pi)$ und $J_2 : (4 r_2{}^2 \pi)$, folglich, da beide Quotienten gleich sein sollen:

$$J_1 : J_2 = r_1^2 : r_2^2. \quad (3).$$

Aufgabe. Lotrecht über den beiden Punkten O_1 und O_2 der Ebene L befinden sich in den Entfernungen d_1 und d_2 zwei Lichtquellen mit den Intensitäten J_1 und J_2. Den geometrischen Ort aller Flächenelemente der Ebene zu bestimmen, welche von den Lichtquellen gleich stark beleuchtet werden, wenn $O_1 O_2 = c$ ist.

Auflösung. Das Flächenelement f im Punkte P der Ebene habe von den Lichtquellen die Entfernungen r_1 und r_2, von O_1 und O_2 die Entfernungen u_1 und u_2; dann würden, wenn man die von den Lichtquellen nach f gesendeten Lichtkegel als Strahlenbündel betrachtet, und ε_1, ε_2 ihre Einfallswinkel bezeichnen, die Intensitäten der durch J_1 und J_2 bewirkten Beleuchtung in P bei senkrechter Incidenz $J_1 f : (4 r_1{}^2 \pi)$ und $J_2 f : (4 r_2{}^2 \pi)$ sein, also sind sie bei schräger Incidenz nach (2) $J_1 f \cos \varepsilon_1 : (4 r_1{}^2 \pi)$ und $J_2 f \cos \varepsilon_2 : (4 r_2{}^2 \pi)$, folglich hat man, da dieselben einander gleich sein sollen, $\cos \varepsilon_1 = d_1 : r_1$, $\cos \varepsilon_2 = d_2 : r_2$ ist, $J_1 d_1 r_2{}^3 = J_2 d_2 r_1{}^3$ oder wenn man $J_1 d_1 = m_1{}^3$, $J_2 d_2 = m_2{}^3$ setzt, $m_1 \sqrt{u_2{}^2 + d_2{}^2} = m_2 \sqrt{u_1{}^2 + d_1{}^2}$, $m_1{}^2 (u_2{}^2 + d_2{}^2) = m_2{}^2 (u_1{}^2 + d_1{}^2)$.

Nimmt man O_1 zum Koordinatenanfang, $O_1 O_2$ zur X-Achse, bezeichnet die Koordinaten des Punktes P mit x, y, so ist $u_1{}^2 = x^2 + y^2$, $u_2{}^2 = y^2 + (c - x)^2$, folglich erhält man

$$x^2 + y^2 + \frac{2 m_1{}^2 \; c \; x}{m_2{}^2 - m_1{}^2} = \frac{m_1{}^2 d_2{}^2 - m_2{}^2 d_2{}^2 + m_1{}^2 c^2}{m_2{}^2 - m_1{}^2},$$

$$\left(x + \frac{m_1 \; c}{m^2{}_2 - m_1{}^2}\right)^2 + y^2 = \frac{m_1{}^2 m_2{}^2 (d_1{}^2 + d_2{}^2 + c^2) - m_1{}^4 d_2{}^2 - m_2{}^4 d_1{}^2}{(m_2{}^2 - m_1{}^2)^2}$$

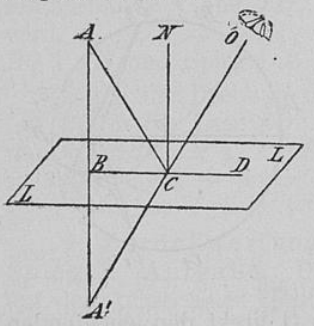
Für $J_1 = 1$, $J_2 = 2$, $d_1 = 1$ dcm, $d_2 = 4$ dcm, $c = 4$ dcm wird $(x + {}^4/_3)^2 + y^2 = {}^{100}/_9$; der geometrische Ort ist ein Kreis, welcher $O_1 O_2$ in den Abständen $+ 2$ dcm und $- 4^2/_3$ dem von O_1 schneidet, und den Halbmesser $3^1/_3$ dcm hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Cap. 2. Von der Zurückwerfung des Lichts. (Katoptrik).

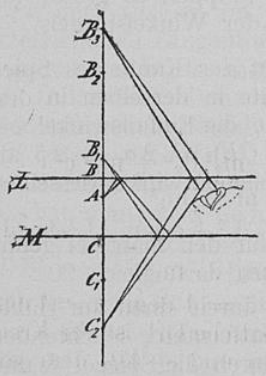
1. Zurückwerfung durch ebene Spiegel. Erfahrungssatz. Jeder eine spiegelnde Ebene treffende Strahl wird in der Einfallsebene von ihr reflektiert. Der einfallende und zurückgeworfene Strahl bilden mit dem Einfallslote gleiche Winkel. Der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallswinkel.

Lehrsatz. Ein von einem leuchtenden Punkte A ausgehender, eine spiegelnde Ebene LM treffender Strahlenkegel wird durch dieselbe so zurückgeworfen, dass die reflektierten Strahlen verlängert durch einen Punkt A' gehen, welchen man erhält, wenn man das von A auf Ebene L gefällte Lot AB um sich selbst verlängert. A und A' heissen zugeordnete Punkte, A' der Bildpunkt von A.



Beweis. Ist CO ein reflektierter Strahl, so verbinde man C mit A, B, A' verlängere BC bis D und errichte das Einfallslot CN; dann ist $\triangle ACB \cong A'CB$, folglich $\sphericalangle BCA = BCA'$; es ist aber $\sphericalangle ACN = NCO$, folgl. $ACB = OCD$, folglich $\sphericalangle OCD = A'CB$, also OCA' eine Gerade.

Lehrsatz. Befindet sich ein leuchtender Punkt A zwischen zwei parallelen Spiegeln L und M in den Abständen $AB = \mathrm{b}$ und $AC = \mathrm{c}$, so nimmt ein zwischen L und M befindliches Auge O hinter L in der Verlängerung von A Bilder wahr, welche von A aus abwechselnd in den Abständen $2\,\mathrm{b}$ und $2\,\mathrm{c}$ einander folgen, hinter M Bilder in der Verlängerung von AC, welche von A aus abwechselnd in den Abständen $2\,\mathrm{c}$ und $2\,\mathrm{b}$ einander folgen.



Behauptung. Bezeichnen B_1, B_2, B_3 die Orte der Bilder hinter L, C_1, C_2, C_3 die Orte der Bilder hinter M, dann ist $AB_1 = 2\,\mathrm{b}$, $AB_2 = 2\,\mathrm{b} + 2\,\mathrm{c}$, $AB_3 = 4\,\mathrm{b} + 2\,\mathrm{c}$ etc., $AC_1 = 2\mathrm{c}$, $AC_2 = 2\,\mathrm{c} + 2\,\mathrm{b}$, $AC_3 = 4\,\mathrm{c} + 2\,\mathrm{b}$ etc.

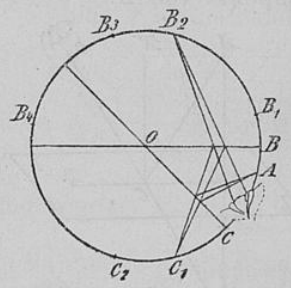
Beweis. Der Strahlenkegel B_3O schneide L in F, C_2F den Spiegel M in E, B_1E den Spiegel L in D.

Der von A ausgehende Strahlenkegel AD wird von L so reflektiert, als ob er von B_1 ausginge, wenn $AB = BB_1 = \mathrm{b}$ ist, daher $AB_1 = 2\mathrm{b}$. Der Strahlen-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

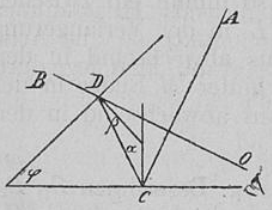
kegel DE wird von M in E so reflektiert, als ob er von C_2 ausginge, wenn $CB_1 = CC_2$ ist; es ist aber $CB_1 = 2b + c$, daher $C_2A = 2b + 2c$. Der Strahlenkegel EF wird von L in F so reflektiert, als ob er von B_3 ausginge, wenn $BB_3 = BC_2$ ist; es ist aber $BC_2 = 3b + 2c$, daher $AB_3 = 4b + 2c$, folglich erblickt das Auge O nach dreimaliger Reflexion das Bild von A in B_3 und es ist $AB_3 = 4b + 2c$. Aehnlich beweist man den Satz für die anderen Bildpunkte.

Lehrsatz. Legt man durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkelspiegels befindlichen leuchtenden Punkt A die auf der Kante desselben senkrechte Ebene LOM, beschreibt um O mit OA als Halbmesser den Kreis, welcher OL und OM in B und C schneidet, setzt arc $AB = \beta$, arc $AC = \gamma$, so erblickt ein Auge O zwischen den Spiegeln hinter L auf der Peripherie des Kreises Bilder, welche von A aus abwechselnd in den Bogenabständen 2β und 2γ einander folgen, hinter M Bilder, welche von A aus abwechselnd in den Abständen 2γ und 2β einander folgen.



Der Beweis gleicht dem des vorigen Satzes, wenn man β für b und γ für c setzt.

Lehrsatz. Erblickt ein Auge in O direkt den leuchtenden Punkt B und in derselben Richtung OB mittels eines Winkelspiegels durch doppelte Reflexion den entfernten Punkt A, welcher nach O Strahlen sendet auf dem Wege $ACDO$, so ist der Winkel, welchen AC und BO einschliessen, oder $\sphericalangle AOB$ doppelt so gross, als der Winkel φ der Winkelspiegels.



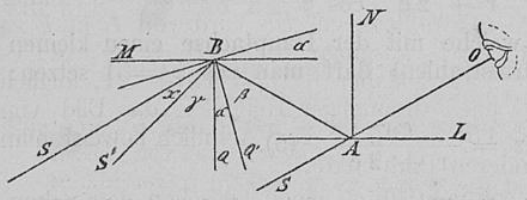
Beweis. Man lege durch A die auf der Kante des Spiegels senkrechte Ebene, $ACMDO$, errichte in derselben in den Punkten C und D die Einfallslote, nenne die Einfallswinkel bei C und D α und β, dann ist $\sphericalangle (AC, OB) = 2\alpha + 2\beta$ als Aussenwinkel, $\sphericalangle (\alpha + \beta) = \varphi$ als Supplementwinkel desselben Winkels, folglich $\sphericalangle (AC, OB) = 2\varphi$.

Für $\varphi = 45^0$ wird $\sphericalangle (AC, BO)$, für den man bei genügender Entfernung von D $\sphericalangle AOB$ setzen darf, gleich 90^0.

Lehrsatz. Erblickt ein Auge in O durch einen zur Hälfte belegten Spiegel L direkt den weit entfernten, leuchtenden Punkt S, in derselben Richtung OAS durch die Spiegel L und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

M nach doppelter Reflexion den Punkt S auf dem Wege $SBAO$, so ist der Spiegel L parallel M. (Normallage der Spiegel).



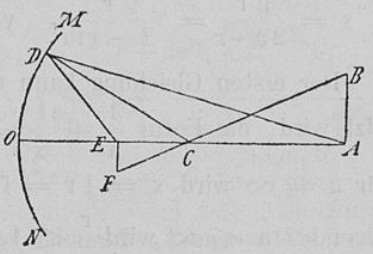
Erblickt das Auge nach einer Drehung des Spiegels M um eine auf der Einfallsebene $SBAO$ in B senkrechte Achse in dieser Ebene Punkt S' auf dem Wege $S'BAO$, so ist $\sphericalangle$ SBS' oder $\sphericalangle$ SOS' doppelt so gross, als der Drehungswinkel α des Spiegels M.

Beweis. Man errichte auf L in A und auf M in B die Einfallslote AN und BQ, dann ist, weil $BS \parallel AS$ vorausgesetzt wird, $\sphericalangle$ $SBA = BAO$, also auch $\sphericalangle$ $QBA = BAN$, folglich $BQ \parallel AN$ und Spiegel $L \parallel M$.

Durch die Drehung des Spiegels M um $\sphericalangle$ α komme das Lot BQ in die Lage BQ' so dass $\sphericalangle$ $QBQ' = \alpha$ ist. Setzt man nun $< SBS' = x$, $< S'BQ = \gamma$, $< Q'BA = \beta$, so findet man (1) $< \alpha + \beta = x + \gamma$, (2) $< \beta = \gamma + \alpha$, folglich $< x + \gamma = \alpha + \gamma + \alpha$, $< x = 2\alpha$.

2. Zurückwerfung des Lichts durch sphärische Spiegel. Aufgabe. Die Lage und Grösse des Bildes eines auf der Achse eines Hohlspiegels senkrechten Gegenstandes zu finden.

Auflösung. Es sei C der Mittelpunkt, (Krümmungsmittelpunkt) O die Mitte (Optische Mittelpunkt) OC die Achse des Spiegels, AD ein von A ausgehender Strahl. Man lege durch OAD die Ebene, welche den Spiegel in dem Bogen MON schneidet, ziehe den Radius CD, der, weil er auf der in D errichteten Tangentialebene senkrecht steht, das Einfallslot in D darstellt. Dann ist DE der reflektierte Strahl, wenn $< ADC = CDE$ ist. Setzt man daher $CA = c$, $CE = z$, $CD = CO = r$, $< OCD = \varphi$, so hat man nach dem Satze von der Winkelhalbierenden eines Dreiecks $AD : DE = AC : CE$, aber $AD^2 = r^2 + c^2 + 2rc \cdot \cos\varphi$, $DE^2 = r^2 + z^2 - 2rz \cos\varphi$, daher $(r^2 + z^2 - 2rz\cos\varphi) : (r^2 + c^2 + 2rc \cdot \cos\varphi) = z^2 : c^2$, woraus sich



$$(r + 2c \cdot \cos\varphi)\, z^2 + 2c^2 \cos\varphi \cdot z = c^2 r$$

ergiebt, und da der Wert $z = -c$ nicht brauchbar ist,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$z = \frac{c\,r}{r + 2c\,.\,\cos\varphi}. \quad (4).$$

Für Strahlen, welche mit der Hauptachse einen kleinen Winkel bilden (Centralstrahlen) darf man $\cos\varphi = 1$ setzen; es wird daher

$$z = \frac{c\,r}{r + 2c}. \quad (5).$$

Denkt man sich die Figur um OA gedreht und beachtet, dass z von φ unabhängig ist, so ergiebt sich: Alle von einem Punkte der Hauptachse ausgehenden Centralstrahlen vereinigen sich nach der Reflexion in einem Punkte der Hauptachse, welcher der Bildpunkt des leuchtenden Punktes heisst. Ist B der Bildpunkt von A, so ist auch A der Bildpunkt von B (Reciprocitätsgesetz). A und B heissen zugeordnete Punkte.

Es sei B ein zweiter leuchtender Punkt in der auf OA in A in der Ebene OAD errichteten Senkrechten. Man ziehe die Nebenachse BCO'. Nimmt man dann $\sphericalangle\ BCA$ so klein an, dass $\cos ACB = 1$, $AC = CB$ gesetzt werden darf, so muss, wenn F den Bildpunkt B bezeichnet, auch $CF = CE$ sein. Man hat daher, wenn $AB = b$, $EF = y$ gesetzt wird,

$$b : c = y : z, \qquad y = \frac{b\,z}{c} = \frac{b\,r}{2c + r}. \quad (5^*).$$

Nimmt man O zum Koordinatenanfang, OA zur positiven Richtung der X-achse, die Tangente in O zur Y-achse, setzt $AO = a$, $OE = x$, so erhält man durch Substitution von $z = r - x$, zugleich mit Rücksicht auf die Lage des Bildes

$$x = \frac{a\,r}{2a - r} = \frac{r}{2 - r:a}, \quad y = -\frac{b\,r}{2a - r} = -\frac{b\,x}{a}. \quad (6).$$

Der ersten Gleichung kann man auch, wenn $\frac{1}{2}\,r = f$ gesetzt wird, die Form $\frac{1}{a} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f}$ geben.

Für $a = \infty$ wird $x = \frac{1}{2}\,r = f$. (f Brennweite).

Für $r < a < \infty$ wird $\frac{r}{a} < 1$, $2 - \frac{r}{a} > 1$, also $\frac{1}{2}\,r < x < r$

und, da $\frac{x}{a} < 1$ ist, y negativ und $< b$.

Für $a = r$ wird $x = r$, $y = -b$.

Für $\frac{1}{2}\,r < a < r$ wird $x > r$, y negativ und $> b$. (Reciprges.)
Für $a = \frac{1}{2}\,r = f$ wird $x = \infty$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für $a < \frac{1}{2} r$ wird $2a < r$, $x = -\frac{ar}{r-2a}$, $y = +\frac{br}{r-2a}$,

also x negativ und $> a$, y positiv und $> b$.

Für $a < o$ also $a = -a'$ wird $x = \frac{r}{2+r:a'}$, $y = \frac{br}{r+2a'}$.

also $x < \frac{1}{2} r$, $y < b$.

Aufgabe. Die Lage und Grösse des Bildes einer auf der Achse eines Konvexspiegels senkrechten Gegenstandes zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnet r den Radius des Spiegels, c die Entfernung des Punktes A vom Mittelpunkte der Kugelfläche, x die Entfernung des Bildpunktes von demselben, b die Länge des Objekts, y die des Bildes, so findet man analog der Entwickelung der vorigen Aufgabe:

$$(r-2c\cos\varphi)\, x^2 + 2c^2 \cos\varphi\, x = c^2 r,\quad x = \frac{cr}{2c\,.\cos\varphi - r},$$

und für Centralstrahlen $x = \frac{cr}{2c-r}$, $y = \frac{br}{2c-r}$. (7).

Für $c = \infty$ wird $x = \frac{1}{2} r = f$.

Für $c > r$ wird $2c > r + c$, $2c - r > c > r$, also $x < r$, $y < b$

Zusatz. Der Randstrahl AL schneide reflektiert die Hauptachse in E', so ist, wenn die Oeffnung des Spiegels $< OCL = \alpha$ gesetzt wird, nach (4) $CE' > CE$,

$$CE' = \frac{cr}{r + 2c\cos\alpha},\quad CE = \frac{cr}{r+2c},\quad \text{folglich}$$

$$EE' = \frac{4c^2 r \sin^2\frac{1}{2}\alpha}{r^2 + 2cr\cos^2\frac{1}{2}\alpha + 4c^2\cos\alpha}.$$

Für $c = \infty$ ist $CE = \frac{1}{2} r$, $CE' = \frac{r}{2\cos\alpha}$, $EE' = \frac{r\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha}$.

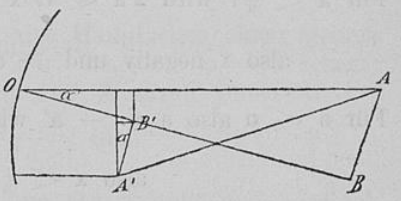
Die Grösse EE' stellt die sphärische Längenabweichung, das in E auf der Achse errichtete, bis zum Durchschnitte mit LE' verlängerte Lot EH die Seitenabweichung des Spiegels dar. Es ist, wenn $LJ \perp CO$, $\operatorname{tg} LE'O = LJ : E'J$, für $c = \infty$,

$$\operatorname{tg} LE'O = \frac{r\sin\alpha}{r\cos\alpha - CE'} = \operatorname{tg} 2\alpha,\quad EH = EE'\,.\operatorname{tg} 2\alpha.$$

Aufgabe. In einem Herschelschen Teleskope, bei welchem die Achse der Röhre mit der Achse des Spiegels $\sphericalangle\ \alpha$ bildet,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

befindet sich in der Entfernung c von der Mitte O des Spiegels auf der Achse der Röhre ein leuchtender Punkt A. Die Koordinaten x und y des Bildpunktes zu bestimmen, wenn O zum Koordinatenanfang, die Achse der Röhre zur X-Achse genommen wird.



Auflösung. Man fälle von A auf die Achse des Spiegels das Lot AB und bezeichne die Bildpunkte von A und B mit A' und B', dann ist

$$AB = c \,.\, \sin\alpha, \quad OB = c \,.\, \cos\alpha, \quad OB' = \frac{c\,r\cos\alpha}{2\,c\cos\alpha - r},$$

$$A'B' = \frac{c\,r\sin\alpha}{2\,c\,.\cos\alpha - r}.$$

Fällt man nun von A', B' auf die X-Achse die Lote, welche $< \alpha$ einschliessen, und zieht durch B' die Parallele zu ihr, so ist

$$\left.\begin{aligned} x &= OB'\cos\alpha - A'B'\sin\alpha = \frac{c\,r\cos 2\alpha}{2\,c\cos\alpha - r}, \\ y &= OB'\sin\alpha + A'B'\cos\alpha = \frac{c\,r\sin 2\alpha}{2\,c\cos\alpha - r}, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} 2\alpha \end{aligned}\right\} (8).$$

In diesen Gleichungen bezeichnet x die Länge des Teleskops, y den Radius der Röhre. Da sie zwischen 5 Grössen bestehen, müssen drei derselben bekannt sein, um die anderen zu finden.

Für $c = \infty$ wird $x = \dfrac{r\,.\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$, $y = r\,.\sin a$.

Zahlenbeispiel. $< \alpha = 5^0$, $r = 10$ m, $c = 1000$ m, $y = 5{,}025$ m, $y = 0{,}886$ m.

Aufgabe. Ein Gegenstand von der Länge b befinde sich auf der Hauptachse eines Hohlspiegels mit dem Radius r in der Entfernung a von der Mitte des Spiegels. Bevor die reflektierten Strahlen sich vereinigen, treffen sie einen konvexen Spiegel mit dem Radius ρ vor seinem Mittelpunkte. In welcher Entfernung ist der konvexe Spiegel aufzustellen, damit das Bild in der durchbohrten Mitte des Hohlspiegels erscheine, und wie gross ist das Bild?

Bezeichnen O und C die Mitte und den Mittelpunkt beider Spiegel, x', x die Abstände der Bilder von O und C, y und y' ihre Längen so ist:

$$x' = \frac{a\,r}{2a - r}, \; y' = -\frac{b\,r}{2a - r}, \quad x = \frac{(x - x')\,\rho}{2(x - x') - \rho}, \; y = \frac{y'\,\rho}{2(x - x') - \rho}.$$

Daraus ergiebt sich:

$$x = \frac{x' + \rho}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{x'^2 + \rho^2}, \quad y = \frac{-b\,r}{2a - r} \cdot \frac{\rho}{2(x - x') - \rho}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Cap. 3. Von der Brechung des Lichts (Dioptrik).

1. Brechung durch Medien mit parallelen Grenzflächen.

Erfahrungssatz. Trifft ein Lichtstrahl ein von einer Ebene begrenztes, durchsichtiges Medium (Glas, Wasser), so wird er, in das Medium dringend, von seiner Richtung abgelenkt. Der einfallende und gebrochene Strahl liegen mit dem Einfallslote in einer Ebene, der Einfallsebene, auf entgegengesetzten Seiten des Einfallslotes. Der Quotient der Sinus der Winkel, welche beide Strahlen mit dem Einfallslote bilden, ist eine konstante Grösse (Brechungsexponent). Bezeichnet ε den Einfallswinkel, β den Brechungswinkel, welchen der gebrochene Strahl mit dem Einfallslote bildet, n den Brechungsexponenten, so ist

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \beta} = n, \quad \sin \varepsilon = n \,.\, \sin \beta. \quad (9)$$

Für Luft-Glas ist $n = 1{,}5$, für Luft-Wasser $n = 1{,}33$.

Erfahrungssatz. Geht ein Lichtstrahl durch ein von zwei parallelen Ebenen begrenztes Medium, so ist der austretende Strahl dem eintretenden Strahle parallel.

Lehrsatz. Der Brechungsexponent für einen aus Luft in ein Medium übergehenden Strahl ist gleich dem reciproken Werte des Brechungsexponenten für einen aus demselben Medium in Luft übergehenden Strahl.

Beweis. Bezeichnen ε und β^1 die Winkel, welche der eintretende und austretende Strahl mit den zugehörigen Einfallsloten bilden, β und ε^1 die Winkel des gebrochenen Strahles mit den Loten, so ist:

$$\sin \varepsilon = n \sin \beta, \varepsilon = \beta^1, \beta = \varepsilon^1, \text{ folgl. } \sin \beta^1 = n \sin \varepsilon^1, \sin \varepsilon^1 = \frac{1}{n} \sin \beta^1$$

Erfahrungssatz. Geht ein Lichtstrahl durch zwei Medien, deren Berührungsebene den begrenzenden Ebenen parallel ist, so ist der eintretende Strahl dem austretenden parallel.

Lehrsatz. Geht ein Lichtstrahl durch zwei in einer Ebene sich berührende Medien, so sind die Producte aus den Sinus der von den Strahlen mit dem zugehörigen Einfallslote gebildeten Winkel in die Brechungsexponenten der von den Strahlen durchlaufenen Medien einander gleich.

Beweis. Es seien β und β^1 die Winkel, welche der Strahl innerhalb der beiden Medien mit den zugehörigen Loten bildet, n und n^1 die Brechungsexponenten der beiden Mittel. Nimmt man an, dass dieselben von zwei der Berührungsebene parallelen Ebenen begrenzt werden, und bezeichnet mit ε und ε^1

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Winkel, welche die aus ihnen tretenden parallelen Strahlen mit den zugehörigen Loten bilden, so ist

$$\sin \varepsilon = n \sin \beta,\ \sin \varepsilon^1 = n^1 \sin \beta^1,\ \varepsilon = \varepsilon^1, \text{ folglich}$$

$$n \sin \beta = n^1 \sin \beta^1 \quad (10).$$

Folgerung. Aus (10) folgt für $n = 1$, $\sin \beta = n \sin \beta^1$. Die Luft kann daher als ein Medium betrachtet werden, dessen Brechungsexponent gleich Eins ist.

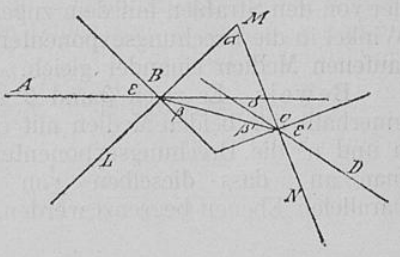
Für $n < n^1$ wird $\beta > \beta^1$. Von zwei Medien heisst dasjenige, welches den grösseren Brechungsexponenten hat, das optisch dichtere. Geht ein Lichtstrahl aus einem Medium in ein dichteres über, so ist der Brechungswinkel kleiner als der Einfallswinkel. Für $n > n^1$ wird $\beta < \beta^1$, $\sin \beta^1 = \frac{n}{n^1} \sin \beta$, der Wert von β^1 imaginär, wenn $\frac{n}{n^1} \sin \beta > 1$, $\sin \beta > \frac{n^1}{n}$, ist; der Wert von β^1 wird gleich $\frac{\pi}{2}$, wenn $\frac{n}{n^1} \sin \beta = 1$, $\sin \beta = \frac{n^1}{n}$ ist. Der zugehörige Wert β heisst der Grenzwinkel.

Geht ein Lichtstrahl aus einem Medium in ein dünneres, so wird er vom Einfallslote abgelenkt. Er dringt in das zweite Medium nicht hinein, es findet keine Brechung statt, wenn der Einfallswinkel gleich dem Grenzwinkel oder grösser als der Grenzwinkel ist. Im letzteren Falle wird der Strahl vollständig reflectiert.

Geht ein Strahl aus einem Medium, wie Glas, Wasser in Luft, so ist $n^1 = 1$, für den Grenzfall $\sin \beta = 1 : n$, für Glas-Luft ist der Grenzwinkel $38^0\,41'$, für Wasser-Luft gleich $48^0\,35'$.

2. Brechung des Lichts durch ein dreiseitiges Prisma.

Aufgabe. Es stelle LMN einen zu einer Kante eines dreiseitigen Prismas senkrechten Durchschnitt (Hauptschnitt) dar. In der Ebene dieses Schnittes treffe ein Strahl AB die Durchschnittskante LM unter dem Einfallswinkel ε. Zu bestimmen den Austrittswinkel ε^1, welchen der austretende Strahl CD mit der in C auf MN errichteten Senkrechten bildet, und den Richtungsunterschied δ der Strahlen AB und CD, wenn der brechende Winkel $LMN = \alpha$, der Brechungsexponent gleich n gesetzt wird.



Auflösung. Bezeichnet man die Winkel des durch das Prisma gehenden Strahles BC mit den in B und C errichteten Loten durch β und β^1 und beachtet, dass $\sphericalangle \alpha$ u. $\sphericalangle (\beta \mid \beta^1)$ den Winkel der beiden Lote

zu π ergängen, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\text{(a) } \sin\varepsilon = n\sin\beta,\ \text{(b) } \sin\varepsilon^1 = n\sin\beta^1,\ \text{(c) } \beta+\beta^1=\alpha,$$
$$\text{(d) } \delta = \varepsilon-\beta+\varepsilon^1-\beta^1 = \varepsilon+\varepsilon^1-\alpha.$$

Aus (b) und (c) folgt $\sin\varepsilon^1 = n\sin(\alpha-\beta)$ und hieraus nach Elimination von β mittels (a)

$$\sin\varepsilon^1 = \sin\alpha\sqrt{n^2-\sin^2\varepsilon} - \cos\alpha\sin\varepsilon,\quad \delta = \varepsilon+\varepsilon^1-\alpha. \quad (11)$$

Die Entwickelung gilt nur für $\beta < \alpha$. Für $\beta = \alpha$ wird $\sphericalangle BCM = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon^1 = 0$.

Für $\beta > \alpha$ wird $\sphericalangle BCM = \frac{\pi}{2}+\beta-\alpha > \frac{\pi}{2}$; β^1 und β liegen auf verschiedenen Seiten von BC, und es ist:

$$\beta-\beta^1 = \alpha,\ \delta = \varepsilon-\varepsilon^1-\alpha.$$
$$\sin\varepsilon^1 = n\sin(\beta-\alpha) = \cos\alpha\sin\varepsilon - \sin\alpha\sqrt{n^2-\sin^2\varepsilon}, \quad (11^*).$$

Determination. 1. Ist $\alpha < \beta$, also $\beta-\alpha=\beta^1$, so muss, wenn γ den Grenzwinkel bezeichnet, da $\beta < \gamma$ ist, um so mehr $\beta-\alpha$ oder $\beta^1 < \gamma$ sein, daher tritt der Strahl aus der brechenden Fläche MN heraus.

2. Ist $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta+\beta^1$, $\beta^1 = \alpha-\beta$, so ergiebt sich: a) Wenn $\alpha =$ oder $< \gamma$ ist, so muss um so mehr $\alpha-\beta$ oder $\beta^1 < \gamma$ sein, also aus der Fläche MN ein Austritt stattfinden, b) Wenn $\alpha =$ od. $> 2\gamma$ ist, so muss $\alpha-\beta$ oder $\beta^1 =$ od. $> 2\gamma-\gamma$ daher $>$ od. $= \gamma$ sein, also an der Fläche MN totale Reflexion stattfinden. c) Für $2\gamma > \alpha > \gamma$ wird in (11) $\sin\varepsilon^1 < 1$, wenn $\sin\varepsilon > \sin\alpha\sqrt{n^2-1} - \cos\alpha$ wird. Unter dieser Bedingung findet an der Fläche MN Brechung statt.

Lehrsatz. Die durch den Hauptschnitt LOM eines gegebenen Prismas gehenden Strahlen erleiden das Minimum der Ablenkung, wenn sie mit den Schenkeln LM und MN des Schnittes gleiche Winkel bilden. (Symmetrischer Durchgang).

Beweis. Es war $\delta = \varepsilon+\varepsilon^1-\alpha$, folglich $\delta+\alpha = \varepsilon+\varepsilon^1$, mithin wird δ ein Minimum, wenn $\frac{\delta+\alpha}{2} = \frac{\varepsilon+\varepsilon^1}{2}$ den Minimalwert erhält.

Durch Addition der Gleichungen (a) und (b) der vorigen Aufgabe ergiebt sich:

$$\sin\varepsilon + \sin\varepsilon^1 = n(\sin\beta+\sin\beta^1)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon^1) = n\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\beta^1)\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\beta^1)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon^1)} = n\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\beta^1)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon^1)}.$$

Nun folgt aus denselben zwei Gleichungen:

$$\frac{\sin\varepsilon+\sin\varepsilon^1}{\sin\varepsilon-\sin\varepsilon} = \frac{\sin\beta+\sin\beta^1}{\sin\beta-\sin\beta^1},\quad \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon^1)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon^1)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\beta^1)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\beta^1)},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

folglich, da $\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^1) > \frac{1}{2}(\beta + \beta^1)$, ist auch $\frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^1) > \frac{1}{2}(\beta - \beta)$, $\cos\frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^1) < \cos\frac{1}{2}(\beta - \beta^1)$, ausgenommen wenn $\varepsilon = \varepsilon^1$, also auch $\beta = \beta^1$ ist. Es ist also, da

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta - \beta^1) : \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon - \varepsilon^1) < 1 \text{ ist, } \sin\frac{\varepsilon + \varepsilon^1}{2} > \sin\frac{\alpha}{2},$$

ausgenommen wenn $\varepsilon = \varepsilon^1$ ist, in welchem Falle $\sin\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^1) = n \sin\frac{\alpha}{2}$ wird.

Daher erhält $\sin\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^1)$, also auch $\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^1)$, also auch $\frac{1}{2}(\delta + \alpha)$, also auch δ seinen Minimalwert für $\varepsilon = \varepsilon^1$, oder $\beta = \beta^1$, oder $\sphericalangle MBC = MCB$.

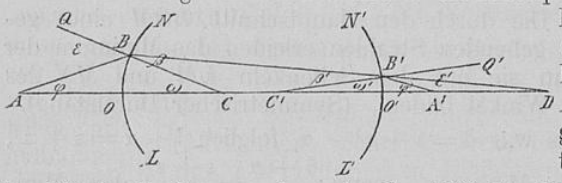
Zusatz. Für $\varepsilon = \varepsilon^1$ wird $\beta = \beta^1 = \frac{\alpha}{2}$, $\delta = 2\varepsilon - \alpha$, $\frac{1}{2}(\delta + \alpha) = \varepsilon$, und wenn man diesen Wert von δ mit δ' bezeichnet (Minimalablenkung), erhält man:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\delta' + \alpha) = n \sin\frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\delta'}{2} : \left(n - \cos\frac{\delta'}{2}\right) \quad (12).$$

3. Brechung des Lichts durch ein von zwei Kugelflächen begrenztes Medium.

Aufgabe. Ein leuchtendes Objekt stehe senkrecht auf der Centrale zweier ein Medium begrenzenden Kugelflächen. Die Lage und Grösse des Bildes zu bestimmen, welches die von dem Objekte ausgesandten, durch das Medium gehenden Strahlen erzeugen.

Auflösung. Es seien C und C^1 die Mittelpunkte der beiden Kugelflächen, also CC^1 die Centrale. Ein von d. Punkte A derselben ausgehender Strahl treffe die erste Kugelfläche in B; man lege durch ABC die Ebene, welche die Kugelflächen in den Bögen LON und $L^1O^1N^1$ schneidet. Der in B gebrochene Strahl, welcher die Centrale (Achse) in D schneidet, erleidet in B^1 eine Brechung, infolge deren er, vom Einfallslote $C^1B^1Q^1$ abgelenkt, die Achse in A^1 schneide. Das in B errichtete Einfallslot heisse CBQ. Man setze



$AO = a$, $OC = r$, $O^1C^1 = r^1$, $OO^1 = d$, $OD = u$, $O^1D^1 = u^1$, $O^1A^1 = x$, $\sphericalangle BAO = \varphi$, $\sphericalangle OCB = \omega$, $\sphericalangle B^1C^1O^1 = \omega^1$, $\sphericalangle O^1A^1B^1 = \varphi^1$, $\sphericalangle ODB = \psi$, $\sphericalangle ABQ = \varepsilon$, $\sphericalangle CBB^1 = \beta$, $\sphericalangle CB^1B = \beta^1$, $\sphericalangle A^1B^1Q^1 = \varepsilon^1$.

Sämtliche Winkel seien so klein, dass man für ihre Sinus und Tangenten die Argumente setzen, und die von B und B^1 auf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Achse gefällten Lote z und z¹ als mit den Bogen OB und O^1B^1 zusammenfallend vorausgesetzt werden dürfen. Dann ist

$$\varepsilon = n\beta,\ \varepsilon = \omega + \varphi,\ \beta = \omega - \psi,\ \omega + \varphi = n(\omega - \psi),\ \omega = \frac{z}{r},\ \varphi = \frac{z}{a},\ \psi = \frac{z}{u},$$

$$\text{folglich}\quad \frac{z}{r} + \frac{z}{a} = \frac{n\,z}{r} - \frac{n\,z}{u},\qquad \frac{1}{a} + \frac{n}{u} = \frac{n-1}{r},\qquad \text{(a)}$$

$$\text{(b)}\quad u = \frac{n\,r\,a}{(n-1)\,a - r},\qquad (n-1)\,a - r = \frac{n\,r\,a}{u}\quad \text{(b*)}$$

$$\varepsilon^1 = n\beta^1,\ \varepsilon^1 = \omega^1 + \varphi^1,\ \beta^1 = \omega^1 + \psi,\ \omega^1 + \varphi^1 = n(\omega^1 + \psi),\ \omega^1 = \frac{z^1}{r^1},$$

$$\varphi^1 = \frac{z^1}{x},\ \psi = \frac{z^1}{u^1},$$

$$\text{folglich}\quad \frac{z^1}{r^1} + \frac{z^1}{x} = \frac{nz^1}{r^1} + \frac{nz^1}{u^1},\qquad \frac{1}{x} - \frac{n}{u^1} = \frac{n-1}{r^1},\qquad \text{(c)}$$

$$\text{(d)}\quad u^1 = -\frac{n\,r^1\,x}{(n-1)\,x - r^1},\quad (n-1)\,x - r^1 = -\frac{n\,r^1\,x}{u^1}\quad \text{(d*)}.$$

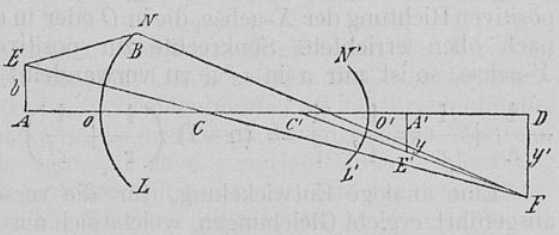
Die Entfernungen der Punkte A, D von C und der Punkte A^1, D von C sind:

$$AC = a + r,\ DC = u - r = \frac{r\,(a+r)}{(n-1)\,a - r} = \frac{(a+r)\,u}{n\,a}\ \text{(nachb)}$$

$$A^1C^1 = x + r^1,\ DC^1 = u^1 + r^1 = -\frac{r^1\,(x + r^1)}{(n-1)x - r^1} = \frac{(x + r^1)\,u^1}{n\,x}\ \text{(d*)}$$

Eine analoge Entwickelung führt für alle vom Punkte A ausgehenden Strahlen, welche obigen Bedingungen genügen, (Centralstrahlen) zu denselben Gleichungen (a) und (c), durch welche [cfr. (13) und (17)] x eindeutig bestimmt ist. Die von A ausgesandten Centralstrahlen treffen sich daher nach der Brechung im Punkte A^1, dem Bildpunkte von A. Umgekehrt müssen die von einem leuchtenden Punkte A' ausgesandten Centralstrahlen nach erlittener Brechung sich in A vereinigen. (Reciprocitätsgesetz).

In A befinde sich ein zur Achse senkrecht. Objekt AE (b), welches so klein sei, dass $\cos ACE = 1$, also $AC = CE$ gesetzt werden



darf. Dann erhält man den Bildpunkt von E infolge der ersten Brechung, indem man EC bis zum Durchschnitte F mit dem

auf AD in D errichteten Lote verlängert. ($AC = CE$ vorausgesetzt, daher $CD = CF$.) $DF = y^1$ stellt daher das erste Bild von AE dar. Nun verhält sich:

$$b : y^1 = AC : CD = (a+r) : \frac{(a+r)\,u}{n\,a} = na : u, \text{ also } y^1 = \frac{b\,u}{n\,a}.$$

Die nach dem Punkte D konvergierenden Strahlen vereinigen sich nach der zweiten Brechung in A^1, die nach F konvergierenden Strahlen in dem Punkte E^1, in welchem C^1F das in A^1 auf der Achse errichtete Lot schneidet ($C^1D = C^1F$ vorausgesetzt, daher $C^1A^1 = C^1E^1$) $A^1E^1 = y$ stellt mithin die Länge des Bildes nach der zweiten Brechung dar. Es verhält sich nun

$$y^1 : y = C^1D : C^1A^1 = \frac{u^1(x+r^1)}{n\,x} : (x+r^1) = u^1 : n\,x,$$

$$\text{also } y = \frac{n\,x\,y^1}{u^1} = \frac{b}{a} \cdot \frac{u}{u^1}\,x \quad (e)$$

1. Ist die Dicke des Mediums verschwindend klein gegen u und u^1, so darf man $u = u^1$ setzen, und man erhält durch Addition von (a) und (c) und aus (e)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{x} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^1}\right) = 1, \quad y = \frac{b}{a}\,x. \quad (13)$$

Ein von zwei Kugelflächen begrenztes Medium heisst eine sphärische Linse. Sie heisst eine mathematische Linse, wenn ihre Dicke vernachlässigt werden kann, im andern Falle eine physische. Ebene Begrenzungsflächen werden als kugelförmige Flächen mit unendlich grossen Halbmessern in Rechnung gebracht. Man unterscheidet daher sechs Arten sphärischer Linsen, nämlich die bikonvexe, die plankonvexe, die konkavkonvexe, die bikonkave, plankonkave und konvexkonkave Linse.

Diskussion der Gleichungen (13) für die mathematische Linse. Bei der Entwickelung der Gleichungen (13) sind nur die absoluten Werte von a, b, x, y, in Betracht gezogen. Nimmt man auf ihre Lage Rücksicht, wählt OO^1 zur positiven Richtung der X-achse, die in O oder in der Mitte von OO^1 nach oben errichtete Senkrechte zur positiven Richtung der Y-achse, so ist nur a in — a zu verwandeln, und man erhält:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^1}\right), \quad y = \frac{b}{a}\,x \; (13^*).$$

Eine analoge Entwickelung, für die verschiedenen Linsen ausgeführt, ergiebt Gleichungen, welche sich aus den vorstehenden ableiten lassen, wenn man die Halbmesser, welche in Vergleich mit denen der bikonvexen Linse eine entgegengesetzte Lage

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

haben, mit umgekehrten Vorzeichen in Rechnung bringt. Für die verschiedenen Linsen hat man daher, für die

$$\text{bikonv.}\ \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^1}\right),\ \text{plankonv.}\ \frac{1}{f} = (n-1)\ \frac{1}{r},$$

$$\text{konkavkonvexe}\ \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r^1}\right),\ (14)$$

$$\text{bikonk.}\ \frac{1}{f} = -(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^1}\right),\ \text{plankonk.}\ \frac{1}{f} = -(n-1)\ \frac{1}{r^1},$$

$$\text{konvexkonkave}\ \frac{1}{f} = -(n-1)\left(\frac{1}{r^1}-\frac{1}{r}\right).\ (14^*).$$

Bei den drei ersten Linsen wird für $a = \infty$ $x = f$, bei den drei letzten für $a = \infty$ $x = -f^1$. Die drei ersten Linsen (in der Mitte am dicksten) heissen Sammellinsen, die drei letzten (am Rande am dicksten) Zerstreuungslinsen. Die Strecke $OF = f$ heisst die Brennweite, F der Brennpunkt, die in F auf OF errichtete senkrechte Ebene die Brennebene der Linie.

A. Diskussion der Gleichungen (13*) für Sammellinsen.

a) Für $a = -2f$ wird, da nach (13) $x = \frac{a \cdot f}{a+f}$ is^t, $x = 2f$, $y = -b$.

b) Für negatives a und $\infty > a > 2f$ wird $f < x < 2f$, y negativ und $< b$, denn für $a = -2\varepsilon f$ ($\varepsilon > 1$) wird

$$x = \frac{2\varepsilon f}{2\varepsilon - 1} = 2f : \left(2 - \frac{1}{\varepsilon}\right) > f \text{ und } < 2f,\ y \text{ negativ}$$

und, da $x < a$ ist, $y < b$.

c) Für negatives a und $2f > a > f$ wird $2f > x > \infty$, (Reciprocitätsgesetz) y negativ und $> b$.

d) Für negatives a und $a < f$ wird x negativ und $> a$, y positiv und $> b$, denn für $a = -\varepsilon f$ ($\varepsilon < 1$) wird x negativ und $= -\frac{\varepsilon f}{1-\varepsilon}$, also $> a$, y positiv und $> b$.

e) Entfernt sich der leuchtende Punkt D in der Richtung OD unendlich weit von der Linse, so dass das von D ausgehende, die Linse treffende Strahlenbüschel als ein Strahlenbündel betrachtet werden kann, so wird auch der zugehörige Wert von $a = \infty$. Und da dann die zu a gehörige Bildweite gleich der Brennweite ist, so liegt der Bildpunkt von D in der Brennebene. Treffen daher parallele Strahlen eine Linse, so vereinigen sie sich in dem Durchschnittspunkte der durch die Mitte O der Linse zu ihnen gezogenen Parallelen mit der Brennebene.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

B. Diskussion der Gleichungen für Zerstreuungslinsen.

Man setze den absoluten Wert von f gleich f^1 also $f = -f^1$.

a) Für $a = -\varepsilon f^1$ wird $x = -\frac{\varepsilon f^1}{\varepsilon + 1}$, $y = \frac{b}{\varepsilon + 1}$, x negativ und $< a$, y positiv und $< b$.

b) Für $a = \varepsilon f^1$ wird $x = +\frac{\varepsilon f^1}{1-\varepsilon}$, $y = +\frac{b}{1-\varepsilon}$ also für $\varepsilon = 1$ wird $x = \infty$; für $\varepsilon < 1$, $x < a$, $y > b$.

2. Für die physische Linse ist $u^1 - u = d$. Durch Subtraktion der Gleichungen (b) und (d) erhält man:

$$\frac{n\,r\,a}{(n-1)\,a-r} + \frac{n\,r^1\,x}{(n-1)\;x-r^1}, = d. \qquad (15)$$

Schafft man die Nenner fort, fasst die Glieder zusammen, welche ax, a und x als Hauptfaktor enthalten, und dividiert durch den Koefficienten von ax, so resultiert

$$ax - a\frac{r^1\left(r - \frac{n-1}{n}d\right)}{(n-1)\left(r+r^1-\frac{n-1}{n}d\right)} - x\frac{r\left(r^1 - \frac{n-1}{n}d\right)}{(n-1)\left(r+r^1-\frac{n-1}{u}d\right)}$$

$$= \frac{r\,r^1\,d}{n\,(n-1)\left(r+r^1-\frac{n-1}{n}d\right)} \quad (f)$$ Setzt man dann

$$f_1 = \frac{r\left(r^1 - \frac{n-1}{n}d\right)}{(n-1)\left(r+r^1-\frac{n-1}{n}d\right)}, \quad f_2 = \frac{r^1\left(r - \frac{n-1}{n}d\right)}{(n-1)\left(r+r^1-\frac{n-1}{n}d\right)} \qquad (16)$$

und addiert auf beiden Seiten $f_1 f_2$ und setzt

$$f = \frac{r\,r^1}{(n-1)\left(r+r^1-\frac{n-1}{n}d\right)}, \qquad (16^*)$$

so erhält man:

$$(a-f_1)\,(x-f_2) = f^2, \; x = f_2 + \frac{f^2}{a-f_1}. \quad (17).$$

Die Gleichungen (16) und (16*) ermöglichen es, die Grössen d, r, r^1 durch f, f_1 f_2, auszudrücken. Aus (17) ersieht man,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dass $f^2 - f_1 f_2$ gleich der linken Seite der Gleichung (f), also auch gleich der rechten Seite $\frac{d f}{n}$ ist. Daraus folgt

$$f^2 - f_1 f_2 = \frac{d f}{n}, \quad d = \frac{n (f^2 - f_1 f_2)}{f} \quad (g).$$

Beachtet man, dass nach (16*) $(n-1)\left(r + r^1 - \frac{n-1}{n} d\right) = \frac{r r^1}{f}$ ist, so gehen die Gleichungen (16), in die Gleichungen

$$f_1 = f\left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{d}{r^1}\right), \quad f_2 = f\left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{d}{r}\right)$$

über, aus denen man findet:

$$r = \frac{(n-1)\ (f^2 - f, f_2)}{f - f_2}, \quad r^1 = \frac{(n-1)\ (f^2 - f_1\ f_2)}{f - f_1}, \quad (h)$$

$$r : r^1 = (f - f_1) : (f - f_2).$$

Um die Länge des Bildes zu bestimmen, geht man von Gleichung (e) aus und findet durch Substitution der Werte von u und u^1 aus (b) und (c)

$$y = -\frac{bx}{a} \cdot \frac{n\ r\ a}{(n-1)\ a - r} \cdot \frac{(n-1)x - r^1}{n\ r^1\ x} = -\frac{br}{r^1} \cdot \frac{(n-1)x - r^1}{(n-1)\ a - r}.$$

Nun erhält man mit Benutzung von (17) und (h)

$$(n-1)\ x - r^1 = (n-1)\left(f_2 + \frac{f^2}{a - f_1} - \frac{f^2 - f_1 f_2}{f - f_1}\right) = (n-1).$$

$$\left(\frac{a f_2 + f^2 - f_1 f_2}{a - f_1} - \frac{f^2 - f_1 f_2}{f - f_1}\right) = \frac{(n-1) f [-a (f - f_2) + f^2 - f_1 f_2]}{(a - f_1)\ (f - f_1)}$$

$$= -\frac{(n-1) f (f - f_2)}{(a - f_1)\ (f - f_1)}\left(a - \frac{f^2 - f_1 f_2}{f - f_2}\right), \text{ aber } \frac{f^2 - f_1 f_2}{f - f_2} = \frac{r}{n-1},$$

$$\text{daher } (n-1)\, x - r^1 = -\frac{f (f - f_2)}{(a - f_1)\ (f - f_1)}\ [a\ (n-1) - r],$$

$$\frac{(n-1)x - r^1}{a (n-1) - r} = -\frac{f\ (f - f_2)}{(a - f_1)\ (f - f_1)}, \text{ daher } y = \frac{b r}{r^1} \frac{f\ (f - f_2)}{(a - f_1)\ (f - f_1)},$$

oder da $r : r^1 = (f - f_1) : (f - f_2)$, $(a - f_1)\ (x - f_2) = f^2$ ist,

$$y = \frac{b\ f}{a - f_1} = \frac{b\ (x - f_2)}{f}. \quad (18).$$

Hieraus folgt:

$$y : b = f : (a - f_1), \quad y : (b + y) = f : (a + f - f_1),$$
$$y : b = x - f_2) : f, \quad (b + y) : b = (x + f - f_2) : f,$$
$$\text{folglich } y : b = (x + f - f_2) : (a + f - f_1). \quad (i).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Punkte, welche von A und A^1 bezüglich die Entfernungen $a+f-f_1$ und $x+f-f_2$, also von O und O^1 die Entfernungen $f-f_1$ und $f-f_2$ haben, heissen die Hauptpunkte der Linse. Bezeichnet man sie mit P u. P^1, ihre Entfernungen von A und A^1 mit c und c^1, so ist

$$AP = c = a+f-f_1, \quad A^1P^1 = c^1 = x+f-f_2.$$

Setzt man in Gleichung (17) $a-f_1 = c-f$, $x-f_2 = c^1-f$, so geht sie in die Gleichung

$$(c-f)\,(c^1-f) = f^2, \quad \frac{1}{c} + \frac{1}{c^1} = \frac{1}{f} \qquad (19).$$

über. Aus (i) folgt: $\quad y = \frac{c^1}{c}\, b.$

Verbindet man endlich P und P^1 mit den konjugierten Punkten E und E^1, so folgt, da nach (i) $y : b = AP : A^1P^1$ ist, $\triangle\, AEB \sim A^1E^1P^1$, $EP \parallel E^1P^1$, woraus sich die Konstruktion von E^1 ergiebt, wenn $P\,P^1$ und A^1 bestimmt sind.

Die Brechung durch eine physische Linse erfolgt daher ebenso, wie durch eine mathematische Linse, deren Brennweite gleich der Hauptbrennweite f der physischen Linse ist, wenn für die Abstände des leuchtenden Punktes und Bildpunktes von der mathematischen Linse die Abstände von den Hauptpunkten substituiert werden. Die Längen des Objekts und des Bildes verhalten sich daher, wie ihre Abstände von den zugehörigen Hauptpunkten.

Es sei für eine physische Linse $r = 4$ cm, $r^1 = 4^1/_3$ cm, $a = 10$ cm, $d = 9$ cm, $n = 1{,}5$ cm. Dann ergiebt sich $f_1 = 2$ cm, $f_2 = 1^5/_8$ cm, $f = 6^1/_2$ cm, $x = 6^{29}/_{32}$ cm, $c = 14{,}5$ cm, $c' = 11^{25}/_{32}$ cm.

Die Hauptpunkte liegen innerhalb der Linse und sind von O und O^1 um $4^1/_2$ und $4^7/_8$ cm, von einander um $^3/_8$ cm entfernt.

Erklärung. Unter einem Linsensystem (Kombination) versteht man eine Reihe von Linsen mit gemeinschaftlicher Achse.

Lehrsatz. Der reciproke Wert eines Systems mathematischer Linsen ist gleich der Summe der reciproken Werte der Brennweiten der einzelnen Linsen.

Beweis. Setzt man auch die Dicke der Linsenkombination unendlich klein, also $\lim d = 0$, so hat man nach (13*), wenn der leuchtende Punkt vor dem Linsensysteme liegt,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}, \quad -\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_2}, \text{ daher } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Für $a = \infty$ wird $\frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$. Bezeichnet man daher diesen Wert von x_2 mit f, so erhält man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (20).$$

Lehrsatz. Eine Kombination zweier mathematischer Linsen wirkt wie eine physische Linse von angebbaren Dimensionen.

Beweis. Bezeichnet e den Abstand beider Linsen, so findet man aus (13*) die Gleichungen

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}, \quad \frac{1}{a_2} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_2}, \quad a_2 + x_1 = e.$$

Durch Elimination von a_2 und x_1 ergiebt sich:

$$a_1 x_2 - a_1 \frac{f_2\,(f_1 - e)}{f_1 + f_2 - e} - x_2 \frac{f_1\,(f_2 - e)}{f_1 + f_2 - e} = \frac{e\,f_1\,f_2}{f_1 + f_2 - e},$$

oder $(x_2 - F_1)\,(x_2 - F_2) = F^2$, wenn

$$F_1 = \frac{f_1\,(f_2 - e)}{f_1 + f_2 - e}, \quad F_2 = \frac{f_2\,(f_1 - e)}{f_1 + f_2 - e}, \quad F = \frac{f_1\,f_2}{f_1 + f_2 - e}$$

gesetzt wird. Die Vergleichung dieser Gleichungen mit (16) und (16*) zeigt, dass die Linsenkombination ebenso wirkt wie eine physische Linse, in welcher

$$r = (n-1)\,f_1, \quad r^1 = (n-1)\,f_2, \quad d = ne \text{ ist.}$$

Cap. 4. Von der Zerstreuung des Lichts (Dispersion).

Erfahrungssätze. 1. Das weisse Licht ist aus verschiedenfarbigen Lichtarten zusammengesetzt, welche sich durch verschiedene Grade der Brechbarkeit von einander unterscheiden. Sie trennen sich daher bei dem Durchgange durch ein Prisma und bilden das Spektrum.

2. Das Sonnenlicht enthält nicht Strahlen jedweder Brechbarkeit. Solche fehlen, welche bei dem Durchgange durch ein Prisma im Spektrum die Stellen der Fraunhoferschen Linien treffen würden.

3. Die Spektren zweier Prismen von verschiedener Substanz sind, auch wenn die Strahlen mittlerer Brechbarkeit (Linie F.) gleiche Ablenkung erfahren, nicht gleich lang, noch sind die Entfernungen entsprechender Fraunhoferscher Linien den Längen der Spektren proportional.

Aufgabe. Die Grösse des Sonnenspektrums eines gegebenen Prismas zu bestimmen.

Auflösung. Die Grösse des Spektrums wird durch den Winkel gemessen, welchen die aus dem Prisma tretenden, äusserst roten und violetten Strahlen mit einander bilden. Bezeichnen nun n_v, n_r, n die Brechungsexponenten der violetten, roten und mittleren Strahlen, der Linien H, A, F des Spektrums, ε den Einfallswinkel, γ den brechenden Winkel, ε'_v, ε_r', ε'

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Winkel, welche diese Strahlen mit den auf der zweiten brechenden Fläche errichteten Loten bilden, so ist $\varepsilon^1 = \frac{1}{2}(\varepsilon^1_v + \varepsilon^1_r)$, die Grösse des Spektrums $x = \varepsilon^1_v - \varepsilon^1_r$.

Nun hat man

$$\sin \varepsilon^1_v = \sin \alpha \sqrt{n_v^2 - \sin^2 \varepsilon} - \cos \alpha \sin \varepsilon,$$

$$\sin \varepsilon^1_r = \sin \alpha \sqrt{n_r^2 - \sin^2 \varepsilon} - \cos \alpha \sin \varepsilon,$$

$$\sin \varepsilon^1 = \sin \tfrac{1}{2}(\varepsilon^1_v + \varepsilon^1_r) = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon} - \cos \alpha \sin \varepsilon,$$

folglich $\sin \varepsilon^1_v - \sin \varepsilon^1_r = \sin \alpha \left(\sqrt{n_v^2 - \sin^2 \varepsilon} - \sqrt{n_r^2 - \sin^2 \varepsilon}\right)$,

aber auch gleich $2 \cos \frac{1}{2}(\varepsilon^1_v + \varepsilon^1_r) \sin \frac{1}{2}(\varepsilon^1_v - \varepsilon^1_r)$, daher

$$\sin \tfrac{1}{2}(\varepsilon_v^1 - \varepsilon_r^1) = \frac{\sin \alpha \left(\sqrt{n_v^2 - \sin^2 \varepsilon} - \sqrt{n_r^2 - \sin^2 \varepsilon}\right)}{2 \cos \varepsilon^1} \qquad (21).$$

Erleidet der mittlere Strahl die Minimalablenkung, so ist

$$\sin \varepsilon = n \sin \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(\varepsilon^1_v - \varepsilon^1_r) = \frac{\sin \gamma \left(\sqrt{n_v^2 - \sin^2 \varepsilon} - \sqrt{n_r^2 - \sin^2 \varepsilon}\right)}{2\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}} \qquad (21^*)$$

Aufgabe. Ein gleichschenklig-rechtwinkliges Prisma aus Kronglas soll mit einem Prisma aus Flintglas so kombiniert werden, dass der in einem Hauptschnitte parallel zur Basis des ersten Prismas eintretende mittlere Spektralstrahl in derselben Richtung aus dem zweiten Prisma tritt. Wie gross ist der brechende Winkel γ^1 des zweiten Prismas und das Spektrum?

Bezeichnen n und n^1 die Brechungsexponenten, β, β^1 die Winkel, welche der durch die Prismen gehende mittlere Strahl mit dem auf ihrer Berührungsfläche errichteten Lote bilden, ε und ε^1 den Einfallswinkel und Austrittswinkel, so ergiebt sich leicht:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4}, \varepsilon^1 = \left(\gamma^1 - \frac{\pi}{4}\right), \sin \frac{\pi}{4} = n \cos \beta, n \sin \beta = n^1 \sin \beta^1 \quad (n.10),$$

$$n^1 \sin (\gamma^1 - \beta^1) = \sin \left(\gamma^1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Durch Elimination von β und β^1 findet man

$$\operatorname{tg} \gamma^1 = \frac{\sqrt{2n^2 - 1} - 1}{\sqrt{2(n'^2 - n^2) + 1} - 1}.$$

Bezeichnen ε^1_v und ε^1_r die Winkel, welche die austretenden violetten und roten Strahlen mit den zugehörigen Loten bilden, n_v, n_r n^1_v, n^1_r die betreffenden Brechungsexponenten, so ist

$$\sin \frac{\pi}{4} = n_v \cos \beta, \; n_v \sin \beta = n^1_v \sin \beta^1, \; n_v^1 \sin (\gamma^1 - \beta^1) = \sin \varepsilon_v^1.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daraus ergiebt sich

$$\sin \varepsilon_v^1 = \sin \gamma' \sqrt{n^{1\,2}_v - n_v^2 + \tfrac{1}{2}} - \cos \gamma' \sqrt{n_v^2 - \tfrac{1}{2}},$$

$$\sin \varepsilon_r^1 = \sin \gamma' \sqrt{n^{1\,2}_r - n_r^2 + \tfrac{1}{2}} - \cos \gamma' \sqrt{n_r^2 - \tfrac{1}{2}},$$

folglich $\sin \frac{1}{2} (\varepsilon_v^1 - \varepsilon_r^1) =$

$$\frac{\sin \gamma' \left(\sqrt{n^{1\,2}_v - n_v^2 + \tfrac{1}{2}} - \sqrt{n_r'^2 - n_r^2 + \tfrac{1}{2}}\right) - \cos \gamma' \left(\sqrt{n_v^2 - \tfrac{1}{2}} - \sqrt{n_r^2 - \tfrac{1}{2}}\right)}{2 \cos \frac{1}{2} (\varepsilon_v^1 + \varepsilon_r^1)}$$

Da aber $\frac{1}{2} (\varepsilon_v^1 + \varepsilon_r^1)$ den Winkel darstellt, welchen der mittlere Strahl mit dem zugehörigen Lote bildet, und dieser Strahl dem eintretenden Strahle parallel austritt, so ist $\frac{1}{2} (\varepsilon_v^1 + \varepsilon_r^1) = \gamma^1 - \frac{\pi}{4}$, folglich

$\sin \frac{1}{2} (\varepsilon_v^1 - \varepsilon_r^1) =$

$$\frac{\sin \gamma' \left(\sqrt{n^{1\,2}_v - n_v^2 + \tfrac{1}{2}} - \sqrt{n^{1\,2}_r - n_r^2 + \tfrac{1}{2}}\right) - \cos \gamma' \left(\sqrt{n_v^2 - \tfrac{1}{2}} - \sqrt{n_r^2 - \tfrac{1}{2}}\right)}{2 \cos \frac{1}{2} (\gamma^1 - 45^\circ)}$$

Für $n_v = 1{,}546$, $n_r = 1{,}526$, $n = 1{,}536$, $n_v^1 = 1{,}671$, $n^1_r = 1{,}628$, $n_1 = 1{,}648$ erhält man $\sphericalangle\, \gamma^1 = 71^\circ\, 35'\, 46''$, $\varepsilon_v^1 - \varepsilon_r' = 2^\circ\, 9'\, 40''$.

Aufgabe. Drei gleichschenklig-rechtwinklige Prismen, das mittlere aus Kronglas, die beiden anderen aus Flintglas bestehend, sind so aneinander gelegt, dass zwei aufeinander folgende brechende Winkel die Lage von Wechselwinkeln haben; es sollen zwei Kronglasprismen von gleichen brechenden Winkeln angelegt werden, so dass der Strahl mittlerer Brechbarkeit, welcher in einer zu den brechenden Kanten senkrechten Ebene parallel zu den Grundflächen der mittleren Prismen eintritt, in derselben Richtung nach dem Durchgange durch die fünf Prismen austritt. Wie gross ist der brechende Winkel der angelegten Prismen?

Auflösung. Da zu beiden Seiten des mittleren Prismas je zwei entsprechende Prismen symmetrisch liegen, so muss, wenn der eintretende und austretende Strahl der Grundfläche des mittleren Prismas parallel sein sollen, der Strahl auch das mittlere Prisma in derselben Richtung durchlaufen. Von dem mittleren Prisma nach der einen Seite fortschreitend, findet man leicht unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen:

$$(1)\ n \sin \frac{\pi}{4} = n^1 \sin \beta_1,\quad (2)\ n^1 \cos \beta_1 = n \sin \beta_2,\quad (3)\ n \sin (\gamma^1 - \beta_2) = \sin \left(\gamma^1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Aus (1) ergiebt sich $\sin \beta_1$ u. $\cos \beta_1$, aus (2) $\sin \beta_2$ u. $\cos \beta_2$, aus (3) $\operatorname{tg} \gamma^1 = \dfrac{\sqrt{2n^1 - n^2 - 1}}{\sqrt{3n'^2 - 2n^2 - 1}}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für $n = 1{,}536$, $n^1 = 1{,}648$ wird $\sphericalangle \gamma' = 69^\circ\ 24'$.

Bezeichnen $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5$ die Winkel, welche der violette Strahl vor dem Austritte aus den einzelnen Prismen mit den zugehörigen Loten bildet, so ergeben sich die 6 Gleichungen:

$$\sin\left(\gamma' - \frac{\pi}{4}\right) = n_v \sin(\gamma^1 - \beta_1), \quad n_v \sin\beta_1 = n_v^1 \cos\beta_2$$

$$n_v^1 \sin\beta_2 = n_v \cos\beta_3, \quad n_v \sin\beta_3 = n_v^1 \cos\beta_4, \quad n_v^1 \sin\beta_4,$$
$$= n_v \sin(\gamma - \beta_5), \quad n_v \sin\beta_5 = \sin\varepsilon_v'.$$

Durch successive Elimination der Grössen $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5$ erhält man $\sin\varepsilon_v'$, durch analoge sechs Gleichungen $\sin\varepsilon_r'$ und daraus $\varepsilon_v' - \varepsilon_r'$.

Aufgabe. Die Gleichung aufzustellen, welche in einer achromatischen Linsencombination zwischen den Brennweiten der beiden Linsen für rote und violette Strahlen besteht.

Auflösung. Eine achromatische Linse heisst jede Kombination aus einer Sammel- und Zerstreuungslinse, welche die parallel zur Achse eintretenden violetten und roten Strahlen in einem Punkte vereinigt. Bezeichnen daher f_v, f_v^1, f_r, f_r^1 die Brennweiten der beiden Linsen für violette und rote Strahlen, F_v, F_r die der Kombination, so hat man nach (20)

$$\frac{1}{F_v} = \frac{1}{f_v} + \frac{1}{f_v'}, \quad \frac{1}{F_r} = \frac{1}{f_r} + \frac{1}{f_r^1}, \text{ also da } F_r = F_v \text{ sein soll,}$$

$$\frac{1}{f_v} + \frac{1}{f_v^1} = \frac{1}{f_r} + \frac{1}{f_r^1}. \quad (22.)$$

Cap. 5. Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts.

Aufgabe. Es seien R und R' die Entfernungen der Erde und des Jupiter von der Sonne, T und T' ihre Umlaufszeiten, τ die synodische Umlaufszeit eines Jupitertrabanten, ρ seine Entfernung vom Jupiter. Wie gross ist die Zahl (n) der Umläufe des Trabanten zwischen der Konjunktion und Opposition des Jupiter, und wie gross ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts, wenn die Verfinsterung des Trabanten zur Zeit der Opposition nicht $n\tau$ Sek. nach dem Beginne der Verfinsterung zur Zeit der Konjunktion, sondern d Sekunden später eintritt.

Auflösung. In $n\tau$ Sekunden beschreibt der Radiusrektor der Erde den Winkel $(2\pi n\tau : T)$, der des Jupiter den Winkel $(2\pi n\tau : T')$; dann bilden $n\tau$ Sekunden nach der Konjunktion der Jupitertrabant, Sonne und Erde den Winkel $2\pi n\tau\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}\right)$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$= 2\pi\ n\tau\ \frac{T'-T}{T\,T'}$, und da dieser zur Zeit der Opposition gleich π ist, so folgt $n = T.T' : (2\tau[T'-T])$.

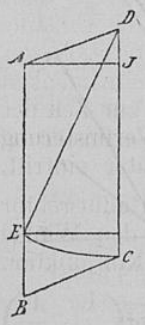
Zur Zeit der Konjunktion ist die Entfernung des Jupitertrabanten von der Erde gleich $R'-R+\rho$, zur Zeit der Opposition gleich $R'+R+\rho$, folglich die Differenz der Entfernungen gleich $2\,R$. Der letzte, bei Beginn der Verfinsterung vom Trabanten zur Erde gesandte Lichtstrahl hat also zur Zeit der Opposition einen um die Strecke $2\,R$ längeren Weg bis zur Erde zurückzulegen, als zur Zeit der Konjunktion, und da das Licht, wenn c seine Geschwindigkeit ausdrückt, diese Strecke in der Zeit $(2R : c)$ zurücklegt, so tritt zur Zeit der Opposition für den Erdbewohner die Verfinsterung nicht $n\tau$ Sekunden nach dem Beginn der Verfinsterung zur Zeit der Konjunktion ein, sondern $(2R : c)$ Sekunden später. Bezeichnet man die beobachtete Verzögerung mit d, so ist also

$$d = 2R : c, \quad c = 2R : d.$$

Die Beobachtung ergiebt $d = 16$ Minuten 30 Sekunden, $2R = 39926000$ Meilen, daher $c = 40329$ Meilen.

Lehrsatz. Ein Fixstern im Pole der Ekliptik beschreibe während eines Jahres, wenn v die Geschwindigkeit der um die Sonne sich bewegenden Erde, c die Geschwindigkeit des Lichts ausdrückt, scheinbar einen Kreis, dessen scheinbarer Halbmesser $v : c$ ist, ein Fixstern, welcher die Breite ε hat, eine Ellipse, deren scheinbare Achsen $\frac{v}{c}$ und $\frac{v}{c}\sin\varepsilon$ sind.

Beweis. Der Fixstern S sende zum Objekte des Fernrohrs AB Strahlen, welche, dasselbe parallel zur Achse mit der Geschwindigkeit c durchlaufend, im Fadenkreuz vereinigt werden. Bewegt sich aber zugleich die Erde und mit ihr das Fernrohr und beschreibt in der Zeit τ den Weg $BC = c\,.\,\tau$, welcher mit der Achse $AB \sphericalangle \alpha$ bildet, so werden die Strahlen des Fixsternes, welche an der Bewegung der Erde nicht teilnehmen, seitwärts von der Mitte des Fadenkreuzes sich vereinigen. Damit die Strahlen auch jetzt in der Mitte C des Fadenkreuzes vereinigt werden, muss man das Fernrohr um $\sphericalangle CDE = \varphi$ drehen, vorausgesetzt, dass das Licht in derselben Zeit den Weg AE zurücklegt, in welcher die Erde den Weg BC durchläuft. Es ist dann, wenn im Parallelogramm $BADC$ von E und A die Lote EF und AJ gefällt werden,



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$AE = v\tau, \ \operatorname{tg} \varphi =$$

$$\frac{EF}{FD} = \frac{BC \,.\, \sin \alpha}{FJ + JD} = \frac{BC \,.\, \sin \alpha}{AE + BC \,.\, \cos \alpha} = \frac{v\,\tau \sin \alpha}{c\tau + v\tau \cos \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v \sin \alpha}{c + v \,.\, \cos \alpha}. \quad (23.)$$

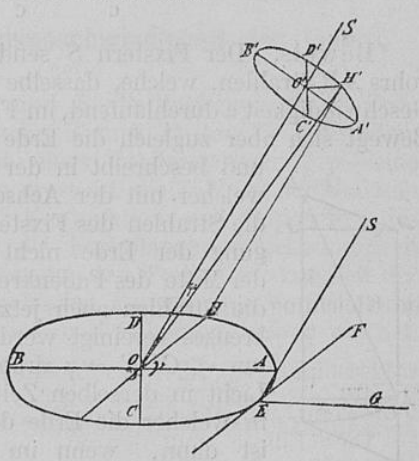
Sind also v und c zwei Seiten eines Dreiecks, $\pi - \alpha$ der von ihnen eingeschlossene Winkel, so stellt φ den der Seite v gegenüberliegenden Winkel dar.

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird $\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{c}$, für $\alpha = 0$ wird $\operatorname{tg} \varphi = 0$.

1. Befindet sich ein unendlich weit entfernter Fixstern S im Pole der Ekliptik $ABCD$, so teile man die Peripherie derselben in unendlich viele kleine Teile, dann muss in jedem Bogenelemente EF das nach S gerichtete Fernrohr, da $SE \perp EF$ ist, in der Ebene SEF um $\sphericalangle \varphi$ ($\operatorname{tg} \varphi = v : c$) gedreht werden. Ein Beobachter auf der Erde, den man sich bei der unendlichen Entfernung von S im Mittelpunkte O der Ekliptik befindlich vorstellen darf, wird also während eines Jahres das Fernrohr nach allen möglichen Richtungen drehen, welche mit $OS \sphericalangle \varphi$ bilden. Die Achse des Fernrohrs beschreibt also während des Jahres den Mantel eines Kegels, der Stern scheinbar einen Kreis, dessen scheinbarer Halbmesser φ durch die Gleichung $\operatorname{tg} \varphi = v : c$ bestimmt ist.

Die Beobachtung ergiebt $v = 3{,}97$ Meilen, $\varphi = 20'',25$, daher ist $c = v \,.\, \operatorname{ctg} \varphi = 40939$ Meilen. Dabei zeigt sich, dass man für $\operatorname{tg} \varphi$ das Argument setzen darf.

2. SO bilde mit der Ekliptik den $\sphericalangle SOA = \varepsilon$, dann steht SO auch auf CD senkrecht, wenn $CD \perp AO$ ist. Um nun $\sphericalangle SEF = \alpha$ zu finden, den im Punkte E der Ekliptik SE mit dem Bogenelement in E bildet, ziehe man durch E die Parallele EG zu AO und setze $\sphericalangle FEG = \gamma$. Dann ist $\sphericalangle SEG = \varepsilon$, $\sphericalangle \alpha$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen körperlichen Dreiecks, dessen Katheten γ und ε sind, daher $\cos \alpha = \cos \varepsilon \,.\, \cos \gamma$, also



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v \sin \alpha}{c + v \cos \alpha} = \frac{v \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon \,.\, \cos^2 \gamma}}{c + v \cos \varepsilon \,.\, \cos \gamma}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man ziehe nun durch O zu EF die Parallele OH, welche mit $OA \sphericalangle \gamma$ bildet, errichte auf SO in O' ($SO' = 1$) die senkrechte Ebene, indem man durch O' zu CD die Parallele $C'D'$ und in der Neigungsebene AOS auf OO' in O' das Lot $O'A'$ errichtet und durch $C'D'A'$ die Ebene legt; dann ist, da CD auf der Ebene AOO' senkrecht steht, auch $C'D' \perp AOO'$, also $O'A' \perp C'D'$.

Legt man ferner durch HOO' die Ebene, welche die Ebene $A'C'D'$ in $O'H'$ schneidet, so ist $\sphericalangle A'O'H' = \gamma'$, die Projektion von Winkel AOH oder γ auf Ebene $A'C'D'$ folglich, da beide Ebenen $\sphericalangle (\frac{1}{2}\pi - \varepsilon)$ bilden, $A'O' \perp C'D'$, $OA \perp CD$, $CD \parallel C'D'$ ist,

$$\cos AOH = \cos \gamma = \frac{\cos \gamma'}{\sqrt{\cos^2\gamma' + \sin^2\gamma' \sin^2\varepsilon}}. \quad \text{(nach Anhang, Hülfssatz 1).}$$

Man trage endlich $\sphericalangle \varphi$ an OO' in O in der Ebene HOO' an, der freie Schenkel treffe Ebene $A'C'D'$ in H', dann ist $O'H' = r' = OO' . \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi$, mithin:

$$r' = \frac{v\sqrt{1 - \cos^2\varepsilon . \cos^2\gamma}}{c + v \cos \varepsilon \cos \gamma},$$

oder wenn man den Wert von $\cos \gamma$ einsetzt, die Nenner und Wurzeln wegschafft und vereinfacht,

$$r' c \sqrt{\cos^2\gamma' + \sin^2\gamma' \sin^2\varepsilon} + r'v \cos \varepsilon \cos \gamma' = v\sqrt{\cos^2\gamma' + \sin^2\gamma' \sin^2\varepsilon - \cos^2\varepsilon . \cos^2\gamma'},$$

$$r'^2 \cos^2\gamma' (c^2 - v^2 \cos^2\varepsilon) + r'^2 c^2 \sin^2\gamma' \sin^2\varepsilon + 2 r' v^2 \cos\varepsilon \sin\varepsilon \cos\gamma' = v^2 \sin^2\varepsilon.$$

Wählt man in der Ebene $A'C'D'$, Linie $O'A'$ zur X-Achse, $C'D'$ zur Y-Achse, zieht die Koordinaten x, y des Punktes H', so ist $x = r' \cos \gamma'$, $y = r' \sin \gamma'$, und man erhält durch Substitution dieser Werte in obige Gleichung

$$x^2 (c^2 - v^2 \cos^2\varepsilon) + c^2 y^2 \sin^2\varepsilon + 2v^2 x \cos\varepsilon \sin\varepsilon = v^2 \sin^2\varepsilon,$$

$$\left(x + \frac{v^2 \sin\varepsilon \cos\varepsilon}{c^2 - v^2 \cos^2\varepsilon}\right)^2 + \frac{y^2 c^2 \sin^2\varepsilon}{c^2 - v^2 \cos^2\varepsilon} + \frac{v^2 c^2 \sin^2\varepsilon}{(c^2 - v^2 \cos^2\varepsilon)^2},$$

$$\frac{x'^2 (c^2 - v^2 \cos^2\varepsilon)^2}{v^2 c^2 \sin^2\varepsilon} + \frac{y^2 (c^2 - v^2 \cos^2\varepsilon)}{v^2} = 1, \; x' = x + \frac{v^2 \sin\varepsilon \cos^2\varepsilon}{c^2 - v^2 \cos^2\varepsilon}, \quad (31)$$

die Gleichung einer Ellipse, deren Achsen

$$2a = \frac{2 v c \sin \varepsilon}{c^2 - v^2 \cos^2\varepsilon} = \frac{2v}{c} \sin\varepsilon, \; 2b = \frac{2v}{\sqrt{c^2 - v^2 \cos^2\varepsilon}} = \frac{2v}{c}$$

sind, wenn man die höheren Potenzen von $v : c$ vernachlässigt.

Diese Ellipse stellt den geometrischen Ort der Punkte dar, nach welchen die Achse des nach S gerichteten Fernrohrs während des Jahres gerichtet werden muss, damit der Stern

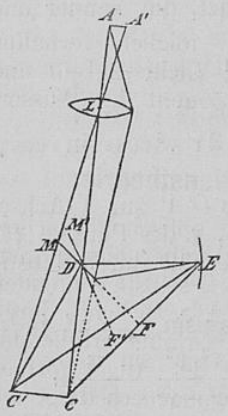
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

stets im Fadenkreuz erscheine, und da die Ellipse auf OS senkrecht steht, nahe den vom Sterne scheinbar beschriebenen Weg.

Für $\varepsilon = O$, das heisst für einen Stern in der Ekliptik geht die Ellipse in eine gerade Linie, für $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ in einen Kreis über.

Aufgabe. Bei dem von Foucault zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts angestellten Versuche sei die Linse von dem leuchtenden Punkte um a, von dem ebenen Spiegel um b, dieser von den symmetrisch zur Achse gelegenen Hohlspiegeln um l entfernt. Die Geschwindigkeit des Lichts in Luft und Wasser zu berechnen, wenn der ebene Spiegel n Umdrehungen in der Sekunde macht, und das Bild des leuchtenden Punktes um die Strecken d und d' abgelenkt erscheint.

Auflösung. Auf der Achse der Linse L befindet sich in A der leuchtende Punkt. Die von ihm ausgehenden Strahlen werden durch die Linse nach C gebrochen. Bevor sie sich aber in diesem Punkte vereinigen, treffen sie einen ebenen Spiegel M, der AC in D schneidet und um eine auf AC in D senkrechte Achse sich dreht. Bei einer gewissen Lage des Spiegels M werden die Strahlen nach E reflectiert, wenn E der konjugierte Punkt zu C, also $CF = EF$, $CE \perp M$ ist. In E befindet sich ein Hohlspiegel, dessen Achse mit ED zusammenfällt. Die in E zusammentreffenden Strahlen werden dann so reflektiert, dass je zwei zu DE symmetrisch liegende Strahlen ihre Wege austauschen. Daher werden die von E zurückkommenden Strahlen durch M so reflektiert, als ob sie von C ausgehen; sie werden also durch die Linse L wieder in A vereinigt.



Wenn aber der Spiegel M während der Zeit τ, in welcher das Licht den Weg $DE = l$ hin und her zurücklegt, sich um $\sphericalangle\ \alpha$ dreht und dadurch in die Lage M' übergeht, so werden die von E zurückkommenden Strahlen durch den Spiegel M' so reflektiert, als ob sie von C' ausgehen, wenn $EF' \perp M'$ und $EF' = F'C'$ ist; sie werden also durch die Linse L in einem Punkte A' vereinigt, den man erhält, wenn man C' mit B verbindet und bis zum Durchschnitte mit der durch A zu CC' gezogenen Parallelen verlängert. Nun ist $DE = DC = DC' = l$, also $\sphericalangle\ C'DC = 2 \,.\, CEC' = 2\,\alpha$ als Centriwinkel, folglich

$$CC' = 2\,l \sin \alpha = 2\,l\,\alpha \quad (1)$$

wenn α sehr klein ist; ferner verhält sich

$$CC' : AA' = CB : BA \text{ oder } 2\,l.\alpha : d = b + l : a. \quad (2).$$

Der Spiegel M beschreibt, da er in einer Sekunde n Umdrehungen macht, in dieser Zeit $\sphericalangle\ 2\,\pi\,n$, also in der Zeit τ den Winkel $2\,\pi\,n\,\tau$, und da er in dieser Zeit $\sphericalangle\ \alpha$ beschreibt, muss

$$\alpha = 2\,\pi\,n\,\tau \quad (3)$$

sein. Bezeichnet endlich c die Geschwindigkeit des Lichts, so durchläuft es in der Zeit τ die Strecke $c\,\tau$; es durchläuft aber in dieser Zeit den Weg $2\,DE = 2\,l$, also ist $2\,l = c\,.\,\tau$ (4).

Durch Elimination von τ und α aus (2) und (3) findet man

$$c = \frac{8\,\pi\,n\,a\,l^2}{d\,(b+l)}. \quad (32)$$

Befindet sich symmetrisch zur Achse mit dem Spiegel E ein Spiegel G, und ist zwischen D und G eine Wassersäule eingeschaltet, so ergiebt dieselbe Rechnung, wenn c' die Geschwindigkeit des Lichts in Wasser, d' die beobachtete Ablenkung des Bildes von A ausdrückt,

$$c' = \frac{8\,\pi\,n\,a\,l^2}{d'\,(b+l)}, \text{ folglich } c : c' = d' : d.$$

Der Versuch ergiebt $d' : d = 4 : 3$, folglich verhalten sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichts in Luft und Wasser wie $4 : 3$, also ist der Brechungsexponent des Wassers $n = c : c'$.

Cap. 6. Elemente der Undulationstheorie.

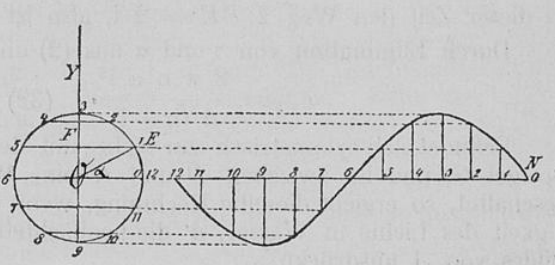
Zur Erklärung der bisher behandelten optischen Erscheinungen dient die Undulationstheorie. In derselben nimmt man an, dass durch die schwingende Bewegung eines selbstleuchtenden Körpers eine Wellenbewegung angeregt werde, welche durch ein feines, elastisches, alle Körper und Himmelsräume erfüllendes Fluidum, den Lichtäther, bis zur Netzhaut des Auges fortgepflanzt wird. Die Amplitude der Schwingungen bedingt die Intensität, die Schwingungsdauer die Farbe des Lichts. Aus Gründen, welche im Capitel 12 angegeben werden, schliesst man, dass die Schwingungen der Aetherteilchen eines Lichtstrahles transversale sind, d. h. dass sie auf der Fortpflanzungsrichtung senkrecht stehen. In der einfachsten Art der Lichtstrahlen, der polarisierten, welche in dem folgenden betrachtet werden, erfolgen die Schwingungen sämtlicher Aetherteilchen eines Strahles in einer Ebene, der Schwingungsebene.

1. Bewegung eines Aetherteilchens. Wird ein Aetherteilchen aus seiner Ruhelage entfernt, so bewegt es sich

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nach den Gesetzen einer Kraft, welche in jedem Augenblicke der Entfernung von der Ruhelage proportional wirkt. Wenn $\varkappa$ die Beschleunigung ausdrückt, welche dem Aetherteilchen in der Einheit der Entfernung erteilt wird, also $\varkappa y$ die Beschleunigung, welche ihm in der Entfernung y von der Ruhelage erteilt wird, so ist nach einem Satze der Dynamik die Schwingungsdauer desselben

$$T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\varkappa}}, \quad \sqrt{\varkappa} = \frac{2\,\pi}{T}, \quad (33).$$



Bezeichnet ferner $OA = a$ die grösste Entfernung (Amplitude) des Aetherteilchens von der Ruhelage, und beschreibt man um O mit OA den Kreis, welcher die Achse OAY in A und B, die zu ihr senkrechte Achse in C und D schneidet, so befindet sich das Aetherteilchen t Sekunden nach dem Ausgange von O auf der Y-achse in der Projection eines beweglichen Punktes, welcher von C, in der Richtung CA ausgehend, mit der konstanten Geschwindigkeit $a\sqrt{\varkappa}$ die Peripherie des Kreises durchläuft. Wenn also zur Zeit t der bewegliche Punkt den Weg $CE = a\sqrt{\varkappa}\,.\,t$, das Aetherteilchen die Strecke $OF = y$ zurückgelegt hat, so ist F die Projektion des Punktes E auf die Y-achse, und, wenn $\sphericalangle\, COE = \alpha$ gesetzt wird,

$$\alpha = \sqrt{\varkappa}\,.\,t, \quad y = a \sin \alpha = a \sin (\sqrt{\varkappa}\,.\,t) = a \sin 2\,\pi\,.\,\frac{t}{T}\,.(34).$$

Für $t = \frac{1}{4}T$ wird $y = +a$, für $t = \frac{1}{2}T$, $y = 0$, für $t = \frac{3}{4}T$, $y = -a$, für $t = T$, $y = o$.

Die Geschwindigkeit des Aetherteilchens zur Zeit t ist

$$v = a\sqrt{\varkappa}\,.\,\cos 2\,\pi\,\frac{t}{T}. \qquad (35).$$

2. Wellenbewegung in einer geradlinigen Reihe von Aetherteilchen. Man nimmt an, dass das Licht in einer Richtung MX dadurch sich fortpflanzt, dass jedes folgende Aetherteilchen successiv dieselbe schwingende Bewegung ausführt, als das primäre Aetherteilchen M. Die Gesamtheit der dadurch entstehenden Bewegung heisst eine Wellenbewegung. Die Strecke, um welche die schwingende Bewegung in der Sekunde sich fortpflanzt, heisst die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(c), die Strecke, um welche sie während der Schwingungsdauer T des primären Aetherteilchens fortschreitet, die Wellenlänge (λ). Da die schwingende Bewegung in einer Sekunde um die Strecke c, in T Sekunden um die Strecke $c \,.\, T$ fortschreitet, so ist

$$\lambda = c \,.\, T, \; c = \frac{\lambda}{T} = n\,\lambda, \quad (36).$$

wenn n die Zahl der Schwingungen in einer Sekunde ausdrückt.

Aufgabe. Es sei M der Ausgangspunkt einer Wellenbewegung von der Amplitude a und der Schwingungsdauer T, welche in der Richtung MX so fortschreitet, dass alle Aetherteilchen in der Ebene MXY senkrecht zu MX schwingen, die Entfernung eines im Abstande x von M befindlichen Aetherteilchens zur Zeit t zu bestimmen.

Auflösung. Das betrachtete Aetherteilchen beginnt zu schwingen, nachdem die schwingende Bewegung die Strecke x durchlaufen hat, also nach der Zeit $\frac{x}{c}$, ist also zur Zeit t $\left(t > \frac{x}{c}\right)$ nur $\left(t - \frac{x}{c}\right)$ Sekunden lang in Schwingung gewesen, mithin ist die Entfernung von der Ruhelage

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right) = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

$$v = a\sqrt{\varkappa} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \quad (37).$$

Zusatz. Geht x in $x + n\lambda$ über, so behält y denselben Wert; geht x in $x + \frac{1}{2}(2n+1)\lambda$ über, so erhält y den entgegengesetzten Wert. Zwei Aetherteilchen einer in gerader Linie fortschreitenden Wellenbewegung haben gleichen und gleichgerichteten Abstand von der Ruhelage, befinden sich in derselben Phase, wenn sie um ein Vielfaches einer Wellenlänge von einander entfernt sind; sie befinden sich in entgegengesetzter Phase, wenn sie um ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge von einander entfernt sind.

Zusatz. Für $t = n\,T$ (n eine ganze Zahl) erhält man $y = a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$, die Gleichung einer Kurve, auf welcher die Aetherteilchen zur Zeit $n \,.\, T$ liegen. Um je 13 Punkte auf einer Wellenlänge MN zu bestimmen, teile man MN von N aus in 12 gleiche Teile, nenne die Teilpunkte 1, 2, 3, . . . 12, und ebenso teile man den um O in der Verlängerung von NM

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

mit der Amplitude a beschriebenen Kreis von C aus in 12 gleiche Teile, nenne die Teilpunkte 1, 2, 3, . . . 12, ziehe durch diese Teilpunkte Parallelen zu MN, bis sie die in den entsprechenden Punkten von MN errichteten Lote treffen. Die erhaltenen Punkte, die Punkte M, N und der Halbierungspunkt Q von MN sind die gesuchten Punkte der Kurve. Der Punkt Q teilt die Kurve in zwei kongruente Hälften, die Hälfte NQ heisst der Wellenberg, die Hälfte MQ das Wellenthal.

Grundsatz. Pflanzen sich in einer geraden Linie gleichzeitig zwei Wellenbewegungen fort, und würde ein Aetherteilchen zu einer gegebenen Zeit infolge der einen um die Strecke y_1, infolge der anderen um die Strecke y_2 aus der Ruhelage abgelenkt, so ist die wirkliche Entfernung von derselben $y = y_1 + y_2$.

Aufgabe. Es seien M_1 und M_2 die Ausgangspunkte zweier in der Richtung $M_1 M_2$ sich fortpflanzenden Wellenbewegungen von derselben Schwingungsdauer T und Wellenlänge λ, aber von verschiedenen Amplituden a_1 und a_2, die Entfernung eines in dem Abstande x von M_1 befindlichen Aetherteilchens zur Zeit t zu bestimmen.

Auflösung. Nach (37) ist, wenn $M_1 M_2$, der Gangunterschied der beiden Wellen, gleich d gesetzt wird,

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), y_2 = a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{d}{\lambda}\right),$$

folglich $y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{d}{\lambda}\right)$,

oder wenn $2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \alpha$, $\frac{2\pi d}{\lambda} = \beta$ gesetzt wird,

$y = a_1 \sin \alpha + a_2 \sin (\alpha + \beta) = (a_1 + a_2 \cos \beta) \sin \alpha + a_2 \sin \beta \cos \alpha$.

Setzt man $a_1 + a_2 \cos \beta = a \cos \gamma$, $a_2 \sin \beta = a \sin \gamma$, also $(a_1 + a_2 \cos \beta)^2 + a_2^2 \sin^2 \beta = a^2$, $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos \gamma}$,

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_2 \sin \beta}{a_1 + a_2 \cos \beta}, \quad \gamma = 2\pi \frac{d^1}{\lambda},$$

so wird $y = a \sin \gamma = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{d^1}{\lambda}\right)$. (38).

Es resultiert also eine Wellenbewegung von der Amplitude a, der Schwingungsdauer T, der Wellenlänge λ mit dem Gangunterschiede $d^1 = \frac{\gamma}{2\pi} \lambda$.

Die Amplitude a stellt die Diagonale eines Parallelogramms dar, in welchem a_1 und a_2 die Seiten, der von ihnen einge-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schlossene Winkel $\beta = \frac{2\pi d}{\lambda}$, $\sphericalangle \gamma$ der von der Diagonale und der Seite a_1 gebildete Winkel ist.

Für $\cos\beta = -1$, also $\beta = (2n+1)\pi$, also $d = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ wird a ein Minimum und gleich $a_1 - a_2$.
Für $\cos\beta = +1$, $\beta = 2n\pi$, $d = n\lambda$ wird a ein Maximum und gleich $a_1 + a_2$.

Aufgabe. Es seien M_1 und M_2 die Ausgangspunkte zweier in der Richtung M_1M_2X fortschreitenden Wellen von der Amplitude a, der Schwingungsdauer T, der Wellenlänge λ und dem Gangunterschiede d, deren Aetherteilchen in zwei aufeinander senkrechten Ebenen XM_1Y und XM_1Z schwingen, die Bewegung eines Aetherteilchens zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnen y und z die Entfernungen eines im Abstande x von M_1 befindlichen Aetherteilchens zur Zeit t, dann ist

$$y = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),\ z = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{d}{\lambda}\right),$$

oder, wenn man $2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \alpha$, $\frac{2\pi d}{\lambda} = \beta$ setzt,

$$y = a \sin\alpha,\ z = a \sin(\alpha+\beta) = y\cos\beta + \sqrt{a^2 - y^2}\,.\sin\beta,$$
$$z^2 + y^2 - 2zy\,.\cos\beta = a^2 \sin^2\beta.$$

Dreht man das Koordinatensystem YM_1Z um $\sphericalangle\omega$, setzt also $y = u\cos\omega - v\sin\omega$, $z = u\sin\omega + v\cos\omega$, ordnet die Gleichung, so verschwindet das Glied von u . v, wenn man $\cos 2\omega = o$, $\omega = \frac{\pi}{4}$ setzt, und die Gleichung geht nach den möglichen Vereinfachungen in die Gleichung

$$\frac{u^2}{2a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\beta} + \frac{v^2}{2a^2 \cos^2 \frac{1}{2}\beta} = 1 \qquad (39)$$

über. Die Bahn des betrachteten Aetherteilchens und also auch jedes Aetherteilchens ist eine Ellipse, deren Halbachsen

$$B = a\sqrt{2}\sin\tfrac{1}{2}\beta, \qquad C = a\sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}\beta$$

unter einem Winkel von 45^0 gegen die Y- und Z-achse geneigt sind, und deren Peripherie vom Aetherteilchen in der Zeit T durchlaufen wird. Die Welle wird daher eine elliptische genannt.

Ist $d = \frac{\lambda}{4}$ oder $= \frac{3\lambda}{4}$ oder $= \frac{(2n+1)\lambda}{4}$, also $\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{4}$ oder $= \frac{3\pi}{4}$ oder $= \frac{(2n+1)\pi}{4}$, so wird $\sin\frac{1}{2}\beta = \cos\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $B^2 = C^2 = a^2$, $y^2 + u^2 = v^2$; die Bahn wird ein Kreis mit

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dem Radius a, wenn der Gangunterschied eine ungerade Zahl von Viertel-Wellenlängen beträgt.

Für $d = \frac{\lambda}{4}$ wird $y = a \sin \alpha$, $z = a \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = a \cos \alpha$,

für $d = \frac{3\lambda}{4}$ wird $y = a \sin \alpha$, $z = a \sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$,

Im ersteren Falle durchläuft das Aetherteilchen, wenn α von 0^0 bis 360^0 wächst, den 1, 2, 3, 4. Quadranten (linksherumgehend) im zweiten Falle dem 2, 1, 4, 3. Quadranten (rechtsherumgehend).

Zusatz. Jede kreisförmige Welle kann umgekehrt durch zwei auf einander senkrechte Wellen ersetzt werden, welche einen Gangunterschied $\frac{\lambda}{4}$ oder $\frac{3\lambda}{4}$ haben, je nachdem die Bewegung eine linksherumgehende oder rechtsherumgehende ist.

3. Wellenbewegung im Raume. Von einem leuchtenden Punkte O im Raume pflanzt sich die Wellenbewegung nach allen Richtungen fort. In einem von gleichartigen Aetherteilchen gleichmässig erfüllten Medium wird sich die Wellenbewegung nach allen Richtungen mit konstanter Geschwindigkeit (c) ausbreiten. Zur Zeit t werden daher alle Teilchen im Raume die Bewegung beginnen, welche in der um O mit dem Radius $OA = c \cdot t$ beschriebenen Kugelfläche liegen, nach der Zeit $t + \tau$ alle Aetherteilchen, welche in der um O mit dem Radius $OB = c \cdot (t + \tau)$ beschriebenen Kugelfläche sich befinden.

Der geometrische Ort aller Punkte, welche zur Zeit t die Bewegung beginnen und zu gleicher Zeit immer in gleicher Schwingungsphase bleiben, heisst die Wellenfläche der Schwingungsbewegung zur Zeit t. Jede den Punkt O mit einem Punkte der Wellenfläche verbindende Gerade heisst ein Wellenstrahl. Die mit AO um O beschriebene Kugelfläche stellt die Wellenfläche zur Zeit t, die mit OB beschriebene die Wellenfläche zur Zeit $t + \tau$ dar.

Die Fortpflanzung des Lichts von der ersten Wellenfläche zur zweiten kann man sich in der Weise vorstellen, dass von jedem Aetherteilchen A der ersten Wellenfläche in der Richtung des Wellenstrahles OA nach den Gesetzen des vorigen Paragraphen eine Welle sich ausbreitet.

Nach Huyghens darf man sich vorstellen, dass von jedem Aetherteilchen der ersten Wellenfläche in der Zeit τ eine neue Elementarwelle nach allen Richtungen sich ausbreitet. (Huyghens'sches Prinzip). Die Wellenfläche, welche sämtliche Elementarwellen zur Zeit $t + \tau$ berührt, ist dann die Wellenfläche zu dieser Zeit. Der Radius OA und der von A nach

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dem Berührungspunkte B der Elementarwelle und Wellenfläche gezogene Radius AB heissen zugeordnete Wellenstrahlen. Im vorliegenden Falle bilden OA und AB eine gerade Linie.

Befindet sich der leuchtende Punkt in der Unendlichkeit, z. B. in der Sonne, so dürfen die benachbarten Wellenstrahlen als parallel (Strahlenbündel) betrachtet werden, die Wellenfläche zu irgend einer Zeit ist eine auf den Wellenstrahlen senkrechte Ebene.

Breitet sich von dem Punkte O eine Wellenbewegung von der Schwingungsdauer T aus, so ist die mit dem Radius $c\,t$ um O beschriebene Kugelfläche die Wellenfläche zur Zeit t, die Wellenfläche zur Zeit $t + T$ die mit dem Radius $c(t + T) = c\,t + \lambda$ beschriebene Kugelfläche. Das System der Verrückungen aller Aetherteilchen zwischen beiden Kugelflächen heisst eine Lichtwelle im Raume. Bei einem Strahlenbündel wird die Lichtwelle von zwei um λ von einander entfernten Ebenen begrenzt.

4. Reflexion der Wellenbewegung in einer geradlinigen Reihe von Aetherteilchen. Die im vorigen abgeleiteten Gesetze der Wellenbewegung gelten unter der Annahme, dass jedes folgende Aetherteilchen dieselbe Bewegung, als das vorangehende, ausführt. Dies findet nur in einem von gleichartigen Aetherteilchen gleichmässig erfüllten (homogenen) Medium statt, in welchem jedes Aetherteilchen an das folgende seine ganze Bewegung abgiebt, gleichwie in einer Reihe gleicher, sich berührender, elastischer Kugeln bei centralem Stosse jede an die folgende ihre ganze Bewegung abgiebt.

Geht die Wellenbewegung eines Wellenstrahles OM in M von einem Medium auf ein anderes von verschiedener Dichtigkeit über, so giebt das Aetherteilchen M nicht seine ganze Bewegung an das erste Aetherteilchen N des neuen Mediums ab, wie auch eine elastische Kugel, auf eine andere von verschiedener Dichtigkeit stossend, an sie nicht ihre ganze Bewegung abgiebt; dem Teilchen M bleibt ein Teil seiner Bewegung. Das Teilchen N überträgt seine ganze Bewegung an die folgenden Aetherteilchen im neuen Medium und erzeugt so eine Wellenbewegung im zweiten Medium. Die dem M verbleibende Bewegung wirkt auf die vorangehenden Aetherteilchen des ersten Mediums und erzeugt in ihm die reflektierte Welle. Kommt also eine Wellenbewegung an der Grenze zweier Medien an, so teilt sie sich in zwei Wellenbewegungen, von denen die eine im ersten, die andere im zweiten Medium sich fortpflanzt. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Ist das zweite Medium dichter als das erste, so prallt gleichsam das Aetherteilchen M in einer Richtung, welche seiner ursprünglichen Richtung entgegengesetzt ist, von N ab, die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Phase des Teilchens M wird umgekehrt. Die reflektierte Welle hat in N eine Verzögerung um eine halbe Wellenlänge erfahren.

Die Phase in einem Punkte E der reflektierten Welle MO ist eine solche, als wenn die Aetherbewegung, von O ausgehend und in derselben Richtung fortschreitend, den Weg $OM + ME + \frac{1}{2}\lambda$ zurückgelegt hätte.

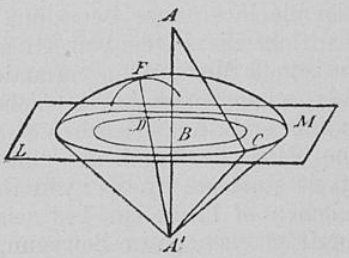
b) Ist das zweite Medium dünner, als das erste, so behält das Aetherteilchen M nach seiner Wirkung auf N die Richtung seiner ursprünglichen Bewegung bei. Die reflektierte Welle ist eine direkte Fortsetzung der ursprünglichen. Die Phase eines Aetherteilchens E der reflektierten Welle MO ist eine solche, als ob die Aetherbewegung, von O ausgehend und in derselben Richtung fortschreitend, den Weg $OM + ME$ zurückgelegt hätte.

Kommt die Welle zur Zeit t in M, zur Zeit $t + \tau$ reflektiert in E an und setzt man $OM + ME = x$, so ist in beiden Fällen bezüglich

$$y' = a' \sin 2\pi \left(\frac{t+\tau}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{1}{2}\right), \quad y'' = a'' \sin 2\pi \left(\frac{t+\tau}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Cap. 7. Das Reflexions- und Brechungsgesetz als Folgerungen der Undulationstheorie.

1. Beweis des Reflexiosgesetzes. Von dem leuchtenden Punkte A verbreite sich in der Luft eine kugelförmige Welle, welche zur Zeit t die spiegelnde Ebene LM in B berührt. Nach der Zeit $t + \varkappa\tau$ trifft sie der Mantel eines geraden Kegels, dessen Seite $AD = c\,(t + \varkappa\tau)$ ist, nach der Zeit $t + n\tau$ eine Kegelfläche, deren Seite $AC = c\,(t + n\tau)$ ist. Verlängert man AB um sich selbst bis A', verbindet A' mit D und C, so ist $AD = A'D = c\,(t + \varkappa\tau)$, $AC = A'C = c\,(t + n\tau)$. Es ist

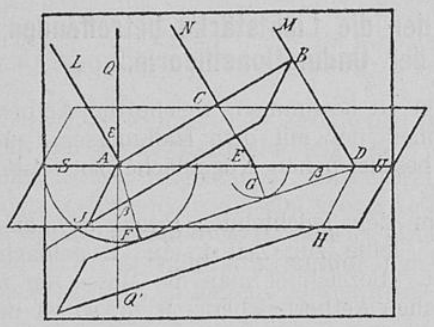


zu beweisen, dass die um A' mit $A'C$ als Halbmesser beschriebene Kugelfläche die Wellenfläche der durch die Reflexion entstandenen Elementarwellen zur Zeit $t + n\tau$ darstellt. Um D hat sich zur Zeit $t + n\tau$, weil die primäre Welle daselbst $(n - \varkappa)\tau$ Sekunden früher ankommt, als in C, eine Elementarwelle ausgebreitet, deren Radius $DF = c\,(n - \varkappa)\,\tau$ ist. Diese Elementarwelle wird von der mit $A'C$ um A' beschriebenen Kugelfläche in F berührt, denn die Centrale $A'D = c\,(t + \varkappa\tau)$ ist gleich der Differenz der Halbmesser, gleich $A'C - FD = c\,(t + n\tau) - c\,(n - \varkappa)\,\tau = c\,(t + \varkappa\tau)$. Setzt man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

für $\varkappa$ alle möglichen Werte von o bis n, so ergiebt sich, dass die mit $A'C$ beschriebene Kugelfläche alle in dem Kreise BC zur Zeit $t + n\tau$ beschriebenen Elementarwellen berührt. also die Wellenfläche sämtlicher zur Zeit $t + n\tau$ beschriebenen Elementarwellen darstellt. Die zugeordneten Wellenstrahlen AD und DF bilden aber mit dem Einfallslote DN gleiche Winkel, denn $\sphericalangle BAD = BA'D$, $\sphericalangle BAD = NDA$, $\sphericalangle BA'D = NDF$, folglich $\sphericalangle ADN = NDF$.

2. Beweis des Brechungsgesetzes. Der Strahl LA eines Strahlenbündels treffe zur Zeit t die brechende ebene Fläche SU in A. Man errichte in A das Einfallslot AQ und lege durch dasselbe die Einfallsebene LAQ, welche SU in AD schneidet.



Errichtet man auf AD in der Ebene SU die auch auf der Einfallsebene senkrechten Lote AJ u. DH, und auf LA in der Einfallsebene das Lot AB, so stellt die Ebene JAB, da sie auf LA senkrecht steht, die Wellenfläche des Strahlenbündels zur Zeit t dar. Die Strahlen NC und MB in der Einfallsebene treffen SU in E und D zu den Zeiten $t + \varkappa\tau$ und $t + n\tau$. Dann ist $CE = \varkappa c \tau$, $BD = n c \tau$, folglich:

$$CE : BD = AE : AD = \varkappa : n, \qquad AD : DE = n : n-\varkappa.$$

Zur Zeit $t + n\tau$ hat sich, wenn c' die Geschwindigkeit im zweiten Medium ausdrückt, um A eine Elementarwelle mit dem Radius $c' n \tau$ ausgebreitet, welche die Einfallsebene in einem Kreise schneidet. Man ziehe von D an den Kreis die Tangente DF, lege durch DHF die auf der Einfallsebene senkrechte Ebene, welche, da AF auf dieser Ebene senkrecht steht, die Elementarwelle um A in F berührt.

In E trifft das Strahlenbündel die Ebene SU zur Zeit $t+\varkappa t$, also $(n-\varkappa)$ Sekunden früher als in D, mithin hat sich zur Zeit $t + n\tau$ um E eine Elementarwelle mit dem Radius $c' (n-\varkappa) \tau$ ausgebreitet. Fällt man von E auf DF das Lot DG, so steht dieses auch auf der Ebene FDH senkrecht. Es verhält sich aber $EG : AF = DE : DA = n-\varkappa : n$, daher ist, da $AF = c' n \tau$ war, $EG = c' (n-\varkappa) \tau$, folglich EG der Radius der um E beschriebenen Elementarwelle, folglich berührt die Ebene DHF die um E zur Zeit $t + n\tau$ beschriebene Elementarwelle. Setzt man für $\varkappa$ alle möglichen Werte von o bis n, so ergiebt sich,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dass Ebene DFH die von allen Punkten der Linie AD zur Zeit $t + n\tau$ beschriebenen Elementarwellen berührt, und da dieselbe Betrachtung auf jeden der Ebene $LMDA$ parallelen Querschnitt des Strahlenbündels anwendbar ist, so muss Ebene DHF sämtliche zur Zeit $t + n\tau$ im zweiten Medium beschriebenen Elementarwellen berühren, ist also die Wellenfläche der gebrochenen Welle zur Zeit $t + n\tau$.

Es ist aber der Einfallswinkel $LAQ = BAD = \varepsilon$, der Brechungswinkel $Q'AF = ADF = \beta$, $BD = n c \tau = AD \,.\, \sin \varepsilon$, $AF = n\, c'\, \tau = AD \,.\, \sin \beta$, folglich:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \beta} = \frac{c}{c'} = n.$$

Cap. 8. Ableitung der die Lichtstärke betreffenden Gesetze aus der Undulationstheorie.

Aufgabe. Die Arbeit zu bestimmen, welche die Aethermasse in jeder Flächeneinheit der mit dem Halbmesser r um den leuchtenden Punkt beschriebenen Kugelfläche zu leisten vermag.

Auflösung. Die um den leuchtenden Punkt sich ausbreitende Wellenbewegung habe zur Zeit t eine Kugelfläche vom Halbmesser r erreicht. Bezeichnet man die Masse der in der Flächeneinheit befindlichen Aetherteilchen mit m, so ist die Masse der in der Kugeloberfläche befindlichen Aetherteilchen $4\, r^2\, m\, \pi$. Ihre anfängliche Geschwindigkeit ist gleich Null; sie ändert sich während der Schwingungsdauer T stetig. Teilt man T in unendlich viele (n) Zeitelemente ε, $(T = n\,\varepsilon)$ so ist die Geschwindigkeit jedes Teilchens in den einzelnen Zeitelementen:

$$v_1 = a\sqrt{\varkappa}\cos 2\pi\left(\frac{t+\varepsilon}{T} - \frac{r}{\lambda}\right),\ v_2 = a\sqrt{\varkappa}\cos 2\pi\left(\frac{t+2\varepsilon}{T} - \frac{r}{\lambda}\right),$$

$$\ldots\ldots\ v_n = a\sqrt{\varkappa}\cos 2\pi\left(\frac{t+n\varepsilon}{T} - \frac{r}{\lambda}\right),$$

mithin ist die Summe der lebendigen Kräfte sämtlicher Aetherteilchen in den n Zeitelementen:

$$2\, r\, {}^2\pi\, m\, a\, {}^2\varkappa\, (v_1{}^2 + v^2{}_2 + v_3{}^2 \ldots + v_n{}^2) =$$

$$2\, r\, {}^2\pi\, m\, a\, {}^2\varkappa \left[\cos {}^2 2\pi\left(\frac{t+\varepsilon}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + \cos {}^2 2\pi\left(\frac{t+2\varepsilon}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + \right.$$

$$\left. \ldots\ldots\ + \cos {}^2 2\pi\left(\frac{t+n\varepsilon}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\right],$$

oder wenn man $2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) = \alpha$, $\frac{2\,\pi\,\varepsilon}{T} = \beta$ setzt,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$2\,r^2\pi\,m\,a^2\varkappa\,(\cos^2(a+\beta)+\cos^2(\alpha+2\beta)+\ldots+\cos^2(a+n\beta)=$$

$$2\,r^2\pi\,m\,a^2\varkappa\left(\frac{n+1}{2}+\frac{\cos(2\alpha+n\beta)\,\sin(n+1)\,\beta}{2\,\sin\beta}-\cos^2\alpha\right),\text{(Anh. 7.)}$$

oder wenn man das Produkt der cos. und sin. in eine Differenz verwandelt, für β seinen Wert einsetzt, und $n\varepsilon = T$ berücksichtigt, gleich:

$$2\,r^2\pi\,m\,a^2\varkappa\left(\frac{n+1}{2}+\frac{\sin\left(2\alpha+\frac{2\pi\varepsilon}{T}\right)-\sin\left(2\alpha-\frac{2\pi\varepsilon}{T}\right)}{4\,\sin\frac{2\varepsilon\pi}{T}}-\cos^2\alpha\right).$$

oder wenn man die Differenz der Sinus in ein Produkt verwandelt,

$$=2\,r^2\pi\,m\,a^2\varkappa\left(\frac{n+1}{2}+\frac{\cos 2\alpha-2\cos^2\alpha}{2}\right)=2\,r^2\pi\,m\,a^2\varkappa\,.\,\frac{n}{2}.$$

Dividiert man den erhaltenen Wert durch n, so erhält man die durchschnittliche lebendige Kraft sämtlicher Aetherteilchen der Kugelfläche. Die Durchschnittsarbeit, welche in jedem Zeitelemente die sämtlichen Aetherteilchen der Kugelfläche zu leisten imstande sind, ist aber gleich dieser lebendigen Kraft, also gleich $m\,r^2\,a^2\,\varkappa\,\pi$, mithin die Arbeit, welche die in der Flächeneinheit enthaltene Aethermasse zu leisten vermag, gleich

$$\frac{m\,a^2\,\varkappa}{4}=\frac{m\,a^2\,\pi^2}{T^2}.$$

Diese Arbeit heisse die Lichtstärke oder Intensität der Beleuchtung in der Entfernung r. Die Lichtstärke in der Entfernung r′ ist ebenso, wenn a′ die Amplitude daselbst ausdrückt, gleich $m\,a'^2\pi : T^2$, also verhalten sich die Lichtstärken in den Entfernungen r und r′, $i : i' = a^2 : a'^2$.

Lehrsatz. Die Arbeit, welche bei einer von einem leuchtenden Punkte sich ausbreitenden Wellenbewegung die in der Flächeneinheit einer Wellenfläche befindliche Aethermasse zu leisten vermag, ist umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung vom leuchtenden Punkte ab.

Beweis. Wenn die Aetherbewegung von einer Kugelfläche auf eine andere Kugelfläche übertragen wird, so bleibt nach einem Principe der Mechanik die Summe der lebendigen Kräfte sämtlicher Aetherteilchen der Kugelfläche konstant; daher ist für zwei Kugelflächen mit den Radien r und r′:

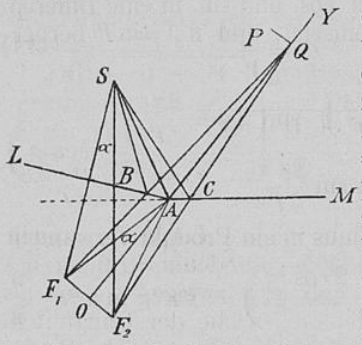
$$r^2\,\pi\,m\,a^2\,\varkappa = r'^2\pi\,m\,a'^2\pi,\ \text{daher}\ a\,r = a'\,r',$$

$$a : a' = r' : r,\ \text{folglich}\ i : i' = r'^2 : r^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Cap. 9. Theorie von Fresnel's Spiegelversuch.

Zwei ebene Spiegel werden von einer durch den leuchtenden Punkt S gehenden und auf der Kante der Spiegel senkrechten Ebene in den Kanten LA und MA geschnitten. Sie empfangen vom Punkte S Licht, welches sie so reflektieren, als ob die Strahlen desselben von den zu S konjugierten Punkten F_1 und F_2 ausgingen. Da $SA = AF_1 = AF_2$ ist, muss A der Mittelpunkt des Kreises sein, welcher durch S_1 F_1 F_2 geht. Mithin trifft die Mittelsenkrechte von F_1 F_2 den Punkt A, und als Centriwinkel ist $\sphericalangle F_1AF_2 = 2 \,.\, \sphericalangle F_1SF_2 = 2\,\alpha$, wenn α den Winkel der beiden Spiegel bedeutet. Man hat daher, wenn $AS = AF_1 = AF_2 = l$ gesetzt wird, $OA = l \,.\, \cos\alpha$, $OF_1 = OF_2 = l \,.\, \sin\alpha$.



1. In einem Punkte Q der Geraden OAY treffen die von S ausgehenden Strahlen SBQ und SCQ zusammen, deren Längen bezüglich gleich F_1Q und F_2Q, daher unter einander gleich sind. Da also der Gangunterschied der beiden in Q zusammen treffenden Strahlen gleich Null ist, so verstärken sie sich daselbst, und da dasselbe von allen Punkten der Linie OAY gilt, so erscheint sie als Lichtlinie.

2. Alle Punkte P der Ebene LAM, für welche der Gangunterschied der von S zu ihnen gesendeten Strahlen, also $F_1P - F_2P$ oder $F_2P - F_1P$ gleich einer halben Wellenlänge ($\frac{1}{2}\lambda$) ist, liegen auf den Zweigen einer Hyperbel, in welcher F_1 und F_2 die Brennpunkte, O der Mittelpunkt, $F_1\,F_2 = 2\,l \sin\alpha$ die Excentricität, $\frac{1}{2}\lambda$ die Hauptachse, und daher $\sqrt{l^2 \sin^2\alpha - {}^1/_{16}\lambda^2}$ die Nebenachse ist. Da in jedem Punkte dieser Hyperbelzweige, α sehr klein vorausgesetzt, zwei Lichtstrahlen von fast gleicher Richtung und dem Gangunterschiede $\frac{1}{2}\lambda$ zusammentreffen, so vernichten sie sich, die beiden Hyperbelzweige bilden in der Ebene LAM dunkele Linien; ihre Gleichung ist, wenn OF_2 zur X-achse, OAY zur Y-achse genommen wird,

$$\frac{16\,x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{l^2 \sin^2\alpha - {}^1/_{16}\,\lambda^2} = 1.$$

Aus derselben ergiebt sich, da $OQ = (AQ = e)\; y = e + l\cos\alpha$ ist,

$$PQ = x = \frac{\lambda}{4}\sqrt{\frac{e + l\cos\alpha)^2 + l^2 \sin^2\alpha, - {}^1/_{16}\,\lambda^2}{l^2 \sin^2\alpha - {}^1/_{16}\,\lambda^2}},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$= \frac{\lambda}{4} \sqrt{\frac{(e + l)^2 - 4\ e\ l \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha - {}^1/_{16}\ \lambda^2}{l^2 \sin^2\alpha\ .\ - {}^1/_{16}\ \lambda^2}},$$

oder wenn die Potenzen von $\sin \frac{1}{2}\alpha$ und λ gegen $(e + l)^2$ vernachlässigt werden,

$$x = \frac{\lambda}{4} \frac{(e + l)}{\sqrt{l^2 \sin^2\alpha - {}^1/_{16}\ \lambda^2}}, \quad \lambda = \frac{4\ x\ l \sin \alpha}{\sqrt{x^2 + (e + l)^2}}. \quad (41)$$

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{4\ x\ l} \sqrt{x^2 + (l + e)^2}.$$

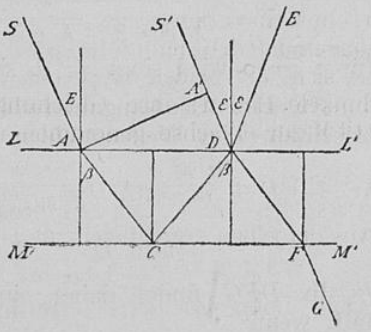
Zahlenbeispiel: $e = 3$m, $l = 1$m, $\alpha = 0^0\ 59'\ 2{,}8''$, $x = 0{,}04$ mm, $\lambda = 0{,}000687$ mm.

3. Analog bilden alle Punkte der Ebene LAM, für welche der Gangunterschied der von S ihnen zugesendeten Strahlen bezüglich gleich λ, 2λ, 3λ etc. ist, Hyperbelzweige, welche als Lichtlinien erscheinen, alle Punkte, für welche der Gangunterschied der ihnen von S zugesendeten Strahlen gleich $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda$, $\frac{5}{2}\lambda$ ist, Hyperbelzweige, welche als dunkele Linien erscheinen.

4. Bei Anwendung von weissem Licht zeigen sich auf einem zu OAY senkrechten Schirme zu beiden Seiten dieser Linie stetig ineinander übergehende farbige Streifen, welche sich daraus erklären, dass die helle Zone einer gewissen Farbe die dunkele Zone einer anderen teilweise deckt und durch das Aufeinanderlagern der verschiedenen Farben nach den Gesetzen der Farbenmischung die beobachteten Farben erscheinen müssen.

Cap 10. **Farben dünner Blättchen.**

Aufgabe. Ein Strahlenbündel falle, in Glas fortschreitend, auf eine Luftschicht $LL'\ MM'$, die Interferenzerscheinungen des direkt reflectierten und des nach dem Durchgange durch die Luftschicht in das erste Medium zurückkehrenden Lichtes zu bestimmen.



Auflösung. Ein Bündel paralleler, homogener Strahlen falle unter dem Einfallswinkel ε auf die von zwei parallelen Ebenen begrenzte Luftschicht $LL'\ MM'$ von der Dicke d. Ein Strahl SA, welcher die Ebene LL' in A trifft, werde daselbst teilweise reflektiert, teilweise in der Richtung AC unter $\sphericalangle\ \beta$ gebrochen. Ein Teil des Wellenstrahles AC wird in C teilweise

in der Richtung CD reflektiert, wobei ein Verlust von einer halben Wellenlänge stattfindet. Der reflektierte Strahl CD wird in D teilweise in der Richtung DE gebrochen, teils von neuem in der Luftschicht in der Richtung DF reflektiert. Ein dem Strahle SA benachbarter, in seiner Einfallsebene befindlicher Strahl $S'D$ wird, da sich leicht zeigen lässt, dass $\sphericalangle S'DL = SAL = EDL'$ ist, in der Richtung DE reflektiert. In ihr pflanzen sich also zugleich die Wellenstrahlen $SACDE$ und $S'DE$ fort. Die Wellenbewegung beginnt in den beiden Strahlen SA und $S'D$, wenn AA' auf SA und $S'D$ senkrecht steht, gleichzeitig in A und A'. Der Wellenstrahl SA hat von A bis D den Weg $AC + CD + \frac{1}{2}\lambda$ in Luft, der Wellenstrahl $S'D$ von A' bis D den Weg $A'D$ in Glas zurückgelegt, welcher der Strecke $n \,.\, A'D$ in Luft entspricht. ($A'D : x = c' : c$, $x = A'D.(c : c') = n \,.\, A'D$). Also ist der Gangunterschied der beiden in D zusammentreffenden und in der Richtung DE fortschreitenden Wellenzüge gleich $D = AC + CD + \frac{1}{2}\lambda - n \,.\, A'D$, oder da $AC + CD = 2\,d : \cos\beta$, $A'D = AD \sin\varepsilon = 2\,d \sin\varepsilon \,.\, \operatorname{tg}\beta$ ist,

$$\text{gleich } \tfrac{1}{2}\lambda + \frac{2\,d}{\cos\beta} - 2\,n\,d \sin\varepsilon \operatorname{tg}\beta = \tfrac{1}{2}\lambda + \frac{2\,d\,(1 - n \sin\varepsilon \sin\beta)}{\cos\beta}$$

$$= \frac{2\,d\,(1 - \sin^2\beta)}{\cos\beta} + \tfrac{1}{2}\lambda, \text{ also } D = 2\,d \cos\beta + \tfrac{1}{2}\lambda. \quad (42).$$

In DE wird ein Minimum der Lichtintensität stattfinden, wenn

$$2\,d \cos\beta + \tfrac{1}{2}\lambda = \frac{(2\,m + 1)\,\lambda}{2}, \quad d = \frac{2\,m\,\lambda}{4 \cos\beta}, \text{ also}$$

$$d = o, \frac{2\,\lambda}{4 \cos\beta}, \frac{4\,\lambda}{4 \cos\beta}, \frac{6\,\lambda}{4 \cos\beta} \text{ etc.,}$$

ein Maximum, wenn

$$2\,d \cos\beta + \tfrac{1}{2}\lambda = m\,\lambda, \quad d = \frac{(2m - 1)\,\lambda}{4 \cos\beta}, \text{ also}$$

$$d = \frac{\lambda}{4 \cos\beta}, \frac{3\,\lambda}{4 \cos\beta}, \frac{5\,\lambda}{4 \cos\beta} \text{ etc. ist.}$$

Für $\varepsilon = o$ wird $\sin\varepsilon = o$, $\sin\beta = o$, $\cos\beta = 1$.

Zusatz. Der Gangunterschied D' der in der Richtung DF fortschreitenden Wellenstrahlen $SACDF$ und $S'DF$ ist gleich

$$AC + CD + \lambda - nA'D = \frac{2\,d}{\cos\beta} + \lambda - 2n\,d \sin\varepsilon \,.\, \operatorname{tg}\beta,$$

$$\text{also } D' = 2\,d \cos\beta + \lambda.$$

In DFG findet daher ein Minimum der Lichtintensität statt, wenn

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$d = \frac{\lambda}{4 \cos \beta}, \frac{3 \lambda}{4 \cos \beta}, \frac{5 \lambda}{4 \cos \beta} \text{ etc., ein Maximum, wenn}$$

$$d = o, \frac{2 \lambda}{4 \cos \beta}, \frac{4 \lambda}{4 \cos \beta} \text{ etc. ist.}$$

Newton's Farbenringe. Die Gesetze betreffend die Ringe, welche entstehen, wenn zwischen einer Glasplatte und einer schwach plankonvexen Linse Luft oder eine Flüssigkeit sich befindet, ergeben sich aus dem Vorangehenden, indem man die Flüssigkeit oder Luft als ein Aggregat von Schichten betrachtet, die sich koncentrisch an einander schliessen, deren jede eine mit der Entfernung vom Berührungspunkte O zunehmende Dicke hat. Bezeichnet man daher den Radius der Kugelfläche der Linse mit r, die Entfernung einer Schicht von O mit ρ, so ergiebt sich die Dicke d der betreffenden Schicht aus der Gleichung $\rho^2 = d\,(2r - d) = 2r\left(d - \frac{d^2}{2\,r}\right) = 2rd$,

(d^2 sehr klein in Vergleich mit 2r), $d = \rho^2 : 2r$.

Im reflektierten homogenen Lichte wird also nach der Lösung der vorigen Aufgabe ($\cos \beta = 1$) das Minimum der Lichtintensität eintreten, wenn

$$d = \frac{\rho^2}{2r} \text{ gleich } o, \frac{2\lambda}{4}, \frac{4\lambda}{4}, \frac{6\lambda}{4} \ldots, \frac{2\,m\,\lambda}{4},$$

das Maximum, wenn d gleich $\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots \frac{(2m-1)\lambda}{4}$ ist.

Mithin verhalten sich die Radien der dunkelen Ringe

$$\left.\begin{array}{l} \rho_2 : \rho_4 : \rho_6 = \sqrt{2} : \sqrt{4} : \sqrt{6}, \\ \text{die Radien der hellen Ringe} \\ \rho_1 : \rho_3 : \rho_5 = \sqrt{1}, \sqrt{3}, : \sqrt{5}. \end{array}\right\} (43)$$

Im durchgehenden Lichte müssen nach dem Obigen die im reflektierten Lichte dunkel erscheinenden Ringe als helle, die im reflektierten Lichte hell erscheinenden Ringe als dunkele beobachtet werden.

Befinden sich zwischen der Glasplatte und Linse Substanzen, für welche die Brechungsexponenten in Bezug auf Glas n und n', die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten c und c', die Wellenlängen λ und λ' sind, so ergeben sich für die Dicken der entsprechenden hellen Ringe die Werte:

$$d = \frac{(2\,m-1)\,\lambda}{4}, \quad d' = \frac{(2\,m-1)\,\lambda'}{4}, \text{ daher } d : d' = \lambda : \lambda' = c : c' = n : n',$$

$$\rho : \rho' = \sqrt{d} : \sqrt{d'} = \sqrt{\lambda} : \sqrt{\lambda'} = \sqrt{n} : \sqrt{n'}.$$

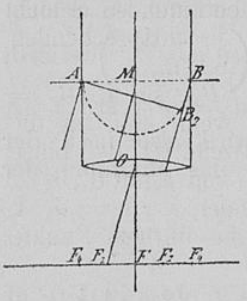
Da die den verschiedenen Ringen entsprechenden Dicken

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Substanz, also auch die Halbmesser der Ringe von der Wellenlänge abhängen, diese aber durch die Farbe des angewendeten Lichtes bedingt ist, so müssen die hellen Ringe bei einer gewissen Farbe des Lichts die dunklen Ringe bei einer anderen Farbe ganz oder teilweise decken. Bei Anwendung von weissem Lichte wird man daher gefärbte Ringe beobachten, deren Farbentöne mit Benutzung der Gesetze der Farbenmischung im voraus bestimmt werden können.

Cap. 11. Die durch Spaltöffnungen erzeugten Beugungserscheinungen.

Auf einen vertikalen Spalt, dessen Horizontaldurchschnitt AB die sehr kleine Länge l habe, falle ein ebenes Wellensystem, dessen Wellenfläche zur Ebene des Spaltes parallel ist. Jeder Punkt von AB wird der Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Man beschreibe über AB in der Horizontalebene einen Halbkreis und schneide auf demselben von B aus die Strecken $BB_1 = \frac{1}{2}\lambda$, $BB_2 = \frac{2}{2}\lambda$, $BB_3 = \frac{3}{2}\lambda$ ab, und verbinde die Teilpunkte mit A.



1. Sammelt man alle Strahlen der Horizontalebene, welche auf AB senkrecht stehen, deren Gangunterschied gleich Null ist, und vereinigt sie durch eine Sammellinse, deren Achse die Mittelsenkrechte von AB ist, in dem Brennpunkte F, so werden sie in ihrer Wirkung auf das Aetherteilchen daselbst einander verstärken. In F entsteht ein heller Punkt.

2. Sammelt man aus den von AB sich ausbreitenden Elementarwellen alle Strahlen, welche BB_2 parallel sind, für welche der Gangunterschied der Randstrahlen gleich λ ist, so teilt die durch den Halbierungspunkt M von AB zu BB_2 gezogene Parallele das betrachtete System von Strahlen so in zwei Hälften, dass von je zwei entsprechenden Punkten derselben zwei Strahlen ausgehen, deren Gangunterschied gleich $\frac{1}{2}\lambda$ ist. Sämtliche Strahlen, durch die Linse in dem Punkte F_2 der Brennebene vereinigt, ($OF_2 \parallel BB_2$) werden daher in ihrer Wirkung auf das Aetherteilchen daselbst, wenn man von ihrem Richtungsunterschiede absieht, sich aufheben. In F_2 entsteht ein dunkler Punkt.

3. Man sammele alle der Linie BB_3 parallelen Strahlen, für welche der Gangunterschied der Randstrahlen gleich $\frac{3}{2}\lambda$ ist, und teile das erhaltene System von Strahlen durch Parallelen zu BB_3 in drei gleiche Teile. Dann gehen von je zwei entsprechenden Punkten der beiden ersten Teile Strahlen aus,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

deren Gangunterschied gleich $\frac{1}{2}\lambda$ ist, die also durch die Linse in F_3 vereinigt, in ihrer Wirkung auf das Aetherteilchen daselbst sich aufheben. Es bleibt also die Wirkung der Strahlen des dritten Teiles übrig, welche eine von Null verschiedene Resultante liefern. In F_3 entsteht ein heller Punkt.

So fortschreitend erkennt man, dass die Systeme von Strahlen, deren Gangunterschiede bezüglich gleich 2λ, $3\lambda, \ldots$ $n\lambda$ sind, die dunkelen Punkte F_2, F_4, F_6 . ., diejenigen Systeme von Strahlen, deren Gangunterschiede bezüglich gleich $\frac{5}{2}\lambda$, $\frac{7}{2}\lambda$ $\ldots \frac{(2n-1)\lambda}{2}$ sind, die hellen Punkte F_5, $F_7 \ldots$ liefern, die aber mit wachsendem Gangunterschied an Intensität rasch abnehmen. Da die Konstruktion, welche oben von B ausgeführt wurde, auch von A aus gemacht werden kann, so erhellt, dass auch auf der anderen Seite von F in entsprechenden Entfernungen helle und dunkele Punkte entstehen.

5. Es ist $\sphericalangle FOF_2 = BAB_2$ ($OF_2 \parallel BB_2$), $\sin BAB_2 = BB_2 : AB$, $\operatorname{tg} FOF_2 = FF_2 : OF$, folglich wenn man für die Funktionen ihre Argumente setzt, die Brennweite OF der Linse mit f, die Entfernungen der dunkelen Punkte von F mit d_2, d_4 . ., die der hellen Punkte mit d_3 d_5 . . bezeichnet, $\lambda : l = d_2 : f$, und wenn man dieselbe Proportion für die übrigen Punkte bildet, erhält man

$$\text{für dunkele Punkte } d_2 = \frac{\lambda f}{l},\ d_4 = \frac{2\lambda f}{l},\ d_6 = \frac{3\lambda f}{l} \ldots$$

$$\text{für helle Punkte } d_3 = \frac{3\lambda f}{2l},\ d_5 = \frac{5\lambda f}{2l},\ d_7 = \frac{7\lambda f}{2l}.$$

Aufgabe. Durch drei vertikale Spalte von gleicher Breite, deren Zwischenräume die Breite der Spalte haben, dringen Lichtstrahlen in einer zur Ebene der Spalte senkrechten Richtung. Die Entfernungen der dunkelen Punkte von der Achse der Linse in der Brennebene zu bestimmen, vorausgesetzt, dass die Achse der Linse mit der Mittelsenkrechten des Horizontaldurchschnittes des ersten Spaltes zusammenfällt.

Auflösung. Eine Horizontalebene schneide die Spalte in den Geraden AB, CD, EF. Was für diese Schnitte gilt, hat für jeden Horizontalschnitt, also die ganzen Spalte Geltung. Nach der vorigen Aufgabe heben sich die Strahlen jedes Spaltes, durch die Linse vereinigt, auf, wenn der Gangunterschied seiner Randstrahlen λ, 2λ, $3\lambda \ldots$ ist, also sind die Entfernungen der dadurch entstehenden dunkelen Punkte von F in der Brennebene der Linse

$$D_1 = \frac{\lambda f}{l}, \qquad D_2 = \frac{2\lambda f}{l}, \qquad D_3 = \frac{3\lambda f}{l}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Angenommen, der Gangunterschied der parallelen Randstrahlen des ersten Spaltes sei in dem Falle, dass je drei entsprechende Strahlen der drei Spalten vereinigt in ihrer Wirkung sich aufheben, gleich e, ihre Richtung AX, dann ist der Gangunterschied je zweier entsprechenden Strahlen des ersten und zweiten Spaltes gleich 2 e, des ersten und dritten Spaltes gleich 4 e. Fällt man nun von einem Punkte A' des Strahles AX das Lot auf die parallelen Strahlen, welches die Randstrahlen in B', C', D', E', F' schneidet, und hat irgend ein Strahl des ersten Spaltes bis zum Durchschnitt mit dem Lote $A'F'$ den Weg x zurückgelegt, so haben die entsprechenden Strahlen der Spalte CD und EF bis zum Durchschnitte mit $A'F'$ die Wege x + 2e und x + 4e zurückgelegt. Die Geschwindigkeiten der Aetherteilchen in den Durchschnittspunkten von $A'F'$ mit den drei entsprechenden Strahlen zur Zeit t sind dann nach (37)

$$v_1 = a\sqrt{\varkappa}\ \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),\ v_2 = a\sqrt{\varkappa}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x+2e}{\lambda}\right),$$

$$v_3 = a\sqrt{\varkappa}\ \cos\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x+4e}{\lambda}\right).$$

Man nimmt nun an, dass in dem Vereinigungspunkte F der Strahlen in der Brennebene der Linse die resultierende Geschwindigkeit des Aetherteilchens dieselbe ist, als ob die Strahlen von dem Durchschnitte mit $A'F'$ bis zum Vereinigungspunkte gleiche Wege in derselben Richtung zurückgelegt hätten; das Aetherteilchen im Vereinigungspunkte wird also zu jeder Zeit t in Ruhe sein ($x' = x +$ Weg $A'F$), wenn

$$a\sqrt{\varkappa}\ \cos\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda}\right) + a\sqrt{\varkappa}\ \cos\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x'+2e}{\lambda}\right)$$

$$+ a\sqrt{\varkappa}\ \cos\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x'+4e}{\lambda}\right) = 0,$$

oder setzt man $2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda}\right) = \alpha$, wenn

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha - \frac{4\pi e}{\lambda}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{8\pi e}{\lambda}\right)$$

$$= 2\cos\left(\alpha - \frac{4\pi e}{\lambda}\right)\ \cos\frac{4\pi e}{\lambda} + \cos\left(\alpha - \frac{4\pi e}{\lambda}\right) = 0,$$

oder $\cos\left(\alpha - \frac{4\pi e}{\lambda}\right)\ \left(1 + 2\cos\frac{4\pi e}{\lambda}\right) = 0$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Bedingung wird für jeden Wert von t erfüllt, wenn

$$1 + 2 \cos \frac{4\pi e}{\lambda} = 0, \cos \frac{4\pi l}{\lambda} = -\tfrac{1}{2}, \frac{4\pi e}{\lambda} = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3},$$

$$e = \frac{\lambda}{6}, \frac{2\lambda}{6}, \frac{4\lambda}{6}, \frac{5\lambda}{6}, \frac{7\lambda}{6}, \frac{8\lambda}{6}, \frac{10\lambda}{6}, \frac{11\lambda}{6} \ldots$$

gesetzt wird. Die dunkelen Punkte entstehen mithin in den Entfernungen ($\lambda : 6l = d : f$)

$$d_1 = \frac{\lambda f}{6l}, d_2 = \frac{2\lambda f}{6l}, d_3 = \frac{4\lambda f}{6l}, d_4 = \frac{5\lambda f}{6l}, d_5 = \frac{6\lambda}{6}, d_6 = \frac{7\lambda f}{6l} \ldots$$

Aufgabe. Durch einen vertikalen Spalt von der Breite l dringen homogene Lichtstrahlen in einer zur Ebene des Spaltes senkrechten Richtung. Aus den Elementarwellen, welche von den Aetherteilchen des Horizontaldurchschnittes AB des Spaltes ausgehen, werden alle dem Strahle AC parallelen Strahlen gesammelt und durch eine Linse in einem Punkte vereinigt. Die Lichtstärke in diesem Punkte zu bestimmen, wenn e den Gangunterschied der Randstrahlen des Spaltes bezeichnet.

Auflösung. Die Breite AB des Spaltes werde von n Aetherteilchen, welche gleichweit von einander abstehen, erfüllt. Man lege durch dieselbe zu AC Parallele, fälle von A auf den durch B gehenden Strahl das Lot AD, so dass $BD = e$ ist, und setze $\sphericalangle DAB = \alpha$, also $e = l \,.\, \sin \alpha$. Dann ist der Gangunterschied des von A ausgehenden und der zu AC parallelen Strahlen bezüglich $\frac{e}{n}, \frac{2e}{n}, \ldots \frac{ne}{n}$, und die Geschwindigkeit der Aetherteilchen auf den $(n+1)$ Strahlen in dem Abstande x von AD zur Zeit t

$$v_0 = a\sqrt{\varkappa} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), v_1 = a\sqrt{\varkappa} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{e}{n\lambda}\right)$$

$$\ldots v_n = a\sqrt{\varkappa} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{ne}{n\lambda}\right).$$

Man nimmt wie in der vorigen Aufgabe an, dass in dem Vereinigungspunkte der Strahlen die resultierende Geschwindigkeit dieselbe ist, als ob die Wellenstrahlen von AD bis zum Vereinigungspunkte gleiche Wege in derselben Richtung zurückgelegt hätten. Dann ist die Geschwindigkeit des Aetherteilchens im Vereinigungspunkte F, wenn der Weg von A bis F gleich x′,

$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda}\right) = \beta$ gesetzt wird,

$$v = a\sqrt{\varkappa} \left(\cos \beta + \cos \left(\beta - \frac{2e\pi}{n\lambda}\right) + \cos \left(\beta - \frac{4e\pi}{n\lambda}\right) + \ldots\right.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$+\cos\left(\beta-\frac{2\,n\,e\,\pi}{n\,\lambda}\right)=a\sqrt{\varkappa}\cos\left(\beta-\frac{ne\pi}{n\,\lambda}\right).\left(\sin\frac{(n+1)\pi e}{n\,\lambda}:\sin\frac{\pi e}{n\lambda}\right)$$

$$=n\,a\,\sqrt{\varkappa}\,\cos\left(\beta-\frac{e\pi}{\lambda}\right).\left(\sin\frac{e\pi}{\lambda}:\frac{e\pi}{\lambda}\right).\ \text{(cfr. Anhang 5).}$$

Man bezeichne die in der Flächeneinheit enthaltene Aethermasse mit M. Da in der Länge l sich n Aetherteilchen befinden, also die Längeneinheit $\frac{l}{n}$ Aetherteilchen, die Flächeneinheit $\frac{l^2}{n^2}$ Aetherteilchen enthält, so ist die Masse eines Aetherteilchens $M l^2 : n^2$, folglich ist die lebendige Kraft des Aetherteilchens im Vereinigungspunkte zur Zeit t

$$\frac{M\,l^2 a^2\varkappa}{2\,n}\cos^2\left(\beta-\frac{e\pi}{\lambda}\right).\left(\sin\frac{e\pi}{\lambda}:\frac{e\pi}{\lambda}\right)^2.$$

Teilt man nun T in unendlich viele n Zeitelemente ε, addiert die für die einzelnen Zeitelemente sich ergebenden Werte obigen Ausdrucks, und dividiert durch n, so ergiebt sich die durchschnittliche lebendige Kraft, oder die Lichtstärke im Vereinigungspunkte, wie in Cap. 8, wenn man dort

$$\frac{M\,l^2 a^2\varkappa}{2}\left(\sin\frac{e\pi}{\lambda}:\frac{e\pi}{\lambda}\right)^2 \text{ für } 2\,r^2\pi\,m\,a^2 r \text{ setzt,}$$

$$J=\frac{M l^2 a^2\varkappa}{4}\left(\sin\frac{\pi e}{\lambda}:\frac{e\pi}{\lambda}\right)^2=\frac{M\,l\,a^2\varkappa}{4}\left(\sin\frac{\pi\,l\sin\alpha}{\lambda}:\frac{\pi\,l\sin\alpha}{\lambda}\right)^2.$$

Für lim $\alpha = o$ wird der in der Klammer stehende Ausdruck gleich 1. Bezeichnet man diesen Wert von J, also die Lichtstärke der mittleren Lichtlinie des Beugungsbildes mit J_o, setzt also $J_o = \frac{1}{4}\,M l^2 a^2\varkappa$, so wird

$$J=J_o\left(\sin^2\frac{\pi\,l\sin\alpha}{\lambda}:\frac{\pi^2\,l^2\sin\alpha^2}{\lambda^2}\right).\quad (44).$$

Für $e = l\sin\alpha = \lambda,\ 2\,\lambda,\ 3\,\lambda,\ \ldots$ wird $J = o$,

$$\text{für } e=\frac{\lambda}{2},\ \frac{3\lambda}{2},\ \frac{5\lambda}{2} \text{ wird } J_1=\frac{4\,J_o}{4\,\pi^2},$$

$$J_3=\frac{4J_o}{9\,\pi^2},\quad J_5=\frac{4J_o}{25\,\pi^2}.$$

Aufgabe. Durch (m + 1) vertikale Spalte von gleicher Breite, deren Zwischenräume die Breite der Spalte haben, dringen homogene Lichtstrahlen in einer zur Ebene der Spalte senkrechten Richtung. Aus den Elementarwellen, welche von dem Aetherteilchen eines durch die Spalte gelegten Horizontalschnittes ausgehen, werden alle dem Strahle AC parallelen Strahlen gesammelt und durch eine Linse in einem Punkte

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

vereinigt. Die Lichtstärke in diesem Punkte zu bestimmen, wenn der Gangunterschied e der Randstrahlen jedes Spaltes gegeben ist.

Auflösung. Die Breite l jedes Spaltes werde von n Aetherteilchen erfüllt. Man lege durch dieselben Parallele zu AC, fälle von A auf sie das Lot, welches den Randstrahl des ersten Spaltes AB in D schneidet, sodass $BD = e$ ist, und setze $< DAB = \alpha$, also $BD = l \sin \alpha$. Dann ist der Gangunterschied des Strahles AC und der ihm parallelen Strahlen des ersten Spaltes gleich $\frac{e}{n}, \frac{2e}{n}, \frac{3e}{n} \ldots$, also die Summe der Geschwindigkeiten auf den $(n+1)$ Strahlen in dem Abstande $AA' = x$ von AD, wie in der vorigen Aufgabe,

$$V_o = na\sqrt{\varkappa}\cos\left(\beta - \frac{e\pi}{\lambda}\right)\left(\sin\frac{e\pi}{\lambda} : \frac{e\pi}{\lambda}\right), \quad \beta = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Für den zweiten Spalt haben die $(n+1)$ dem Strahle AC parallelen Strahlen in Bezug auf diesen die Gangunterschiede $2e$, $2e + \frac{e}{n}$, $2e + \frac{2e}{n} \ldots 2e + \frac{ne}{n}$, daher ist die Summe der Geschwindigkeiten auf den $(n+1)$ Strahlen in dem Abstande x von AD:

$$V_1 = a\sqrt{\varkappa}\left[\cos\left(\beta - \frac{4e\pi}{\lambda}\right) + \cos\left(\beta - \frac{4\pi e}{n\lambda} - \frac{2e\pi}{n\lambda}\right)\right.$$
$$\left. \ldots + \cos\left(\beta - \frac{4\pi e}{\lambda} - \frac{2n\pi e}{n\lambda}\right)\right]$$
$$= a\sqrt{\varkappa}\cos\left(\beta - \frac{4\pi e}{\lambda} - \frac{\pi e}{\lambda}\right)\sin\left(\frac{\pi e}{\lambda} : \frac{\pi e}{n\lambda}\right)$$
$$= na\sqrt{\varkappa}\cos\left(\beta - \frac{5e\pi}{\lambda}\right)\cdot\left(\sin\frac{\pi e}{e} : \frac{\pi e}{\lambda}\right).$$

Analog findet man für die übrigen Spalte:

$$V_2 = na\sqrt{\varkappa}\cos\left(\beta - \frac{8\pi e}{\lambda} - \frac{\pi e}{\lambda}\right)\cdot\left(\sin\frac{\pi e}{\lambda} : \frac{\pi e}{\lambda}\right)$$
$$= na\sqrt{\varkappa}\cos\left(\beta - \frac{9\pi e}{\lambda}\right)\left(\sin\frac{\pi e}{\lambda} : \frac{\pi e}{\lambda}\right),$$
$$V_3 = na\sqrt{\varkappa}\cos\left(\beta - \frac{13\pi e}{\lambda}\right)\left(\sin\frac{\pi e}{\lambda} : \frac{\pi e}{\lambda}\right),$$
$$V_m = na\sqrt{\varkappa}\cos\left(\beta - \frac{(4m+1)\pi e}{\lambda}\right)\left(\sin\frac{\pi e}{\lambda} : \frac{\pi e}{\lambda}\right).$$

Wie früher darf man annehmen, dass die Geschwindigkeit der Aetherteilchen im Vereinigungspunkte der Strahlen, nachdem man $\beta = 2\pi\left(\frac{t}{J} - \frac{x'}{\lambda}\right)$, $x' = x +$ Weg $A'F$ gesetzt hat, $V = V_o + V_1 + V_2 + \ldots V_m$ ist, also erhält man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$V = \mathrm{na}\sqrt{\varkappa}\,\sin\left(\frac{\pi e}{\lambda} : \frac{\pi e}{\lambda}\right)\left[\cos\left(\beta - \frac{e\pi}{\lambda}\right) + \cos\left(\beta - \frac{e\pi}{\lambda}\right)\right.$$

$$\left. + \ldots + \cos\left(\beta - \frac{(4m+1)\,e\pi}{\lambda}\right)\right]$$

$$= \mathrm{na}\sqrt{\varkappa}\,\cos\left(\beta - \frac{(4m+3)e\pi}{2\,\lambda}\right) \cdot \sin\left(\frac{(m+1)\,2\,\pi e}{\lambda} : \sin\frac{2\,\pi e}{\lambda}\right)$$

$$\cdot \sin\left(\frac{\pi e}{\lambda} : \frac{\pi e}{\lambda}\right)$$

ist. Bezeichnet man wieder die in der Flächeneinheit enthaltene Aethermasse mit M, so ist die Masse eines Aetherteilchens gleich $(M l^2 : n^2)$, folglich die lebendige Kraft des Aetherteilchens im Vereinigungspunkte

$$J = \frac{M l^2 a^2 \varkappa}{2\,n}\cos^2\left(\beta - \frac{(4m+3)e\pi}{2\,\lambda}\right)\left(\sin\frac{(m+1)\,2\,e\pi}{\lambda} : \sin\frac{2\pi e}{\lambda}\right)^2$$

$$\cdot\left(\sin\frac{\pi\,e}{\lambda} : \frac{\pi\,e}{\lambda}\right)^2,\quad \beta = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda}\right),\ \varkappa = \frac{4\,\pi^2}{T^2}.$$

Teilt man nun T in unendlich viele Zeitelemente wie früher, addiert die in den einzelnen Zeitelementen sich ergebenden Werte, dividiert durch n, so ist die Lichtstärke im Vereinigungspunkte

$$J = \frac{M l^2 a^2 \pi^2}{T^2}\left(\sin\frac{\pi e}{\lambda} : \frac{\pi e}{\lambda}\right)^2\left(\sin\frac{(m+1)\,2\,e\,\pi}{\lambda} : \sin\frac{2\,\pi e}{\lambda}\right)^2,$$

oder wenn man die Zahl der Oeffnungen gleich m setzt und mit m^2 multipliciert und dividiert,

$$J = \frac{M l^2 a^2 \pi^2}{T^2} m^2\left(\sin\frac{\pi e}{\lambda} : \frac{\pi e}{\lambda}\right)^2 \cdot \left(\sin\frac{m\,.\,2\,e\pi}{\lambda} : m\sin\frac{2e\pi}{\lambda}\right)^2.$$

Für $\lim e = \lim l\,.\,\sin\alpha = o$ werden, da man dann für die Sinus ihre Argumente setzen darf, die in den Klammern stehenden Brüche gleich Eins, also wird $J = M l^2 a^2 \pi^2 m^2 : T^2$, oder wenn man die Lichtstärke des ungebeugten Lichtes für eine Oeffnung gleich J_o setzt,

$$J = m^2 J_o\left(\sin\frac{\pi e}{\lambda} : \frac{\pi e}{\lambda}\right)^2 \cdot \left(\sin\frac{m\,.\,2\,e\pi}{\lambda} : m\sin\frac{2\,e\pi}{\lambda}\right)^2,\ (e = l\sin\alpha).$$

Die beiden in Klammern stehenden Ausdrücke haben zum Maximalwerte die Einheit. Von diesen Brüchen erhält den Maximalwert „Eins“,

der zweite für $e = o,\ \frac{1}{2}\lambda,\ \frac{2}{2}\lambda,\ \frac{3}{2}\lambda,\ \frac{4}{2}\lambda,\ \frac{5}{2}\lambda,\ \ldots$

während für diese Werte von e,

der erste wird $= 1,\ \frac{4}{\pi^2},\ 0,\ \frac{4}{9\,\pi^2},\ 0,\ \frac{4}{25\,\pi^2}\ \ldots$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$J = m^2 J_o$, $4m^2 J : \pi^2$, 0, $4m^2 J : (9\pi^2)$, 0, $4m^2 J : (25\pi^2) \ldots$

1. Es entstehen also Minima der Lichtstärke für $e = \lambda$, 2λ, $3\lambda \ldots$, Maxima für $e = o$, $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda \ldots$ (Maxima 2. Klasse).

2. Der in der zweiten Klammer befindliche Bruch erreicht sein Minimum (o), also auch J, wenn

$$\frac{2e\pi m}{\lambda} = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi \ldots, \text{ also für } e = \frac{\lambda}{2m}, \frac{2\lambda}{2m}, \frac{3\lambda}{2m} \ldots \frac{\varkappa\lambda}{2m} \ldots,$$

ausgenommen, wenn der Nenner zugleich o wird, d. h. $2e\pi : \lambda = \pi$, 2π, 3π, .., $e = \frac{1}{2}\lambda$, $\frac{2}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda$, also $\varkappa$ gleich m oder gleich einem Vielfachen von m wird.

Es entstehen also Minima der Lichtstärke für

$$e = \frac{\lambda}{2m}, \frac{2\lambda}{2m}, \ldots \frac{(m-1)\lambda}{2m}, \frac{(m+1)\lambda}{2m}, \frac{(m+2)\lambda}{2m} \ldots$$

3. Es wird, wenn man $\sin\frac{2e\pi}{\lambda} = 2\sin\frac{e\pi}{\lambda}\cos\frac{e\pi}{\lambda}$ setzt,

$J = \frac{J_o\lambda^2}{4\pi^2 e^2} \cdot \left(\sin\frac{2e\pi m}{\lambda} : \cos\frac{e\pi}{\lambda}\right)^2$. Der Zähler des in der Klammer stehenden Bruches erreicht seinen Maximalwert „Eins“ für

$$\frac{2e\pi m}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \text{ also für } e = \frac{\lambda}{4m}, \frac{3\lambda}{4m}, \frac{5\lambda}{4m} \ldots$$

Für diese Werte von e nimmt J folgende Werte an:

$$J = \frac{4m^2 J_o}{\pi^2}\cos^2\frac{\pi}{4m}, \frac{4m^2 J_o}{9\pi^2}\cos^2\frac{3\pi}{4m}, \frac{4m^2 J_o}{25\pi^2}\cos^2\frac{5\pi}{4m} \ldots$$

Sie nehmen an Grösse rasch ab und werden Maxima 3. Kl. genannt.

Für 4 Spalten ergeben sich also:

Maxima der Lichtstärke für

$$e = o, \frac{\lambda}{16}, \frac{3\lambda}{16}, \frac{5\lambda}{16}, \frac{7\lambda}{16}, \frac{8\lambda}{16}, \frac{9\lambda}{16}, \frac{11\lambda}{16} \ldots \frac{23\lambda}{16}, \frac{24\lambda}{16}, \frac{25\lambda}{16} \ldots,$$

Minima für

$$e = \frac{2\lambda}{16}, \frac{4\lambda}{16}, \frac{6\lambda}{16}, \frac{10\lambda}{16}, \frac{12\lambda}{16}, \frac{14\lambda}{16}, \frac{16\lambda}{16} \ldots \frac{20\lambda}{16}, \frac{22\lambda}{16}, \frac{26\lambda}{16} \ldots$$

Wird die Anzahl m der Spalte gross, so erlangen die Maxima zweiter Klasse, da ihre Lichtstärke m^2 mal grösser ist, als die der entsprechenden Werte für einen Spalt, eine grosse Helligkeit. Die Maxima der dritten Klasse entziehen sich teils wegen ihrer geringen Breite teils wegen der geringen Intensität der Beobachtung. Das ganze Beugungsbild reduciert sich auf helle Linien, welche in der Brennebene der Linse, entsprechend $e = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}$, die Entfernungen $\frac{\lambda f}{2l}, \frac{3\lambda f}{2l}, \frac{5\lambda f}{2l} \ldots$ von der Hauptachse haben, also von einander um $(\lambda f : l)$ entfernt sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

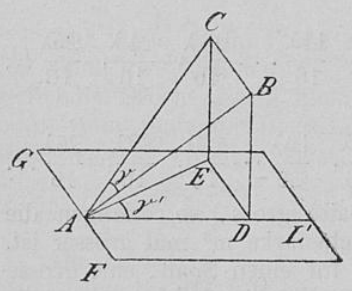
Fällt weisses Licht auf die Spalte, so fallen in der Brennebene auf der Hauptachse alle Farben übereinander und geben weiss. Da die Entfernungen der Maxima 2. Klasse von der Hauptachse der Wellenlänge proportional sind, so werden die verschiedenfarbigen Strahlen von einander getrennt, und es entstehen die Beugungsspektra. Bezeichnen λ_r und λ_v die Wellenlängen für rotes und violettes Licht, so ist die Breite des ersten Spektrums auf beiden Seiten der mittleren Lichtlinien gleich $\frac{\lambda_r - \lambda_v}{2\,l} f$, die des zweiten $\frac{3\,(\lambda_r - \lambda_v)}{2\,l} f$ etc.

Fehlt in der Reihenfolge der Farben eine derselben, so wird sich dieser Mangel namentlich in den ersten Spektren durch einen dunkelen Zwischenraum im Spektrum zu erkennen geben. Durch Messung der Entfernungen der den Fraunhofer'schen Linien entsprechenden dunkelen Linien von der mittleren Lichtlinie im Beugungsspektrum hat man die Wellenlängen derselben bestimmt.

.....

Anhang.

1. Zwei Ebenen L u. L' bilden miteinander $\sphericalangle\ \alpha$. Der in der Ebene L gegebene Winkel γ sei auf die Ebene L' projiciert. Die Gleichung zwischen $\sphericalangle\ \gamma$ und seiner Projektion γ' zu finden, wenn der eine Schenkel AB von $\sphericalangle\ \gamma$ auf der Kante FG der beiden Ebenen senkrecht steht.



Auflösung. Man fälle von B auf die Ebene L' das Lot BD, verbinde D mit A, errichte auf AB in B in der Ebene L das Lot, welches den anderen Schenkel von γ in C schneidet, fälle von C das Lot CE auf L' und verbinde D mit E. Dann ist $\sphericalangle\ BAD = \alpha$, $DAE = \gamma'$, $BC \parallel FG$, also $\parallel L'$, mithin $\parallel DE$, folglich $BC = DE$, $BC = AB\,.\,\mathrm{tg}\,\gamma$, $ED = AD\,.\,\mathrm{tg}\,\gamma'$, folglich $AB\,.\,\mathrm{tg}\,\gamma = AD\ \mathrm{tg}\,\gamma'$, $\mathrm{tg}\,\gamma = \mathrm{tg}\,\gamma'\,.\,\cos\alpha$,

$$\frac{1 - \cos^2\gamma}{\cos^2\gamma} = \frac{\sin^2\gamma'\ \cos^2\alpha}{\cos^2\gamma'},\quad \cos\gamma = \frac{\cos\gamma'}{\sqrt{\cos^2\gamma' + \sin^2\gamma'\cos^2\alpha}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. $x = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha$: Multipliciert man die Gleichung mit $2\cos\alpha$ und verwandelt die Kosinusprodukte in Summen so erhält man:

$$2x\cos\alpha = 1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos(n-1)\alpha$$
$$+ \cos 2\alpha + \ldots + \cos(n-1)\alpha + \cos n\alpha +$$
$$\cos(n+1)\alpha,$$

oder wenn man für die obere Reihe $x + 1 - \cos n\alpha$, für die untere $x - \cos\alpha + \cos(n+1)\alpha$ setzt,

$$2x\cos\alpha = 2x + 1 - \cos\alpha + \cos(n+1)\alpha - \cos n\alpha,$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{\cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = -\frac{1}{2} + \left(\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} : 2\sin\frac{\alpha}{2}\right). \quad (2).$$

3. $x = \cos 2\beta + \cos 4\beta + \cos 6\beta + \ldots + \cos(2n\beta)$.
Für $\alpha = 2\beta$ geht (3) über in $x = -\frac{1}{2} + [\sin(2n+1)\beta : 2\sin\beta]$. (3).

4. $x = \cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots + \cos n\alpha$. (n ungerade)

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots \cos 2m\alpha = -\frac{1}{2} + \left(\sin\frac{4m+1)\alpha}{2} : 2\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \ldots \cos 2m\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(2m+1)\alpha}{2\sin\alpha},$$

folglich erhält man durch Subtraktion

$$\cos\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos(2m-1)\alpha =$$
$$\left(2\sin\frac{(4m+1)\alpha}{2}\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \sin(2m+1)\alpha\right) : 2\sin\alpha$$
$$= \frac{\sin(2m+1)\alpha + \sin 2m\alpha - \sin(2m+1)\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sin 2m\alpha}{2\sin\alpha},$$

oder wenn man $2m - 1 = n$, $2m = n + 1$ setzt,

$$\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots \cos n\alpha = \sin(n+1)\alpha : (2\sin\alpha). \quad (4).$$

5. $x = \cos\alpha + \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - 2\beta) \ldots + \cos(\alpha - n\beta)$.

Schreibt man die Gleichung nach Umkehrung der Reihenfolge der Glieder auf der rechten Seite darunter, addiert beide Gleichungen und verwandelt dabei die Summen der untereinanderstehenden Kosinus in Kosinusprodukte, und sondert $2\cos(\alpha - \frac{1}{2}n\beta)$ aus, so erhält man:

$$2x = 2\cos\left(\alpha - \frac{n\beta}{2}\right)\left[\cos\frac{n\beta}{2} + \cos\frac{(n-2)\beta}{2} + \ldots\ldots\right.$$
$$\left. + \cos\frac{(n-2)\beta}{2} + \cos\frac{n\beta}{2}\right], \text{ folglich für ein gerades n:}$$

$$x = \cos\left(\alpha - \frac{n\beta}{2}\right)\left[\cos\frac{n\beta}{2} + \cos\frac{(n-2)\beta}{2} + \ldots \cos\frac{2\beta}{2} + \cos 0\right.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$+ \cos\frac{2\beta}{2} + \cos\frac{4\beta}{2} + \ldots + \cos\frac{n\beta}{2}\Big)\Big]$$

$$= \cos\left(\alpha - \frac{n\beta}{2}\right)\left[1 + 2\left(\cos\frac{2\beta}{2} + \cos\frac{4\beta}{2} + \ldots + \cos\frac{n\beta}{2}\right)\right]$$

$$= \cos\left(\alpha - \frac{n\beta}{2}\right)\left[\sin\frac{(n+1)\beta}{2} : \sin\frac{\beta}{2}\right], \text{ (nach 3).}$$

für ein ungerades n:

$$x = \cos\left(\alpha - \frac{n\beta}{2}\right)\left[\cos\frac{n\beta}{2} + \cos\frac{(n-2)\beta}{2} + \ldots \cos\frac{\beta}{2} + \right.$$

$$\left.\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{3\beta}{2} + \ldots + \cos\frac{n\beta}{2}\right)\Big]$$

$$= 2\cos\left(\alpha - \frac{n\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{3\beta}{2} + \ldots + \cos\frac{n\beta}{2}\right), \text{nach(4)}$$

$$= \cos\left(\alpha - \frac{n\beta}{2}\right)\left[\sin\frac{(n+1)\beta}{2} : \sin\frac{\beta}{2}\right]. \quad (5).$$

6. Setzt man statt $\beta : (-\beta)$, so erhält man:

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots \cos(\alpha + n\beta)$$

$$= \cos\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right)\left[\sin\frac{(n+1)\beta}{2} : \sin\frac{\beta}{2}\right]. \quad (6).$$

7. $x = \cos^2\alpha + \cos^2(\alpha+\beta) + \ldots + \cos^2(\alpha + n\beta).$

$$= \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2(\alpha+\beta)}{2} + \ldots + \frac{1+\cos 2(\alpha+n\beta)}{2}$$

$$= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}[\cos 2\alpha + \cos 2(\alpha+\beta) + \ldots + \cos 2(\alpha+n\beta)]$$

$$= \frac{n+1}{2} + \frac{\cos(2\alpha+n\beta)\sin(n+1)\beta}{2\sin\beta}. \quad (7).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\frac{\beta}{2}\Big)\Big]$

$= \cos\Big($. $+ \cos\frac{n\beta}{2}\Big)\Big]$

$= \quad \frac{\beta}{2}\Big]$, (nach 3).

für ein un

$x = \cos$ ... $\cos\frac{\beta}{2} +$

$= 2\cos\Big($ $\cos\frac{n\beta}{2}\Big)$, nach (4)

$= \quad \frac{\beta}{2}\Big]$. (5).

6. Setzt m

$+ n\beta)$

$= \quad \Big]$. (6).

7. $x = \mathrm{c}$ $(\alpha + n\beta)$.

$= \frac{1+\mathrm{c}}{2}$ $\frac{\cos 2(\alpha+n\beta)}{2}$

$= \frac{n+1}{2} +$ $\cos 2(\alpha+n\beta)]$

. (7).

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN® Gray Scale
A 1 R 2 G 3 4 B 5 6 M 8 W 9 G 10 K 11 12 13 C 14 15 Y B 17 M 18 19

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf