Ein praktisches Beispiel zur Festigkeitslehre.

Wenn eine Last auf beliebig vielen Stützen ruht und das Gesetz der zwischen ihnen wirkenden Belastung durch stetige Funktionen ausgedrückt wird, so kann man bekanntlich durch die verallgemeinerte Clapeyronsche*) Formel eine Gleichung zwischen drei Biegungsmomenten aufstellen, die auf drei auf einander folgende Stützpunkte bezogen werden, und hierdurch die auf dieselben ausgeübten Druckkräfte berechnen. Die Anwendungen der genannten Formel beschränken sich meistens auf den Fall, wenn entweder sämtliche, oder doch wenigstens die symmetrisch liegenden Stützpunkte gleichweit von einander entfernt sind, und die Last an den Endpunkten nicht überhängt. Bei ungleichen Entfernungen ist man meines Wissens in der vollständigen Durchführung der Rechnung nicht über drei Stützen hinausgegangen und hat ein Überhängen nicht berücksichtigt.

Eine Veranlassung, das Problem unter verallgemeinerten Bedingungen zu lösen, bot mir die Lage eines Wasserbehälters dar, welcher sich auf dem Speicher des hiesigen Gymnasialgebäudes befindet und dazu dient, das vom Dache desselben herabfließende und zum Gebrauche im physikalischen und chemischen Laboratorium bestimmte Regenwasser zu sammeln. Er hat eine parallelepipedische Form, ist von 5 *cm* starken tannenen Brettern angefertigt, inwendig mit Zink bekleidet und wiegt, wenn er vollständig mit Wasser gefüllt ist, 125 Centner. Da seine Aufstellung durch die Lage der genannten Räumlichkeiten bedingt war, so konnte diese nicht auf die vorteilhafteste Weise geschehen, und so ruht er auf vier ungleich von einander entfernten Balken und ragt mit seinen Enden über diese hinüber. Die Figur I**) wird seine Lage veranschaulichen.

WKK_1W_1 ist der Grundriß des Wasserbehälters, MN, M_1N_1 zwei Mauern, ORO_1R_1 eine Zwischenmauer, AaA_1a_1, BbB_1b_1, CcC_1c_1, DdD_1d_1 vier Balken, welche 15 *cm* breit und 32 *cm* hoch sind. Die Dimensionen sind folgende:

$$
\begin{aligned}
WK &= 313\ cm \\
WW_1 &= 156\ \text{„} \\
aO &= 7\ \text{„} \\
OR &= 38\ \text{„} \\
RB &= 7\ \text{„} \\
bC &= 51\ \text{„} \\
cD &= 56\ \text{„} \\
WF &= 54\ \text{„} \\
EK &= 40\ \text{„} \\
GK &= 50\ \text{„} \\
G_1K_1 &= 151\ \text{„}
\end{aligned}
$$

ganze Höhe des Wasserbehälters = 148 *cm*,
Höhe bis zur Abflußöffnung = 127 *cm*.

Zwischen den Balken AaA_1a_1 und BbB_1b_1 befindet sich eine 38 *cm* breite Mauer, die einen Teil der Last aufnimmt.

---

*) Clapeyron. Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés. Comptes rendus 1857.

**) In der Figur sind die Maße der Deutlichkeit wegen absichtlich übertrieben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da das Gewicht des Behälters nicht unbedeutend ist, so entstand die Besorgnis, ob die Balken bei der oben beschriebenen Art der Belastung im Stande wären, dieselbe dauernd zu ertragen. Ich habe deshalb den allerungünstigsten Fall, wenn der Behälter als vollständig gefüllt angenommen wird, und die obere Fläche der Mauer OR, wie es mir scheint, nicht in derselben horizontalen Ebene wie die Balken liegt, der Berechnung unterzogen. Glücklicherweise ergab sich, wie ich im Folgenden zeigen werde, daß die Befürchtung nicht begründet ist, sondern daß eine für staatliche Bauten vorgeschriebene Sicherheit stattfindet.

I.

Allgemeine Berechnung der von einer gleichartigen Last auf vier ungleich von einander entfernte Stützpunkte ausgeübten Druckkräfte, falls sie an ihren Enden überragt.

Die Entwickelung der Clapeyronschen Formel beruht auf der Differentialgleichung der elastischen Linie, welche lautet

$$\frac{EJ}{\varrho} = M_x.$$

E ist der Elasticitätsmodul des Materials des elastischen Trägers, J das Trägheitsmoment des Querdurchschnitts desselben im Punkte X, dessen Abscisse x ist, bezogen auf die neutrale Achse, ϱ der Krümmungsradius in X und M_x die Summe der Biegungsmomente sämtlicher, in einer vertikalen Ebene enthaltenen Transversalkräfte, die vom Anfangspunkte der Koordinaten an bis zum Punkte X auf den Balken wirken und auf X als Drehpunkt bezogen sind.

Es ist nun, wenn s die Länge des zur Abscisse x gehörigen Bogens der gekrümmten Linie, y die Ordinate und φ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente im Punkte (x, y) mit der Abscissenachse bildet,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

In allen praktischen Anwendungen ist die Krümmung so gering, daß man den Bogen mit der Abscisse vertauschen und $tg\varphi$ für φ setzen kann. Man erhält dann

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\,tg\,\varphi}{dx} = \frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Hiernach verwandelt sich die Gleichung der elastischen Linie in

$$1) \qquad EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M_x.$$

Die Kräfte, deren Momente bestimmt werden müssen, wirken teils in einzelnen Punkten, den Stützpunkten, deren Abscissen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ (Figur II) seien, und mögen mit $T_1, T_2, T_3, \ldots T_n$ bezeichnet werden, teils rühren sie von dem Gewichte der Last her und wirken dann kontinuierlich. Wenn f(u) eine innerhalb der Intervalle $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, $x_4 - x_3$, ... stetige Funktion ist, die das Gesetz der Belastung an der Stelle, deren Abscisse u ist, ausdrückt, so ist das auf du lastende Gewicht f(u)du, folglich sein auf X als Drehpunkt bezogenes Moment

$$(x - u)\,f(u)\,du,$$

also die Summe sämtlicher, von der Last herrührenden Momente

$$\int_0^x (x - u)\,f(u)\,du.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ferner ist die Summe der Momente der Kräfte $T_1, T_2, T_3, \ldots T_n$

$$\sum T_n (x - x_n).$$

Nimmt man die letzteren als positiv an, so wird

$$M_x = \sum T_n (x - x_n) - \int_0^x (x - u)\, f(u)\, du. \tag{2}$$

Folglich ist

$$\frac{dM_x}{dx} = \sum T_n - \frac{d\cdot}{dx} \int_0^x (x - u)\, f(u)\, du.$$

Es ist aber der Differentialquotient des zweiten Gliedes, da x sowohl in der Grenze, als auch unter dem Integralzeichen vorkommt, gleich

$$\frac{d\cdot x}{dx} \int_0^x f(u)\, du - \frac{d\cdot}{dx} \int_0^x u f(u)\, du = \int_0^x f(u)\, du + \frac{x d\cdot}{dx} \int_0^x f(u)\, du - \frac{d\cdot}{dx} \int_0^x u f(u)\, du.$$

Die beiden letzten Differentialquotienten haben den Wert $x f(x)$, heben sich also auf, so daß

$$\frac{dM_x}{dx} = \sum T_n - \int_0^x f(u)\, du \tag{3}$$

wird. Die rechte Seite der Gleichung drückt die Summe aller von O bis X hin wirkenden Transversalkräfte aus. Bezeichnet man diese mit V_x, so ist also

$$\frac{dM_x}{dx} = V_x. \tag{3a}$$

Eine Differentiation nach x ergiebt

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2}\, dx = dV_x = -f(x)\, dx. \tag{4}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (3a) und (4) läßt sich nun die Clapeyronsche Formel leicht ableiten, was der Vollständigkeit wegen jetzt geschehen soll.

Es mögen die Integrale

$$-\int_{x_{n-1}}^{x_n} (x - x_{n-1})^3 f(x)\, dx, \qquad -\int_{x_{n-1}}^{x_n} (x - x_{n-1})\, f(x)\, dx$$

respektive mit A und B bezeichnet werden. Ändert sich die untere Grenze in x_{n+1} um, so seien die Integrale gleich A′ und B′.

Durch teilweise Integration und durch Benutzung der Gleichung (4) wird erhalten

$$A = \int_{x_{n-1}}^{x_n} (x - x_{n-1})^3 \frac{d^2 M_x}{dx^2}\, dx = \left[(x_n - x_{n-1})^3 \frac{dM_x}{dx} \right]_{x_{n-1}}^{x_n} - 3 \int_{x_{n-1}}^{x_n} (x - x_{n-1})^2 \frac{dM_x}{dx}\, dx,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder wenn $x_n - x_{n-1} = l_{n-1}$, $x_{n+1} - x_n = l_n$ gesetzt und das Moment, welches den Index x_n erhält, kurz mit M_n bezeichnet wird

$$A = l^3_{n-1}\left(\frac{dM_x}{dx}\right)_{x_n} - 3\int_{x_{n-1}}^{x_n}(x - x_{n-1})^2\,\frac{dM_x}{dx}.$$

Auf letzteres Integral wird wiederum die partielle Integration angewandt, welche ergiebt

$$A = l^3_{n-1}\left(\frac{dM_x}{dx}\right)_{x_n} - 3l^2_{n-1}M_n + 6\int_{x_{n-1}}^{x_n}(x - x_{n-1})M_x\,dx.$$

Da aber nach (1) $M_x = EJ\frac{d^2y}{dx^2}$ ist, so folgt

$$A = l^3_{n-1}\left(\frac{dM_x}{dx}\right)_{x_n} - 3l^2_{n-1}M_n + 6E\int_{x_{n-1}}^{x_n}J(x - x_{n-1})\,\frac{d^2y}{dx^2}.$$

J ist, wenn der Querschnitt der Last veränderlich ist, Funktion von x. Besteht jedoch dieselbe aus einem Träger von konstantem Querschnitt und wird die Verschiedenheit des Gewichts an den einzelnen Stellen nur durch Aufschüttung eines nicht festen und nicht elastischen Materials, wie Sand u. s. w., hervorgebracht, so ist J konstant anzunehmen, was auch im vorliegenden Falle geschehen kann.

Da

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n}(x - x_{n-1})\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx = l_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_n} - \int_{x_{n-1}}^{x_n}\frac{dy}{dx}\,dx = l_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_n} - (y_n - y_{n-1})$$

ist, so erhält man

$$(5)\qquad A = l^3_{n-1}\left(\frac{dM_x}{dx}\right)_{x_n} - 3l^2_{n-1}M_n + 6EJ\left\{l_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_n} - (y_n - y_{n-1})\right\}.$$

Wird dieselbe Methode auf das Integral B angewandt, so ergiebt sich

$$B = l_{n-1}\left(\frac{dM}{dx}\right)_{x_n} - (M_n - M_{n-1}).$$

Um $\left(\frac{dM}{dx}\right)_n$ aus der Gleichung (5) zu entfernen, multipliciert man B mit l^2_{n-1}. Die Subtraktion der entstandenen Gleichung von (5) liefert

$$(6)\qquad A - l^2_{n-1}B = -l^2_{n-1}(2M_n + M_{n-1}) + 6EJ\left\{l_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_n} - (y_n - y_{n-1})\right\}.$$

Behufs Elimination der Größe $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_n}$ vertauscht man den Index $n - 1$ mit $n + 1$. Hierdurch gehen die Integrale A und B über in .

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$A' = -\int_{x_{n+1}}^{x_n} (x - x_{n+1})^3 f(x)\,dx\,, \qquad B' = -\int_{x_{n+1}}^{x_n} (x - x_{n+1}) f(x)\,dx\,,$$

und durch eine ähnliche Rechnung folgt

$$(7) \qquad A' - l^2_n B' = -l^2_n(2M_n + M_{n+1}) + 6EJ\left\{-l_n\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_n} - (y_n - y_{n+1})\right\}.$$

Man hat nun die Gleichung (6) durch l_{n-1} und die Gleichung (7) durch l_n zu dividieren und hierauf die erhaltenen Gleichungen zu addieren. Das Resultat ist

$$\frac{A - l^2_{n-1}B}{l_{n-1}} + \frac{A' - l^2_n B'}{l_n} = -l_{n-1}M_{n-1} - 2(l_{n-1} + l_n)M_n - l_n M_{n+1} + 6EJ\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{l_{n-1}} + \frac{y_n - y_{n+1}}{l_n}\right),$$

oder mit Veränderung der Zeichen

$$(8) \qquad 6EJ\left\{\frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} - \frac{y_n - y_{n-1}}{l_{n-1}}\right\} = l_{n-1}M_{n-1} + 2(l_{n-1} + l_n)M_n + l_n M_{n+1}$$

$$+ \frac{1}{l_{n-1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} \{l^2_{n-1}(x - x_{n-1}) - (x - x_{n-1})^3\} f(x)\,dx - \frac{1}{l_n}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \{l^2_n(x - x_{n+1}) - (x - x_{n+1})^3\} f(x)\,dx\,.$$

Dies ist die Clapeyronsche Formel in ihrer allgemeinsten Gestalt.

Im vorliegenden Falle ist $f(x)$ eine Konstante. Ist nämlich p das Gewicht der Längeneinheit der Last, so muß für $f(x)dx$ die Größe pdx gesetzt werden. Es wird alsdann

$$p\int_{x_{n-1}}^{x_n} (x - x_{n-1})\,dx = \frac{1}{2} l^2_{n-1} p\,, \qquad p\int_{x_{n-1}}^{x_n} (x - x_{n-1})^3 dx = \frac{1}{4} l^4_{n-1} p\,,$$

die entsprechenden andern Integrale sind $\frac{1}{2}l^2_n p$ und $\frac{1}{4}l^4_n p$. Hiernach vereinfacht sich das Resultat in folgendes:

$$(9) \qquad 6EJ\left\{\frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} - \frac{y_n - y_{n+1}}{l_{n-1}}\right\} = l_{n-1}M_{n-1} + 2(l_{n-1} + l_n)M_n + l_n M_{n+1} + \frac{1}{4}(l^3_{n-1} + l^3_n)p.$$

Wird die Last von vier Balken als Stützpunkten getragen, sind die Entfernungen derselben von einander l_1, l_2, l_3, und hängt sie (wie Figur II zeigt) um a und b an beiden Enden über, sind ferner y_a, y_1, y_2, y_3, y_4, y_b die Entfernungen der gekrümmten Linie von der als wagerecht angenommenen xAchse, so würde die Gleichung (9) folgende vier Gleichungen liefern:

$$(10) \qquad \begin{aligned}
6EJ\left(\frac{y_2 - y_1}{l_1} - \frac{y_1 - y_a}{a}\right) &= aM_a + 2(a + l_1)M_1 + l_1 M_2 + \frac{1}{4}(a^3 + l_1^3)p\,,\\
6EJ\left(\frac{y_3 - y_2}{l_2} - \frac{y_2 - y_1}{l_1}\right) &= l_1 M_1 + 2(l_1 + l_2)M_2 + l_2 M_3 + \frac{1}{4}(l_1^3 + l_2^3)p\,,\\
6EJ\left(\frac{y_4 - y_3}{l_3} - \frac{y_3 - y_2}{l_2}\right) &= l_2 M_2 + 2(l_2 + l_3)M_3 + l_3 M_4 + \frac{1}{4}(l_2^3 + l_3^3)p\,,\\
6EJ\left(\frac{y_b - y_4}{b} - \frac{y_4 - y_3}{l_3}\right) &= l_3 M_3 + 2(l_3 + b)M_b + b M_b + \frac{1}{4}(l_3^3 + b^3)p\,.
\end{aligned}$$

Es ist aber hier die Annahme gestattet, daß die y mit Ausnahme der beiden Ordinaten der Endpunkte y_a und y_b einander gleich sind. Infolgedessen werden in der zweiten und dritten Gleichung die linken Seiten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Null gleich. Es verschwindet ferner das auf den Anfangspunkt der Koordinaten bezogene Moment M_a. Auch das Moment M_b muß ebenso wie M_a der Null gleich sein, da es gleichgültig ist, ob man die Momente von links nach rechts oder in umgekehrter Richtung nimmt. Legt man ferner die Abscissenachse durch den Endpunkt der Ordinate y_1, so verschwindet auch diese Größe und es ergeben sich die einfacheren Gleichungen

$$6EJ\frac{y_a}{a} = 2(a + l_1)M_1 + l_1 M_2 + \frac{1}{4}(a^3 + l_1^3)p,$$

$$0 = l_1 M_1 + 2(l_1 + l_2)M_2 + l_2 M_3 + \frac{1}{4}(l_1^3 + l_2^3)p,$$

$$0 = l_2 M_2 + 2(l_2 + l_3)M_3 + l_3 M_4 + \frac{1}{4}(l_2^3 + l_3^3)p,$$

$$6EJ\frac{y_b}{b} = l_3 M_3 + 2(l_3 + b)M_4 + \frac{1}{4}(l_3^3 + b^3)p.$$

Aus diesen Gleichungen könnte man die Momente M_1, M_2, M_3, M_4 finden; aber die Ausdrücke würden die unbekannten Senkungen an den Enden der Last, y_a und y_b, enthalten, also zur Ableitung der auf die Stützen ausgeübten Druckkräfte untauglich sein. Außerdem würde noch ein anderes Bedenken entstehen, von dem später die Rede sein wird. Drückt man jedoch die M durch die T aus, so erhält man vier zur Bestimmung der T hinreichende Gleichungen, die y_a und y_b nicht enthalten. Es mögen diese Größen T_1, T_2, T_3, T_4, welche die Reaktionen der Stützen angeben, positiv, die von der Last ausgeübten Kräfte aber negativ genommen werden. Die Momente derselben seien negativ, wenn sie vom Anfang an gerechnet um den Drehpunkt von links nach rechts drehen. Sie werden bestimmt, indem man die betreffenden Laststücke in ihrem Schwerpunkt, der hier in der Mitte derselben zwischen Anfangs- und Drehpunkt liegt, wirkend annimmt.

Dann ist

$$M_1 = -\frac{1}{2}a^2 p,$$

$$M_2 = -\frac{1}{2}(a + l_1)^2 p + l_1 T_1,$$

$$(11)\quad M_3 = -\frac{1}{2}(a + l_1 + l_2)^2 p + (l_1 + l_2)T_1 + l_2 T_2,$$

$$M_4 = -\frac{1}{2}(a + l_1 + l_2 + l_3)^2 p + (l_1 + l_2 + l_3)T_1 + (l_2 + l_3)T_2 + l_3 T_3,$$

$$M_b = -\frac{1}{2}(a + l_1 + l_2 + l_3 + b)^2 p + (l_1 + l_2 + l_3 + b)T_1 + (l_2 + l_3 + b)T_2 + (l_3 + b)T_3 + bT_4 = 0.$$

Außerdem besteht die Gleichung

$$(12)\quad T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = (a + l_1 + l_2 + l_3 + b)p.$$

Die Elimination von T_4 aus der letzten Gleichung (11) und aus (12) ergiebt

$$(13)\quad (l_1 + l_2 + l_3)T_1 + (l_2 + l_3)T_2 + l_3 T_3 = \frac{1}{2}\left\{(a + l_1 + l_2 + l_3)^2 - b^2\right\}p.$$

Setzt man ferner die Werte der Momente M_1, M_2, M_3 in die mittleren Gleichungen (10) ein, so folgt nach einigen Reduktionen

$$(14)\quad (l_1 + l_2)(2l_1 + l_2)T_1 + l_2^2 T_2 = \frac{1}{2}a^2 l_1 p + (l_1 + l_2)(a + l_1)^2 p + \frac{1}{2}(a + l_1 + l_2)^2 p - \frac{1}{4}(l_1^3 + l_2^3)p,$$

$$(15)\quad \begin{aligned} &\left\{l_1 l_2 + 2(l_1 + l_2)(l_2 + l_3) + l_3(l_1 + l_2 + l_3)\right\}T_1 + (l_2 + l_3)(2l_2 + l_3)T_2 + l_3^2 T_3 \\ &= \frac{1}{2}l_2(a + l_1)^2 p + (l_2 + l_3)(a + l_1 + l_2)^2 p + \frac{1}{2}l_3(a + l_1 + l_2 + l_3)^2 p - \frac{1}{4}(l_2^3 + l_3^3)p. \end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichungen (13), (14), (15) genügen um T_1, T_2, T_3 vollständig zu bestimmen. Die Elimination von T_3 aus (13) und (15) macht keine Schwierigkeit. Es wird

$$(16)\quad \left\{l_1 l_2 + 2(l_1+l_2)(l_2+l_3)\right\} T_1 + 2 l_2 (l_2+l_3) T_2 = \frac{1}{2} l_2 (a+l_1)^2 p + (l_2+l_3)(a+l_1+l_2)^2 p - \frac{1}{4}(l_2^3+l_3^3) p + \frac{1}{2} b^2 l_3 p.$$

Hieraus folgt mit Hinzunahme von (13), wenn die Determinante $l_2^2 - 4(l_1+l_2)(l_2+l_3) = N$ gesetzt wird,

$$(17)\quad \left(l_1 T_1 - \frac{1}{2}(a+l_1)^2 p\right) N = \left[\frac{1}{2} b^2 l_2 l_3 - a^2 l_1 (l_2+l_3) - \frac{1}{4} l_2 (l_2^3+l_3^3) + \frac{1}{2}(l_2+l_3)(l_1^3+l_2^3)\right] p.$$

$$(18)\quad \left(\frac{l_1 l_2 T_2}{l_1+l_2} - \frac{1}{2} l_1 l_2 p\right) N =$$

$$\left[\left\{\frac{1}{2} l_2 (l_1-l_2) + (l_1+2l_2)(l_2+l_3)\right\} a^2 - \frac{1}{2} b^2 l_3 (2l_1+l_2) + \frac{1}{4}\left\{(l_2^3+l_3^3)(2l_1+l_2) - l_1 l_2 (l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2) - 2(l_1^3+l_2^3)(l_2+l_3)\right\}\right] p.$$

Die Werte von T_4 und T_3 ergeben sich leicht aus den vorstehenden, wenn man gleichzeitig a mit b und l_1 mit l_3 vertauscht; die Größe N bleibt dadurch ungeändert.

Es ist

$$(19)\quad \left(l_3 T_4 - \frac{1}{2}(b+l_3)^2 p\right) N = \left[\frac{1}{2} a^2 l_1 l_2 - b^2 l_3 (l_1+l_2) - \frac{1}{4} l_2 (l_1^3+l_2^3) + \frac{1}{2}(l_1+l_2)(l_2^3+l_3^3)\right] p.$$

$$(20)\quad \left(\frac{l_2 l_3 T_3}{l_2+l_3} - \frac{1}{2} l_2 l_3 p\right) N =$$

$$\left[\left\{\frac{1}{2} l_2 (l_3-l_2) + (l_3+2l_2)(l_1+l_2)\right\} b^2 - \frac{1}{2} a^2 l_1 (2l_3+l_2) + \frac{1}{4}\left\{(l_1^3+l_2^3)(2l_3+l_2) - l_2 l_3 (l_3^2 - l_2 l_3 + l_2^2) - 2(l_2^3+l_3^3)(l_1+l_2)\right\}\right] p,$$

Eine Kontrole der Richtigkeit dieser Werte von T_1, T_2, T_3, T_4 ergiebt sich aus der Bedingung, daß

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = (a + l_1 + l_2 + l_3 + b)\, p$$

sein muß. Die mit a und b multiplicierten Glieder geben bei der Addition $(a+b)\,p$; die Summe der mit a^2 und b^2 multiplicierten verschwindet. Von den von a und b freien Gliedern geben die ohne den Nenner N die Summe $(l_1+l_2+l_3)\,p$. Es müssen sich also die Brüche, deren Nenner N ist, aufheben; in der That geben die mit $l_1^3 + l_2^3$ multiplicierten $\frac{l_1^3+l_2^3}{4N}$, die mit $l_2^3 + l_3^3$ multiplicierten $\frac{l_2^3+l_3^3}{4N}$, während die übrigen zur Summe $-\frac{l_1^3+l_2^3}{4N} - \frac{l_2^3+l_3^3}{4N}$ haben.

Nachdem nun die Größen T gefunden sind, würde man aus den Gleichungen (11) die Größe der Momente M_1, M_2, M_3, M_4 und alsdann aus der ersten und vierten der Gleichungen (10) die Senkungen an den Enden y_a und y_b ableiten können. Es würde auch möglich sein die Integration der Differentialgleichung $EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M_x$ auszuführen und die Form der elastischen Linie zwischen den Stützpunkten, sowie die größten Senkungen zwischen ihnen zu bestimmen. Aber dieses alles würde voraussetzen, daß die Last ein vollkommen gleichartiger, fester, elastischer Körper wäre. Das ist hier nicht der Fall, sondern sie besteht zu ihrem größten Teile aus Wasser, bei welchem von einem Elasticitätsmodul E nicht die Rede kein kann.

Es käme bei der theoretischen Ableitung der Form der elastischen Linie noch der auf die Endflächen des Behälters ausgeübte hydrostatische Druck in Betracht, wodurch die Resultate wesentlich modificiert würden. E und J würden sich dann nur auf die Elasticität und Form des Holzes des Behälters beziehen. Da es sich aber hier nur um die Bestimmung des Druckes auf die Stützen handelt, und man hierbei das Wasser wie eine Art von Aufschüttung auf den hölzernen Behälter ansehen kann, so besteht die Gültigkeit der 2ten und 3ten Gleichung von Nummer (10) und der Gleichungen (11) und (12).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II.

Berechnung der Druckkräfte in den gegebenen Zahlengrößen.

1. Berechnung von p.

Zur Bestimmung der Größe p muß das Gewicht des gefüllten Behälters ermittelt werden. Aus den in der Einleitung angeführten Zahlen würde, wenn das Gewicht eines Kubikcentimeters Tannenholz zu 0,6 Gr. angenommen wird, sich ergeben

a) Gewicht des Holzes $= (313 \cdot 156 \cdot 5 + 2 \cdot 313 \cdot 143 \cdot 5 + 2 \cdot 143 \cdot 146 \cdot 5)\, 0{,}6$ Gr. $=$ 540,36 Kilogr.

b) Gewicht des Zinks (1 *qm* = 5,74 Kilogr.)

$$= \frac{303 \cdot 146 + 2 \cdot 303 \cdot 143 + 2 \cdot 146 \cdot 143}{10\,000} \cdot 5{,}74 \text{ Kilogr.} = 99{,}10 \quad ''$$

c) Gewicht des Wassers im Zustande der größten Dichtigkeit $= \frac{303 \cdot 146 \cdot 127}{1000}$ Kilogr. $= 5618{,}20$ ''

Also Gewicht des ganzen Behälters 6257,66 Kilogr.
= 125,15 Centner.

Folglich ist das Gewicht p für einen Centimeter Länge bei einer Breite von 156 *cm* gleich 6257,6 : 313 = 19,9 oder rund 20 Kilogr.

2. Berechnung der Größen T.

Da $a = 54$ *cm*, $l_1 = 52$ *cm*, $l_2 = 51$ *cm*, $l_3 = 56$ *cm*, $b = 40$ *cm* und jeder Balken 15 *cm* breit ist, so folgt aus den allgemeinen Formeln I. (17) und (20)

$$\begin{aligned}
T_1 &= 109{,}54\,p + 15\,p = 124{,}54\,p = 2490{,}8 \text{ Kilogr.} = 49{,}816 \text{ Centner}\\
T_2 &= 17{,}10\,p + 15\,p = 32{,}10\,p = 642{,}0 \quad '' = 12{,}840 \quad ''\\
T_3 &= 47{,}10\,p + 15\,p = 62{,}10\,p = 1242{,}0 \quad '' = 24{,}840 \quad ''\\
T_4 &= 79{,}26\,p + 15\,p = 94{,}26\,p = 1885{,}2 \quad '' = 37{,}704 \quad ''\\
T_1 + T_2 + T_3 + T_4 &= 313{,}00\,p = 6260{,}0 \text{ Kilogr.} = 125{,}200 \text{ Centner}
\end{aligned}$$

Demnach ist der Balken $Aa\,A_1a_1$ am stärksten beansprucht. Ist er im Stande die Last zu tragen, so folgt dies selbstverständlich von den übrigen. Der folgende Paragraph enthält die darauf bezüglichen Berechnungen.

3. Berechnung der Tragfähigkeit des ersten Balkens.

In Fig. III. sei AD die Länge des Balkens zwischen den Stützmauern AA_1 und DD_1, $BC = l_2$ die Breite des Wasserbehälters, $AB = l_1$, $CD = l_3$. Das Eigengewicht des Balkens für den Centimeter Länge sei p, dasjenige der Belastung für den Centimeter gleich q, R und S seien die von den Mauern ausgeübten Reaktionen. Dann ist nach den Bedingungen des Gleichgewichts

$$R + S = p\,(l_1 + l_2 + l_3) + q\,l_2,$$

$$(1) \qquad R\,(l_1 + l_2 + l_3) - \left\{\frac{1}{2}\,p\,(l_1 + l_2 + l_3)^2 + q\,l_2\,(l_3 + \frac{1}{2}\,l_2)\right\} = 0,$$

$$S\,(l_1 + l_2 + l_3) - \left\{\frac{1}{2}\,p\,(l_1 + l_2 + l_3)^2 + q\,l_2\,(l + \frac{1}{2}\,l_2)\right\} = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hieraus folgt

$$R = \frac{1}{2} p (l_1 + l_2 + l_3) + \frac{q l_2 (l_3 + \frac{1}{2} l_2)}{l_1 + l_2 + l_3},$$

(2)

$$S = \frac{1}{2} p (l_1 + l_2 + l_3) + \frac{q l_2 (l_1 + \frac{1}{2} l_2)}{l_1 + l_2 + l_3}.$$

Bezeichnet man die Entfernung des gefährlichen Querschnitts F des Balkens, d. h. des Punktes desselben, in welchem der Bruch bei Überlastung eintreten würde, von D gerechnet mit x, so müßte sein

(3) $$S - xq - (l_3 + x) p = 0,$$

woraus folgt

(4) $$x = \frac{S - p l_3}{p + q}.$$

Die Größe des Biegungsmoments M_x, welches auf diesen Punkt bezogen wird und dort sein Maximum erreicht, würde also sein

(5) $$M_x = S (l_3 + x) - \frac{1}{2} p (l_3 + x)^2 - \frac{1}{2} q x^2.$$

Nach bekannten Principien der Statik ist der Zug σ in der äußersten Faser des Balkens im gefährlichen Querschnitt

(6) $$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x h}{J},$$

wo h die Höhe des Balkens und J das Trägheitsmoment seines Querschnitts bezogen auf die neutrale Achse bedeutet. Da der Querschnitt ein Rechteck von der Breite b und der Höhe h ist, so hat man

$$J = \frac{1}{12} b h^3,$$

also

(7) $$\sigma = \frac{6 M_x}{b h^2}.$$

Im vorliegenden Falle ist $b = 15$ *cm*, $h = 32$ *cm*, $l_1 = 151$ *cm*, $l_2 = 156$ *cm*, $l_3 = 50$ *cm*. Demnach

$$p = 15 \cdot 32 \cdot 0{,}6 \text{ Gr.} = 288 \text{ Gr.} = 0{,}288 \text{ Kilogr.}$$

$$q = T_1 : 156 = 15{,}97 \text{ Kilogr.}$$

folglich

$$R = \frac{1}{2} \cdot 0{,}288 \cdot 357 + \frac{2490{,}8 \cdot 128}{357} = 944{,}5 \text{ Kilogr.}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 0{,}288 \cdot 357 + \frac{2490{,}8 \cdot 229}{357} = 1649{,}1 \text{ Kilogr.}$$

(8) $$x = \frac{1649{,}1 - 0{,}288 \cdot 50}{16{,}255} = 100{,}57 \text{ cm.}$$

(9) $$M_x = \frac{1}{2} \cdot 15{,}967 \cdot 100{,}57 \cdot 200{,}57 + 0{,}144 \cdot 150{,}57^2 = 164303 \text{ Kilogr.-cm.}$$

(10) $$\sigma = \frac{6 \cdot 164303}{15 \cdot 32^2} = 64{,}2 \text{ Kilogr.}$$

Demnach hat die äußerste Faser des Balkens einen Zug von 64,2 Kilogr. auf den Quadratcentimeter auszuhalten. Bei staatlichen Bauten ist vorgeschrieben, daß dieser Zug nur 60 Kilogr. betragen dürfe. Dabei ist zu bemerken, daß eine 10fache Sicherheit bei Holzkonstruktionen verlangt wird, d. h. die Stärke des Materials muß 10 mal so groß sein, als die Berechnung auf Grund der angestellten Versuche über die Tragfähigkeit ergiebt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In Betreff der Größe der zulässigen Belastung führe ich noch folgende Autoren an:

Brandt*) giebt für den Sicherheitsmodul gegen Zug und Druck bei Holz 70 Kilogr. pro *qcm* an und fügt ausdrücklich hinzu, daß dieser so niedrig und sicher bemessen sei, daß er bei einer einigermaßen guten Holzgattung unbedingt auf 80 Kilogr. erhöht werden könne.

Winkler**) bestimmt die Größe f eines Querschnitts von Hölzern durch die Formel

$$f = \frac{P_0 + mP_1}{k_1},$$

wo P_0 die von dem Eigengewicht des Holzes, P_1 die von der Last herrührende Spannung, m einen Koefficienten bedeutet, der bei Konstruktionen, die keine Stöße auszuhalten haben, gleich 1 ist, und k_1 für Nadelholz auf 130 Kilogr. für den Quadratcentimeter angenommen wird. Hiernach würde im vorliegenden Falle der Querschnitt eines hölzernen Stabes, welcher 64,2 Kilogr. mit Sicherheit tragen soll,

$$f = \frac{P_0 + P_1}{k_1} = \frac{64{,}2}{130} = 0{,}494 \; qcm$$

betragen. Er braucht also nur einen Querschnitt von einem halben Quadratcentimeter zu haben.

Aus dem Gesagten geht demnach hervor, daß auch bei vollständiger Füllung des Wasserbehälters kein Bruch zu befürchten ist.

Bemerkung zu § 1. Wenn nur 3 Stützen vorhanden sind, so vereinfachen sich die Gleichungen (10) und (11) bedeutend und ergeben folgende Resultate:

$$T_1 = \left\{ \frac{3l_1^2 + l_1 l_2 - l_2^2 + 8al_1 + 6a^2}{8l_1} - \frac{(a^2 - b^2)\, l_2}{4l_1\,(l_1 + l_2)} \right\} p,$$

$$T_2 = \frac{l_1^3 + l_2^3 + 4l_1 l_2\,(l_1 + l_2) - 2\,(a^2 + 2b^2)\, l_1 - 2\,(2a^2 + b^2)\, l_2}{8l_1\, l_2} \cdot p,$$

$$T_3 = \left\{ \frac{3l_2^2 + l_1 l_2 - l_1^2 + 8bl_2 + 6b^2}{8l_2} - \frac{(b^2 - a^2)\, l_1}{4l_2\,(l_1 + l_2)} \right\} p.$$

---

*) Lehrbuch der Eisen-Konstruktionen mit besonderer Anwendung auf den Hochbau. Berlin 1876. Seite 55 u. 56.

**) Winkler: Wahl der zulässigen Inanspruchnahme der Baumaterialien, Zeitschrift des östreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. 1877.

Lippstadt, im Januar 1887.

Dr. E. Lottner.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

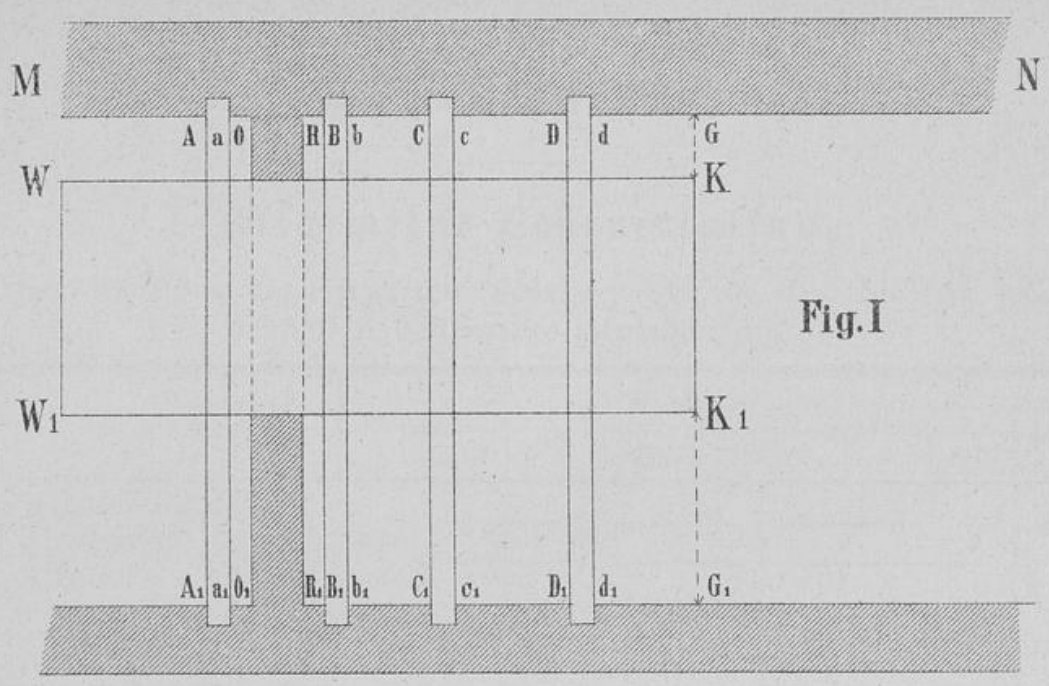

Fig. I

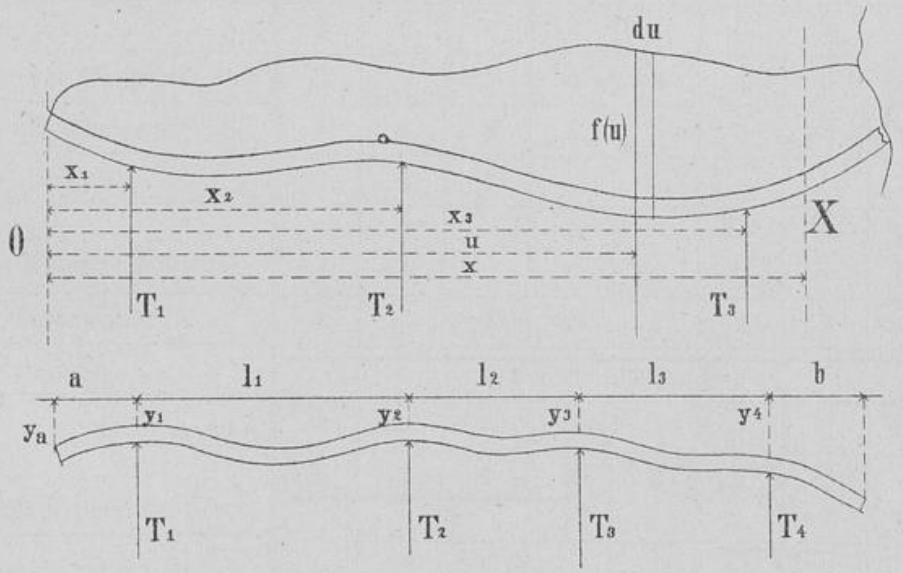

Fig. II

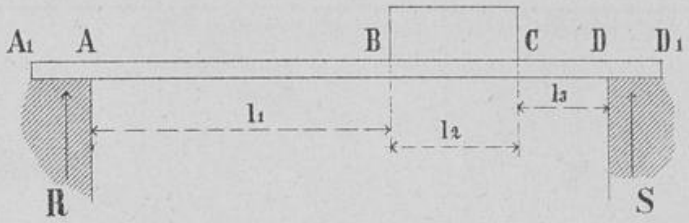

Fig. III

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf