Vorschule

der

Geometrie

von

W. Krimphoff,
wissenschaftlichem Hülfslehrer am Gymnasium zu Coesfeld.

REALGYMNASIUM DÜSSELDORF BIBLIOTHEK

Beilage zum Progr. des Königl. Gymnasiums zu Coesfeld 1887/8. Nro. 333.

Essen,
Druck von G. D. Bädeker.
1888.

333 900 3 (1888)

226, 48b

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK
DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vorschule

der

Geometrie

von

W. Krimphoff,
wissenschaftlichem Hülfslehrer am Gymnasium zu Coesfeld.

Beilage zum Progr. des Königl. Gymnasiums zu Coesfeld 1887/8. Nro. 333.

Essen,
Druck von G. D. Bädeker.
1888.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vorwort.

Vorliegende Vorschule ist zunächst für den Gebrauch in der Quarta und Untertertia des hiesigen Gymnasiums bestimmt. An die Einhaltung der getroffenen Anordnung ist der Lehrer nicht gebunden, er kann auch beim ersten Durchnehmen die Beweise fallen lassen.

Das dritte und vierte Kriterium sind nicht korrekt bewiesen und sollten es auch nicht; die Art ihrer Anwendung ist dagegen unanfechtbar; der Schüler kommt somit nicht in die Lage, umlernen zu müssen. Den strengen Beweis für die obigen Kriterien hat der spätere Unterricht hinzuzufügen. Denselben aber, wie es gewöhnlich geschieht, in den Anfang des Unterrichts zu stellen, ist ein schwerer didaktischer Fehler und führt obendrein zu ganz erheblichen Schwierigkeiten; so z. B. wenn es heißt: der Schüler denke sich den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks halbiert und bringe die entstandenen Dreiecke zur Deckung, obschon ihm weder die Halbierung eines Winkels, noch die Kongruenz der Dreiecke bekannt ist.

In der Parallelentheorie ist nach dem Vorgange von Petersen ebenso eine vom Herkommen abweichende Methode befolgt. Zunächst wird der Satz von der Winkelsumme des Dreiecks durch die Methode des Umschreitens gewonnen und für verschiedene Winkelsätze verwandt. Die eigentliche Lehre von den Parallelen ist auf diesen Satz gestützt, jedoch ganz ans Ende gerückt. Von manchen unleugbaren Vorteilen abgesehen, wird hierdurch die Schwierigkeit vermieden, daß der Kongruenzbegriff fast zu allererst bei unendlich ausgedehnten Gebilden angewandt wird, die nicht einmal kongruent sind.

Nach Darlegung der leitenden Gesichtspunkte äußert der Verfasser seine Meinung dahin, daß der immer mehr zur Geltung kommende Grundsatz: Lösung der Aufgabe ist Ziel und Zweck des mathematischen Unterrichts dereinst ohne Widerspruch zum Besten der Schüler herrschen wird.

W. Krimphoff.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Inhalts-Verzeichnis.

		Seite
§. I.	Gerade Linie und Strecke	1
§. II.	Der Kreis	1
§. III.	Erklärung des Winkels	2
§. IV.	Nebenwinkel und Scheitelwinkel	3
§. V.	Das Dreieck	4
§. VI.	Konstruktionsaufgaben und die Kongruenz der Dreiecke	6
§. VII.	Konstruktionsaufgaben und Lehrsätze	9
§. VIII.	Fortsetzung der Lehrsätze vom Dreieck	14
§. IX.	Konstruktionsaufgaben	15
§. X.	Von den parallelen Linien	16

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. I. Gerade Linie und Strecke.

Durch einen Punkt*) kann man unzählig viele gerade Linien ziehen.

Zwei gerade Linien können sich nur in einem Punkte schneiden, oder anders ausgedrückt, sie können nur einen Punkt gemeinsam haben.

Durch zwei Punkte kann man nur eine gerade Linie ziehen.

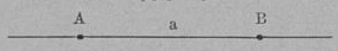
Aufg. 1. Ziehe alle möglichen Verbindungslinien zwischen 3, 4, 5, 6, 7, 8 Punkten.

Aufg. 2. Bestimme die Anzahl der Schnittpunkte von 3, 4, 5, 6, 7, 8 geraden Linien.

Statt „gerade Linie" sagt man häufig Gerade.

Der begrenzte Teil einer geraden Linie heißt Strecke.**)

(Fig. 1.)



§. II. Der Kreis.

Wenn eine Strecke sich um ihren einen Endpunkt vollständig herumdreht, so beschreibt der andere Endpunkt eine krumme Linie, welche man Kreis nennt.

Man versteht unter Kreis auch die Fläche, welche von dieser Linie umschlossen wird.

Die Kreislinie heißt auch Peripherie (Umfang).

Der feste Punkt, um welchen sich die Strecke bei der Beschreibung eines Kreises dreht, heißt Mittelpunkt oder Centrum des Kreises.

Die Strecke zwischen dem Centrum und irgend einem Punkte der Peripherie heißt Radius (Strahl).

Jeder Kreis hat unzählig viele Radien. **Die Radien desselben Kreises sind einander gleich.**

Sie sind nämlich gleich der Strecke, durch deren Umdrehung der Kreis entstanden ist.

Wir können den Kreis also auch in folgender Weise erklären: Ein Kreis ist eine Linie, deren sämtliche Punkte von einem festen Punkte gleiche Entfernung haben.

Der Umfang eines Kreises ist um so größer, je größer der Radius ist.

Die Peripherie eines Kreises ist ungefähr $3\frac{1}{7}$ mal so groß als der doppelte Radius.***)

*) Einen Punkt bezeichnet man durch einen großen lateinischen Buchstaben.

**) Eine Strecke wird durch einen kleinen lateinischen oder zwei große lateinische Buchstaben bezeichnet, wobei letztere die Endpunkte derselben bedeuten.

***) Diese Bestimmung rührt von Archimedes her († 212 v. Chr.).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der begrenzte Teil der Peripherie heißt Kreisbogen oder Bogen.

Man teilt die Peripherie in 360 Bogengrade, den Bogengrad in 60 Bogenminuten, die Bogenminute in 60 Bogensekunden.

Aufg. 1. Wie groß ist ein Bogengrad, wenn der Radius des Kreises 5, 10, 15 cm lang ist?

Aufg. 2. Wie viel Grade, Minuten und Sekunden hat ein Bogen, der 3 cm lang ist, wenn der Radius des Kreises gleich 4, 8, 12 cm ist?

Aufg. 3. Wie lang ist ein Bogen von $20^0\ 30'\ 40''$ *), wenn der Radius gleich 6 cm ist?

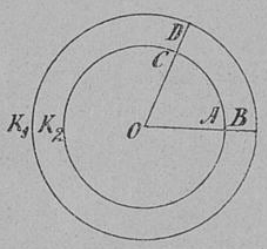
Aufg. 4. Wie groß ist der Radius, wenn die Länge eines Bogens von $45^0\ 50'$ 5 cm oder 6 cm beträgt?

Jeder Punkt der Strecke OB, z. B. A, beschreibt bei der Drehung derselben um O ebenfalls einen Kreis.

Diese Kreise haben ein gemeinsames Centrum; man nennt sie deshalb koncentrische Kreise.

Zwei vom Mittelpunkte der koncentrischen Kreise K_1 und K_2 aus gezogene Gerade bestimmen (schneiden ab) die Bogen AC und BD. Diese Bogen haben gleich viel Grade, Minuten und Sekunden; denn bei der gleichzeitigen Beschreibung der Kreise K_1 und K_2 durch Drehung der Strecke OB um O durchläuft B denselben Teil der ganzen Peripherie von K_1 wie A von K_2, oder, anders ausgedrückt, BD ist ebenso oft in der Peripherie des Kreises K_1 enthalten, als AC in K_2.

(Fig. 2.)

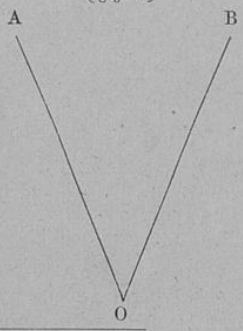


Hierauf beruht der Gebrauch des Transporteurs. Miß mit demselben mehrere Bogen.

§. III. Erklärung des Winkels.

Gegeben seien die Geraden OA, OB, die den Punkt O gemeinsam haben.

(Fig. 3.)



Durch Drehung der einen von ihnen, z. B. OB um O, kann man bewirken, daß dieselben zusammenfallen. Die Punkte der sich drehenden Geraden beschreiben hierbei, wie vorhin gezeigt ist, Bogen, welche gleichviel Grade, Minuten und Sekunden haben. Je mehr Grade, Minuten und Sekunden die Bogen haben, desto größer ist die Drehung.

Die Größe der Drehung, welche die eine von zwei Geraden um ihren gemeinsamen Punkt machen muß, um mit der anderen zusammenzufallen, nennt man einen Winkel**).

*) $20^0\ 30'\ 40''$ heißt 20 Grad, 30 Minuten, 40 Sekunden.

**) Das Zeichen $\sphericalangle$ bedeutet Winkel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn man sagt, ein Winkel habe eine bestimmte Anzahl Grade, Minuten und Sekunden, so heißt das nichts anderes, als die Bogen, die bei der oben angegebenen Drehung entstehen, haben dieselbe Anzahl Grade, Minuten und Sekunden.

Die Größe eines Winkels kann man nämlich nicht anders bestimmen, als durch die Größe dieser Bogen.

Die einen Winkel bildenden Geraden heißen die Schenkel, ihr gemeinsamer Punkt heißt der Scheitelpunkt des Winkels.

Die Größe eines Winkels ist unabhängig von der Länge der Schenkel.

Es ist nämlich einerlei, ob ich die Größe eines Winkels bestimme durch einen Kreisbogen, dessen Radius klein ist, oder durch einen Kreisbogen, dessen Radius groß ist.

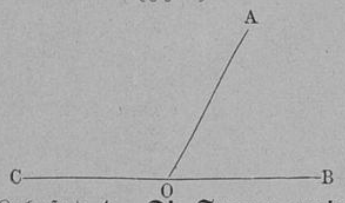
Aufg. 1. Zeichne Winkel, welche 15°, 18°, 30°, 45°, 90°, 180° haben und miß mehrere gegebene Winkel vermittelst des Transporteurs.

Ein Winkel von 90° heißt ein rechter, ein Winkel von 180° ein flacher, da seine Schenkel eine gerade Linie bilden. Winkel, welche weniger als 90° haben, heißen spitze, solche, die mehr als 90°, aber weniger als 180° haben, stumpfe, und diejenigen, welche mehr als 180° haben, erhabene.

Komplementwinkel sind solche Winkel, die zusammen 90° haben, Supplementwinkel solche, die zusammen 180° haben.

§. IV. Nebenwinkel und Scheitelwinkel.

(Fig. 4.)



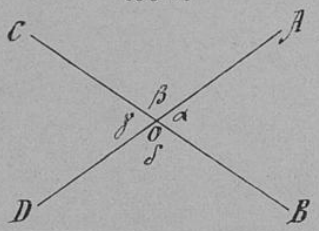
Verlängert man einen Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus, so entsteht ein neuer Winkel, den man Nebenwinkel nennt.

Lehrsatz 1. **Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich 2 R*).**

Beweis: Die Winkel AOB und AOC bilden zusammen den flachen Winkel BOC; darum ist

**) $\sphericalangle AOB + \sphericalangle AOC = 2R$.

(Fig. 5.)



Verlängert man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus, so entstehen 3 neue Winkel. Je zwei von diesen, die einander gegenüber liegen, heißen Scheitelwinkel. α und γ, β und δ sind also Scheitelwinkel.

*) R bedeutet einen rechten Winkel.

**) $\sphericalangle$ AOB oder α (siehe Fig. 4 u. 5) ist der von AO und OB gebildete Winkel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lehrsatz 2. **Scheitelwinkel sind einander gleich.** (Siehe Fig. 5.)

Es ist $\sphericalangle$ AOB = $\sphericalangle$ DOC; denn durch dieselbe Drehung, durch welche das Zusammenfallen von OA mit OB bewirkt wird, wird auch das Zusammenfallen von OD mit OC bewirkt. Ebenso zeigt man, daß $\sphericalangle$ BOD = $\sphericalangle$ COA ist.

Anm. Zieht man durch einen Punkt beliebig viele Gerade, so ist die Summe der sämtlichen Winkel, die von je zwei auf einander folgenden Geraden gebildet werden, gleich 4 R. Warum?

§. V. Das Dreieck.

Verbindet man 3 Punkte, z. B. ABC (welche nicht in gerader Linie liegen) mit einander, so entsteht ein Dreieck.

Die Strecken BC, CA, AB (siehe Fig. 6), welche durch a, b, c bezeichnet werden, heißen die Seiten, die Punkte A, B, C die Eckpunkte des Dreiecks.

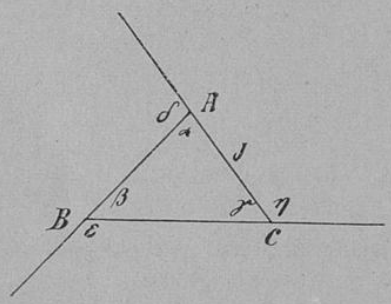
Die Winkel BAC, CBA, ACB werden α, β, γ genannt.

Aufg. 1. Bestimme von verschiedenen Dreiecken die Summe der Winkel vermittelst des Transporteurs.

Lehrsatz 3. **Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist gleich 2 R.**

Beweis: *) Von einem beliebigen Punkte einer der 3 Dreiecksseiten, z. B. von J aus gehe ich um das Dreieck herum. Um von J nach A zu gelangen, brauche ich mich nicht zu drehen. Um von A nach B zu gelangen, muß ich mich drehen um den Winkel δ, ebenso bei B um Winkel ε und bei C um Winkel η, um nach J zurückzugelangen. Bin ich nach J zurückgelangt, so habe ich eine ganze Umdrehung gemacht.

(Fig. 6.)



Es ist nun $\delta + \varepsilon + \eta = 4\,R$**).

Ferner ist
$$\left.\begin{aligned} \alpha + \delta &= 2\,R \\ \beta + \varepsilon &= 2\,R \\ \gamma + \eta &= 2\,R \end{aligned}\right\} \text{(Lehrsatz 1.)}$$

*) Der Anfänger veranschauliche sich durch Umschreiten eines Dreiecks nachfolgenden Beweis.

**) Es ist gleich, ob man bei diesem Beweise ein großes oder kleines Dreieck voraussetzt. Nimmt man ein ganz kleines an, welches ungefähr zu einem Punkte zusammengeschrumpft ist, so sieht man sehr deutlich nach der Schlußbemerkung des vorigen Paragraphen ein, daß $\delta + \varepsilon + \eta = 4\,R$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daraus folgt nach dem Grundsatze: Gleiches zu Gleichem addiert giebt Gleiches:

$$\alpha + \delta + \beta + \varepsilon + \gamma + \eta = 6\,\mathrm{R} \text{ oder}$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \eta = 6\,\mathrm{R}.$$

Da nun $\delta + \varepsilon + \eta = 4\,\mathrm{R}$,

so erhält man durch Anwendung des Grundsatzes: Gleiches von Gleichem subtrahiert giebt Gleiches:

$\alpha + \beta + \gamma = 2\,\mathrm{R}$, was bewiesen werden soll.

Aufg. 2. Es sei

1. $\alpha = 55^0$, $\beta = 63^0$,
2. $\alpha = 34^0\,17'$, $\beta = 39^0\,25'$,
3. $\alpha = 47^0\,28'\,39''$, $\beta = 88^0\,59'\,27''$,
4. $\alpha = 59^0\,47'\,25'',59$, $\beta = 44^0\,18'\,23'',7$.

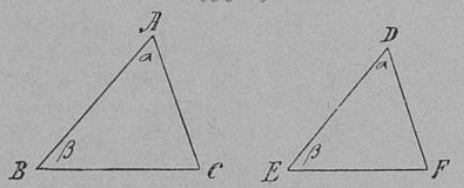
Wie groß ist dann γ?

Zusatz 1. Sind zwei Winkel eines Dreiecks bekannt, so ist auch der dritte bekannt.

Zusatz 2. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so stimmen sie auch im dritten überein.

Beweis: Es sei $\sphericalangle\,\mathrm{BAC} = \alpha$ und $\sphericalangle\,\mathrm{EDF} = \alpha$, ferner
$\sphericalangle\,\mathrm{ABC} = \beta$ und $\sphericalangle\,\mathrm{DEF} = \beta$.

(Fig. 7.)



Dann ist $\sphericalangle\,\mathrm{ACB} = 2\,\mathrm{R} - \alpha - \beta$,
und ebenso $\sphericalangle\,\mathrm{DFE} = 2\,\mathrm{R} - \alpha - \beta$;
folglich ist $\sphericalangle\,\mathrm{ACB} = \sphericalangle\,\mathrm{DFE}$;

denn: Zwei Größen, welche derselben dritten gleich sind, sind auch unter einander gleich.

Zusatz 3. In einem Dreieck kann nur **ein** Winkel ein rechter oder stumpfer sein.

Ist in einem Dreieck ein Winkel ein rechter, so heißt dasselbe rechtwinklig; die den rechten Winkel bildenden Seiten heißen die Katheten, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt die Hypotenuse*).

Ist in einem Dreieck ein Winkel ein stumpfer, so heißt dasselbe stumpfwinklig.

Sind in einem Dreieck alle Winkel spitze, so heißt dasselbe spitzwinklig.

*) Merke: Hypotenuse, Kathete.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Nebenwinkel eines Dreieckswinkels heißt Außenwinkel des Dreiecks.

Ein Dreieck hat 6 Außenwinkel.

Lehrsatz 5. **Der Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Dreieckswinkel.** (Siehe Fig. 6.)

Beweis:

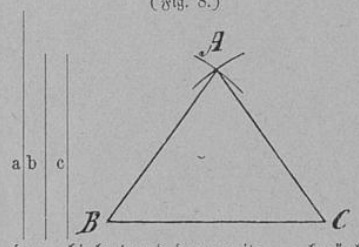
$$\begin{array}{l} \gamma + \eta = 2\ R \\ \alpha + \beta + \gamma = 2\ R \\ \hline \gamma + \eta = \alpha + \beta + \gamma \\ \gamma = \gamma \\ \hline \eta = \alpha + \beta \end{array}$$

§. VI. Konstruktionsaufgaben und die Kongruenz der Dreiecke.

1. Grundaufgabe. Ein Dreieck aus den 3 Seiten zu konstruieren.

Auflösung: Ich lege die Strecke a hin, d. h. auf einer beliebigen Geraden trage ich von einem beliebigen Punkte eine Strecke BC = a ab. Sodann beschreibe ich um B mit c und um C mit b einen Kreis. Den Durchschnittspunkt der beiden Kreise nenne ich A, verbinde A mit B und C, und ABC ist das verlangte Dreieck.

(Fig. 8.)



Anmerkung: Erhält man ein anderes Dreieck, wenn man statt a die Strecke b oder c hinlegt und dann mit a, c bezüglich a, b Kreise beschreibt?

Konstruiere aus denselben drei Strecken (a, b, c) zwei Dreiecke ABC und DEF, in welchen AB = DE, AC = DF, BC = EF ist, schneide sie aus und lege sie so aufeinander, daß A auf D, B auf E zu liegen kommt. Wo liegt dann C? (Ähnlich verfahre bei der 2. 3. 4. Grundaufgabe.)

Lehrsatz 6. **Zwei Dreiecke sind kongruent*) (deckend), wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.** (3. Kriterium.)

Beweis: Nach der obigen Konstruktion kann aus drei gegebenen Strecken (Seiten) nur ein Dreieck zusammengesetzt werden. Es müssen demnach zwei Dreiecke, welche in den drei Seiten übereinstimmen, kongruent sein; denn, wenn sie nicht kongruent wären, könnte man aus drei gegebenen Strecken zwei verschiedene Dreiecke herstellen.

---

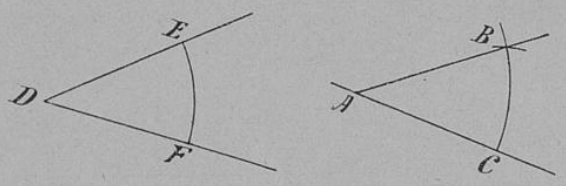
*) Das Zeichen der Kongruenz ist $\cong$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe. An eine gerade Linie in einem gegebenen Punkte einen Winkel anzulegen.

Auflösung: Ich beschreibe um den Scheitelpunkt D des gegebenen Winkels FDE mit einem beliebigen Radius einen Kreis; die Schnittpunkte

(Fig. 9.)

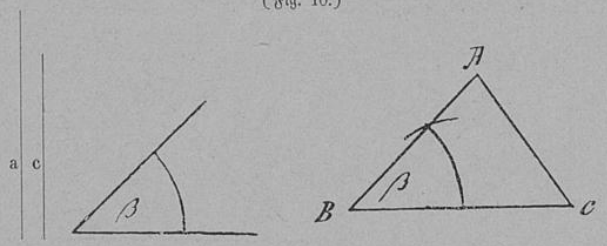


desselben mit den Schenkeln nenne ich E und F. Mit demselben Radius beschreibe ich um den Punkt A einen Kreis. Den Schnittpunkt mit der gegebenen Geraden nenne ich C. Ich beschreibe sodann um C mit der Strecke EF einen Kreis. Derselbe schneide den vorigen Kreis im Punkte B. Ich verbinde B mit A, und Winkel CAB ist gleich dem gegebenen Winkel FDE; denn denkt man sich noch C mit B verbunden, so ist $\triangle$ CAB $\cong$ $\triangle$ FDE. Warum? Folglich sind in den Dreiecken außer den Seiten auch die Winkel paarweise gleich. Darum ist $\sphericalangle$ CAB = $\sphericalangle$ FDE.

2. Grundaufgabe. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem von ihnen gebildeten Winkel.

Auflösung: Ich lege a hin, d. h. auf einer beliebigen Geraden ꝛc. Die Endpunkte nenne ich B und C. Sodann lege ich an BC im Punkte B

(Fig. 10.)



den Winkel β an. Auf dem freien Schenkel desselben trage ich die Strecke c ab, nenne den Endpunkt A, verbinde A mit C, und ABC ist das verlangte Dreieck.

Warum ist BC = a, BA = c, $\sphericalangle$ ABC = β?

Lehrsatz 7. **Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem von ihnen gebildeten Winkel.** (1. Kriterium.)

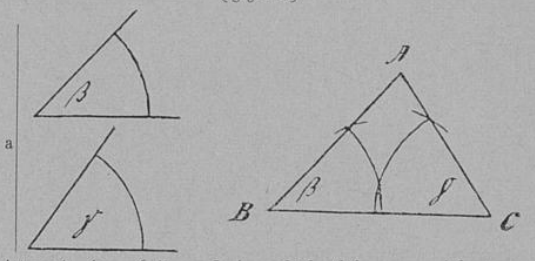
Beweis wie bei Lehrsatz 6.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Grundaufgabe. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

Auflösung: Ich lege die Strecke a hin, d. h. ꝛc., und an dieselbe in den Endpunkten B und C lege ich die Winkel β und γ an.

(Fig. 11.)



Den Schnittpunkt der beiden freien Schenkel nenne ich A, und ABC ist das verlangte Dreieck.

Lehrsatz 8. **Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.** (2. Kriterium.)

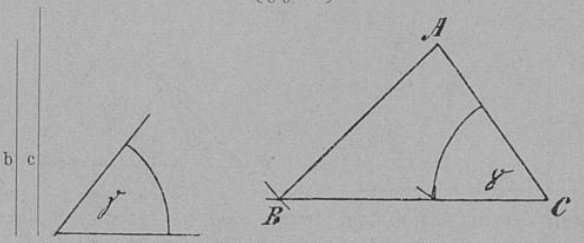
Beweis wie bei Lehrsatz 6.

Nach Lehrsatz 3, Zusatz 2 können wir diesen Kongruenzsatz auch folgendermaßen aussprechen: **Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in einer Seite und zwei Winkeln.**

4. Grundaufgabe. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem Winkel, welcher der größern von ihnen gegenüberliegt.

Auflösung: Ich lege die Strecke b hin. Die Endpunkte nenne

(Fig. 12.)



ich A und C und lege an AC im Punkte C den Winkel γ an. Sodann beschreibe ich um A mit c als Radius einen Kreis, welcher den freien Schenkel des Winkels γ im Punkte B schneidet. Ich verbinde B mit A und Dreieck ABC ist das verlangte Dreieck.

Anmerkung: Der um A mit c beschriebene Kreis schneidet den Schenkel des Winkels γ in einem zweiten Punkte D. Warum ist ADC kein der Aufgabe entsprechendes Dreieck?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lehrsatz 9. **Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem Winkel, welcher der größern von ihnen gegenüberliegt.**

Beweis wie bei Lehrsatz 6.

§. VII. Konstruktionsaufgaben und Lehrsätze.

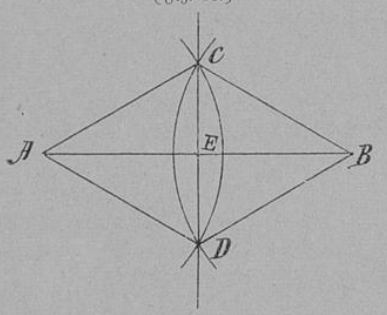
Eine Linie steht auf einer anderen senkrecht*), wenn sie mit derselben einen rechten Winkel bildet.

Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist die im Mittelpunkte derselben errichtete Senkrechte.

Aufg. 1. Auf einer Strecke die Mittelsenkrechte zu errichten.

Auflösung: Ich beschreibe um A und B mit demselben hinlänglich großen Radius einen Kreis. Die Verbindungslinie ihrer beiden Schnittpunkte, C und D, ist die verlangte Mittelsenkrechte.

(Fig. 13.)



Beweis: Es ist zu beweisen, daß AE = BE und ∢ AEC = R ist.

Zu diesem Zwecke verbinde ich C und D mit A und B. Dann ist △ CAD ≅ △ CBD. (3. Kr.)

Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt, daß ihre Winkel paarweise gleich sind. Es ist also auch ∢ ACE = ∢ BCE.

Nun ist ferner △ ACE ≅ △ BCE (1. Kr.); daher ist AE = BE, ∢ AEC = ∢ BEC, und da beide zusammen 2 R betragen, so beträgt jeder von ihnen 1 R.

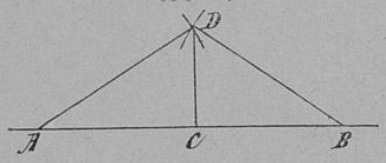
Aufg. 2. Eine Strecke zu halbieren.

Konstruktion und Beweis wie bei Aufg. 1.

Aufg. 3. In einem Punkte einer Geraden die Senkrechte zu errichten.

Auflösung: Man trage von dem Punkte C nach beiden Seiten auf der Geraden gleiche Strecken CA und CB ab und beschreibe um A und B mit demselben hinlänglich großen Radius je einen Kreis. Die Kreise mögen sich schneiden im Punkte D. Ich verbinde C mit D und CD steht senkrecht auf AB.

(Fig. 14.)



*) Das Zeichen ⊥ bedeutet senkrecht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis: $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (3. Kr.);
daher $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$,
und folglich $\sphericalangle ACD = R$

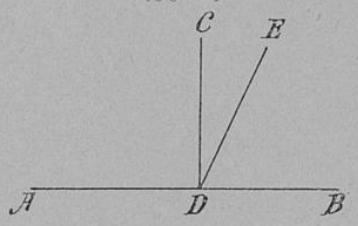
Lehrsatz 10. **In einem Punkte einer Geraden kann man nur eine Senkrechte errichten.**

Annahme: $CD \perp AB$.

Behauptung: CD ist die einzige Senkrechte auf AB im Punkte D.

Beweis: Ich nehme an, es sei auch $DE \perp AB$.

(Fig. 15.)

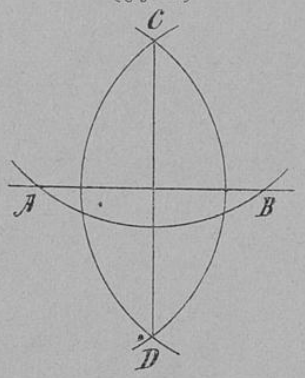


Dann wäre $\sphericalangle BDE = R$, und somit, da auch $\sphericalangle BDC = R$ ist, $\sphericalangle BDE = \sphericalangle BDC$, was nicht möglich ist nach dem Grundsatze: Kein Teil kann gleich dem Ganzen sein.

Aufg. 4. Von einem Punkte C die Senkrechte auf eine Gerade zu fällen.

Auflösung: Man beschreibe mit hinlänglich großem Radius um den Punkt C einen Kreis, welcher die Gerade in den Punkten A und B

(Fig. 16.)



schneide. Um A und B beschreibe man mit AC als Radius einen Kreis. Der zweite Schnittpunkt heiße D. Es ist $CD \perp AB$.

Beweis wie bei Aufg. 1.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

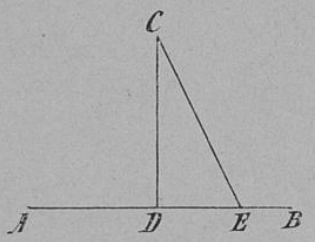
Lehrsatz 11. **Von einem Punkte kann man nur eine Senkrechte auf eine gerade Linie fällen.**

Annahme: CD ⊥ AB.

Behauptung: CD ist die einzige Senkrechte von C auf AB.

Beweis: Ich nehme an, außer CD sei auch noch CE ⊥ AB. Dann wären in dem Dreiecke CDE zwei rechte Winkel, was nicht möglich ist; folglich kann CE nicht ⊥ AB sein.

(Fig. 17.)



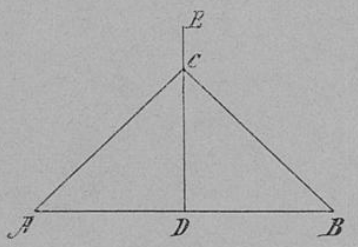
Lehrsatz 12. **Jeder Punkt der Mittelsenkrechten hat von den Endpunkten der Strecke gleiche Entfernung.**

Annahme: AD = DB, ED ⊥ AB.

Behauptung: CA = CB.

Beweis: △ ADC ≅ △ BDC (1. Kr.); daher CA = CB.

(Fig. 18.)



Lehrsatz 13. **Hat ein Punkt gleiche Entfernung von den Endpunkten einer Strecke, so liegt der Punkt auf der Mittelsenkrechten der Strecke.**

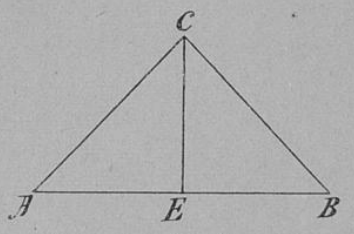
Annahme: CA = CB.

Behauptung: Die Mittelsenkrechte zu AB geht durch C.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis: Ich verbinde C mit E, dem Mittelpunkte von AB. Dann ist

(Fig. 19.)



$\triangle$ AEC $\cong$ $\triangle$ BEC (3. Kr.); daraus folgt $\sphericalangle$ AEC = R, d. h. EC ist Mittelsenkrechte von AB.

Ein Dreieck, in welchem zwei Seiten gleich sind, ist ein gleichschenkliges.

Die gleichen Seiten heißen Scheitelseiten, ihr gemeinsamer Punkt heißt die Spitze, die ungleiche Seite die Grundlinie.

Lehrsatz 14. **In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.**

Man fälle von der Spitze die Senkrechte auf die Grundlinie. Aus der Kongruenz der entstandenen Dreiecke (4. Kr.) folgt die Gleichheit der Winkel an der Grundlinie.

Lehrsatz 15. **Sind in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich, so ist dasselbe ein gleichschenkliges.**

Beweis ähnlich dem vorigen.

Fällt man in einem Dreiecke von einem Eckpunkte eine Senkrechte auf die gegenüberliegende Dreiecksseite, so heißt dieselbe die Höhe zu dieser Seite. Es giebt in einem Dreiecke drei Höhen.*)

Verbindet man in einem Dreiecke einen Eckpunkt mit dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seite, so heißt diese Verbindungslinie die Mittellinie. Es giebt in einem Dreiecke drei Mittellinien.**)

Lehrsatz 16. **Im gleichschenkligen Dreiecke fallen die Höhe und Mittellinie zur Grundlinie und der Halbierer des Winkels an der Spitze in eine Linie zusammen.**

Beweis leicht.

Ein Dreieck heißt gleichseitig, wenn seine drei Seiten einander gleich sind.

Lehrsatz 17. **In einem gleichseitigen Dreiecke hat jeder Winkel 60°.**

Beweis leicht.

Aufg. 5. Konstruiere einen Winkel von 60°.

---

*) h_a, h_b, h_c bezeichnen die Höhen zu a, b und c.

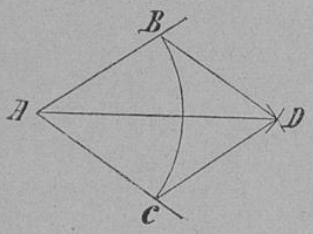
**) t_a, t_b, t_c bezeichnen die Mittellinien zu a, b und c. Ähnlich bedeuten m_α, m_β, m_γ die Halbierer der Winkel α, β und γ.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufg. 6. Einen Winkel zu halbieren.

Auflösung: Ich beschreibe um den Scheitelpunkt A des Winkels mit einem beliebigen Radius einen Kreis. Die Schnittpunkte desselben mit den Schenkeln nenne ich B und C. Dann beschreibe ich um B und um C mit demselben hinlänglich großen Radius einen Kreis. Den Schnittpunkt der Kreise nenne ich D, verbinde A mit D, und AD löst die Aufgabe.

(Fig. 20.)



Beweis: AD ist der Halbierer von ∢ BAC, wenn ∢ BAD = ∢ CAD ist. Um die Gleichheit derselben zu beweisen, verbinde ich D mit B und C, dann ist △ BAD ≅ △ CAD (3. Kr.); daraus folgt, daß ∢ BAD = ∢ CAD ist.

Die Länge der Senkrechten, welche man von einem Punkte auf eine gerade Linie fällen kann, nennt man den Abstand des Punktes von der Geraden.

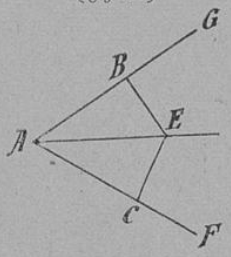
Lehrsatz 18. **Jeder Punkt des Winkelhalbierers hat von den Schenkeln des Winkels gleichen Abstand.**

Annahme: ∢ BAE = ∢ CAE, EB ⊥ AG, EC ⊥ AF.

Behauptung: EB = EC.

Beweis: △ EAB ≅ △ EAC (2. Kr.); daher ist EB = EC.

(Fig. 21.)



Lehrsatz 19. **Hat ein Punkt von den Schenkeln des Winkels gleichen Abstand, so liegt er auf dem Winkelhalbierer.**

Annahme: BE ⊥ AG, CE ⊥ AF, BE = CE. (Siehe Fig. 21.)

Behauptung: AE ist Halbierer des Winkels BAC.

Beweis: AE ist Winkelhalbierer, wenn ∢ BAE = ∢ CAE ist. Nun ist aber △ BAE ≅ △ CAE (4. Kr.); folglich ist ∢ BAE = ∢ CAE.

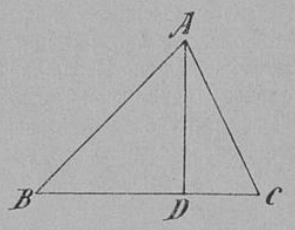
Konstruiere in einem Dreiecke die Halbierungslinien seiner Winkel und deren Nebenwinkel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufg. 7. Ein Dreieck zu konstruieren aus b, c, h_a.

Auflösung: Angenommen ABC sei das verlangte Dreieck. Ich fälle von A die Senkrechte auf BC; den Fußpunkt nenne ich D. Es ist nun Dreieck DAC konstruierbar; denn $AC = b$, $AD = ha$, $\sphericalangle ADC = R$ (4. Grundaufgabe). Nachdem das Dreieck DAC konstruiert ist, findet man B, indem man DC über D hinaus verlängert und dann um A mit c einen Kreis beschreibt. Der Schnittpunkt mit der verlängerten Geraden CD ist dann der dritte Eckpunkt B des verlangten Dreiecks.

(Fig. 22.)



Aufg. 8. Ein Dreieck zu konstruieren aus a, b, h_a, — c, h_a, α, — b, γ, t_a, — a, t_a, c, — b, α, m_α.

§. VIII. Fortsetzung der Lehrsätze vom Dreieck.

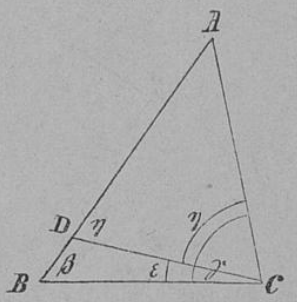
Lehrsatz 20. **In einem Dreiecke liegt der größeren von zwei Seiten der größere Winkel gegenüber.**

Annahme: $AB > AC$.*)

Behauptung: $\gamma > \beta$.

Beweis: Zum Beweise trage ich AC von A aus auf AB ab. Den Endpunkt nenne ich D. Dann ist Dreieck ADC ein gleichschenkliges. Ich darf also den Winkel ADC η nennen, wenn ich $\sphericalangle$ DCA mit η bezeichne.

(Fig. 23.)



Nun ist aber $\eta = \beta + \varepsilon$, also

$$\frac{\eta > \beta \text{ und da } \gamma > \eta}{\gamma > \beta.}$$

*) $>$ bedeutet größer, $<$ kleiner.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lehrsatz 21. **Dem größeren Dreieckswinkel liegt die größere Seite gegenüber.** (Siehe Fig. 23.)

Annahme: $\gamma > \beta$.

Behauptung: $AB > AC$.

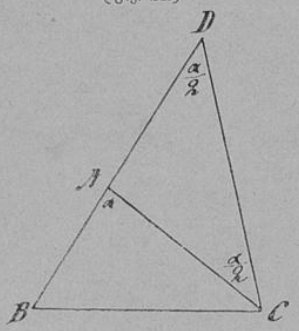
Beweis: Angenommen AB wäre nicht größer als AC. Dann müßte $AB < AC$ oder $AB = AC$ sein. Wäre $AB < AC$, so müßte $\gamma < \beta$ sein, und wäre $AB = AC$, so müßte $\gamma = \beta$ sein. Beides ist aber durch die Annahme ausgeschlossen; folglich muß $AB > AC$ sein.

Lehrsatz 22. **Die Summe zweier Dreiecksseiten ist größer, als die dritte.**

Behauptung: $AB + AC > BC$.

Beweis: Zum Beweise trage ich AC auf der über A hinaus ver-

(Fig. 24.)



längerten Seite AB vom Punkte A aus ab. Den Endpunkt nenne ich D. Dann verbinde ich D mit C, und es ist $BD = AB + AC$. Die Winkel ADC und ACD darf ich beide $\frac{\alpha}{2}$ nennen.

Es ist nun $\sphericalangle BCD > \sphericalangle BDC$;
folglich ist $BD > BC$; (Lehrsatz 21.)
also $AB + AC > BC$.

§. IX. Konstruktionsaufgaben.

Aufgabe 1. Ein Dreieck zu konstruieren aus a, b + c, α (Siehe v. Fig.).

Auflösung: ABC sei das verlangte Dreieck. Es ist $BC = a$, $\sphericalangle BAC = \alpha$. Die Summe b + c stelle ich dadurch her, daß ich auf der Verlängerung von BA über A hinaus von A aus AC abtrage. Den Endpunkt nenne ich D, verbinde D mit C, und Dreieck BDC ist konstruierbar.

Denn es ist 1. $BC = a$, 2. $BD = b + c$, 3. $\sphericalangle BDC = \frac{\alpha}{2}$. Durch das Dreieck BDC sind zwei Eckpunkte des Dreiecks ABC bestimmt, B und C.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der dritte liegt auf BD und auf der Mittelsenkrechten zu DC. Um also das Dreieck zu konstruieren, lege ich die Strecke b + c hin und nenne die Endpunkte B und D. Dann lege ich an BD im Punkte D den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ an und beschreibe um B mit a einen Kreis. Dieser schneidet den freien Schenkel des Winkels $\frac{\alpha}{2}$ im Punkte C. Ich verbinde C mit B. Sodann errichte ich auf DC die Mittelsenkrechte. Den Schnittpunkt derselben mit BD nenne ich A. Ich verbinde A mit C, und Dreieck ABC löst die Aufgabe.

Beweis: Es ist zu beweisen, daß 1. AB + AC = b + c, 2. $\sphericalangle$ BAC = α ist.

Es ist AC = AD; denn DAC ist ein gleichschenkliges Dreieck. (Lehrsatz 12.) Folglich ist AB + AC = b + c.

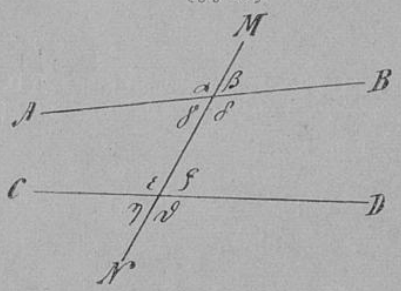
Da ferner $\sphericalangle$ ADC = $\sphericalangle$ DCA = $\frac{\alpha}{2}$ ist, so ist $\sphericalangle$ BAC = $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$.

Aufgabe 2. Ein Dreieck zu konstruieren aus 1. a, b + c, β. 2. a, b + c, γ. 3. a, b − c, α. 4. a, b − c, β.

§. X. Von den parallelen Linien.

Eine Linie, welche mehrere andere Linien schneidet, heißt Transversale.

(Fig. 25.)



Die Linien AB und CD seien geschnitten von der Transversalen MN.

Je zwei Winkel, die an derselben Seite der Transversalen und an derselben Seite der geschnittenen Linie liegen, heißen entsprechende Winkel, also α und ε, β und ζ, γ und η, δ und ϑ. Je zwei Winkel, die an verschiedenen Seiten der Transversalen und an verschiedenen Seiten der geschnittenen Linien liegen, heißen Wechselwinkel, also α und ϑ, β und η, γ und ζ, δ und ε. Je zwei Winkel, die an derselben Seite der Transversalen, aber an verschiedenen Seiten der geschnittenen Linien liegen, heißen Ergänzungswinkel, also α und η, β und ϑ, γ und ε, δ und ζ.

Lehrsatz 25. **Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, so daß irgend zwei entsprechende Winkel oder irgend zwei Wechselwinkel gleich sind, oder die Summe irgend zweier**

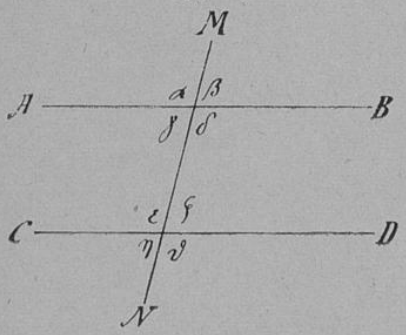
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ergänzungswinkel 2 R beträgt, so sind alle entsprechenden Winkel und alle Wechselwinkel einander gleich, und es beträgt die Summe von je zwei Ergänzungswinkeln 2 R.

Annahme: $\alpha = \varepsilon$.*)

Behauptung: $\beta = \zeta$ u. s. w.

(Fig. 26.)

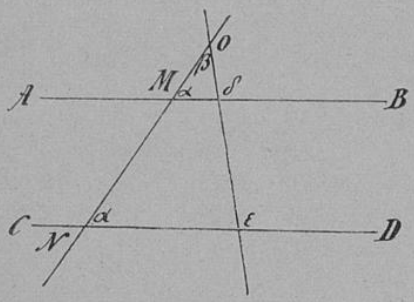


Beweis: $\alpha + \beta = 2$ R.
$\varepsilon + \zeta = 2$ R.
$\alpha + \beta = \varepsilon + \zeta$.
$\alpha = \varepsilon$;
folglich ist $\beta = \zeta$.

Lehrsatz 26. **Sind für eine Transversale die entsprechenden Winkel oder die Wechselwinkel gleich ꝛc., so sind für jede Transversale die entsprechenden Winkel gleich ꝛc.**

Beweis: Für die Transversale MN seien die entsprechenden Winkel gleich ꝛc.

(Fig. 27.)



Wenn ich den Winkel OMB α nenne, so bin ich also auch berechtigt, den Winkel OND α zu nennen.

Es ist nun

$$\delta = \beta + \alpha$$
$$\varepsilon = \beta + \alpha$$
$$\delta = \varepsilon.$$

Anmerkung. Wie wird der Beweis geführt, wenn die Transversalen sich nicht schneiden?

Kennzeichen des Parallelseins. Zwei Linien sind parallel, wenn zwei entsprechende Winkel oder zwei Wechselwinkel gleich sind, oder die Summe zweier Ergänzungswinkel 2 R beträgt.

Lehrsatz 27. **Zwei Linien, welche derselben dritten parallel sind, sind auch unter sich parallel.**

*) Es sind im ganzen 16 Annahmen möglich und demnach $16 \cdot 15 = 240$ Beweise zu führen.

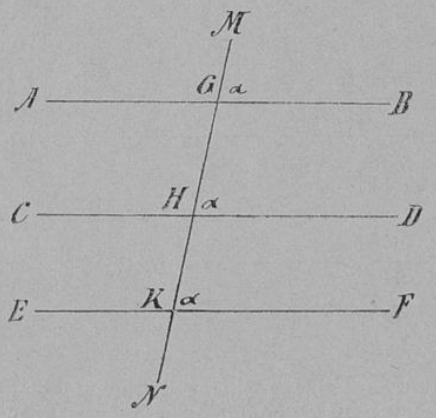
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Annahme: AB ∥ EF*) CD ∥ EF.

Behauptung: AB ∥ CD.

Beweis: Ich schneide die drei Geraden durch eine vierte MN. Die

(Fig. 28.)

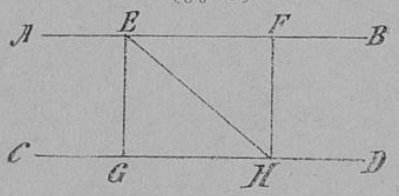


Schnittpunkte nenne ich GHK. Ich nenne den Winkel MGB α. Dann bin ich auch berechtigt, die Winkel MKF und MHD α zu nennen. Folglich ist nach vorstehendem Kennzeichen AB ∥ CD.

Lehrsatz 28. **Parallele Linien haben überall denselben Abstand.**

Beweis: Von zwei beliebigen Punkten E und F der Geraden AB fälle ich die Senkrechten auf die Parallele CD. Die Fußpunkte derselben nenne ich G und H. Ich verbinde E mit H. Es ist nun △ EGH ≅ △ HFE (2. Kr.); folglich ist EG = FH.

(Fig. 29.)



Lehrsatz 29. **Parallele Linien schneiden sich nicht.**

Beweis: Schnitten sich zwei parallele Linien, so hätten sie nicht überall denselben Abstand.

---

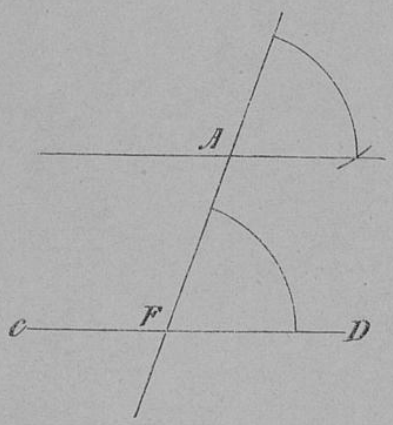
*) Das Zeichen ∥ bedeutet parallel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Grundaufgabe 5. Durch einen Punkt zu einer Geraden die Parallele zu ziehen.

Auflösung: Ich ziehe durch A eine beliebige Linie, welche CD im

(Fig. 30.)



Punkte F schneiden möge. Den Winkel AFD lege ich an derselben Seite der über A hinaus verlängerten Linie im Punkte A an als entsprechenden Winkel zu ∢ AFD. Der freie Schenkel dieses Winkels ist parallel CD.

Aus der obigen Konstruktion folgt der auch sonst leicht zu beweisende

Lehrsatz 30. **Durch einen Punkt kann man zu einer Geraden nur eine Parallele ziehen.**

Aufgabe. Zu einer geraden Linie in einem gegebenen Abstande die Parallele zu ziehen.

Auflösung: Man errichte in einem beliebigen Punkte der Geraden eine Senkrechte gleich dem gegebenen Abstande. An dieselbe lege man im Endpunkte einen rechten Winkel an.

Anmerkung: Parallele Gerade sind solche Gerade, welche in derselben Ebene liegen und sich niemals schneiden, soweit man sie auch verlängert.

Die Richtigkeit dieser Erklärung folgt aus Lehrsatz 29 und 30.

Druck von G. D. Bädeker in Essen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Grunda Geraden die
Parallele

Auflös welche CD im

Punkte F s an derselben
Seite der ü A an als ent-
sprechenden dieses Winkels
ist parallel

Aus der t zu beweisende

Lehrsa **einer Geraden**
nur eine P

Aufgab gebenen Ab-
stande die

Auflös te der Geraden
eine Senkre elbe lege man
im Endpunk

Anmer de, welche in
derselben weit man sie
auch verlä

Die Rich d 30.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf