Einige Sätze aus der niedern Analysis.

1. Eine Zahlenreihe, welche mit Eins beginnt und worin jedes Glied als Product aus der reellen, von Null verschiedenen Zahl a und aus dem vorhergehenden Gliede erscheint, läßt sich, da nun auch umgekehrt jedes Glied mittelst Division des nächstfolgenden durch a erhalten wird, über Eins hinaus nach der andern Seite hin unbegrenzt fortsetzen, und es erscheinen alsdann auf der einen Seite von Eins Producte, worin die Anzahl der gleichen Factoren a stets zunimmt, auf der andern Seite die reciproken Werthe dieser Producte. Setzt man unter jedes Glied, welches a als Faktor enthält, die für eine solche Potenz von a schon durch Cartesius eingeführte kürzere Bezeichnung, so nehmen die Exponenten dieser Potenzen nach der einen Seite hin beständig um 1 zu, also nach der andern, nämlich nach der Eins hin, bei jedem Gliede um Eins ab, und es hindert nichts, auch diejenigen Glieder, worin die Grundzahl a selbst nicht mehr als Faktor erscheint, durch Potenzen von a zu bezeichnen, deren Exponenten das Gesetz jener Abnahme befolgen, so daß z. B. noch a durch a^1, aber 1 durch a^0, $\frac{1}{a}$ durch a^{-1} u. s. f. bezeichnet wird. Man erhält auf diese Weise die beiden Reihen:

$$\text{I.}\begin{cases} \ldots\ \frac{1}{aaaa},\ \frac{1}{aaa},\ \frac{1}{aa},\ \frac{1}{a},\ 1,\ a,\ aa,\ aaa,\ aaaa\ \ldots \\ \ldots\ a^{-4},\ a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4\ \ldots \end{cases}$$

und erkennt aus ihrer Betrachtung sofort die Richtigkeit der Gleichung

$$\text{II.}\quad a^m \,.\, a^n = a^{m+n},$$

wenn a eine beliebige, von Null verschiedene reelle Zahl und m und n positive oder negative ganze Zahlen oder Null sind.

2. Jede Potenz einer positiven reellen Zahl a mit ganzem positivem Exponenten m nimmt stetig zu, wenn die Grundzahl a stetig zunimmt. Denn bezeichnet man den positiven Zuwachs von a durch x und entwickelt $(a + x)^m$ nach dem Binomialtheorem, so wird $(a + x)^m = a^m + ma^{m-1} . x + x . S$, indem man unter xS das positive Aggregat aller auf das zweite Glied folgenden Glieder versteht. Nun kann man aber x immer klein genug nehmen, daß $ma^{m-1} . x + x . S$ oder $x(ma^{m-1} + S)$ kleiner als jede noch so kleine Zahl wird. Daher wächst a^m stetig zugleich mit a. Denkt man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sich also in der Reihe der von Null an stetig wachsenden positiven Zahlen jede derselben mit der ganzen positiven Zahl m potenzirt, so bilden die Potenzen wieder eine Reihe positiver Zahlen, welche von Null an stetig und unbegrenzt zunehmen. Folglich gibt es zu jeder positiven reellen Zahl b immer eine und nur eine einzige solche Zahl a, deren m^{te} Potenz gleich b ist und welche die positive oder absolute m^{te} Wurzel von b heißt.

3. Da die zweite Potenz jeder positiven oder negativen reellen Zahl eine positive reelle Zahl ist, so kann -1 nicht als zweite Potenz einer reellen Zahl dargestellt werden. Man hat deshalb das Zeichen i eingeführt, und, indem man damit nach den Regeln der Addition und Multiplication rechnet, bestimmt man dadurch dieses Zeichen im Gegensatze zu den reellen Zahlen als eine imaginäre Zahl mit der Bedeutung, daß immer $i.i = -1$ ist.

Wenn q nicht Null und reell ist, so ist iq nicht Null und nicht reell, also auch imaginär. Wenn ferner p reell ist, so ist $p + iq$ nicht Null und ebenfalls imaginär. Soll daher $p + iq = 0$ sein, so müssen p und q zugleich Null sein.

Wenn $p + iq = r + is$ und p, q, r, s reell sind, so ist $p = r$ und $q = s$. Denn, weil $p - r + i(q - s) = 0$ ist, so muß sowohl $p - r = 0$, als auch $q - s = 0$ sein.

Das Product $(p + iq)(r + is)$ wird nur dann Null, wenn der eine oder der andere Factor oder beide Null sind. Denn, soll $(p + iq)(r + is) = pr - qs + i(qr + ps) = 0$ sein, so muß zugleich $pr - qs = 0$ und $qr + ps = 0$ sein. Sind nun z. B. r und s nicht Null, so erhält man $prs = qs^2$ und $prs = -qr^2$, folglich $qs^2 = -qr^2$, was nur möglich, wenn $q = 0$ ist; dann ist aber $pr = 0$, also auch $p = 0$ und $p + iq = 0$.

4. In der Rechnung mit Ausdrücken von der Form $p + iq$ lassen sich die Summen, Differenzen, Producte und Quotienten stets auf eindeutige Ausdrücke von derselben Form zurückführen. Die Form $p + iq$, welche auch jede reelle Zahl p ausdrückt, sobald $q = 0$ gesetzt wird, soll deshalb die allgemeine Zahlform heißen.

Es läßt sich nun leicht die Gültigkeit des durch Formel II. (1) ausgedrückten Gesetzes nachweisen, wenn a nicht mehr bloß reell, sondern von der allgemeinen Form $p + iq$ ist und man auch in diesem Falle die unter I. zusammengefaßten Definitionen gelten läßt. Nur dürfen da, wo $p + iq$ als Factor im Divisor erscheint, p und q nicht zugleich Null sein. Insbesondere erhält man, wenn n positiv ganz oder Null ist:

$$i^{4n} = +1, \quad i^{4n+1} = +i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

5. Jede ganze Function vom n^{ten} Grade

$$F(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots\ldots + fx + g,$$

worin x und die Coefficienten a, b .... in allgemeiner Form $p + iq$ gedacht sind, kann nicht für mehr als n verschiedene Werthe von x gleich Null werden. Denn, sind α, β, $\gamma \ldots\ldots \nu$ wirklich n solche verschiedene Werthe von x, für welche $F(x) = 0$ wird, so läßt sich F(x) zunächst auf die Form

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(x-\alpha)(x^{n-1}+Ax^{n-2}+Bx^{n-3}+\ldots\ldots+E)$$

bringen, worin die Coefficienten A, B, C . . . . sämmtlich von der Form $p+iq$ sind, weil sie bloß durch Addition und Multiplication aus α, a, b . . . . . entstehen, und kein x enthalten. Weil nun jeder der beiden Factoren des vorstehenden Productes auf die Form $p+iq$ sich zurückführen läßt, so wird dasselbe oder $F(x)$ nur Null, wenn der erste oder der zweite Factor oder beide gleich Null sind (3). Soll also $F(x)=0$ werden für $x=\beta$, so muß, da β von α verschieden, mithin der erste Factor $\beta-\alpha$ nicht Null ist, der zweite Factor gleich Null werden. Dann aber läßt er sich darstellen als ein Product aus $x-\beta$ und einer ganzen Function von $(n-2)^{ten}$ Grade, und aus ähnlichen Gründen wie vorhin kann $F(x)$ für $x=\gamma$ nur Null werden, wenn jene Function vom $(n-2)^{ten}$ Grade verschwindet. Auf diese Weise fortschließend findet man, daß

$$F(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots(x-\nu)$$

ist, wenn $F(x)$ für die n von einander verschiedenen Werthe $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots \nu$ von x jedesmal gleich Null wird. Gäbe es außer jenen noch einen Werth ϱ von x, für welchen ebenfalls $F(x)=0$ würde, so müßte auch das Product

$$(\varrho-\alpha)(\varrho-\beta)(\varrho-\gamma)\ldots\ldots\ldots(\varrho-\nu)=0$$

sein. Da aber ϱ von $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots \nu$ verschieden sein soll, so kann keiner der Factoren dieses Productes, mithin das Product selbst nicht Null sein. Daraus folgt, daß $F(x)$ nicht für mehr als n verschiedene Werthe von x verschwinden kann.

6. Versteht man unter $\sqrt[m]{p+iq}$ jede Zahl x, deren m^{te} Potenz gleich $p+iq$ ist, so hat man $p+iq=x^m$, also $x^m-(p+iq)=0$. Ist nun m eine positive ganze Zahl, so kann die ganze Function $x^m-(p+iq)$ höchstens für m verschiedene Werthe von x gleich Null werden, folglich kann auch der Ausdruck $\sqrt[m]{p+iq}$ höchstens m verschiedene Werthe haben.

7. Versucht man es, die Potenz a^x, worin a von allgemeiner Form und x eine ganze Zahl oder Null ist, durch eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe darzustellen, so muß dieselbe, wenn überhaupt mit ihr soll gerechnet werden, convergiren und die durch Gleichung II (1) ausgesprochene Grundeigenschaft besitzen. Um die Form einer solchen Reihe zu finden, kann man sich der Methode der unbestimmten Coefficienten bedienen und setzen

$$a^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots\ldots\ldots,$$

da $a^x=1$ wird, wenn $x=0$ ist. Bildet man das Product $a^x.a^x$ und ordnet nach Potenzen von x, so erhält man eine Reihe, welche mit der Reihe

$$a^{2x}=1+2Ax+4Bx^2+8Cx^3+\ldots\ldots\ldots$$

identisch sein muß, da nach der Grundgleichung II (1) $a^x.a^x=a^{2x}$ ist. Beide Reihen werden aber identisch, wenn man die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x in beiden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

einander gleich setzt, wodurch man die zur Bestimmung der Coefficienten nöthigen Bedingungsgleichungen erhält. Es bleibt nur unbestimmt der Coefficient A; für die übrigen aber schließt man auf das Bildungsgesetz, daß jeder Coefficient aus dem vorhergehenden entsteht, wenn man diesen mit A multiplicirt und das Product durch den Exponenten der zugehörigen Potenz von x dividirt. Hienach wird

$$a^x = 1 + \frac{A}{1}x + \frac{A^2}{1.2}x^2 + \frac{A^3}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots$$

Es ist nunmehr die Aufgabe, den Coefficienten A als eine Function von a zu bestimmen, ferner nachzuweisen, daß diese Reihe für jedes ganze reelle x convergirt und die durch die Grundgleichung II ausgesprochene Eigenschaft wirklich besitzt; denn alles dieses folgt noch nicht aus der vorhergehenden Ableitung.

8. Betrachtet man die gefundene Reihe für sich und bezeichnet sie in dem einfachsten Falle, wo $A = 1$ ist, durch $\varphi(x)$, so hat man

$$\varphi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \ldots\ldots$$

und in gleicher Weise

$$\varphi(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots\ldots$$

Multiplicirt man die Glieder der einen Reihe nach einander mit den Gliedern der andern Reihe und addirt die für sich zu Summen zusammengefaßten Producte, in welchen x und y zusammen als Factoren in gleicher Anzahl vorkommen, so erhält man mit Anwendung des Binominaltheorems für ganze positive Exponenten die Reihe

$$1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \frac{(x+y)^4}{4!} + \ldots\ldots,$$

welche mithin durch $\varphi(x+y)$ zu bezeichnen ist. Kann man nun zeigen, daß die Reihe $\varphi(x)$ für jeden Werth von x convergirt, so werden auch die Reihen $\varphi(y)$ und $\varphi(x+y)$ convergiren, und es wird

$$\text{III.} \quad \varphi(x) \,.\, \varphi(y) = \varphi(x+y)$$

sein nach Lehrsatz VI in der Abhandlung von Abel (Crelle's Journal, I, S. 313). Aus dieser Gleichung folgt, wenn man $-x$ statt y setzt: $\varphi(x) \,.\, \varphi(-x) = \varphi(0) = 1$; folglich wird die Reihe $\varphi(x)$, wenn sie für jeden Werth von x convergirt, niemals Null, und es ist

$$\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Setzt man ferner in Gl. III statt y nach und nach $x, 2x, 3x \ldots (m-1)x$, so erhält man zuletzt

$$\text{IV.} \quad (\varphi(x))^m = \varphi(mx),$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn m positiv ganz ist; aber auch

$$(\varphi(x))^{-m} = \frac{1}{(\varphi(x))^m} = \frac{1}{\varphi(mx)} = \varphi(-mx).$$

Die Gleichung IV gilt also überhaupt, wenn m positiv oder negativ ganz oder Null ist; denn im letzteren Falle ist die Potenz der Definition gemäß $= 1$ und auch $\varphi(0) = 1$.

9. Die in der vorigen Nummer gemachten Schlüsse gelten nur unter der Voraussetzung, daß die Reihe $\varphi(x)$ für jeden Werth von x convergire. Dieses ist der Fall, wenn x reell ist. Denn bezeichnet man den absoluten Zahlenwerth von x durch a, so ist $\frac{a^{m+1}}{(m+1)!} : \frac{a^m}{m!} = \frac{a}{m+1}$, und dieser Quotient nähert sich für stets wachsende Werthe von m der Grenze Null, folglich muß (nach Lehrsatz II in der angeführten Abhandlung von Abel) die Reihe $\varphi(x)$ für jeden reellen Werth von x convergiren. Ist $x = 1$, so wird der Werth der Reihe oder ihre Summe durch e bezeichnet, und man erhält

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots = 2{,}718281828459\ldots,$$

ferner nach Gl. IV

$$e^m = 1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \frac{m^4}{4!} + \ldots\ldots,$$

wenn m positiv oder negativ ganz oder Null ist. Für solche Werthe von x erscheint demnach die Summe der Reihe $\varphi(x)$ als eine Potenz von e mit dem Exponenten x. Da aber bisher für die Potenz e^x noch keine Bedeutung festgesetzt ist, wenn x in der allgemeinen Form $p + iq$ gedacht wird, so kann man auch in diesem Falle die Summe der Reihe $\varphi(x)$ durch e^x bezeichnen und damit zugleich e^x definiren, vorausgesetzt, daß die Reihe auch für imaginäre Werthe von x wirklich eine Summe hat. Zunächst erhält man, für beliebige reelle x und y, aus den Gleichungen III und IV die folgenden:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \text{ und } (e^x)^m = e^{mx}.$$

10. Setzt man iq für x in der Reihe $\varphi(x)$ und nimmt q reell, so wird (4)

$$\varphi(iq) = 1 + iq - \frac{q^2}{2!} - i\frac{q^3}{3!} + \frac{q^4}{4!} + i\frac{q^5}{5!} - \ldots\ldots$$

Sondert man den imaginären Theil von dem reellen ab und bezeichnet die Reihe

$$1 - \frac{q^2}{2!} + \frac{q^4}{4!} - \frac{q^6}{6!} + \ldots\ldots \text{ durch } Cq,$$

ferner die Reihe

$$q - \frac{q^3}{3!} + \frac{q^5}{5!} - \frac{q^7}{7!} + \ldots\ldots \text{ durch } Sq,$$

so wird $\varphi(iq) = Cq + i \cdot Sq$, indem man unter C und S bloße Functionszeichen versteht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die beiden Reihen Cq und Sq sind für jeden reellen Werth von q convergent, weil sowohl der Quotient $\frac{q^{2n}}{2n!} : \frac{-q^{2n-2}}{(2n-2)!} = \frac{q^2}{2n(2n-1)}$, als auch der Quotient $\frac{q^{2n+1}}{(2n+1)!} : \frac{q^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{q^2}{2n(2n+1)}$ für stets wachsende positive ganze n sich der Grenze Null nähert; folglich convergirt auch die Reihe $\varphi(iq)$, und man kann ihre Summe nunmehr durch e^{iq} bezeichnen (9), so daß

$$e^{iq} = Cq + i \,.\, Sq$$

ist. Da, wenn r reell ist, auch die Reihe $\varphi(iq + ir)$ oder $\varphi(i(q + r))$ convergirt, so hat man nach Gl. III und IV

$$\varphi(iq) \,.\, \varphi(ir) = \varphi(iq + ir) \text{ und } (\varphi(iq))^m = \varphi(imq), \text{ oder}$$

$$\text{V.} \qquad e^{iq} \,.\, e^{ir} = e^{iq+ir} \text{ und } (e^{iq})^m = e^{imq},$$

also auch $(Cq + i \,.\, Sq) \,.\, (Cr + i \,.\, Sr) = Cq \,.\, Cr - Sq \,.\, Sr + i\,(Sq \,.\, Cr + Cq \,.\, Sr) = C(q + r) + i \,.\, S(q + r)$ und $(Cq + i \,.\, Sq)^m = C(mq) + i \,.\, S(mq)$, wenn m zuvörderst positiv oder negativ ganz oder Null ist. Aus der vorletzten Gleichung ergibt sich (3)

$$1. \quad C(q + r) = Cq \,.\, Cr - Sq \,.\, Sr \quad \text{und} \quad 2. \quad S(q + r) = Sq \,.\, Cr + Cq \,.\, Sr.$$

Ferner erkennt man aus den Reihen Cq und Sq sofort, daß

$$C(-q) = Cq \quad \text{und} \quad S(-q) = -Sq$$

ist, mithin, wenn man $-q$ für r in Gl. 1. setzt, $C(0) = Cq \,.\, Cq + Sq \,.\, Sq$ oder, da $C(0) = 1$ ist,

$$\text{VI.} \qquad 1 = (Cq)^2 + (Sq)^2.$$

Die Werthe von Cq und Sq sind zugleich mit q reell und müssen nach der letzten Gleichung zwischen den Grenzen $+1$ und -1 liegen. Da ferner die Reihen Cq und Sq für jedes reelle q convergent und eindeutig sind, so sind sie stetige Functionen von q, und deshalb ist auch e^{iq} eine stetige Function von q (Erklärung und Lehrsatz IV a. a. O.). Faßt man in der Reihe Cq je zwei durch das Minuszeichen verbundene Glieder für sich zusammen, so sind diese Differenzen positiv, wenn q positiv und $\overline{\overline{<}} + 1$ ist; folglich sind auch die Werthe von Cq für solche q positiv. Schreibt man dagegen die Reihe in dieser Weise

$$Cq = 1 - \frac{q^2}{2!}\left(1 - \frac{q^2}{3 \,.\, 4}\right) - \frac{q^6}{6!}\left(1 - \frac{q^2}{7 \,.\, 8}\right) - \frac{q^{10}}{10!}\left(1 - \frac{q^2}{11 \,.\, 12}\right) - \ldots,$$

so sieht man, daß für $q = +2$ der Werth von Cq negativ wird; also liegt zwischen $+1$ und $+2$ mindestens ein Werth von q, für welchen $Cq = 0$ ist. Der kleinste positive Werth von q, für welchen $Cq = 0$ wird, sei daher durch $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnet, so daß $C\frac{\pi}{2} = 0$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus der Betrachtung der Reihe

$$Sq = q\left(1 - \frac{q^2}{3!}\right) + \frac{q^5}{5!}\left(1 - \frac{q^2}{6.7}\right) + \frac{q^9}{9!}\left(1 - \frac{q^2}{10.11}\right) + \cdots$$

geht unmittelbar hervor, daß die Werthe von Sq positiv sind für alle positiven q, welche $\overline{\overline{<}} + 2$ sind. Da nun $+2 > \frac{1}{2}\pi > +1$, so ist $S\frac{\pi}{2}$ positiv, und nach Gl. VI. $1 = \left(S\frac{\pi}{2}\right)^2$, folglich $S\frac{\pi}{2} = +1$.

11. Hiernach wird

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = C\frac{\pi}{2} + i.S\frac{\pi}{2} = +i \text{ und nach Gl. V. } \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^m = e^{im\frac{\pi}{2}} = (+i)^m.$$

Ist daher k eine positive oder negative ganze Zahl oder Null und $m = 4k$, so wird (4) $e^{ik2\pi} = i^{4k} = +1$. Die Function e^{iq} ist also eine periodische und wird jedesmal gleich 1, wenn $q = k2\pi$ ist. Sie wird aber auch nur für solche Werthe von q gleich $+1$. Denn wenn $\frac{1}{2}\pi > q > 0$, so sind Cq und Sq beide positiv, folglich $Cq + iSq$ oder e^{iq} imaginär. Wenn $q > \frac{1}{2}\pi$, so sei $\frac{1}{2}\pi > \alpha > 0$ und $q = n\frac{\pi}{2} + \alpha$, wobei n positiv ganz ist. Dann hat man nach Gl. V.

$$e^{iq} = e^{in\frac{\pi}{2} + i\alpha} = e^{in\frac{\pi}{2}}.e^{i\alpha} = i^n.(C\alpha + i.S\alpha),$$

ein Product, welches, da $C\alpha$ und $S\alpha$ beide positiv und < 1 sind, von der Form $p + iq$ ist (4) und für keinen Werth von n gleich $+1$ wird. Ist endlich q negativ, $= -\beta$, so wird $e^{iq} = e^{-i\beta} = \frac{1}{e^{i\beta}}$.

Da nun $e^{i\beta}$ für keinen von $k2\pi$ verschiedenen Werth von β gleich $+1$ wird, so kann auch e^{iq} für keinen solchen Werth von q gleich $+1$ werden.

12. Nimmt man zwei unter rechten Winkeln im Punkte O sich schneidende Coordinatenaxen in einer Ebene an und bestimmt in derselben einen Punkt K, dessen Abscisse Cq und dessen Ordinate Sq ist, so liegt der Punkt K nach Gl. VI. in dem Umfange eines um O beschriebenen Kreises, dessen Halbmesser gleich dem Längenmaße ist.

Die Länge und Richtung einer von P nach Q gerichteten Strecke PQ in der angenommenen Ebene ist vollständig bestimmt durch die absolute Zahl q, nach welcher die Strecke von der Linien-Einheit gemessen wird und welche ihr absoluter Zahlenwerth heißen möge, ferner durch die vom Radius gemessene Länge $\varkappa$ desjenigen Kreisbogens, welchen der Endpunkt R einer zur Abscissenaxe parallelen und nach der positiven Seite derselben hin gerichteten Strecke PR beschreibt, wenn dieselbe um ihren Anfangspunkt P

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nach der positiven Seite der Ordinatenaxe hin so lange in einerlei Sinne gedreht wird, bis ihre Richtung mit der Richtung der Strecke PQ identisch wird. Projicirt man die Strecke PQ rechtwinkelig in die beiden Coordinatenaxen, so sind $q \cdot \cos \varkappa$ und $q \cdot \sin \varkappa$ die Zahlenwerthe der Projectionen bezüglich in der ersten und zweiten Axe.

Zieht man von O nach dem vorhin bestimmten Punkte K die Strecke OK, so ist ihr absoluter Zahlwerth 1, und wenn die Zahl z die Länge des zugehörigen, in vorstehender Weise bestimmten Kreisbogens bezeichnet, so sind die Zahlwerthe der Projectionen der Strecke OK in den beiden Axen $\cos z$ und $\sin z$. Zugleich ist aber $Cq = \cos z$ und $Sq = \sin z$, ferner $e^{iq} = Cq + i \cdot Sq = \cos z + i \sin z$.

Bezeichnet man der Kürze halber $\cos z + i \sin z$ durch $f(z)$, oder noch einfacher durch fz, indem man unter f nur das Fuctionszeichen versteht, so hat man

$$e^{iq} = f(z) = fz,$$

und es handelt sich nun darum, den Bogen z als Function von q darzustellen.

13. Zu diesem Zwecke betrachte man das Dreieck OAB in der angenommenen Ebene (12). Die absoluten Zahlwerthe der Strecken OA, AB und OB seien a, c und b, die Längen ihrer zugehörigen Kreisbogen α, γ und β, so sind die Zahlwerthe der Projectionen jener Strecken in der Abscissenaxe bezüglich $a \cos \alpha$, $c \cos \gamma$ und $b \cos \beta$, in der Ordinatenaxe $a \sin \alpha$, $c \sin \gamma$ und $b \sin \beta$. Für diese Werthe gelten nun die beiden Gleichungen

$$a \cos \alpha + c \cos \gamma = b \cos \beta \quad \text{und} \quad a \sin \alpha + c \sin \gamma = b \sin \beta,$$

welche sich in eine einzige zusammenziehen lassen, nämlich in die Gleichung

$$b \cos \beta + ib \sin \beta = a \cos \alpha + c \cos \gamma + i (a \sin \alpha + c \sin \gamma)$$

oder $$b (\cos \beta + i \sin \beta) = a (\cos \alpha + i \sin \alpha) + c (\cos \gamma + i \sin \gamma)$$

oder, mit Anwendung der kürzeren Bezeichnungsart (12), in die Gleichung

$$\text{VII.} \qquad b \cdot f\beta = a \cdot f\alpha + c \cdot f\gamma.$$

Den Werth des Ausdrucks $a \cdot f\alpha$ nennt Möbius den complexen Werth der Strecke OA (Crelle's Journal, LII, S. 231 ff.). Demnach drückt die vorstehende Gleichung aus, daß die Summe der complexen Werthe zweier beliebig gerichteten Strecken, bei denen der Endpunkt der ersten den Anfangspunkt der zweiten bildet, gleich ist dem complexen Werthe der vom Anfangspunkt der ersten an den Endpunkt der zweiten gezogenen und dahin gerichteten Strecke.

Man findet nun $f(o) = \cos o + i \sin o = 1$ und, wenn π die Länge des vom Radius gemessenen Halbkreisbogens, also die Ludolphische Zahl bedeutet,

$$f\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i, \text{ ferner}$$

$$f(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha + 2k\pi) + i \cdot \sin(\alpha + 2k\pi) = \cos a + i \sin \alpha = f\alpha,$$

wenn k positiv ganz oder Null ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

14. Wenn die Strecke AB in dem Dreiecke OAB (13) eine solche Richtung hat, daß $\gamma = \alpha + \frac{1}{2}\pi$ ist, so ist das Dreieck OAB rechtwinkelig bei A, und $\beta - \alpha = \delta$ ist positiv und $< \frac{1}{2}\pi$, so lange c einen endlichen Zahlwerth behält. Man hat alsdann $a = b \cos\delta$ und $c = b \sin\delta$, folglich nach Gl. VII.

$$b \,.\, f(\alpha + \delta) = b \cos\delta \,.\, f\alpha + b \sin\delta \,.\, f\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right) \quad \text{oder}$$

$$1. \qquad f(\alpha + \delta) = \cos\delta \,.\, fa + \sin\delta \,.\, f\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right).$$

Diese Gleichung gilt für beliebige positive α und für jedes positive δ, welches $< \frac{1}{2}\pi$ ist, und für $\delta = 0$. Nun erkennt man aus der Betrachtung der Figur (12), daß, wenn k positiv ganz oder Null, allgemein

$$\cos\left(k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin k\frac{\pi}{2} \text{ und } \sin\left(k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos k\frac{\pi}{2},$$

also auch $f\left(k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin k\frac{\pi}{2} + i\cos k\frac{\pi}{2} = i\left(\cos k\frac{\pi}{2} + i\sin k\frac{\pi}{2}\right) = if\left(k\frac{\pi}{2}\right)$

ist. Setzt man daher $\alpha = k\frac{\pi}{2}$ in Gl. 1, so wird

$$f\left(k\frac{\pi}{2} + \delta\right) = \cos\delta \,.\, f\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \sin\delta \,.\, f\left(k\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\delta \,.\, f\left(k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\delta \,.\, f\left(k\frac{\pi}{2}\right) = f\delta \,.\, f\left(k\frac{\pi}{2}\right).$$

Hieraus erhält man, wenn $k = m + 1$ ist,

$$f\left(m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \delta\right) = f\delta \,.\, f\left(m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = i \,.\, f\delta \,.\, f\left(m\frac{\pi}{2}\right) = i \,.\, f\left(m\frac{\pi}{2} + \delta\right).$$

Da nun $m\frac{\pi}{2} + \delta$ jedem beliebigen positiven Bogen α gleich werden kann, so gibt die letzte Gleichung $f\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = i \,.\, f\alpha$, wodurch Gl. 1 in folgende übergeht:

$$f(\alpha + \delta) = \cos\delta \,.\, f\alpha + i\sin\delta \,.\, f\alpha = f\delta \,.\, f\alpha.$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung nmal nach einander mit $f\delta$, so erhält man schließlich

$$f(\alpha + n\delta) = f(n\delta) \,.\, f\alpha.$$

Da auch $n\delta$ jedem beliebigen positiven Bogen β gleich werden kann, so hat man also für beliebig große positive α und β die Gleichung:

$$f(\alpha + \beta) = f\alpha \,.\, f\beta,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

aus welcher man mit Rücksicht auf die Bedeutung des Zeichens $f\alpha$ (12) leicht die bekannten Gleichungen

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \text{ und } \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

erhält. Außerdem findet man, wenn man nach und nach α, 2α, 3α . . . $(m-1)\alpha$ statt β setzt, zuletzt die für positive ganze m geltende Gleichung

$$\text{VIII.} \qquad f(m\alpha)=(f\alpha)^m.$$

15. Wenn die absoluten Werthe a und b der Strecken OA und OB in dem Dreiecke OAB (13) beide gleich 1, also diese Strecken Halbmesser des um O beschriebenen Kreises (12) sind, so ist das Dreieck OAB gleichschenkelig und die Strecke AB zugleich Sehne des zwischen den Punkten A und B befindlichen Kreisbogens. Ist ferner

$$\alpha=0 \text{ und } \beta<\frac{1}{2}\pi, \text{ so wird } \gamma=\beta+\frac{\pi-\beta}{2}=\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{2}, \text{ folglich}$$

$$f\gamma=f\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=f\frac{\beta}{2}\,.\,f\frac{\pi}{2}=i\,.\,f\frac{\beta}{2}, \text{ und nach Gl. VII.}$$

$$f\beta=f(0)+c\,.\,f\gamma=1+ic\,.\,f\frac{\beta}{2}, \text{ also } f\beta-1=ic\,.\,f\frac{\beta}{2}.$$

Da die Zahl β die Länge des Bogens angibt, dessen Sehne die Strecke AB mit dem absoluten Werthe c ist, und da das Verhältniß des Bogens zu seiner Sehne bei Abnahme des Bogens sich der Grenze 1 nähert: so ist auch $\lim.\frac{c}{\beta}=1$, wenn β beständig kleiner wird, also der Punkt B in der Kreislinie zum Punkte A hinrückt. Daher hat man

$$\text{IX.} \qquad \lim.\frac{f\beta-1}{\beta}=i\lim\left(\frac{c}{\beta}\,.\,f\frac{\beta}{2}\right)=i$$

für beständig abnehmende β.

16. Man kann nun zur Lösung der Aufgabe, den stets kleiner als 2π angenommenen Bogen z in der Gleichung $e^{iq}=fz$ (12) durch q auszudrücken, übergehen. Nach früheren Erklärungen ist fz der complexe Werth der Strecke OK, welche vom Mittelpunkte des Kreises um O (12) an den Punkt K in seinem Umfange gezogen ist, also der complexe Werth des Halbmessers OK, bei welchem man zugleich die Richtung von O nach K festhält. Wenn $+1\gtreqless q>0$, so sind Cq und Sq beide positiv (10), folglich auch $\cos z$ und $\sin z$, da $Cq=\cos z$ und $Sq=\sin z$ ist. In diesem Falle ist also fz oder e^{iq} der complexe Werth eines Halbmessers im ersten Quadranten, und $z<\frac{1}{2}\pi$. Wenn m eine positive ganze Zahl, so sind auch $C\frac{q}{m}$ und $S\frac{q}{m}$ beide positiv, und es gibt einen Bogen $\delta<\frac{1}{2}\pi$, für welchen $e^{i\frac{q}{m}}=f\delta$ ist. Potenzirt man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

diese Gleichung mit der positiven ganzen Zahl n, so wird nach Gl. V. und VIII. $e^{i\frac{n}{m}q} = f(n\delta)$. Wenn nun $n\delta < \frac{1}{2}\pi$, so ist auch, weil $\delta < \frac{1}{2}\pi$, $n\delta + \delta < \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi$ oder $(n+1)\delta < \pi$. So lange aber $n + 1 \overline{\overline{<}} m$ ist, ist auch $\frac{n+1}{m} q \overline{\overline{<}} q \overline{\overline{<}} +1$, folglich $e^{i\frac{n+1}{m}q}$ oder $f((n+1)\delta)$ der complexe Werth eines Halbmessers im ersten Quadranten, und weil schon $(n+1)\delta < \pi$ ist, so muß nunmehr $(n+1)\delta < \frac{1}{2}\pi$ sein. Ist also $n + 1 \overline{\overline{<}} m$ und $n\delta < \frac{1}{2}\pi$, so ist auch $n\delta + \delta < \frac{1}{2}\pi$. Nun ist $\delta < \frac{1}{2}\pi$, folglich $2\delta, 3\delta, 4\delta \ldots\ldots n\delta < \frac{1}{2}\pi$ und $(n+1)\delta < \frac{1}{2}\pi$, mithin, wenn $n + 1 = m$ ist, auch $m\delta < \frac{1}{2}\pi$. In dem letztern Falle hat man aber $e^{iq} = f(m\delta)$ oder $fz = f(m\delta)$, und da sowohl $z < \frac{1}{2}\pi$, als auch $m\delta < \frac{1}{2}\pi$ ist, so muß $z = m\delta$ und $\delta = \frac{z}{m}$ sein.

Wenn demnach $+1 \overline{\overline{>}} q > 0$ und $e^{iq} = fz$, so ist auch $e^{i\frac{q}{m}} = f\frac{z}{m}$ für jedes beliebige positive ganze m. Um die Beziehung zwischen q und z vollständig zu erkennen, muß man noch die Gleichung IX. zu Hülfe nehmen. Wenn m beständig größer wird, so nähert sich $\frac{z}{m} = \delta$ und $\frac{q}{m} = \alpha$ der Grenze Null, dagegen behält $\frac{\alpha}{\delta} = \frac{q}{z}$ einen constanten Werth. Nun ist

$$\text{IX}^*. \qquad \frac{f\delta - 1}{\delta} = \frac{e^{i\alpha} - 1}{\delta} = \frac{e^{i\alpha} - 1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\delta} = \frac{e^{i\alpha} - 1}{\alpha} \cdot \frac{q}{z}.$$

Aus der Reihe, welcher $e^{i\alpha}$ gleich ist (10), findet man

$$\frac{e^{i\alpha} - 1}{\alpha} = -\frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^3}{4!} - \frac{\alpha^5}{6!} + \ldots\ldots + i\left(1 - \frac{\alpha^2}{3!} + \frac{\alpha^4}{5!} - \frac{\alpha^6}{7!} + \ldots\ldots\right).$$

Die beiden Reihen, sowohl die vordere, als auch die eingeklammerte, convergiren für jeden reellen Werth von α, Null mitbegriffen, was sich wie früher (10) darthun läßt. Erwägt man ferner, daß die Reihen stetige Functionen sind, und läßt m beständig größer werden, also α sich der Grenze Null nähern, so erhält man $\lim \frac{e^{i\alpha} - 1}{\alpha} = i$. Zugleich wird $\lim . \frac{f\delta - 1}{\delta} = i$ und $\lim\left(\frac{e^{i\alpha} - 1}{\alpha} . \frac{q}{z}\right) = \frac{q}{z} . \lim \frac{e^{i\alpha} - 1}{\alpha} = i\frac{q}{z}$, daher in Folge der Gl. IX*. $i = i\frac{q}{z}$, woraus sich $\frac{q}{z} = 1$ und $q = z$ ergibt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn also $+1 \gtreqless q > 0$, so ist $e^{iq} = fq = \cos q + i \sin q$. Man hat aber auch für jedes positive γ, wenn man die ganze positive Zahl n so bestimmt, daß $\frac{\gamma}{n} < 1$ wird, nach Gl. V. und VIII.

$$e^{i\gamma} = \left(e^{i\frac{\gamma}{n}}\right)^n = \left(f\frac{\gamma}{n}\right)^n = f\gamma.$$

17. Aus der letzten Gleichung erhält man (10) $C\gamma + i \,.\, S\gamma = \cos\gamma + i \sin\gamma$, folglich $C\gamma = \cos\gamma$ und $S\gamma = \sin\gamma$, das heißt

$$\cos\gamma = 1 - \frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\gamma^4}{4!} - \frac{\gamma^6}{6!} + \ldots\ldots$$

$$\sin\gamma = \gamma - \frac{\gamma^3}{3!} + \frac{\gamma^5}{5!} - \frac{\gamma^7}{7!} + \ldots\ldots$$

für beliebig große positive γ und, wie man sogleich sieht, für $\gamma = 0$. Da aber bisher $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ für negative γ noch nicht definirt sind, so kann man die vorstehenden Gleichungen auch für solche Werthe von γ gelten lassen und $C\gamma$ und $S\gamma$ durch die gebräuchlicheren Zeichen $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$, auch in der früheren Entwickelung, nunmehr ersetzen. Insbesondere ist der durch $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnete Werth von q (10. 11) der Bogen des ersten Quadranten, also bedeutet auch dieses π die Ludolphische Zahl.

Sollen die reellen Werthe von μ bestimmt werden, welche die Gleichung $e^{i\alpha} = e^{i\mu}$ befriedigen, so setze man $\mu = \alpha + \beta$, und es wird $e^{i\alpha} = e^{i\alpha + i\beta} = e^{i\alpha} \,.\, e^{i\beta}$ nach Gl. V. Da $e^{i\alpha}$ und $e^{i\beta}$ von der Form $p + iq$ und niemals Null sind (8), so wird auch das Product $e^{i\alpha} \,.\, e^{i\beta}$ niemals Null und stets von $e^{i\alpha}$ verschieden sein, wenn $e^{i\beta}$ nicht $= 1$ ist (4). Nun wird aber $e^{i\beta}$ nur $= 1$, wenn $\beta = 2k\pi$ (11), folglich muß $\mu = \alpha + 2k\pi$ sein, und nur diese reellen Werthe von μ befriedigen die Gleichung $e^{i\alpha} = e^{i\mu}$.

Wenn α und k positiv sind und $k2\pi > \alpha$, so ist

$$e^{-i\alpha} = e^{-i\alpha + ik2\pi} = e^{i(k2\pi - \alpha)}$$

und $k2\pi - \alpha$ positiv, folglich $e^{-i\alpha}$ der complexe Werth eines Halbmessers im Kreise um O (16), dessen Lage der vom Nullpunkte an im entgegengesetzten Sinne wie früher (12) gezählte Bogen von der Länge α bestimmt. Daher bezeichnet auch $ae^{i\alpha}$ für jedes reelle α den complexen Werth einer Strecke von der absoluten Länge a, welche man sich aus ihrer zur Abscissenaxe parallelen und nach der positiven Seite derselben hin gerichteten Lage um ihren Anfangspunkt durch einen Bogen von der Länge α gedreht denken kann, und zwar nach der positiven oder negativen Seite der Ordinatenaxe hin, je nachdem α positiv oder negativ ist.

18. Nach der zweiten Gleichung V. erhält man für positive ganze m

$$e^{i\alpha} = e^{i\alpha + ik2\pi} = e^{im\frac{\alpha}{m} + imk\frac{2\pi}{m}} = \left(e^{i\frac{\alpha}{m} + ik\frac{2\pi}{m}}\right)^m,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

folglich sind die Werthe des Ausdrucks $e^{i\frac{\alpha}{m}+ik\frac{2\pi}{m}}$ zugleich Werthe von $\sqrt[m]{e^{i\alpha}}$, und da, wie sogleich gezeigt wird, jener Ausdruck immer und nur m verschiedene Werthe hat, $\sqrt[m]{e^{i\alpha}}$ oder $\sqrt[m]{\cos\alpha + i\sin\alpha}$ aber nicht mehr als m verschiedene Werthe haben kann (6), so ist

$$\text{X.} \qquad \sqrt[m]{e^{i\alpha}} = e^{i\frac{\alpha}{m}+ik\frac{2\pi}{m}} = e^{i\frac{\alpha}{m}} . e^{ik\frac{2\pi}{m}}.$$

Um zu zeigen, daß das zweite Glied der Gleichung wirklich m deutig ist, nehme man unter den verschiedenen Werthen von k einen beliebigen $\varkappa$ heraus; gibt es dann einen andern Werth λ von k, für welchen

$$e^{i\frac{\alpha}{m}+i\varkappa\frac{2\pi}{m}} = e^{i\frac{\alpha}{m}+i\lambda\frac{2\pi}{m}}$$

ist, so muß $\frac{\alpha}{m} + \varkappa\frac{2\pi}{m} = \frac{\alpha}{m} + \lambda\frac{2\pi}{m} + 2k\pi$ (17) oder $\frac{\varkappa}{m} = \frac{\lambda}{m} + k$ oder $\lambda = \varkappa + km$ sein. Da nun für k jede positive oder negative ganze Zahl oder Null gesetzt werden kann, so gibt es unter den Werthen $0, 1, 2, 3 \ldots m-1$ für $\varkappa$ nicht zwei solche, $\varkappa$ und λ, welche der Bedingungsgleichung $\lambda = \varkappa + km$ genügten; folglich sind auch die m Werthe des Ausdrucks $e^{i\frac{\alpha}{m}+i\varkappa\frac{2\pi}{m}}$ für jene Werthe von $\varkappa$ alle von einander verschieden. Hätte der Ausdruck noch andere, als jene m verschiedenen Werthe, so müßte es einen Werth von λ geben, welcher nicht gleich $\varkappa + km$ wäre, wenn für $\varkappa$ die Werthe $0, 1, 2, 3 \ldots m-1$ gesetzt werden. Dieses ist, da λ positiv oder negativ ganz oder Null sein soll, nicht der Fall; folglich hat der fragliche Ausdruck nur jene m verschiedenen Werthe. Dieselben lassen sich nun leicht als die complexen Werthe von m verschiedenen Halbmessern im Kreise um O (17) nachweisen.

19. Bestimmt man in der Ebene des Kreises um O (12) einen Punct M, dessen Abscisse die reelle Zahl p und dessen Ordinate die reelle Zahl q ist, und bezeichnet r den absoluten Werth der Strecke OM, so gibt es immer einen positiven Bogen $\alpha < 2\pi$, für welchen $r\cos\alpha = p$ und $r\sin\alpha = q$, also $p + iq = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r . e^{i\alpha}$ ist. Hiernach wird $r^2 = p^2 + q^2$, $\cos\alpha = \frac{p}{r}$ und $\sin\alpha = \frac{q}{r}$, und diese Gleichungen dienen zur Bestimmung von r und α, wenn man die allgemeine Zahl $p + iq$ durch $re^{i\alpha}$ ausdrücken will.

Wenn nun $p + iq = re^{i\alpha}$ ist, so findet man $(p + iq)^m = r^m . e^{im\alpha}$ für ganze m und für $m = o$ (1 und Gl. V.); ferner, wenn $(\sqrt[m]{r})$ den einzigen positiven reellen Werth (2) von $\sqrt[m]{r}$ bezeichnet, wobei m natürlich nur positiv ganz ist, nach Gl. X.

$$\text{XI.} \quad \sqrt[m]{p+iq} = \sqrt[m]{re^{i\alpha}} = (\sqrt[m]{r}) . \sqrt[m]{e^{i\alpha}} = (\sqrt[m]{r}) . e^{i\frac{\alpha}{m}+ik\frac{2\pi}{m}} = (\sqrt[m]{r}) . e^{i\frac{\alpha}{m}} . e^{ik\frac{2\pi}{m}};$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

denn der letzte Ausdruck ist m deutig und umfaßt also alle m Werthe, welche $\sqrt[m]{p+iq}$ überhaupt haben kann (6).

Wenn $q=0$, und a den absoluten Werth von p bezeichnet, so wird $r=a$, $\cos\alpha=\pm 1$, $\sin\alpha=0$, folglich $\alpha=0$ oder $\alpha=\pi$, je nachdem p positiv oder negativ ist, und man erhält aus Gl. XI.

$$\sqrt[m]{a}=(\sqrt[m]{a}).e^{ik\frac{2\pi}{m}} \quad \text{und} \quad \sqrt[m]{-a}=(\sqrt[m]{a}).e^{i\frac{\pi}{m}+ik\frac{2\pi}{m}},$$

woraus sich von selbst die Werthe für $\sqrt[m]{+1}$ und $\sqrt[m]{-1}$ ergeben.

20. Setzt man $x=p+iq=re^{i\alpha}$ in der Reihe $\varphi(x)$ (8), so erhält man

$$\text{XII.}\quad \begin{cases} \varphi(x)=1+re^{i\alpha}+\frac{r^2}{2!}e^{i2\alpha}+\frac{r^3}{3!}e^{i3\alpha}+\frac{r^4}{4!}e^{i4\alpha}+\ldots\ldots \text{ oder} \\ \varphi(x)=1+r\cos\alpha+\frac{r^2}{2!}\cos 2\alpha+\frac{r^3}{3!}\cos 3\alpha+\frac{r^4}{4!}\cos 4\alpha+\ldots\ldots \\ \qquad +i(r\sin\alpha+\frac{r^2}{2!}\sin 2\alpha+\frac{r^3}{3!}\sin 3\alpha+\frac{r^4}{4!}\sin 4\alpha+\ldots\ldots) \end{cases}$$

Die beiden Reihen, sowohl die vordere, als auch die eingeklammerte, convergiren für jedes reelle r und α, weil $\cos n\alpha$ und $\sin n\alpha$ die Einheit nicht übersteigen und der Quotient $\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{r^n}{n!}=\frac{r}{n+1}$ für stets wachsende Werthe von n kleiner als 1 wird und sich der Null nähert; folglich convergirt auch die Reihe $\varphi(x)$ und hat eine Summe, für jedes x von der allgemeinen Form $p+iq$ (Lehrsatz II. a. a. O.). Diese Summe wird der früheren Erklärung gemäß (9) durch e^{p+iq} zu bezeichnen sein, und damit ist die Potenz e^x definirt, wenn der Exponent von der allgemeinen Form $p+iq$ ist. Wenn r und s reell und $y=r+is$ ist, so wird $x+y=(p+r)+i(q+s)$, und es convergiren auch die Reihen $\varphi(y)$ und $\varphi(x+y)$. Daher kommen die Gleichungen III. und IV. zu allgemeiner Geltung und mit ihnen zugleich die folgenden:

$$\text{XIII.}\quad e^x.e^y=e^{x+y} \quad \text{und} \quad (e^x)^m=e^{mx}.$$

Insbesondere wird aber hienach $e^{p+iq}=e^p.e^{iq}$.

Nun ist (9) $e^p=1+p+\frac{p^2}{2!}+\frac{p^3}{3!}+\frac{p^4}{4!}+\ldots\ldots$ eine eindeutige stetige Function von p, welche von 1 an beständig positiv und unbegrenzt zunimmt für positive, von Null an wachsende p, dagegen von 1 bis zur Grenze Null beständig abnimmt, wenn p von Null an negativ größer wird. Ferner hat man $e^p=e^{m\frac{p}{m}}=\left(e^{\frac{p}{m}}\right)^m$, folglich ist $e^{\frac{p}{m}}$ oder die Summe der Reihe $\varphi\left(\frac{p}{m}\right)$ (8) der einzige positive reelle Werth

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von $\sqrt[m]{e^p}$, wenn m positiv ganz ist (2). Nach Gl. XI. erhält man daher

$$\text{XIV.}\quad \sqrt[m]{e^{p+iq}} = \sqrt[m]{e^p \cdot e^{iq}} = e^{\frac{p}{m}} \cdot e^{i\frac{q}{m}} e^{ik\frac{2\pi}{m}} = e^{\frac{p}{m} + i\frac{q}{m}} \cdot e^{ik\frac{2\pi}{m}},$$

also auch für jedes x von der Form $p + iq$

$$\sqrt[m]{e^x} = e^{\frac{x}{m}} \cdot e^{ik\frac{2\pi}{m}} = e^{\frac{x}{m} + ik\frac{2\pi}{m}}.$$

21. In der Form, wie die Reihe XII. zuerst geschrieben ist, bedeuten ihre Glieder die complexen Werthe von Strecken, deren absoluter Werth $\frac{r^n}{n!}$ bei zunehmendem n zuletzt immer kleiner wird und der Grenze Null sich nähert, während die Richtung jeder Strecke von der Richtung der vorhergehenden um den constanten Bogen α abweicht. Die Summe der Reihe ist daher (13) der complexe Werth einer Strecke von bestimmter Länge und Richtung. Da $x = re^{i\alpha} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, so ist diese Summe gleich $e^{r\cos\alpha + ir\sin\alpha} = e^{r\cos\alpha} \cdot e^{ir\sin\alpha}$ (20), folglich $e^{r\cos\alpha}$ der absolute Werth jener Strecke und $r\sin\alpha$ die Länge des Bogens, welcher ihre Richtung bestimmt (17). Vergleicht man dagegen den letzten Ausdruck für die Summe der Reihe, nämlich $e^{r\cos\alpha} \cdot e^{ir\sin\alpha} = e^{r\cos\alpha} \cdot \cos(r\sin\alpha) + ie^{r\cos\alpha} \cdot \sin(r\sin\alpha)$ mit der Reihe XII. in ihrer zweiten Form, so erhält man (3)

$$e^{r\cos\alpha} \cdot \cos(r\sin\alpha) = 1 + r\cos\alpha + \frac{r^2}{2!}\cos 2\alpha + \frac{r^3}{3!}\cos 3\alpha + \frac{r^4}{4!}\cos 4\alpha + \ldots$$

$$e^{r\cos\alpha} \cdot \sin(r\sin\alpha) = \quad r\sin\alpha + \frac{r^2}{2!}\sin 2\alpha + \frac{r^3}{3!}\sin 3\alpha + \frac{r^4}{4!}\sin 4\alpha + \ldots$$

Diese Reihen finden sich weiter erörtert in einer Abhandlung von Dienger (Crelle's Journal, XXXIV, S. 221).

22. Die Summe der Reihe $\varphi(x)$ kann jeder von Null verschiedenen Zahl von allgemeiner Form gleich werden, wenn x ebenfalls allgemein und in der Form $p + iq$ gedacht wird, so daß $\varphi(x) = e^{p+iq}$ ist (20). Jede gegebene Zahl a läßt sich nämlich auf den Ausdruck $r \cdot e^{i\alpha}$ bringen (19). Soll alsdann a oder $re^{i\alpha} = e^{p+iq} = e^p \cdot e^{iq}$ oder $r\cos\alpha + ir\sin\alpha = e^p\cos q + ie^p\sin q$ werden, so muß $r\cos\alpha = e^p\cos q$ und $r\sin\alpha = e^p\sin q$, folglich $r^2 = (e^p)^2$ und, da e^p für reelle p stets positiv ist, $e^p = r$ sein. Nun gibt es aber immer einen und nur einen reellen Werth von p, für welchen $e^p = r$ ist (20), und dieser Werth heißt der natürliche reelle Logarithmus von r und soll durch lr bezeichnet werden. Aus der Gleichung $re^{i\alpha} = e^p \cdot e^{iq}$ folgt ferner, weil $r = e^p$ und nicht Null ist, daß $e^{i\alpha} = e^{iq}$, mithin $q = \alpha + 2k\pi$ sein muß (17). Versteht man nun unter log a jede Zahl x, für welche $a = e^x$ ist, so hat man im vorliegenden Falle

$$\log a = \log(re^{i\alpha}) = p + iq = lr + i(\alpha + 2k\pi)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Unter diesen unendlich vielen Werthen von $\log(re^{i\alpha})$ heißt derjenige der einfachste, für welchen $k = 0$ ist. Bezeichnet man ihn durch $L(re^{i\alpha})$, so wird

$$L(re^{i\alpha}) = lr + i\alpha,$$

$$\log a = \log(re^{i\alpha}) = L(re^{i\alpha}) + i2k\pi = La + i2k\pi.$$

Wenn $\alpha = 0$, so wird $Lr = lr$. Der einfachste Werth Lr von $\log r$ ist also zugleich der reelle natürliche Logarithmus lr, mithin

$$\log(re^{i\alpha}) = Lr + i(\alpha + 2k\pi) \quad \text{und} \quad L(re^{i\alpha}) = Lr + i\alpha.$$

Wenn $\alpha = 0$ und $r = e$, so wird hiernach

$$\log e = Le + i2k\pi = 1 + i2k\pi$$

23. Da auch die Werthe von $\log a$ in der Form $p + iq$ erscheinen, ebenso wie die Werthe von a^m und $\sqrt[m]{a}$ (19), wenn a in dieser Form gedacht wird, so erhält man nach Gl. XIII.

$$\text{XV.} \quad a^m = (e^{\log a})^m = e^{m \log a} = e^{m\,La + im\,2k\pi} = e^{m\,La} \,.\, e^{im\,2k\pi} = e^{m\,La},$$

wenn m positiv oder negativ ganz oder Null ist. Für solche Werthe von x erscheint demnach die Summe der Reihe $\varphi(x \log a)$, nämlich $e^{x \log a}$ als eine Potenz von a mit dem Exponenten x. Da aber bisher für die Potenz a^x noch keine Bedeutung festgesetzt ist, wenn x in der allgemeinen Form $p + iq$ genommen wird, so kann man auch in diesem Falle

$$a^x = e^{x \,.\, \log a}$$

setzen und dadurch zugleich a^x definiren für jedes von Null und e verschiedene a. Denn für $\log o$ läßt sich kein endlicher Werth angeben (22), und e^x erscheint bereits in der ganzen vorangehenden Entwicklung als eindeutige Summe der Reihe $\varphi(x)$ für jedes beliebige x von der Form $p + iq$. Diese Bedeutung soll e^x auch ferner behalten. Hienach wird

$$a^x = 1 + x \log a + \frac{x^2(\log a)^2}{2!} + \frac{x^3(\log a)^3}{3!} + \frac{x^4(\log a)^4}{4!} + \ldots\ldots,$$

wobei man jeden der unendlich vielen Werthe von $\log a$ hiefür setzen kann, jedoch in jedem Gliede denselben. Die allgemeine Potenz a^x wird also nach jener Definition im Allgemeinen vieldeutig. Nur wenn x positiv oder negativ ganz oder Null ist, erhält $e^{x \log a}$ den einzigen Werth des e^{xLa} nach Gl. XV., und dieser stellt zugleich den Werth der Potenz a^x dar, welche in diesem Falle nach den Definitionen I nur eindeutig sein kann.

24. Rechnet man die allgemeine Potenz aus, so erhält man

$$(r \,.\, e^{i\alpha})^{p+iq} = e^{(p+iq)\log(re^{i\alpha})} = e^{(p+iq)(Lr + i\alpha + ik\,2\pi)}$$
$$= e^{p\,Lr - q(\alpha + k\,2\pi)} \times e^{i(q\,Lr + p\alpha + pk\,2\pi)}.$$

Für $q = 0$ wird

$$(re^{i\alpha})^p = e^{p\,Lr} \,.\, e^{ip(\alpha + k\,2\pi)}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn p hierin gleich der positiven oder negativen ganzen Zahl n ist, so wird

$$(re^{i\alpha})^n = e^{nLr} \cdot e^{in(\alpha + k\,2\pi)} = r^n \cdot e^{in\,\alpha} \qquad (23).$$

Diese Gleichung stimmt überein mit der früher gefundenen (19); zugleich erhält man nach Gl. XIV.

$$\sqrt[m]{(re^{i\alpha})^n} = \sqrt[m]{e^{n\,Lr} \cdot e^{in\,\alpha}} = e^{\frac{nLr}{m}} \cdot e^{i\frac{n\alpha}{m} + ik\frac{2\pi}{m}}$$

und, wenn $n = 1$ ist,

$$\sqrt[m]{re^{i\alpha}} = e^{\frac{Lr}{m} + \frac{i\alpha}{m} + \frac{ik\,2\pi}{m}} = e^{\frac{1}{m}\log(re^{i\alpha})} = (re^{i\alpha})^{\frac{1}{m}} \qquad (22, 23).$$

Im Allgemeinen bezeichnet also der Ausdruck $a^{\frac{1}{m}}$ jeden der m verschiedenen Werthe von $\sqrt[m]{a}$, wenn a von der Form $p + iq$ ist, und alsdann hat man auch nach Gl. XIII.

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = \left(e^{\frac{1}{m}\log a}\right)^n = e^{\frac{n}{m}\log a} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Läßt man also nach der Definition der allgemeinen Potenz alle Werthe von $a^{\frac{n}{m}}$ gelten, so sind diese identisch mit den Werthen von $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$.

25. Legt man der Entwickelung von $\sqrt[m]{a^n}$ und $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$ bloß die Gleichung XI. zu Grunde, so erhält man

$$\sqrt[m]{(re^{i\alpha})^n} = \sqrt[m]{r^n \cdot e^{in\,\alpha}} = \left(\sqrt[m]{r^n}\right) \cdot e^{i\frac{n\alpha}{m} + ik\frac{2\pi}{m}}$$

$$\left(\sqrt[m]{re^{i\alpha}}\right)^n = \left(\sqrt[m]{r}\right)^n \cdot e^{i\frac{n\alpha}{m} + ikn\frac{2\pi}{m}},$$

wobei man für $\sqrt[m]{r}$ nur den einzigen positiven reellen Werth zu nehmen hat. Es läßt sich dann leicht beweisen, daß $\left(\sqrt[m]{r^n}\right) = \left(\sqrt[m]{r}\right)^n$ ist (2) und der zweite Ausdruck genau dieselben m Werthe umfaßt, welche der erste darstellt, so lange m und n theilerfremd sind. Im entgegengesetzten Falle hat der zweite Ausdruck weniger als m Werthe, und zwar jedesmal nur so viele, als der Nenner des in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Buches $\frac{n}{m}$ Einheiten enthält. Man findet nämlich alle Werthe des ersten Ausdrucks, wenn man für k nach und nach $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots m-1$ setzt. Bezeichnet man diese Werthe von k durch $\varkappa$ und ein beliebiges k im zweiten Ausdrucke durch λ, so drückt die Gleichung $e^{i\varkappa\frac{2\pi}{m}} = e^{i\lambda n\frac{2\pi}{m}}$ oder $\varkappa\frac{2\pi}{m} + 2k\pi = \lambda n\frac{2\pi}{m}$ oder $\varkappa + mk = \lambda n$ die Bedingung aus, daß der erste Ausdruck alle Werthe des zweiten umfasse (18). Da $\varkappa + mk$ der Null und jeder positiven oder negativen ganzen Zahl gleich werden kann,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so wird die Bedingung für jedes λ erfüllt. Sollen die Werthe des zweiten Ausdrucks für $k = \lambda$ und $k = \mu$ einander gleich werden, so muß $e^{i\lambda n \frac{2\pi}{m}} = e^{i\mu n \frac{2\pi}{m}}$ oder $\lambda n \frac{2\pi}{m} + k2\pi = \mu n \frac{2\pi}{m}$ oder $\lambda n + mk = \mu n$ oder $mk = (\mu - \lambda)n$ sein. Sind m und n relative Primzahlen, so wird der Gleichung genügt, wenn $\mu - \lambda = mk$, also $\mu = \lambda + \mu k$ ist. Aus dieser Gleichung erkennt man, wie früher (18), daß der zweite Ausdruck in diesem Falle m verschiedene Werthe hat, welche man erhält, wenn man für k nach und nach $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots m - 1$ setzt. Haben aber m und n den größten gemeinschaftlichen Theiler q, und ist $m = \alpha q$, $n = \beta q$, so wird die Bedingungsgleichung $\alpha k = (\mu - \lambda)\beta$ erfüllt, wenn $\mu = \lambda + \alpha k$ ist; daher stellt der zweite Ausdruck in diesem Falle nur α verschiedene Werthe dar, welche man erhält, wenn man für k nach und nach $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots \alpha - 1$ setzt.

Die Werthe von $\sqrt[m]{a^n}$ und $(\sqrt[m]{a})^n$, für welche $k = 0$ ist, also die einfachsten, sind einander gleich. Rechnet man also nur mit den einfachsten Werthen der Wurzelausdrücke, so lassen sich $\sqrt[m]{a^n}$ und $(\sqrt[m]{a})^n$ unbedingt mit einander vertauschen, mögen nun m und n theilerfremd oder theilerverwandt sein.

26. Da nach Gl. XV. $r^n = e^{nLr}$, so wird nach Gl. XIV. $\sqrt[m]{r^n} = e^{\frac{n}{m}Lr + ik\frac{2\pi}{m}}$, also der reelle positive Werth $(\sqrt[m]{r^n}) = e^{\frac{n}{m}Lr}$, und, wenn $n = 1$, $(\sqrt[m]{r}) = e^{\frac{Lr}{m}}$. Hiernach erhält man für den einfachsten Werth von $\sqrt[m]{a^n}$ und $(\sqrt[m]{a})^n$ den Ausdruck

$$e^{\frac{n}{m}Lr} \cdot e^{i\frac{n}{m}\alpha} = e^{\frac{n}{m}(Lr + i\alpha)} = e^{\frac{n}{m}L\alpha},$$

insofern $La = L(re^{i\alpha}) = Lr + i\alpha$ ist (22). Versteht man nun noch unter dem einfachsten Werthe der allgemeinen Potenz

$$a^{\frac{n}{m}} = e^{\frac{n}{m}\log a} = e^{\frac{n}{m}La + ikn\frac{2\pi}{m}}$$

denjenigen, für welchen $k = 0$ ist, so zeigt sich dieser einfachste Werth der allgemeinen Potenz $a^{\frac{n}{m}}$ zugleich als der einfachste Werth der Wurzelausdrücke $\sqrt[m]{a^n}$ und $(\sqrt[m]{a})^n$. Berücksichtigt man also bei der Rechnung keine anderen als die einfachsten Werthe, so darf man die letzteren Ausdrücke überall durch $a^{\frac{n}{m}}$ ersetzen. Hält man dagegen alle Werthe der Wurzelausdrücke fest und nimmt zugleich $a^{\frac{n}{m}}$ in seiner allgemeinen Bedeutung (23), so kann man sich des Ausdrucks $a^{\frac{n}{m}}$ unbedingt für $(\sqrt[m]{a})^n$ bedienen, für $\sqrt[m]{a^n}$ aber nur, wenn m und n theilerfremd sind (24).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

27. Für die vorhergehende Entwickelung wurde der binomische Lehrsatz als erwiesen vorausgesetzt, wenn der Exponent eine ganze positive Zahl ist. Es soll nun noch die Binominalreihe

$$1 + x_1 z + x_2 . z^2 + x_3 . z^3 + x_4 . z^4 + \ldots\ldots = F(x),$$

worin $x_{n+1} = \frac{x_n . (x - n)}{n + 1}$, also $x_0 = 1$ und $x_1 = x$ ist, für den Fall untersucht werden, daß x eine beliebige reelle Zahl bedeute. Eine zweite solche Reihe sei F(y), worin y ebenfalls beliebig reell ist. Kann man nun zeigen, daß die Reihe, deren allgemeines Glied

1. $(y_n + y_{n-1} . x_1 + y_{n-2} . x_2 + y_{n-3} . x_3 + \ldots\ldots y_1 . x_{n-1} + x^n) . z^n$

ist, identisch ist mit der als convergent vorausgesetzten Reihe $F(x + y)$, so hat man (Lehrsatz VII, a. a. O.)

2. $$F(x) . F(y) = F(x + y).$$

Jene Reihen sind aber identisch, wenn das allgemeine Glied $(x + y)_n . z^n$ in $F(x + y)$ durch den Ausdruck 1. dargestellt wird, also auch, wenn

3. $y_{n+1} + y_n . x_1 + y_{n-1} . x_2 + y_{n-2} . x_3 + \ldots\ldots y_1 x_n + x_{n+1} = (x + y)_{n+1}$

ist, d. h. wenn der Ausdruck 3. aus dem Coefficienten von z^n im Ausdruck 1. hervorgeht, sobald man diesen mit $\frac{x + y - n}{n + 1}$ multiplicirt. Dieses ist in der That der Fall, wovon man sich durch Ausführung der Multiplication überzeugt; folglich ist die Reihe, deren allgemeines Glied der Ausdruck 1. darstellt, identisch mit der Reihe $F(x + y)$, und daraus folgt die Gültigkeit der Gleichung 2., so lange die Reihen convergiren.

28. Es sei z eine allgemeine Zahl $= re^{i\alpha}$, dann wird

$$F(x) = 1 + x_1 re^{i\alpha} + x_2 r^2 e^{i2\alpha} + x_3 r^3 e^{i3\alpha} + \ldots\ldots$$

Diese Reihe convergirt, wenn $1 + x_1 r + x_2 r^2 + x_3 r^3 + \ldots\ldots$ convergirt, also wenn der Quotient $\frac{x_{n+1} . r^{n+1}}{x_n . r^n} = \frac{(x - n)r}{n + 1}$ sich bei beständig zunehmendem n einer Grenze nähert, welche absolut < 1 ist. Dieses ist immer der Fall, so lange $r < 1$ ist; mithin convergirt die durch F(x) bezeichnete Reihe, und die Gleichung 2. hat Geltung für jedes beliebige reelle x und y, so lange $r < 1$ ist.

Man setze $F(y) = 1 + de^{i\delta} = ce^{i\gamma}$ und nehme für γ nur den kleinsten positiven oder negativen Bogen, so ist

$$de^{i\delta} = y_1 re^{i\alpha} + y_2 r^2 e^{i2\alpha} + y_3 r^3 e^{i3\alpha} + \ldots\ldots,$$

und die Binominal-Coefficienten sowohl, wie ihre durch $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots\ldots$ bezeichneten absoluten Zahlenwerthe sind stetige Functionen von y; daher ist auch die Reihe

$$t = \eta_1 r + \eta_2 r^2 + \eta_3 r^3 + \ldots\ldots,$$

welche stets convergirt für $r < 1$, eine stetige Function von y (Lehrsatz V. a. a. O.).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für $y = 0$ wird $d = 0$, $c = 1$ und $\gamma = 0$. Da nun d niemals größer sein kann als 1, so nimmt d stetig zu, wenn y von Null an wächst, und deshalb sind auch c und γ stetige Functionen von y.

Ist also $F(x) = be^{i\beta}$, so wird

$$F(x+y) = F(x) . F(y) = be^{i\beta} . ce^{i\gamma} = bc . e^{i(\beta+\gamma)},$$

woraus hervorgeht, daß die Größen b und β nicht nur stetige Functionen von x sind, sondern daß auch für jedes beliebige x der zugehörige Bogen β bei gleicher Aenderung von x immer um gleichviel sich ändert.

29. Wenn die positive Zahl b eine stetige Function von x ist, so ist auch Lb eine solche (20), folglich kann man setzen $b = e^{f(x)}$ und $\beta = \varphi(x)$, also $F(x) = e^{f(x)} . e^{i\varphi(x)}$ und $F(y) = e^{f(y)} . e^{i\varphi(y)}$. Hieraus erhält man $F(x) . F(y) = e^{f(x)+f(y)} . e^{i\varphi(x)+i\varphi(y)}$ und, da $F(x) . F(y) = F(x+y) = e^{f(x+y)} . e^{i\varphi(x+y)}$ ist, durch Substitution $e^{f(x)+f(y)} = e^{f(x+y)}$ und $e^{i\varphi(x)+i\varphi(y)} = e^{i\varphi(x+y)}$, folglich

4. $$f(x) + f(y) = f(x+y)$$

5. $$\varphi(x) + \varphi(y) + 2m\pi = \varphi(x+y),$$

wo m als ganze Zahl unbestimmt bleibt. Wenn aber $\varphi(x)$ z. B. bei stetiger Zunahme von x um eine kleine Quantität sich ändert, so erfährt $\varphi(x+y)$ dieselbe Aenderung (28), folglich ist m eine von x und y unabhängige Constante.

Setzt man in Gl. 5. nach und nach x, 2x, 3x . . . . . $(n-1)x$ statt y, so erhält man schließlich

6. $$\varphi(nx) = n\varphi(x) + (n-1)2m\pi.$$

Hieraus folgt $\varphi(n) = n(\varphi(1) + 2m\pi) - 2m\pi$ oder, wenn man $\varphi(1) + 2m\pi = v$ setzt,

7. $$\varphi(n) = nv - 2m\pi.$$

Wenn in Gl. 6 $x = \frac{\mu}{n}$, und μ eine ganze positive Zahl ist, so wird $n\varphi\left(\frac{\mu}{n}\right) + (n-1)2m\pi = \varphi(\mu) = \mu v - 2m\pi$, folglich

$$\varphi\left(\frac{\mu}{n}\right) = \frac{\mu}{n}v - 2m\pi.$$

Die Gleichung 7. findet daher für alle positiven und rationalen Werthe von n statt. Ferner folgt aus Gl. 6., wenn $x = 0$,

$$\varphi(0) = -2m\pi,$$

und aus Gl. 5., wenn $y = -x$ ist, $\varphi(x) + \varphi(-x) + 2m\pi = \varphi(0) = -2m\pi$, mithin, so lange x rational und positiv ist,

$$\varphi(-x) = -xv - 2m\pi.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichung $\varphi(x) = xv - 2m\pi$ findet also allgemein für alle rationalen Werthe von x und folglich für alle reellen Werthe von x statt. Ebenso erhält man aus der Gl. 4., wenn man f(1) durch h bezeichnet, die für jedes reelle x gültige Gleichung

$$f(x) = xh.$$

Hienach wird

8. $$F(x) = e^{xh} \cdot e^{ixv} = e^{x(h+iv)}$$

9. $$F(1) = e^{h} \cdot e^{iv} = e^{h+iv} = 1 + re^{i\alpha}$$

30. Mittels der Gleichung 8. läßt sich nun der Werth von $h + iv$ bestimmen, wenn man beide Seiten dieser Gleichung durch die entsprechenden Reihen ersetzt und deren Grenzwerthe sucht für verschwindende x. Zunächst ist

$$\frac{F(x)-1}{x} = z + \frac{x-1}{1.2}z^2 + \frac{x-1.x-2}{1.2.3}z^3 + \frac{x-1.x-2.x-3}{1.2.3.4}z^4 + \ldots\ldots = \frac{e^{x(h+iv)}-1}{x}.$$

Da diese Reihe für jeden Werth von x, auch für $x = 0$, convergirt, wenn $r < 1$, und die Coefficienten der Potenzen von z continuirliche Functionen von x sind, so ist die Summe der Reihe eine stetige Function von x (Lehrsatz V. a. a. O.), ebenso wie die Summe der Reihe, welche für den letzten Ausdruck rechts kann gesetzt werden (20). Läßt man also x beständig abnehmen, so müssen die Werthe beider Reihen sich derselben Grenze nähern, und da

$$\lim \frac{e^{x(h+iv)}-1}{x} = h + iv = \lim \frac{F(x)-1}{x}$$

ist, so wird

$$h + iv = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \ldots\ldots,$$

woraus man

10. $$h = r\cos\alpha - \frac{1}{2}r^2\cos 2\alpha + \frac{1}{3}r^3\cos 3\alpha - \frac{1}{4}r^4\cos 4\alpha + \frac{1}{5}r^5\cos 5\alpha - \ldots.$$

11. $$v = r\sin\alpha - \frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha + \frac{1}{3}r^3\sin 3\alpha - \frac{1}{4}r^4\sin 4\alpha + \frac{1}{5}r^5\sin 5\alpha - \ldots.$$

findet. Aus diesen Gleichungen erkennt man, daß h und v stetige Functionen von r sind (Lehrsatz IV. a. a. O.), und zwar sind beide Größen Null, wenn $r = 0$ ist; ferner aus der Gleichung 9., daß v positiv oder negativ von Null an mit r stetig zunimmt und absolut kleiner bleibt als $\frac{1}{2}\pi$, so lange $r < 1$ ist. Versteht man jetzt unter $L(1+z)$ nur denjenigen Werth von $\log(1+z)$, welcher den kleinsten positiven oder negativen Bogen enthält (22), so ist $h + iv$ nach Gl. 9. dieser Werth von $\log(1+z)$; hält man ferner unter den Werthen der allgemeinen Potenz $(1+z)^x$ nur den Werth $e^{xL(1+z)}$ fest (23), so ergibt sich nach Gl. 8.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(1+z)^x = e^{xL(1+z)} = e^{x(h+iv)} = F(x) \quad \text{oder}$$

$$(1+re^{i\alpha})^x = 1 + x_1 re^{i\alpha} + x_2 r^2 e^{i2\alpha} + x_3 r^3 e^{i3\alpha} + \ldots\ldots,$$

für jedes reelle r, wenn $x < 1$ ist.

31. Wenn $\alpha = 0$, so wird $v = 0$ nach Gl. 11. und $e^h = 1 + r$ nach Gl. 9., folglich $h = L(1+r)$ und nach Gl. 10.

$$12.\quad L(1+r) = r - \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4 + \ldots\ldots$$

Setzt man dagegen $\alpha = \pi$, so wird $v = 0$ und $e^h = 1 - r$ nach Gl. 9., folglich $h = L(1-r)$ und nach Gl. 10.

$$13.\quad L(1-r) = -r - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4 - \ldots\ldots$$

Subtrahirt man diese Gleichung von Gl. 12., so wird

$$14.\quad L\frac{1+r}{1-r} = 2\left(r + \frac{1}{3}r^3 + \frac{1}{5}r^5 + \frac{1}{7}r^7 + \ldots\ldots\right),$$

weil $L(1+r) - L(1-r) = L\frac{1+r}{1-r}$ ist. Setzt man $\frac{1+r}{1-r} = a$, so wird $r = \frac{a-1}{a+1}$, und wenn $r < 1$ sein soll, so kann a jede positive, die Eins übertreffende Zahl bedeuten. Man erhält dann leicht die bekannte Reihe für La aus Gl. 14.

Setzt man endlich $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, so folgt aus Gl. 9., daß $h^2 = 1 + r^2$ und $r = \operatorname{tang} v$ ist, und man erhält aus Gl. 11.

$$15.\quad v = \operatorname{tang} v - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 v + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 v - \frac{1}{7}\operatorname{tang}^7 v + \ldots\ldots,$$

wenn $\operatorname{tang} v < 1$ ist. Da aber die Reihe auch für $\operatorname{tang} v = 1$ convergirt, so nimmt v mit $\operatorname{tang} v$ von Null an stetig zu und wird gleich $\frac{1}{4}\pi$, wenn $\operatorname{tang} v = 1$ ist (Lehrsatz IV. a. a. O.). Man hat also

$$16.\quad \frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots$$

Uebrigens findet man leicht mittels Gl. 15. eine zur Berechnung von π schneller convergirende Reihe auf bekannte Weise.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf