Einige Dreiecksconstructionen,

wenn drei hervorragende Punkte des Dreiecks gegeben sind.

Wir bezeichnen die Ecken des Dreiecks mit den Buchstaben A, B, C, den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises mit K, seinen Radius mit r. Die Mittelpunkte der vier Berührungskreise heißen O, O_1, O_2, O_3, ihre Radien ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, die Fußpunkte der winkelhalbirenden Transversalen a, b, c. Der Durchschnittspunkt der drei Höhenperpendikel werde mit H, der Schwerpunkt mit S und die Mitte der Seite BC mit M bezeichnet.

1. Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, von welchem eine Ecke, der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises und der Mittelpunkt des innern Berührungskreises gegeben sind.

Gegeben: A, K, O. Fig. 1:

Construction. Man beschreibe um K mit KA einen Kreis, welcher die Linie AO in D schneidet, beschreibe dann um D mit DO einen Kreis, welcher den Kreis K in B und C schneidet, und verbinde die Punkte A, B und C mit einander, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis Es braucht nur gezeigt zu werden, daß O der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises ist. Nun halbirt aber OA den Winkel BAC, weil nach der Construction Bogen DB = DC ist. Zieht man noch die Geraden DB und BO bis E, so ist Winkel DBO = DOB, also auch Bogen DCE = DB + EA; weil aber DC = DB, so ist auch CE = EA; daher halbirt auch OB den Winkel ABC, und O ist der Mittelpunkt des innern Berührungskreises.

Determination. Weil der Punkt O in das Dreieck, also auch in den Kreis K fallen muß, so muß KA > KO sein.

Ist außer A und K der Mittelpunkt des der Ecke A gegenüber liegenden äußern Berührungskreises, der Punkt O_1 gegeben, so bleibt die Construction dieselbe; aber dann muß KA < KO_1 sein, und der um D mit DO_1 beschriebene Kreis darf den Punkt A nicht umschließen, d. h. es muß DO_1 < DA sein.

2. Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren aus einem Eckpunkte, dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises und dem Mittelpunkte eines äußeren Berührungskreises, welcher der gegebenen Ecke nicht gegenüberliegt.

Gegeben: A, K, O_2. Fig. 1.

Construction. Man beschreibe um K mit KA einen Kreis, welcher die Gerade AO_2 in F schneidet, dann um F mit FO_2 einen zweiten Kreis, welcher den Kreis K in den Punkten B und C schneidet, so sind die Punkte A, B und C die Ecken des Dreiecks.

Beweis. Zieht man durch F im Kreise K den Durchmesser FKD und die Gerade DA, so steht FK als Centrale der Kreise F und K auf der gemeinschaftlichen Sehne BC senkrecht, halbirt also den Bogen BC. Daher halbirt auch DA den Winkel BAC. Weil aber der Winkel DAF als Winkel im Halbkreise ein rechter ist, so halbirt AO_2 auch den Nebenwinkel von BAC. Zieht man nun noch die Geraden FB und BO_2, so ist FB — FO_2, daher Winkel FBO_2 = FO_2B, also auch Bogen FE = AB — FE; weil aber auch Bogen FAB = FEC, so ist auch Bogen FAB — AB + FE = FEC — FE, oder Bogen

AFE = EC, daher auch Winkel $ABO_2 = CBO_2$ und O_2 der Mittelpunkt des der Ecke B gegenüberliegenden äußern Berührungskreises.

Determination. Damit die Aufgabe möglich ist, wird erfordert, daß der Punkt O_2 außersalb des Kreises K liegt, und daß der mit FO_2 beschriebene Kreis den Punkt A umschließt und den Kreis K schneidet. Es muß also $KO_2 > KA$, aber $FO_2 > FA$ und $FO_2 < 2KA$ sein.

3. Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, wenn ein Eckpunkt und die Fußpunkte der von dieser Ecke ausgehenden seiten- und winkelhalbirenden Transversalen gegeben sind.

Gegeben: A, M, a. Fig. 2.

Construction. Man verbinde A und M mit a, errichte in M eine Senkrechte, welche die verlängerte Aa in D trifft, construire zu Da und DA die mittlere geometrische Proportionale und beschreibe mit derselben um D einen Kreis, welcher die Aa in den Punkten O und O_1, und die Ma in den Punkten B und C schneidet. Verbindet man dann A mit B und C, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Weil DM auf der Sehne BC senkrecht steht, so ist M die Mitte der Seite BC oder der Fußpunkt der von A ausgehenden seitenhalbirenden Transversale. Da ferner nach der Construction $\frac{AD}{DO} = \frac{DO}{Da}$, so ist auch $\frac{AD+DO}{AD-DO} = \frac{DO+Da}{DO-Da}$, oder $\frac{AO_1}{AO} = \frac{O_1a}{Oa}$, d. h. A, O, a, O_1 sind vier harmonische Punkte. Daher bilden auch die Strahlen BA, BO, Ba, BO_1 und CA, CO, Ca, CO_1 zwei harmonische Büschel. Weil aber die Winkel OBO_1 und OCO_1 rechte sind, so halbirt BO den Winkel ABC und CO den Winkel ACB; daher halbirt auch AO den Winkel BAC und a ist der Fußpunkt der winkelhalbirenden Transversale.

4. Aufgabe. Von einem Dreiecke sind gegeben: ein Eckpunkt und die beiden Punkte, in welchen die gegenüberliegende Seite von dem innern und von dem zugehörigen äußern Berührungskreise berührt wird.

Gegeben: A, N, P. Fig. 2.

Construktion. Man verbinde P mit N und errichte in diesen Punkten Senkrechte auf PN, ziehe von A aus irgend eine Transversale, etwa AP, welche die in N errichtete Senkrechte in F schneidet, suche zu PFA den dem Punkte A conjugirten vierten harmonischen Punkt G, und ziehe durch G eine Parallele zu FN, welche die PN in a schneidet, lege endlich durch A und a eine Gerade, welche jene beiden Senkrechten in O und O_1 schneidet. Beschreibt man nun um O mit ON einen Kreis und legt an denselben von A aus zwei Tangenten, welche die PN in B und C treffen, so ist ABC das Dreieck.

Beweis. N ist nach der Construktion der Berührungspunkt des innern Berührungskreises. Weil ferner AFGP, also auch $AOaO_1$ harmonische Punkte sind, also BA, BO, Ba, BO_1 ein harmonisches Strahlenbüschel, und weil BO den Winkel ABC halbirt, so halbirt BO_1 seinen Nebenwinkel; da aber auch AO_1 den Winkel BAC halbirt, so ist O_1 der Mittelpunkt des äußern Berührungskreises, und P der Berührungspunkt, weil O_1P auf der Seite BC senkrecht steht.

Determination. Es muß A immer außerhalb der in P und N errichteten Senkrechten liegen und zwar über N hinaus. Dann wird auch A immer außerhalb des Kreises O liegen. Denn weil nothwendig $AF > FG$ ist, so ist auch, wie sich leicht zeigen läßt, $OA > Oa > ON$.

5. Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Ecke, der Fußpunkt der zugehörigen winkelhalbirenden Transversale und der Höhenpunkt gegeben sind.

Gegeben: A, a, H. Fig. 3.

Construktion. Fälle von a eine Senkrechte auf AH, aA_1, mache den Winkel $aAX = aAH$, halbire AH in D und und ziehe durch D zu AX eine Parallele, welche die aA_1 in M trifft; errichte in M auf-

aA_1 eine Senkrechte, welche die AX in K trifft, beschreibe endlich um K mit KA einen Kreis, welcher die aA_1 in B und C schneidet, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Die Linien Aa und KM schneiden sich, wenn sie verlängert werden, im Punkte E; weil nun KE parallel AH ist, so ist Winkel KEA = EAH = EAK, daher KE = KA und der Punkt E liegt auf dem Kreise K. Da aber auch KE auf der Sehne BC senkrecht steht, so ist Bogen BE = EC; also halbirt EA den Winkel BAC, und a ist der Fußpunkt der winkelhalbirenden Transversale.

Nun ist noch zu beweisen, daß sich die Höhenperpendikel des Dreiecks im Punkte H schneiden. AA_1 ist nach der Construction das eine Höhenperpendikel; zieht man nun BH bis B_1, so muß BB_1 auf AC senkrecht stehen. Man errichte in B eine Senkrechte auf BC, die den Kreis K in G trifft, und ziehe GA, so ist offenbar BG = 2KM = 2AD = AH, und auch BG parallel AH; da aber in dem Kreisviereck BGAC der Winkel CBG ein rechter ist, so ist auch GAC ein rechter Winkel; daher steht GA, also auch BB_1 auf AC senkrecht.

Determination. Die Auflösung dieser Aufgabe ist nur dann möglich, wenn die durch D zu AX parallel gezogene Gerade die aA_1 außerhalb der Strecke aA_1, und zwar über a hinaus trifft; denn nur dann wird KA > KM. Fiele nämlich M zwischen a und A_1, so fiele E zwischen a und A; da aber KE = KA, so wäre KA < KM, und M läge außerhalb des Kreises K.

Zusatz 1. Aus dem vorhergehenden Beweise ergibt sich der bekannte Satz, daß AH = 2KM ist, d. h. der obere Abschnitt eines Höhenperpendikels ist doppelt so groß, als die zugehörige Mittelsenkrechte.

Mit Hülfe dieses Satzes läßt sich leicht ein Dreieck construiren, wenn die Punkte A, H, K oder A, H, M gegeben sind.

Zusatz 2. Weil MA_1D ein rechtwinkeliges Dreieck ist, so liegen die Punkte M, A_1 und D auf einem Kreise, dessen Durchmesser $= \frac{MD}{2} = \frac{KA}{2} = \frac{r}{2}$ ist. Weil aber KDHM ein Parallelogramm ist, so halbiren sich MD und KH im Punkte Z, welcher der Mittelpunkt jenes Kreises ist. Da dasselbe nun auch von den entsprechenden Punkten auf den andern Seiten gilt, so haben wir den bekannten Satz: Die Mitten der Seiten eines Dreiecks, die Fußpunkte der Höhenperpendikel und die Mitten der obern Abschnitte dieser Perpendikel liegen auf der Peripherie eines Kreises, dessen Radius gleich dem halben Radius des umschriebenen Kreises ist, und dessen Centrum mitten zwischen dem Höhenpunkte und dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreis liegt.

6. Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, wenn der Mittelpunkt des umschriebenen und die Mittelpunkte des innern und eines äußern Berührungskreises gegeben sind.

Gegeben: K, O, O_1. Fig. 1.

Construction. Halbire OO_1 in D, beschreibe um D mit DO und um K mit KD einen Kreis; diese Kreise schneiden sich in den Punkten B und C, und der Kreis K wird von der OO_1 in A geschnitten.

Beweis ähnlich wie in der 1. Aufgabe.

7. Aufgabe. Ein Dreieck aus den Punkten K, O_2 O_3 zu construiren.

Fig. 1. Die Auflösung ist der vorigen ähnlich.

8. Aufgabe. Ein Dreieck aus den Punkten O, O_1, O_2 zu construiren.

Construction. Fig. 4. Man beschreibe um die Seiten des Dreiecks OO_1O_2 als Durchmesser drei Kreise; diese schneiden sich, außer in den Punkten OO_1O_2 noch in drei Punkten ABC, welche die Ecken des gesuchten Dreiecks sind.

Beweis. Zieht man die Geraden O_1B und O_2A, so ist Winkel O_1BO und auch Winkel O_1BO_2 ein rechter; daher liegen die Punkte O_2OB in gerader Linie; ebenso liegen die Punkte O_1OA und O_1CO_2 auf einer Geraden. In dem Kreise O_1O_2 ist Winkel $ABO_2 = AO_1O_2$, und in dem Kreise O_1O ist Win-

kel $OO_1C = OBC$; daher ist Winkel $ABO_2 = CBO_2$. Ebenso ist Winkel $BAO_1 = CAO_1$; weil aber auch O_1B auf BO_2, und O_2A auf O_1A senkrecht stehen, so sind die Durchschnittspunkte dieser Linien, O, O_1, O_2 die Mittelpunkte der Berührungskreise.

Determination. Damit O innerhalb des Dreiecks fällt, muß der Kreis O_1O_2 den Punkt O einschließen, oder es muß Winkel O_1OO_2 ein stumpfer sein. Es läßt sich auch leicht zeigen, daß $O_1OO_2 = 1R + \frac{1}{2}C$ ist. Ist das Dreieck OO_1O_2 ein spitzwinkeliges, so können diese drei Punkte nur die Centra der äußern Berührungskreise sein.

9. Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, wenn die Mitte einer Seite, der Mittelpunkt des zugehörigen äußern, und der des innern Berührungskreises gegeben sind.

Gegeben: M, O, O_1. Fig. 2.

Construction. Man halbire OO_1 in D, beschreibe um D mit DO einen Kreis, verbinde D mit M, und errichte in M auf MD eine Senkrechte, welche den Kreis in B und C trifft, fälle von O auf BC eine Senkrechte ON und beschreibe mit derselben um O einen Kreis, ziehe endlich von B und C Tangenten an den Kreis O, welche sich in A schneiden, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Oder: Man errichte in M auf MD eine Senkrechte und fälle von O und O_1 auf diese die Senkrechten ON und O_1P, beschreibe mit diesen Linien als Radien Kreise um O und O_1 und ziehe an diese Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten.

Die Beweise sind nach Analogie der frühern leicht zu finden.

10. Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, wenn die Mittelpunkte des umschriebenen und des innern Berührungskreises und die Mitte einer Seite gegeben sind.

Gegeben: K, O, M. Fig. 5.

Construction. Man verbinde K mit M, ziehe durch O eine Parallele zu KM und fälle von M auf diese eine Senkrechte MN, beschreibe um O mit ON einen Kreis, ziehe in demselben einen auf KO senkrecht stehenden Radius OD und beschreibe mit KD einen Kreis um K, welcher KM in E schneidet; dann verlängere man KE um ON bis F, beschreibe um K mit KF einen Kreis, welcher die MN in B und C schneidet, ziehe in diesen Kreis von B aus eine Sehne BA, welche den Kreis O berührt und verbinde endlich A mit C, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Die Punkte K und M haben nach der Construction die geforderte Bedeutung. Da der Kreis O auch die Seiten BC und BA berührt, so ist noch zu beweisen, daß er auch die dritte Seite AC berührt.

Zu dem Zwecke ziehe man die Linie BO bis G, lege durch G einen Durchmesser GL in den Kreis K, verbinde L mit C und C mit G, dann noch K mit B, und fälle endlich von K auf BG eine Senkrechte KI.

Nun ist $KO^2 = KI^2 + IO^2 = KB^2 - BI^2 + IO^2 = KB^2 - (BI^2 - IO^2) = KB^2 - (BI + IO)\ (BI - IO) = KB^2 - BO.OG = r^2 - BO.OG$.

Da ferner $LCG \sim BON$, so ist $\frac{LG}{CG} = \frac{BO}{ON}$, oder $LG.ON = CG.BO$, oder, da $LG = 2r$ ist, so ist $CG.BO = 2r.ON$.

Nun ist aber auch nach der Construktion $KO^2 = KD^2 - OD^2 = KE^2 - ON^2 = (KF - ON)^2 - ON^2 = KF^2 - 2KF.ON = r^2 - 2r.ON$; und da, wie oben gezeigt ist, $KO^2 = r^2 - BO.OG$, so ist $BO.OG = 2r.ON = CG.BO$: daraus folgt, daß $OG = GC$, also auch Winkel $GOC = GCO$, und, wenn man noch CO bis Q verlängert, Bogen $BQ + GC = AQ + GA$. Da aber BC und BA den Kreis O berühren, so ist Bogen $GC = GA$; also ist auch $BQ = AQ$, oder die Linie CO halbirt den Winkel BCA; daher berührt auch CA den Kreis O, oder O ist der Mittelpunkt des innern Berührungskreises.

Zusatz 1. Da $KO^2 = r^2 - 2r.ON$, und ON, wie bewiesen, der Radius des innern Berührungskreises ist, so $KO^2 = r^2 - 2r.\varrho$.

Zusatz 2. In Zusatz 2. zur fünften Aufgabe ist gezeigt, daß (in Fig. 3) Z der Mittelpunkt des dem Höhendreieck umschriebenen Kreises ist. Nun läßt sich leicht nachweisen, daß der Punkt H das Centrum des dem Höhendreieck eingeschriebenen Kreises ist. Bezeichnen wir den Radius desselben mit ϱ' und wenden Zusatz 1. auf das Höhendreieck an, so ist $HZ^2 = (\frac{1}{2}r)^2 - 2(\frac{1}{2}r\varrho' = \frac{1}{4}r^2 - r\varrho'$; da aber $HK = 2HZ$, so ist $HK^2 = r^2 - 4r\varrho'$.

11. Aufgabe Ein Dreieck zu construiren, wenn ein Eckpunkt, der Höhenpunkt und der Mittelpunkt des innern Berührungskreises gegeben sind.

Gegeben: A, H, O. Fig. 6.

Analysis. Es sei ABC das Dreieck, worin O das Centrum des innern Berührungskreises und H der Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel ist. Man beschreibe um das Dreieck den Kreis K, verlängere AO bis F, ziehe den Durchmesser FG, die Berührungsradien ON und ON_1, fälle von O eine Senkrechte OD auf AH und halbire AH im Punkte E.

Denkt man sich noch FC und GC gezogen, so sind die Dreiecke FGC, OAN_1 und FCM ähnlich, weil sie rechtwinklig sind und Winkel $FGC = OAN_1 = MCF$; daher gelten folgende Gleichungen:

$\frac{FG}{FC} = \frac{OA}{ON}$, und $\frac{FC}{OA} = \frac{FM}{ON}$; multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so ist $\frac{FG}{OA} = \frac{OA.FM}{ON^2}$, oder $\frac{OA^2}{ON^2} = \frac{FG}{FM} - \frac{2KF}{FM} = \frac{2KM}{FM} + 2$. Da nun (vgl. Aufg. 5, Zusatz 1) $2KM = AH$, und $ON = \varrho$, so ist $OA^2 = 2\varrho^2 + \varrho^2\frac{AH}{FM} = 2\varrho^2 + AH\varrho.\frac{\varrho}{FM}$.

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke FAC und FaC ist aber $\frac{AF}{FC} = \frac{FC}{Fa}$, oder, da $FC = FO$ (vgl. Aufg. 3), $\frac{AF}{FO} = \frac{FO}{Fa}$, also auch $\frac{AF - FO}{FO} = \frac{FO - Fa}{Fa}$, oder $\frac{AO}{FO} = \frac{Oa}{Fa}$, oder $\frac{FO}{Fa} = \frac{AO}{Oa} = \frac{AD}{DA_1} = \frac{h - \varrho}{\varrho}$; hieraus

folgt: $\frac{FO - Fa}{Fa} = \frac{h - \varrho - \varrho}{\varrho}$, oder $\frac{Oa}{Fa} = \frac{h - 2\varrho}{\varrho}$.

Nun ist aber $\frac{Oa}{Fa} = \frac{ON}{FM} = \frac{\varrho}{FM}$; also $\frac{\varrho}{FM} = \frac{h - 2\varrho}{\varrho}$

Setzt man diesen Werth in den Ausdruck für OA^2, so ist $OA^2 = 2\varrho^2 + AH(h - 2\varrho)$. Da nun $AD = -h\varrho$, so ist $h - 2 - \varrho = AD - \varrho$, also $OA^2 = 2\varrho^2 + AH.AD - AH\varrho$. In dieser Gleichung sind OA, AH und AD bekannt; löst man sie nach ϱ auf, so erhält man

$$\varrho = \frac{AH \pm \sqrt{8OA^2 - 8AH.AD + AH^2}}{4}$$

$$= \frac{AE \pm \sqrt{20A^2 - 2AH.AD + AE^2}}{2}$$

Um zu einem noch einfacheren Ausdrucke zu gelangen, beachte man, daß $AH.AD = AD^2 + AD.DH$ und $OA^2 - AD^2 = OD^2$ ist; dann erhält man

$$\varrho = \frac{AE \pm \sqrt{20D^2 - 2AD.DH + AE_2}}{2}$$

Endlich ist (nach Euclid. II. 5) $AD.DH + ED^2 = AE^2$, daher

$$\varrho = \frac{AE \pm \sqrt{20D^2 + 2DE^2 - AE^2}}{2}, \text{ oder } \varrho = \frac{AE \pm \sqrt{20E^2 - AE^2}}{2}$$

Diesen Ausdruck kann man leicht construiren. Hat man so ϱ gefunden, so beschreibe man um O mit ϱ einen Kreis, lege von A aus an denselben zwei Tangenten, und ziehe noch eine dritte Tangente, welche auf AH senkrecht steht; diese schneidet die beiden andern in den Punkten B und C.

Determination. 1. Ist der Winkel AOH ein spitzer, so ist $OE > AE$, daher ϱ immer reell; weil aber $\sqrt{20E^2 - AE^2} > AE$, so ist der eine Werth von ϱ negativ; für diesen Radius wird O der Mittelpunkt des der Ecke A gegenüberliegenden äußern Berührungskreises.

2. Ist Winkel $AOH = 1R$, so ist $OE = AE$, also auch $\varrho = AE$, d. h. der Radius des innern Berührungskreises ist gleich dem halben obern Höhenabschnitte, oder gleich der Mittelsenkrechten.

3. Wenn der Winkel AOH ein stumpfer ist, so ist $OE < AE$. Wenn nun $OE < AE\sqrt{1/2}$ wird, also $20E^2 < AE^2$, so ist ϱ imaginär. Wenn aber $OE \geqq AE\sqrt{1/2}$ ist, so ist ϱ reell, und da dann $\sqrt{20E^2 - AE^2} < AE$ ist, so sind beide Werthe von ϱ positiv, und man erhält zwei verschiedene Dreiecke Die Summe dieser beiden Radien ist gleich dem halben obern Abschnitte des Höhenperpendikels.

Man sehe die Figur 6 a und b.

4. Wenn die Punkte AOH in einer geraden Linie liegen, so ist bekanntlich das Dreieck gleichschenkelig. Wenn die Punkte in der Ordnung AHO oder OAH auf einander folgen, so ist ϱ immer reell. Wenn sie aber die Folge AOH haben, so kann ϱ imaginär werden, wenn nämlich $OE > AE\sqrt{1/2}$ ist.

Fallen endlich O und H zusammen, so ist $OE = AE$, also $\varrho = AE = KM$. Da aber das Dreieck gleichschenkelig ist, so muß auch K in die Gerade AH und also mit O zusammenfallen, d. h. das Dreieck ist gleichseitig.

12. Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, von welchem ein Eckpunkt, der Mittelpunkt des innern Berührungskreises und der Schwerpunkt gegeben sind.

Gegeben: A, O, S. Fig. 7.

Construction. Man verbinde A mit O und S, verlängere AS um $SM = 1/2\ AS$, ziehe OM und beschreibe um diese Linie als Durchmesser einen Kreis. Dann ziehe man durch A eine Parallele zu OM, welche jenen Kreis in L trifft, verbinde O mit L und ziehe durch M eine Parallele zu OL, welche den Kreis in N trifft. Beschreibt man dann um O mit ON einen Kreis und legt von A aus zwei Tangenten an denselben, welche die verlängerte MN in B und C schneiden, so ist ABC das Dreieck.

Beweis. Zunächst ist O der Mittelpunkt des innern Berührungskreises. Denn der um O mit ON beschriebene Kreis berührt die Seite BC, weil ONM als Winkel im Halbkreise ein rechter ist, und er berührt auch nach der Construction die Seiten AB und AC. Da nun auch $SA = 2SM$ ist, so ist S der Schwerpunkt des Dreiecks, wofern M die Mitte der Seite BC ist.

Um dieses zu beweisen, ziehe man LM und verlängere diese Linie bis zum Durchschnitt mit AO in D, verlängere ferner AL bis zum Durchschnitt mit BC in P und ziehe durch P die PO_1 parallel der MD und durch D die DG parallel der BC.

Dann ist PMOL ein Parallelogramm, ebenso MNOL, und zwar letzteres ein Rechteck; daher ist $PM = OL = MN$ und MD und PO_1 stehen auf BC senkrecht.

Ferner ist: $\frac{Aa}{Oa} = \frac{Pa}{Ma} = \frac{aO_1}{aD}$, oder $\frac{Aa}{aO_1} = \frac{Oa}{aD}$, daher auch

$\frac{Aa + aO_1}{aO_1} = \frac{Oa + aD}{aD}$, oder $\frac{AO_1}{O_1a} = \frac{OD}{aD} = \frac{OL}{Ma} = \frac{PM}{Ma} = \frac{AO}{Oa}$, d. h. $AOaO_1$ sind vier harmonische Punkte. Daher bilden die Geraden BA, BO, Ba, BO_1 und CA, CO, Ca, CO_1 zwei harmonische

Strahlenbüschel. Weil aber BO und CO die Winkel ABa und ACa halbiren, so stehen nach der bekannten Eigenschaft des harmonischen Büschels, BO_1 und CO_1 auf BO und CO senkrecht, oder die vier Punkte OBO_1C liegen auf einem Kreise, dessen Durchmesser OO_1 ist. Da nun die Dreiecke DLO und O_1GD congruent sind, so ist $OD = O_1D$, daher D der Mittelpunkt jenes Kreises. Weil endlich DM auf der Sehne BC senkrecht steht, so ist M die Mitte von BC, also AM die seitenhalbirende Transversale, und S der Schwerpunkt.

Determination. Die Möglichkeit der Aufgabe hängt davon ab, ob die Linie AP den um OM beschriebenen Kreis trifft oder nicht. Berührt jene Gerade den Kreis, so erhält man nur ein Dreieck. Schneidet sie aber den Kreis noch in einem zweiten Punkte L_1, so führt dieser zur Construktion eines zweiten, von dem ersten verschiedenen Dreiecks. Es lassen sich also im Allgemeinen zwei Dreiecke zeichnen, welche die Punkte A, O und S gemeinschaftlich haben.

Zusatz 1. Aus dem Beweise in der vorigen Aufgabe geht hervor, daß O_1 der Mittelpunkt des der Ecke A gegenüberliegenden äußern Berührungskreises ist. Da ferner O_1P auf BC senkrecht steht, so ist O_1P der Radius ρ_1 dieses Kreises und P der Berührungspunkt des Kreises und der Seite BC. Da nun AP parallel der OM ist, so ergibt sich der bekanntte Satz:

Verbindet man eine Ecke eines Dreiecks mit dem Punkte, in welchem die gegenüberliegende Seite von dem zugehörigen äußern Berührungskreise tangirt wird, so ist diese Linie parallel der Geraden, welche die Mitte jener Seite mit dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises verbindet.

Zusatz 2. Verlängert man OS, bis sie AP in T trifft, so sind die Dreiecke OMS und TAS ähnlich, daher $\frac{OS}{ST} = \frac{MS}{SA} = \frac{1}{2}$. Da nun dieser feste, von einer einzelnen Seite unabhängige Punkt der Geraden OS auf der Linie AP liegt, so muß er auch auf den Linien liegen, welche die beiden andern Eckpunkte des Dreiecks ABC mit den auf den gegenüberliegenden Seiten liegenden Berührungspunkten der zugehörigen äußern Berührungskreise verbinden. Daraus ergibt sich der Satz:

Die Geraden, welche die Eckpunkte eines Dreiecks mit den Punkten verbinden, in welchen die gegenüberliegenden Seiten von den zugehörigen äußern Berührungskreisen tangirt werden, schneiden sich in einem Punkte T, der mit dem Schwerpunkte S und dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises O in einer geraden Linie liegt, und zwar so, daß S zwischen T und O liegt, und daß $ST = 2SO$ ist.

Es haben also die Punkte TSO eine ähnliche Lage, wie, nach dem bekannten Eulerschen Satze, die Punkte HSK.

Zusatz 3. Verlängert man in Fig. 7 den Radius NO, bis er die AP in F trifft, so ist $FL = MO = LP$, und da auch OL und PN parallel sind, so ist $OF = ON$; es liegt also der Punkt F auf der Peripherie des Kreises O. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ATS und MOS ist $\frac{AT}{MO} = \frac{AS}{MS} = \frac{2}{1}$ oder $AT = 2MO$; da aber auch $PF = 2MO$, so ist $PF = AT$, also auch $AP - PF = AP - AT$, oder $AF = PT$; d. h.

Die obern Abschnitte der Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Punkten, in welchen die gegenüberliegenden Seiten die zugehörigen äußern Berührungskreise tangiren, werden von dem innern Berührungskreise des Dreiecks in Punkten geschnitten, deren Entfernung von den entsprechenden Ecken den untern Abschnitten jener Linien gleich sind.

Zusatz 4. Aus der Fig. 7 ergibt sich sofort: $\frac{AP}{AF} = \frac{PO_1}{FO} = \frac{\varrho_1}{\varrho}$; da nun, wie in Zusatz 3 bewiesen ist, $AF = PT$ ist, so ist auch $\frac{AP}{PT} = \frac{\varrho_1}{\varrho}$; d. h.:

Jede der genannten Transversalen verhält sich zu ihrem untern Abschnitte, wie der Radius des zugehörigen äußern Berührungskreises zu dem Radius des eingeschriebenen Kreises.

Zusatz 5. Bezeichnet man die beiden andern entsprechenden Linien mit BP_1 und CP_2, so ist $\frac{BP_1}{P_1T} = \frac{\varrho_2}{\varrho}$ und $\frac{CP_2}{P_2T} = \frac{\varrho_3}{\varrho}$, daher $\frac{AP.\,BP_1.\,CP_2}{PT.\,P_1T.\,P_2T} = \frac{\varrho_1.\,\varrho_2.\,\varrho_3}{\varrho^3} = \frac{\varrho.\,\varrho_1.\,\varrho_2.\,\varrho_3}{\varrho^4}$.

Da aber bekanntlich, wenn wir den Inhalt des Dreiecks ABC mit $\triangle$ und seinen Umfang mit $2p$ bezeichnen, $\varrho.\,\varrho_1.\,\varrho_2.\,\varrho_3 = \triangle$, und $\varrho p = \triangle$ ist, so ist $\frac{AP.\,BP_1\,CP_2}{PT.\,P_1T.\,P_2T} = \frac{p^2}{\varrho^2}$.

Zusatz 7. Figur 8. Verbindet man den Punkt T mit dem Höhenpunkte H und mit den Mittelpunkten des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises, K und O, zieht HO, bis sie die TK in I schneidet, und noch HK, so schneiden sich, wie aus dem Früheren hervorgeht, TO und HK in dem Schwerpunkte S. Weil nun $\frac{TS}{SO} = \frac{HS}{SK} = \frac{2}{1}$, so sind die Dreiecke THS und OKS ähnlich, daher sind TH und KO parallel und es ist $TH = 2KO$, d. h. die Verbindungslinie des Punktes T mit dem Höhenpunkte ist der Verbindungslinie der Mittelpunkte des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises parallel und doppelt so groß, als diese.

Zusatz 8. Es bleibt noch übrig, die Entfernung des Punktes T von den andern merkwürdigen Punkten des Dreiecks zu bestimmen. Bezeichnen wir, wie früher, den Radius des umschriebenen Kreises mit r, den des eingeschriebenen Kreises mit ϱ, den Radius des dem Höhendreieck eingeschriebenen Kreises mit ϱ^1, so ist $KO^2 = r^2 - 2r\varrho$ und $HK^2 = r^2 - 4r\varrho^1$ (vgl. Aufg. 10. Zus.)

Man hat auch einen Ausdruck für die Linie HO, den wir hier als bekannt voraussetzen müssen, nämlich $HO^2 = 2\varrho^2 - 2r\varrho^1$ (vgl. Gandtner und Junghans Sammlung. 2. Th. Lehrs. 98).

Nun ist, wie vorhin bewiesen, $TH = 2KO$, also I. $TH^2 = 4r^2 - 8r\varrho = 4r\,(r - 2\varrho)$.

In dem Dreiecke HTI (Fig. 8) ist $TK = KI$ und $HO = OI$, weil $TH = 2KO$ und TH parallel KO ist. Daher ist nach einem bekannten Lehrsatze:

$$TH^2 + HI^2 = 2HK^2 + \tfrac{1}{2}TI^2, \text{ oder } TI^2 = 2TH^2 + 2HI^2 - 4HK^2.$$

Weil aber $TI = 2TK$, $TH = 2KO$ und $HI = 2HO$ ist, so ist

$$\begin{aligned} 4TK^2 &= 8OK^2 + 8HO^2 - 4HK^2, \text{ oder} \\ TK^2 &= 2OK^2 + 2HO^2 - HK^2 \\ &= 2r^2 - 4r\varrho + 4\varrho^2 - 4r\varrho^1 - r^2 + 4r\varrho^1 \\ &= r^2 - 4r\varrho + 4\varrho^2 = (r - 2\varrho)^2, \text{ oder} \\ \text{II. } TK &= r - 2\varrho. \end{aligned}$$

Ferner ist in demselben Dreiecke HTI

$$\begin{aligned} 2TO^2 &= TI^2 + TH^2 - \tfrac{1}{2}IH^2 \\ &= 4TK^2 + 4KO^2 - 2HO^2, \text{ also} \\ TO^2 &= 2TK^2 + 2KO^2 - HO^2 \\ &= 2r^2 - 8r\varrho + 8\varrho^2 + 2r^2 - 4r\varrho - 2\varrho^2 + 2r\varrho^1 \\ &= 4r^2 - 12r\varrho + 6\varrho^2 + 2r\varrho^1 \end{aligned}$$

$$= 6r^2 - 12r\varrho + 6\varrho^2 - 2r^2 + 2r\varrho^1, \text{ oder}$$

$$\text{III. } TO^2 = 6\,(r - \varrho)^2 - 2r^2 + 2r\varrho^1.$$

Weil endlich $TO = 3SO$, so erhält man auch noch einen Ausdruck für die Entfernung des Schwerpunktes von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises, nämlich

$$SO^2 = \frac{6\,(r - \varrho)^2 - 2r^2 + r\varrho^1}{9}$$

Anm. Die Aufgaben, welche sich aus den noch übrigen Zusammenstellungen von je drei hervorragenden Punkten des Dreiecks ergeben, sind theils an sich leicht, oder schließen sich an die Aufgaben, deren Lösung im vorigen gegeben ist, an, z. B. wenn gegeben sind die Punkte ABS, ABH, ABO, ABO_1, ABO_3, ASH, KO_1M, AO_1S, AO_2S; andere Aufgaben sind unbestimmt, namentlich diejenigen, bei welchen die gegebenen Punkte in einer Geraden liegen oder die Ecken eines rechtwinkeligen Dreiecks bilden müssen, z. B. wenn gegeben sind AOO_1, AOO_2, AO_1O_2, AO_2O_3; auch die Aufgabe, aus SOO_1 ein Dreieck zu construiren, ist unbestimmt. Andere Aufgaben endlich scheinen unüberwindliche Schwierigkeiten für die Construktion zu bieten, so die Aufgabe, aus den Punkten KOH, d. h. aus den Mittelpunkten des umschriebenen und eingeschriebenen Kreises und dem Höhenpunkte ein Dreieck zu construiren. Denn man kann zwar, vermittelst der Ausdrücke für die Distanzen der gegebenen Punkte, leicht die Radien der dem Dreiecke um- und eingeschriebenen, und auch der dem Höhendreieck um- und eingeschriebenen Kreise finden, also auch diese Kreise selbst zeichnen. Dann hat man aber für die Ecken, oder die Mitten der Seiten, oder die Fußpunkte der Höhen, oder auch für die Seiten selbst nur je einen geometrischen Ort, und zwar einen Kreis. Sucht man nun etwa für die Ecken einen zweiten geometrischen Ort, so muß dieser, da ja die Ecken in der Dreizahl da sind, jenen Kreis in drei Punkten schneiden, kann also weder ein Kreis, noch eine gerade Linie sein. Ebenso muß man, wenn man Werthe für die Entfernungen jener Punkte etwa von den Mitten der Seiten sucht, zu einer Gleichung dritten Grades kommen, wie auch jeder Versuch zeigt. Man wird also darauf verzichten müssen, diese Aufgabe durch eine elementare Construktion aufzulösen, und ebenso die anderen, bei welchen nicht wenigstens ein Eckpunkt selbst, oder eine Linie, welche durch eine Ecke geht, z. B. OO_1, oder ein Punkt in einer Seite, z. B. M, zu den gegebenen Stücken gehört.

Berichtigung: S. 7. Z. 11 v. u. ist zu lesen: $= h - \varrho$, so ist $h - 2\varrho =$

$$= 4r^2 - 12rg + 6g^2 - 2r^2 + 2rg^1, \text{ oder}$$

$$\text{III. } TO^2 = 6\,(r - g)^2 - 2r^2 + 2rg^1.$$

Jetzt endlich $TO = 380$, so ergibt man auch noch einen Ausdruck für die Entfernung des Schnittpunktes von dem Mittelpunkte des inneren Berührungskreises, nämlich

$$3OT = \frac{6\,(r - g)^2 - 9r^2 + 4g^1}{2}$$

Bemerk. Die Aufgaben, welche ich uns den noch übrigen Gutachtenerklärungen von je bei besonderen Qualitäten des Terrains ergeben, sind theils an sich leicht, oder schließen sich an die Aufgaben, deren Lösung im vorigen gegeben ist, an, z. B. wenn gegeben sind die Punkte ABS, ATH, ATO, ATO_1, ASO, ASH, SO_1N, AO_1S, AO_2S, andere Aufgaben sind unbestimmt, nämlich solchenigen, bei welchen die gegebenen Punkte in einer Geraden liegen oder die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks bilden müssen, z. B. wenn gegeben sind AOO_1, AOO_2, AO_1O_2, AO_1O_3; auch die Aufgabe, aus SOO_1 ein Dreieck zu construiren, ist unbestimmt. Andere Aufgaben endlich scheinen unüberwindliche Schwierigkeiten für die Construction zu bieten, so die Aufgabe, aus den Punkten SOH, d. h. aus den Mittelpunkten des umschriebenen und eingeschriebenen Kreises und dem Höhenpunkte ein Dreieck zu construiren. Wenn man jedoch prüft, vermittelst der Baustriche für die Winkeln der gegebenen Punkte, sieht die Ähnlichkeit der vier Dreiecke und eine Construction, und auch der dem Höhenkreis und um und eingeschriebenen Kreis ähnlich, sich auch diese Dreiecke leicht zeichnen. Denn hat man aber für die Ecken, oder die Mitten der Seiten, oder die Schnittpunkte der Höhen, aber auch für die Seiten nicht nur einen geometrischen Ort, und zwar einen Kreis. Sucht man nun etwa für die Ecken einen geometrischen Ort, so muß dieser, da in die Ecken in der Dreiecksbahn sind, jenen Kreis in drei Punkten schneiden, kann also nur ein Kreis, doch eine ganze Reihe Kreise. Ebenso muß man, wenn man Werthe für die Entfernungen jener Punkte einen nur von Mitten der Seiten sucht, an einer Gleichung dritten Grades kommen, mit auch jener Deutung reihen. Aber auch jene darauf gezeichnen müssen, diese Aufgabe durch eine elementare Construction auszuführen, und ebenso die anderen, bei welchen nicht wenigstens ein Gegenstand jetzt, oder eine Linie, welche durch eine Ecke geht, z. B. OO_1, oder ein Punkt in einer Seite, z. B. M, zu den gegebenen Stücken gehört.

Berichtigung: S. 7. Z. 11 v. u. ist zu lesen: $= a - c$, in ist $a - 2c =$