Untersuchungen

aus der

Infinitesimalrechnung

von

Dr. Ernst Schimpf.

REALGYMNASIUM DÜSSELDORF BIBLIOTHEK

Bochum,
Druck von Wilh. Stumpf.
1885.

318 960 2

125,14 6

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

HT00536747 8

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Inhalts-Verzeichnis.

Erstes Kapitel.

Integraldefinition. Integralsätze. Einfachere Integrale. Umformung von Integralen.

		Seite
§. 1.	Definition des Integrals	1
§. 2.	Untersuchung mehrerer einfachen Integrale	4
§. 3.	Integration einer Funktion durch Entwicklung derselben in eine Potenzreihe	5
§. 4.	Integration der Funktionen e^{z-a}, $\sin(z-a)$ und $\cos(z-a)$	9
§. 5.	Zerlegung eines Integrals in die Summe zweier Integrale	10
§. 6.	Zurückführung eines Integrals zum Exponenten n auf ein Schleifenintegral zum Exponenten 1	12
§. 7.	Zusätze zum vorhergehenden Paragraphen	14
§. 8.	Einführung neuer Integrationsvariabeln	16
§. 9.	Orientierende Bemerkungen	18

Zweites Kapitel.

Grenzgleichungen einfach schreitender Reihen. Verwendung derselben für die Integralrechnung.

§. 10.	Einfach und doppelt schreitende Reihen	18
§. 11.	Erklärung der Grenzgleichungen	19
§. 12.	Einführung eines neuen Funktionszeichens	20
§. 13.	Grenzgleichungen zweier einfach schreitenden Reihen	21
§. 14.	Erklärung des Quotienten einer Reihe	22
§. 15.	Ein Lehrsatz, welcher sich auf den Reihenquotienten stützt	23
§. 16.	Bestimmung des Reihenquotienten unter besonderen Voraussetzungen	23
§. 17.	Ableitung von Grenzgleichungen für verwandte Reihen	25
§. 18.	Grenzgleichung der die Π erzeugenden Funktion	27
§. 19.	Grenzgleichung der Gaussschen hypergeometrischen Reihe für $x = 1$	28
§. 20.	Über die Π- und die Ω-Funktion	29
§. 21.	Grenzgleichung der die Ω erzeugenden Funktion	30
§. 22.	Grenzgleichung der Heineschen hypergeometrischen Reihe	30
§. 23.	Untersuchung des Integrals $\int_0^1 (1-z)^\alpha \cdot dz^n$ für sämtliche Werte von α	31
§. 24.	Grenzgleichung der Gaussschen hypergeometrischen Reihe für ein von 1 verschiedenes x	34

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Drittes Kapitel.

Untersuchung einer doppelt schreitenden Reihe. Verwendung derselben für die Integralrechnung.

§. 25. Vergleichung zweier doppelt schreitenden Reihen 37
§. 26. Spezialisierung der Funktionen $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$ 39
§. 27. Über die Quotienten der Reihen $\chi(\lambda)$ und $\omega(\lambda)$ 40
§. 28. Über die Bedingungsgleichungen (1) und (2) 41
§. 29. Untersuchung der Summe $\Sigma\,\varphi(\lambda)\cdot\psi(\nu-\lambda)$ 42
§. 30. Bestimmung des Quotienten Q 44
§. 31. Über die Bedingungsgleichung (3) 45
§. 32. Resultat der bisherigen Untersuchungen 45
§. 33. Untersuchung des Integrals $\int_0^1 z^\beta \cdot dz^n$ 46
§. 34. Untersuchung des Integrals $\int_0^1 (1-z)^\alpha \cdot z^\beta \cdot dz^n$ 48
§. 35. Über mehrfache Integration 50

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die in vorliegender Arbeit enthaltenen Untersuchungen bezwecken eine Verallgemeinerung der Differential- und Integralrechnung, derart, dafs Integral und Differentialquotienten als spezielle Fälle einer allgemeineren Funktion erscheinen. Zu dieser Verallgemeinerung wurde Verfasser durch die Bemerkung angeregt, dafs die die höheren Differentialquotienten definierende Formel:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \lim_{\nu=\infty} \left\{ \nu^n . \left\{ f\left(x + \frac{n}{\nu}\right) - \frac{n}{1} \cdot f\left(x + \frac{n-1}{\nu}\right) + \frac{n \,.\, n-1}{1 \,.\, 2} f\left(x + \frac{n-2}{\nu}\right) - \ldots \right\} \right\}$$

für $n = -1$ im wesentlichen die Integraldefinition liefert.

In einem der ersten Bände des Crelleschen Journals findet sich ein Aufsatz, in welchem darauf aufmerksam gemacht wird, dafs die Definition der höheren Differentialquotienten auch andere als ganzzahlige positive Werte des Exponenten zulasse, es ist jedoch nicht erwähnt, dafs dieselbe auch die Definition des Integrals enthält. Riemann wählt in seinem „Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation" die beiden Gleichungen

$$z_{(x+h)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} k_\nu \,.\, d_x^\nu z \,.\, h^\nu \quad \text{und} \quad d_x^\mu \left(d_x^\nu z\right) = d_x^{\mu+\nu} z$$

als Ausgangspunkt seiner Verallgemeinerung. Die Beschaffenheit der auf diesem Wege erzielten Resultate ermunterte nicht zum Weiterarbeiten, und so unterblieb eine Fortsetzung dieses Versuches. Dafs auch Riemann die oben gemachte Bemerkung entgangen ist, glaubt Verfasser aus den Worten entnehmen zu können: „Es ist klar, dafs man hierbei nicht von der gewöhnlichen Definition derselben, die sich auf ihr recurrentes Bildungsgesetz gründet, ausgehen kann, da man ja durch dasselbe unmöglich auf andere Glieder der Reihe, als auf solche, die ganzen Indices entsprechen, gelangen kann; man mufs sich also nach einer independenten Bestimmung derselben umsehen."

In vorliegender Arbeit dient als Ausgangspunkt eine bestimmte, unzweideutige Definition der „Integral" im weiteren Sinne genannten Funktion. Die Resultate, welche Verfasser bisher ermittelt hat, sind in drei Kapiteln zusammengestellt, von denen das erste sich ausschliefslich mit dem Integral beschäftigt, während die beiden andern Kapitel für die Integralrechnung gut verwendbare Untersuchungen enthalten, die einem weiteren Gebiete, der Lehre vom Unendlichgrofsen resp. Unendlichkleinen, angehören. Daher der allgemein gehaltene Titel: „Untersuchungen aus der Infinitesimalrechnung."

Erstes Kapitel.

Integraldefinition. Integralsätze. Einfachere Integrale. Umformung von Integralen.

§. 1. Definition des Integrals.

Wir denken uns zwei Punkte der Zahlenebene, a und b, durch eine beliebige Kurve verbunden und teilen die zwischen a und b liegende Kurvenstrecke von b aus nach einem

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bestimmten Gesetze in ν Teile, so dafs auf b der 0te, auf a der νte Teilpunkt fällt. Die aufeinanderfolgenden Teilpunkte bezeichnen wir mit

$$z_0 \ (= b),\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_{\nu-1},\ z_\nu \ (= a)$$

und die aufeinanderfolgenden Teilpunktdifferenzen mit

$$dz_0 = z_1 - z_0,\ dz_1 = z_2 - z_1,\ dz_2 = z_3 - z_2,\ \ldots\ dz_{\nu-1} = z_\nu - z_{\nu-1},\ dz_\nu = z_{\nu+1} - z_\nu.$$

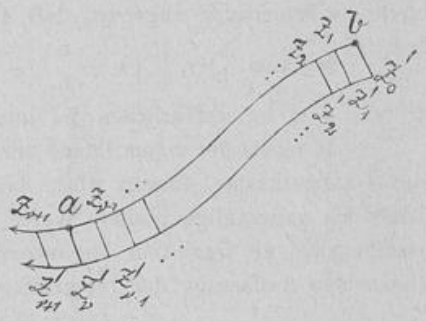
Dieser Teilpunktreihe geben wir jetzt eine kleine, für $\nu = \infty$ verschwindende Parallelverschiebung, indem wir

$$z'_\lambda = z_\lambda + (c : \nu)$$

setzen, so dafs an die Stelle obiger Punktreihe folgende tritt:

$$z'_0,\ z'_1,\ z'_2,\ \ldots\ z'_{\nu-1},\ z'_\nu.$$

Die Teilpunktdifferenzen ändern sich nicht.



Die Definition des „Integrals der Funktion f (z) zum Exponenten n in den Grenzen von a bis b“ sei dann:

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n = \lim_{\nu=\infty} \left\{ f(z'_0) \,.\, dz_0^n + \frac{n}{1} \cdot f(z'_1) \,.\, dz_1^n + \frac{n \,.\, n+1}{1 \,.\, 2} \cdot f(z'_2) \,.\, dz_2^n + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\nu-1}{1 \,.\, 2 \ldots \nu} \cdot f(z'_\nu) \,.\, dz_\nu^n \right\}$$
$$= \lim_{\nu=\infty} \sum_0^\nu \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\nu-1}{1 \,.\, 2 \ldots \nu} \cdot f(z'_\lambda) \,.\, dz_\lambda^n.$$

Es wird sich zeigen, dafs die durch Hinzufügung des Quotienten $(c : \nu)$ herbeigeführte unendlich kleine Verschiebung den Wert des Integrals nicht beeinflufst, wenn die zu integrierende Funktion auf dem Wege von a bis b synektisch ist. Wichtig ist diese Verschiebung für den Fall, dafs die Funktion auf dem Integrationswege einen oder mehrere Unstetigkeitspunkte besitzt. In solchem Falle sehen wir das Integral nicht ohne weiteres als unendlich grofs oder unbestimmt an, sondern verstehen unter dem Integral denjenigen Grenzwert, den wir mit Hilfe dieser Verschiebung erzielen. Ob sich der Wert des Integrals in diesem Falle von der Konstanten (c) der Parallelverschiebung abhängig erweise oder nicht, ist eine weitere Frage.

Aus obiger Integraldefinition geht hervor, dafs die eventuelle Vieldeutigkeit der Differenzpotenzen auch eine Vieldeutigkeit des Integrals zur Folge haben mufs. Zur Beseitigung dieses Übelstandes setzen wir folgendes fest:

1. dz_0^n soll jederzeit die Hauptpotenz sein, wenn nicht die Natur der Untersuchung oder die Rücksicht auf vorausgegangene Integrationen eine andre Wahl des Potenzwertes verlangt;
2. jede andere Differenzpotenz dz_ν^n soll in die vorhergehende $dz_{\nu-1}^n$ übergehen, wenn der Modul von dz_ν gleich dem Modul von $dz_{\nu-1}$ genommen und der im allgemeinen kleine Amplitudenunterschied gleich Null gesetzt wird.

Die beiden Punkte a und b mögen die Grenzpunkte des Integrals, und zwar a der Anfangspunkt, b der Endpunkt desselben heifsen, ferner z die Integrationsvariable, c die Verschiebungskonstante, a, b, eventuell c, sowie die in f (z) vorkommenden Parameter die Variabeln

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

des Integrals. Sind a und b bestimmtzahlige Werte, so wollen wir von einem bestimmten Integral reden.

Am einfachsten gestaltet sich die Integraldefinition, wenn beide Grenzpunkte gradlinig verbunden werden, und die verbindende Strecke in gleiche Teile geteilt wird. Wird nicht ausdrücklich neben dem Integral der Integrationsweg, sowie das Teilungsgesetz angegeben, so nehmen wir gradlinige Verbindung und Teilung in gleiche Teile an. Derartig vereinfacht gewinnt die Integraldefinition folgendes Aussehen:

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n = \lim_{\nu=\infty} \left\{ \left(\frac{b-a}{\nu}\right)^n \cdot \left(f(z'_0) + \frac{n}{1} \cdot f(z'_1) + \frac{n \,.\, n+1}{1 \,.\, 2} \cdot f(z'_2) + \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\nu-1}{1 \,.\, 2 \ldots \nu} \cdot f(z'_\nu) \right) \right\}.$$

Aus dieser Definition ergiebt sich ohne weiteres, dafs

1. $\int_a^b f(z) \,.\, dz^1 = \int_a^b f(z) \,.\, dz,$

2. $\int_a^b f(z) \,.\, dz^0 = \Big\{ f(z) \Big\}_{z=b} = f(b),$

3. $\int_a^b f(z) \,.\, dz^{-1} = \left\{ \frac{d\, f(z)}{dz} \right\}_{z=b} = \frac{d\, f(b)}{db}$ ist.

Es folgen einige Sätze, deren Richtigkeit ebenfalls direkt aus der Definition des Integrals ersichtlich ist:

1. $\int_a^b \text{Const.} \,.\, f(z) \,.\, dz^n = \text{Const.} \,.\, \int_a^b f(z) \,.\, dz^n;$

2. für eine endliche Summe:

$$\int_a^b \Big\{ A \,.\, f_1(z) + B \,.\, f_2(z) + \ldots + K \,.\, f_\varkappa(z) \Big\} \,.\, dz^n = A \,.\, \int_a^b f_1(z) \,.\, dz^n + B \,.\, \int_a^b f_2(z) \,.\, dz^n + \ldots$$
$$+ K \,.\, \int_a^b f_\varkappa(z) \,.\, dz^n;$$

3. wenn wir die lineare Substitution $z = p + q\zeta$, welche für $z = a$ in $a = p + q\alpha$ und für $z = b$ in $b = p + q\beta$ übergeht, einführen, so ist:

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n = q^n \,.\, \int_\alpha^\beta f(p + q\zeta) \,.\, d\zeta^n$$

mit der Verschiebungskonstanten c für das Integral linkerseits und der Verschiebungskonstanten $(c : q)$ für das Integral rechterseits. Die Natur der Differenzpotenzen regelt sich nach der Gleichung:

$$\Big\{ dz : d\zeta \Big\}^n = q^n.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 2. Untersuchung mehrerer einfachen Integrale.

1. $\int_a^b \text{Const.} \, . \, dz^n$.

Es ist $\int_a^b 1 \, . \, dz^n = (b-a)^n \, . \lim_{\nu=\infty} \left\{ \left(1 + \frac{n}{1} + \frac{n \, . \, n+1}{1 \, . \, 2} + \ldots + \frac{n \, . \, n+1 \ldots n+\nu-1}{1 \, . \, 2 \, \ldots \, \nu} \right) : \nu^n \right\}$

$$= (b-a)^n \, . \lim_{\nu=\infty} \left\{ \frac{n+1 \, . \, n+2 \ldots n+\nu}{1 \, . \, 2 \, \ldots \, \nu} : \nu^n \right\}$$

$$= (b-a)^n \cdot \frac{1}{\Pi(n)} \, , \quad \text{also}$$

$$\int_a^b \text{Const.} \, . \, dz^n = \text{Const.} \cdot \frac{(b-a)^n}{\Pi(n)} \, .$$

Da die Differentialquotienten einer Konstanten gleich Null sind, so mufs für n, gleich negativer ganzer Zahl, der Ausdruck rechterseits verschwinden; dies ist der Fall, da $\Pi(-g) = \infty$ ist.

2. $\int_0^1 (1-z)^\alpha \, . \, dz^n$. Es ist

$$\int_0^1 (1-z)^\alpha \, . \, dz^n = \lim_{\nu=\infty} \left\{ \left\{ \gamma^\alpha + \frac{n}{1} \cdot (\gamma+1)^\alpha + \frac{n \, . \, n+1}{1 \, . \, 2} \cdot (\gamma+2)^\alpha + \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{n \, . \, n+1 \ldots n+\nu-1}{1 \, . \, 2 \, \ldots \, \nu} (\gamma+\nu)^\alpha \right\} : \nu^{n+\alpha} \right\}$$

mit der Verschiebungskonstanten $(-\gamma)$. Setzen wir

$$\varphi_\nu(n, \alpha) = \gamma^\alpha + \frac{n}{1} \cdot (\gamma+1)^\alpha + \frac{n \, . \, n+1}{1 \, . \, 2} \cdot (\gamma+2)^\alpha + \ldots + \frac{n \, . \, n+1 \ldots n+\nu-1}{1 \, . \, 2 \, \ldots \, \nu} \cdot (\gamma+\nu)^\alpha$$

und zerlegen rechterseits die Potenzen

$(\gamma+\lambda)^\alpha$ in $\left\{ \gamma \, . \, (\gamma+\lambda)^{\alpha-1} + \lambda \, . \, (\gamma+\lambda)^{\alpha-1} \right\}$, so erhalten wir die Gleichung:

$$\varphi_\nu(n, \alpha) = \gamma \, . \, \varphi_\nu(n, \alpha-1) + n \, . \, \varphi'_{\nu-1}(n+1, \alpha-1),$$

in welcher sich die Funktion φ' von der Funktion φ lediglich dadurch unterscheidet, dafs $(\gamma+1)$ an Stelle von γ steht. Aus dieser Gleichung ergiebt sich mit Rücksicht auf

$$\lim \left\{ \varphi_\nu(n, 0) : \nu^n \right\} = 1 : \Pi(n)$$

durch Induktion für ein ganzzahliges positives g:

$$\int_0^1 (1-z)^g \, . \, dz^n = \frac{n}{n+g} \cdot \frac{1}{\Pi(n)} \, .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. $\int\limits_a^b (b - z)^g \,.\, dz^n$.

Dieses Integral geht durch die lineare Substitution $z = a + (b - a) \,.\, \zeta$ in das Integral

$(b - a)^{n+g} \,.\, \int\limits_0^1 (1 - \zeta)^g \,.\, d\zeta^n$ über, folglich ist für ganzzahlige positive g

$$\int\limits_a^b (b - z)^g \,.\, dz^n = \frac{n}{n + g} \cdot \frac{(b - a)^{n+g}}{\Pi\,(n)} \,.$$

4. $\int\limits_0^1 z^\beta \,.\, dz^n$. Es ist

$$\int\limits_0^1 z^\beta \,.\, dz^n = \mathrm{Lim}\, \left\{\left\{(\nu - \gamma)^\beta + \frac{n}{1} \cdot (\nu - \gamma - 1)^\beta + \frac{n \,.\, n + 1}{1 \,.\, 2} \cdot (\nu - \gamma - 2)^\beta + \ldots . \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{n \,.\, n + 1 \ldots n + \nu - 1}{1 \,.\, 2 \ldots \nu} \cdot (-\gamma)^\beta \right\} : \nu^{n+\beta} \right\}$$

mit der Verschiebungskonstanten $(-\gamma)$.

Ähnlich wie unter 2. setzen wir

$$\psi_\nu\,(n, \beta) = (\nu - \gamma)^\beta + \frac{n}{1} \cdot (\nu - \gamma - 1)^\beta + \frac{n \,.\, n + 1}{1 \,.\, 2} \cdot (\nu - \gamma - 2)^\beta + \ldots .$$
$$+ \frac{n \,.\, n + 1 \ldots n + \nu - 1}{1 \,.\, 2 \quad \nu} \cdot (-\gamma)^\beta,$$

zerlegen die Potenzen $(\nu - \gamma - \lambda)^\beta$ in $\left\{(\nu - \gamma) \,.\, (\nu - \gamma - \lambda)^{\beta - 1} - \lambda \,.\, (\nu - \gamma - \lambda)^{\beta - 1}\right\}$

und erhalten: $\psi_\nu\,(n, \beta) = (\nu - \gamma) \,.\, \psi_\nu\,(n, \beta - 1) - n \,.\, \psi_{\nu - 1}\,(n + 1, \beta - 1)$,

weiter hieraus für ganzzahlige positive g

$$\int\limits_0^1 z^g \,.\, dz^n = \Pi\,(g) : \Pi\,(n + g) \,.$$

5. $\int\limits_a^b \frac{(z - a)^g}{\Pi\,(g)} \,.\, dz^n$. Mittels derselben Substitution, die unter 3. zur Anwendung gelangte, kommen wir auf das unter 4. bestimmte Integral und damit auf

$$\int\limits_a^b \frac{(z - a)^g}{\Pi\,(g)} \cdot dz^n = \frac{(b - a)^{n+g}}{\Pi\,(n + g)} \,.$$

§. 3. Integration einer Funktion durch Entwicklung derselben in eine Potenzreihe.

Die zu integrierende Funktion sei f (z); unter 1. wählen wir den Endpunkt (b) und unter 2. den Anfangspunkt (a) der Integration zum Mittelpunkt des Konvergenzkreises.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Unter Voraussetzung der Konvergenz der Reihe ist

$$f(z) = f(b) - \frac{b-z}{1!} f'(b) + \frac{(b-z)^2}{2!} f''(b) - \ldots \text{ in inf.}.$$

Ist es gestattet, statt des Integrals der Summe der unendlichen Reihe die Summe der Integrale der einzelnen Glieder zu nehmen, so ergiebt sich nach §. 2., 3:

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n = \frac{(b-a)^n}{\Pi(n)} \cdot \left\{ f(b) + \frac{a-b}{1!} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot f'(b) + \frac{(a-b)^2}{2!} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot f''(b) + \ldots \right\}.$$

Der Nachweis der Richtigkeit dieser Gleichung läfst sich ohne Schwierigkeit erbringen, wenn die Konvergenz folgender beiden Reihen vorausgesetzt werden kann:

1) der Reihe:

$$[f(b)] + \frac{r}{1!} \cdot \left[\frac{n}{n+1} \cdot f'(b)\right] + \frac{r^2}{2!} \cdot \left[\frac{n}{n+2} \cdot f''(b)\right] + \ldots \text{ in inf., *)}$$

2) der Reihe:

$$[f(b)] + \frac{r'}{1!} \cdot [f'(b)] + \frac{r'^2}{2!} \cdot [f''(b)] + \ldots \text{ in inf.,}$$

in welcher $r' = r \,.\, (\gamma' + 1)$ und γ' der Modul der in dem Integral zu benutzenden Verschiebungskonstanten ist.

Wir beginnen mit einer Untersuchung, die im Beweise Verwendung finden wird; sie bezieht sich auf die Funktion

$$\varphi_\nu(n, \mu) : \nu^{n+\mu} = \left\{ \gamma^\mu + \frac{n}{1} \cdot (\gamma+1)^\mu + \frac{n \,.\, n+1}{1 \,.\, 2} \cdot (\gamma+2)^\mu + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\nu-1}{1 \,.\, 2 \ldots \nu} (\gamma+\nu)^\mu \right\} : \nu^{n+\mu},$$

in welcher μ und ν sehr grofse, eventuell auch unendlich grofse positive ganze Zahlen bedeuten sollen. Die in der Klammer rechterseits enthaltene Summe besteht aus $(\nu + 1)$ Gliedern; unter diesen $(\nu + 1)$ Gliedern suchen wir uns dasjenige aus, welches den gröfsten Modul besitzt, etwa das ϱte; alsdann ist für $\varrho = 0$

$$[\varphi_\nu(n, \mu) : \nu^{n+\mu}] \leqq [(\nu+1) \,.\, \gamma^\mu : \nu^{n+\mu}]$$

und für $\varrho > 0$

$$[\varphi_\nu(n, \mu) : \nu^{n+\mu}] \leqq \left[(\nu+1) \cdot \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\varrho-1}{1 \,.\, 2 \ldots \varrho} \cdot (\gamma+\varrho)^\mu : \nu^{n+\mu}\right]$$
$$\leqq (\gamma'+1)^\mu \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \left[\frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\varrho-1}{1 \,.\, 2 \ldots \varrho} \cdot \frac{1}{\varrho^{n-1}} \cdot \left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^{n+\mu-1} \cdot \left(\frac{\gamma+\varrho}{\varrho \,.\, (\gamma'+1)}\right)^\mu\right].$$

Lassen wir ϱ in $\left[\frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\varrho-1}{1 \,.\, 2 \ldots \varrho} : \varrho^{n-1}\right]$ sämtliche positiven ganzen Zahlen von 1 an bis ins Unendliche durchlaufen, so wird sich dieser Ausdruck stets unterhalb einer positiven endlichen Grenze, die wir mit N bezeichnen wollen, halten; ferner ist $[(\varrho : \nu)^{n+\mu-1}] \leqq 1$, da der reelle Teil von $(n + \mu - 1)$ positiv und $\varrho \leqq \nu$ ist; ebenso ist

*) Eckige Klammern sollen ausschliefslich zur Bezeichnung des absoluten Betrages ihres Inhalts benutzt werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

stets $\left[\left\{\gamma + \varrho\right\} : \left\{\varrho \cdot (\gamma' + 1)\right\}\right] \leqq 1$; $\left\{(\nu + 1 : \nu)\right\}$ liegt für grofse ν der Eins beliebig nahe, demnach können wir

$$[\varphi_\nu\ (n,\ \mu) : \nu^{n+\mu}] \leqq (\gamma' + 1)^\mu\ .\ N \text{ setzen.}$$

Wie unmittelbar ersichtlich, bewahrt diese Ungleichung auch für $\varrho = 0$ ihre Giltigkeit.

Zum Nachweis der Gleichheit des Integrals und der Reihe zeigen wir, dafs der absolute Betrag der Differenz beider kleiner als eine vorgegebene beliebig kleine Gröfse ε ist. Wir wählen eine endliche positive ganze Zahl λ, so grofs, dafs

$$1^*)\quad \frac{r^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!} \cdot \left[\frac{n}{n+\lambda+1} \cdot f^{(\lambda+1)}\ (b)\right] + \frac{r^{\lambda+2}}{(\lambda+2)!} \cdot \left[\frac{n}{n+\lambda+2} \cdot f^{(\lambda+2)}\ (b)\right] + \ldots$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} \cdot [\Pi\ (n) : (b-a)^n]\,,$$

$$2^*)\quad \frac{r'^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!} \cdot [f^{(\lambda+1)}\ (b)] + \frac{r'^{\lambda+2}}{(\lambda+2)!} \cdot [f^{(\lambda+2)}\ (b)] + \ldots < \frac{\varepsilon}{3\ N} : [(b-a)^n] \text{ ist, dann ist}$$

$$\int_a^b f\ (z)\ .\ dz^n = \int_a^b \left\{\sum_0^\lambda (-1)^\varrho \cdot \frac{(b-z)^\varrho}{\varrho!}\ f^{(\varrho)}\ (b)\right\} \cdot dz^n + \int_a^b \left\{\sum_{\lambda+1}^\infty (-1)^\varrho \cdot \frac{(b-z)^\varrho}{\varrho!}\ f^{(\varrho)}\ (b)\right\} \cdot dz^n$$

$$= \sum_0^\lambda (-1)^{(\varrho)} \cdot \frac{f^{(\varrho)}\ (b)}{\varrho!} \cdot \int_a^b (b-z)^\varrho\ .\ dz^n + (-1)^{\lambda+1} \cdot \lim_{\nu=\infty} \left\{\frac{(b-a)^{n+\lambda+1}}{(\lambda+1)!} \cdot \frac{\varphi_\nu(n, \lambda+1)}{\nu^{n+\lambda+1}} \cdot f^{(\lambda+1)}\ (b)\right.$$

$$\left. - \frac{(b-a)^{n+\lambda+2}}{(\lambda+2)!} \cdot \frac{\varphi_\nu\ (n,\ \lambda+2)}{\nu^{n+\lambda+2}} \cdot f^{(\lambda+2)}\ (b) + \ldots \text{ in inf.}\right\}$$

$$= \frac{(b-a)^n}{\Pi\ (n)} \cdot \left\{f\ (b) + \frac{a-b}{1!} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot f'\ (b) + \frac{(a-b)^2}{2!} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot f''\ (b) + \ldots + \right.$$

$$\left. \frac{(a-b)^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{n}{n+\lambda} \cdot f^{(\lambda)}\ (b)\right\} + \vartheta_1 \cdot [(b-a)^n]\ .\ N \cdot \left\{\frac{r'^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!} [f^{(\lambda+1)}(b)] + \frac{r'^{\lambda+2}}{(\lambda+2)!} \cdot [f^{(\lambda+2)}\ (b)] + \ldots\right\},\ ^*)$$

also

$$\int_a^b f\ (z)\ .\ dz^n = \frac{(b-a)^n}{\Pi\ (n)} \cdot \left\{f\ (b) + \frac{a-b}{1!} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot f'\ (b) + \ldots + \frac{(a-b)^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{n}{n+\lambda} \cdot f^{(\lambda)}\ (b)\right\} + \vartheta_2 \cdot \frac{\varepsilon}{3}.\quad (1)$$

Nun ist nach Obigem

$$\frac{(b-a)^n}{\Pi\ (n)} \cdot \left\{f\ (b) + \frac{a-b}{1!} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot f'\ (b) + \frac{(a-b)^2}{2!} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot f''\ (b) + \ldots \text{ in inf.}\right\}$$

$$= \frac{(b-a)^n}{\Pi\ (n)} \cdot \left\{f\ (b) + \frac{a-b}{1!} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot f'\ (b) + \ldots + \frac{(a-b)^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{n}{n+\lambda} \cdot f^{(\lambda)}\ (b)\right\} +$$

$$\vartheta_3 \cdot \left[\frac{(b-a)^n}{\Pi\ (n)}\right] \cdot \left\{\frac{r^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!} \left[\frac{n}{n+\lambda+1} \cdot f^{(\lambda+1)}\ (b)\right] + \frac{r^{\lambda+2}}{(\lambda+2)!} \cdot \left[\frac{n}{n+\lambda+2} \cdot f^{(\lambda+2)}\ (b)\right] + \ldots\right\}$$

$$= \frac{(b-a)^n}{\Pi\ (n)} \cdot \left\{f\ (b) + \frac{a-b}{1!} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot f'\ (b) + \ldots + \frac{(a-b)^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{n}{n+\lambda} \cdot f^{(\lambda)}\ (b)\right\} + \vartheta_4 \cdot \frac{\varepsilon}{3},\quad (2)$$

also folgt durch Subtraktion der Gleichung (2) von der Gleichung (1)

---

*) Unter ϑ wollen wir stets eine Zahl verstehen, welche innerhalb, resp. auf der Peripherie des Einheitskreises liegt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n - \frac{(b-a)^n}{\Pi(n)} \cdot \left\{ f(b) + \frac{a-b}{1!} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot f'(b) + \frac{(a-b)^2}{2!} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot f''(b) + \ldots \right\}$$

$$= \frac{\varepsilon}{3} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_4) \text{ und}$$

$$\left[\int_a^b f(z) \,.\, dz^n - \frac{(b-a)^n}{\Pi(n)} \cdot \left\{ f(b) + \frac{a-b}{1!} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot f'(b) + \frac{(a-b)^2}{2!} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot f''(b) + \ldots \right\} \right] < \varepsilon \,.$$

2. Dient der Anfangspunkt des Integrals als Konvergenzkreismittelpunkt, so ist

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} \cdot f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \ldots ,$$

vorausgesetzt, dafs diese Reihe für die in Frage kommenden z konvergiert. Integrieren wir statt der Summe der Glieder der Reihe die einzelnen Glieder, so ergiebt sich:

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n = \frac{(b-a)^n}{\Pi(n)} \cdot \left\{ f(a) + \frac{b-a}{n+1} \cdot f'(a) + \frac{(b-a)^2}{n+1 \,.\, n+2} \cdot f''(a) + \ldots \right\} .$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Gleichung ist in ähnlicher Weise wie der Beweis unter 1. zu führen. Vorausgesetzt wird wiederum die Konvergenz zweier positivgliedrigen Reihen, nämlich

1) der Reihe:

$$[f(a)] + r \cdot \left[\frac{f'(a)}{n+1} \right] + r^2 \cdot \left[\frac{f''(a)}{n+1 \,.\, n+2} \right] + \ldots ,$$

in welcher unter r der Modul von $(b-a)$ zu verstehen ist, und

2) der Reihe:

$$[f(a)] + \frac{r''}{1!} \cdot [f'(a)] + \frac{r''^2}{2!} \cdot [f''(a)] + \ldots ,$$

in welcher $r'' = r \,.\, (\gamma' + 2)$ sein soll.

An die Stelle der unter 1. benutzten Funktion $\varphi_\nu(n, \mu)$ tritt die Funktion $\psi_\nu(n, \mu)$ — vergleiche §. 2., 4. —. Setzen wir in dieser Funktion $(\nu + 1) = (\sigma + \tau)$ mit der Bestimmung, dafs Lim $(\sigma : \nu)$ und Lim $(\tau : \nu)$ von Null und Eins verschiedene, feste echte Brüche sein sollen, so erhalten wir

$$\psi_\nu(n, \mu) : \nu^{n+\mu} = \nu^{-n} \,.\, \left\{ \left(1 - \frac{\gamma}{\nu}\right)^\mu + \frac{n}{1} \cdot \left(1 - \frac{\gamma+1}{\nu}\right)^\mu + \ldots + \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\sigma-1}{1. \;\; 2 \;\; \ldots \;\; \sigma} \cdot \left(1 - \frac{\gamma+\sigma}{\nu}\right)^\mu \right\}$$

$$+ \vartheta \cdot \frac{\tau}{\nu} \cdot \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\varrho-1}{1. \;\; 2 \;\; \ldots \;\; \varrho} \cdot \frac{1}{\varrho^{n-1}} \cdot \left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{\nu-\gamma-\varrho}{\nu}\right)^\mu ,$$

wenn unter den τ letzten Gliedern das ϱte das dem absoluten Betrage nach gröfste ist, weiter durch Entwicklung nach dem binomischen Lehrsatze

$$\frac{\psi_\nu(n, \mu)}{\nu^{n+\mu}} = \left(\frac{\sigma}{\nu}\right)^n \cdot \frac{\varphi_\sigma(n, 0)}{\nu^n} - \frac{\mu}{1} \cdot \left(\frac{\sigma}{\nu}\right)^{n+1} \cdot \frac{\varphi_\sigma(n, 1)}{\nu^{n+1}} + \frac{\mu \,.\, \mu-1}{1. \;\; 2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\nu}\right)^{n+2} \cdot \frac{\varphi_\sigma(n, 2)}{\nu^{n+2}} - \ldots \text{ in inf.}$$

$$+ \vartheta \cdot \frac{\tau}{\nu} \cdot \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\varrho-1}{1. \;\; 2 \;\; \ldots \;\; \varrho} \cdot \frac{1}{\varrho^{n-1}} \cdot \left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{\nu-\gamma-\varrho}{\nu}\right)^\mu .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Verstehen wir unter N denjenigen endlichen positiven Wert, den der Quotient

$$\left[\varphi_\nu\,(n,\ \mu) : \left(\nu^{n+\mu}\,.\,(\gamma' + 1)^{\mu}\right)\right]$$

für sämtliche ganzzahligen positiven μ, einschliefslich der Null, nicht übersteigt, und unter M den gröfsten unter den Moduln von

$$(\varrho : \nu)^{n-1},\ (\sigma : \nu)^{n},\ (\sigma : \nu)^{n+1},\ (\sigma : \nu)^{n+2},\ \ldots\ ,$$

so folgt

$$[\psi_\nu\,(n,\ \mu) : \nu^{n+\mu}] \leqq M\,.\,N\,.\,[(\gamma' + 2)^{\mu} + 1]\,.$$

Wie ohne Schwierigkeit zu beweisen, gilt vorstehende Ungleichung auch für den Fall, dafs μ einen verhältnismäfsig grofsen reellen positiven Teil und einen endlichen festen imaginären Teil besitzt.

§. 4. Integration der Funktionen e^{z-a}, sin (z — a) und cos (z — a).

Entwickeln wir e^{z-a}, sin (z — a) und cos (z — a) in Potenzreihen um a als Mittelpunkt, so erhalten wir

$$e^{z-a} = 1 + \frac{z-a}{1!} + \frac{(z-a)^2}{2!} + \frac{(z-a)^3}{3!} + \ldots\ ,$$

$$\sin(z-a) = \frac{z-a}{1!} - \frac{(z-a)^3}{3!} + \frac{(z-a)^5}{5!} - \frac{(z-a)^7}{7!} + \ldots \text{ und}$$

$$\cos(z-a) = 1 - \frac{(z-a)^2}{2!} + \frac{(z-a)^4}{4!} - \frac{(z-a)^6}{6!} + \ldots\ .$$

Da diese drei Funktionen im Bereich des Endlichen synektisch sind, so werden die in §. 3. unter 2. gestellten Bedingungen erfüllt. Daher ist

$$1.\ \int_a^b e^{z-a}\,.\,dz^n = \frac{(b-a)^n}{\Pi(n)} + \frac{(b-a)^{n+1}}{\Pi(n+1)} + \frac{(b-a)^{n+2}}{\Pi(n+2)} + \frac{(b-a)^{n+3}}{\Pi(n+3)} + \ldots\ .$$

Die Differentialquotienten von e^{b-a}, die Differentiation nach b ausgeführt, ergeben sämtlich wieder e^{b-a}, demnach mufs vorstehende Reihe für $n = 0$ oder negativer ganzer Zahl gleich e^{b-a} sein; dies ist, wie man sich leicht überzeugt, auch wirklich der Fall. Für $n = 1$ mufs die Reihe in $(e^{b-a} - 1)$, für $n = 2$ in $\left\{e^{b-a} - \frac{b-a}{1!} - 1\right\}$, für $n = 3$ in $\left\{e^{b-a} - \frac{(b-a)^2}{2!} - \frac{b-a}{1!} - 1\right\}$ u. s. w., wie es die einfache, zweifache, dreifache u. s. f. Integration von e^{z-a} in den Grenzen a und b verlangt, übergehen. Auch dieses trifft zu.

Weiter ist

$$2.\ \int_a^b \sin(z-a)\,.\,dz^n = \frac{(b-a)^{n+1}}{\Pi(n+1)} - \frac{(b-a)^{n+3}}{\Pi(n+3)} + \frac{(b-a)^{n+5}}{\Pi(n+5)} - \frac{(b-a)^{n+7}}{\Pi(n+7)} + \ldots \text{ und}$$

$$3.\ \int_a^b \cos(z-a)\,.\,dz^n = \frac{(b-a)^n}{\Pi(n)} - \frac{(b-a)^{n+2}}{\Pi(n+2)} + \frac{(b-a)^{n+4}}{\Pi(n+4)} - \frac{(b-a)^{n+6}}{\Pi(n+6)} + \ldots\ .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 5. Zerlegung eines Integrals in die Summe zweier Integrale.

Nehmen wir auf der gradlinigen Verbindung der beiden Grenzpunkte des Integrals (a und b) in endlicher Entfernung von b einen beliebigen Punkt h an, so können wir, sobald die durch h gebildeten Teilstrecken kommensurabel sind, ν stets so wählen, dafs h mit einem Teilpunkt zusammenfällt. Bezeichnen wir die Zahl der auf die Strecke von b bis h fallenden Teile mit μ, so gilt die Proportion: $_{\nu}(b - a) : (b - h) = \nu : \mu$".

Unser Integral

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n = \operatorname{Lim} \left\{ \left(\frac{b-a}{\nu}\right)^n \cdot \left\{ f(z'_0) + \frac{n}{1} \cdot f(z'_1) + \frac{n \,.\, n+1}{1 \,.\, 2} \cdot f(z'_2) + \ldots, \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\nu-1}{1 \,.\, 2 \ldots \nu} \cdot f(z'_\nu) \right\}\right\}$$

zerlegen wir jetzt in die Summe zweier Grenzwerte und erhalten mit Berücksichtigung der Beziehung: $_{\nu}(b - a) : \nu = (b - h) : \mu$"

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n = \operatorname{Lim} \left\{ \left(\frac{b-h}{\mu}\right)^n \cdot \left\{ f(z'_0) + \frac{n}{1} \cdot f(z'_1) + \frac{n \,.\, n+1}{1 \,.\, 2} \cdot f(z'_2) + \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\mu-1}{1 \,.\, 2 \ldots \mu} \cdot f(z'_\mu) \right\}\right\}$$
$$+ \operatorname{Lim} \left\{ \left(\frac{b-a}{\nu}\right)^n \cdot \left\{ \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\mu}{1 \,.\, 2 \ldots \mu+1} \cdot f(z'_{\mu+1}) + \ldots + \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\nu-1}{1 \,.\, 2 \ldots \nu} \cdot f(z'_\nu) \right\}\right\}$$
$$= \int_h^b f(z) \,.\, dz^n + \operatorname{Lim} G_\nu \,.$$

Der zweite Grenzwert, den wir der Kürze wegen mit $\operatorname{Lim} G_\nu$ bezeichnet haben, wird sich ebenfalls als ein Integral herausstellen. Bekanntlich ist

$$\operatorname{Lim} \left\{ \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\lambda-1}{1 \,.\, 2 \ldots \lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^{n-1}} \right\} = \operatorname{Lim} \left\{ \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\lambda-1}{1 \,.\, 2 \ldots \lambda} \cdot \frac{1}{(\lambda+\delta)^{n-1}} \right\} = \frac{1}{\Pi(n-1)},$$

wenn δ konstant und endlich ist; folglich ist für grofse λ

$$\frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\lambda-1}{1 \,.\, 2 \ldots \lambda} = (\lambda + \delta)^{n-1} \cdot \left\{ \frac{1}{\Pi(n-1)} + \varepsilon_\lambda \right\},$$

worin $\operatorname{Lim} \varepsilon_\lambda = 0$ ist. Dies auf G_ν angewandt liefert

$$G_\nu = \frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \left(\frac{b-a}{\nu}\right)^n \cdot \left\{ (\mu+\delta+1)^{n-1} \,.\, f(z'_{\mu+1}) + (\mu+\delta+2)^{n-1} \,.\, f(z'_{\mu+2}) + \ldots \right.$$
$$\left. + (\nu+\delta)^{n-1} \,.\, f(z'_\nu) \right\}$$
$$+ \left(\frac{b-a}{\nu}\right)^n \cdot \left\{ (\mu+\delta+1)^{n-1} \,.\, \varepsilon_{\mu+1} \,.\, f(z'_{\mu+1}) + (\mu+\delta+2)^{n-1} \,.\, \varepsilon_{\mu+2} \,.\, f(z'_{\mu+2}) + \ldots \right.$$
$$\left. + (\nu+\delta)^{n-1} \,.\, \varepsilon_\nu \,.\, f(z'_\nu) \right\};$$

setzen wir die Konstante $\delta = c : (a - b)$, worin c die in $f(z')$ benutzte Verschiebungskonstante bedeuten soll, so ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{b-a}{\nu}\cdot(\lambda+\delta)=\frac{b-a}{\nu}\,.\,\lambda-\frac{c}{\nu}=b-\left(b-\frac{b-a}{\nu}\,.\,\lambda+\frac{c}{\nu}\right)=b-z'_\lambda \quad \text{und}$$

$$G_\nu=\frac{1}{\Pi\,(n-1)}\cdot\frac{b-a}{\nu}\cdot\Big\{(b-z'_{\mu+1})^{n-1}\,.\,f\,(z'_{\mu+1})+(b-z'_{\mu+2})^{n-1}\,.\,f(z'_{\mu+2})+\ldots\ldots$$
$$+(b-z'_\nu)^{n-1}\,.\,f\,(z'_\nu)\Big\}$$

$$+\frac{b-a}{\nu}\cdot\Big\{(b-z'_{\mu+1})^{n-1}\,.\,\varepsilon_{\mu+1}\,.\,f\,(z'_{\mu+1})+(b-z'_{\mu+2})^{n-1}\,.\,\varepsilon_{\mu+2}\,.\,f\,(z'_{\mu+2})+\ldots\ldots$$
$$+(b-z'_\nu)^{n-1}\,.\,\varepsilon_\nu\,.\,f\,(z'_\nu)\Big\}\,.$$

Ist $\left\{(b-z'_\varrho)^{n-1}\,.\,\varepsilon_\varrho\,.\,f\,(z'_\varrho)\right\}$ das dem absoluten Betrage nach gröfste der in der zweiten Klammer enthaltenen $(\nu-\mu)$ Glieder, so ergiebt sich weiter:

$$\operatorname{Lim} G_\nu=\frac{1}{\Pi\,(n-1)}\cdot\int_a^h(b-z)^{n-1}\,.\,f\,(z)\,.\,dz+\operatorname{Lim}\left\{\varepsilon_\varrho\,.\,\vartheta\,.\,(b-a)\cdot\frac{\nu-\mu}{\nu}\cdot(b-z'_\varrho)^{n-1}\,.\,f(z'_\varrho)\right\}.$$

Wegen $\operatorname{Lim}\varepsilon_\varrho=0$ hat

$$\varepsilon_\varrho\,.\,\vartheta\,.\,(b-a)\cdot\frac{\nu-\mu}{\nu}\cdot(b-z'_\varrho)^{n-1}\,.\,f\,(z'_\varrho)$$

die Null zur Grenze, sobald die Strecke von a bis h bezüglich der Funktion f (z) frei von Unendlichkeitspunkten ist; folglich ist

$$\int_a^b f\,(z)\,.\,dz^n=\frac{1}{\Pi\,(n-1)}\cdot\int_a^h(b-z)^{n-1}\,.\,f\,(z)\,.\,dz+\int_h^b f\,(z)\,.\,dz^n\,.$$

Es sei noch erwähnt, dafs vorstehende Zerlegung auch dann noch erlaubt ist, wenn h statt auf der a und b verbindenden Strecke auf der Verlängerung derselben über a hinaus liegt, ferner, dafs die Kommensurabilität der durch h gebildeten Teilstrecken nicht erforderlich ist. Letzteres erklärt sich daraus, dafs

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty}\left\{\frac{1}{\nu^n}\cdot\frac{n\,.\,n+1\ldots n+\lambda-1}{1\,.\;\;2\;\;\ldots\;\;\lambda}\cdot f\,(z'_\lambda)\right\}=0$$

ist, wenn das Verhältnis, in welchem λ zu ν steht, ein endliches ist und beim Übergang zur Grenze auch bleibt.

Die Potenz $(b-z)^{n-1}$ des ersten Integrals rechterseits ist in gleicher Weise wie dz^n die Hauptpotenz.

Für $n=1$ erhalten wir die bekannte Integralzerlegung:

$$\int_a^b f\,(z)\,.\,dz=\int_a^h f\,(z)\,.\,dz+\int_h^b f\,(z)\,.\,dz \quad \text{und}$$

für n gleich Null oder negativer ganzer Zahl $(-g)$:

$$\int_a^b f\,(z)\,.\,dz^{-g}=\int_h^b f\,(z)\,.\,dz^{-g}\,.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 6. Zurückführung eines Integrals zum Exponenten n auf ein Schleifenintegral zum Exponenten 1.

Das zu verwandelnde Integral sei

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n ;$$

von der in demselben enthaltenen Funktion f (z) setzen wir zweierlei voraus:

1) dafs sie auf dem gradlinigen Wege von a bis b nicht unendlich wird;
2) dafs sie innerhalb eines endlichen, den Endpunkt b umschliefsenden Flächenstücks synektisch ist.

Wir zerlegen zunächst unser Integral in der in §. 5. angegebenen Weise:

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n = \frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \int_a^h (b-z)^{n-1} \,.\, f(z) \,.\, dz + \int_h^b f(z) \,.\, dz^n \,.$$

Den Zerlegungspunkt h wählen wir dem Endpunkt b so nahe, dafs für $r = [b - h]$ die in §. 3. unter 1, 1) und 1, 2) angeführten Reihen konvergieren; eine solche Wahl ist nach Voraussetzung 2) immer möglich. Beide Teilintegrale formen wir um. Wir beginnen unter

1. mit $\int_h^b f(z) \,.\, dz^n$. Nach §. 3., 1. ist

$$\int_h^b f(z) \,.\, dz^n = \frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \left\{ \frac{(b-h)^n}{n} \cdot f(b) - \frac{(b-h)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{f'(b)}{1!} + \frac{(b-h)^{n+2}}{n+2} \cdot \frac{f''(b)}{2!} - \ldots \right\} .$$

In dieser Reihenentwicklung sind sämtliche Potenzen die Hauptpotenzen; setzen wir daher $(b - h) = r \,.\, e^{i\varphi}$ und nehmen φ in den Grenzen: „$\pi \geqq \varphi > -\pi$", so ist

$$\int_h^b f(z) \,.\, dz^n = \frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \left\{ r^n \,.\, e^{in\varphi} \cdot \frac{1}{n} \cdot f(b) - r^{n+1} \,.\, e^{i(n+1)\varphi} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{f'(b)}{1!} \right.$$
$$\left. + r^{n+2} \,.\, e^{i(n+2)\varphi} \cdot \frac{1}{n+2} \cdot \frac{f''(b)}{2!} - \ldots \right\}$$

$$= \frac{i \,.\, e^{n\pi i}}{\Pi(n-1)} \cdot \left\{ r^n \,.\, f(b) \cdot \frac{e^{in(\varphi-\pi)}}{in} + r^{n+1} \,.\, \frac{f'(b)}{1!} \cdot \frac{e^{i(n+1)(\varphi-\pi)}}{i(n+1)} + r^{n+2} \,.\, \frac{f''(b)}{2!} \cdot \frac{e^{i(n+2)(\varphi-\pi)}}{i(n+2)} + \ldots \right\} .$$

Nun ist für γ gleich positiver oder negativer ganzer Zahl

$$e^{2\pi i \,.\, n\gamma} = e^{2\pi i \,.\, (n+1)\gamma} = e^{2\pi i \,.\, (n+2)\gamma} = \ldots , \text{ folglich}$$

$$\int_h^b f(z) \,.\, dz^n = \frac{e^{n\pi i}}{\Pi(n-1)} \cdot \frac{i}{e^{2\pi i \,.\, n\gamma} - 1} \cdot \left\{ r^n \cdot f(b) \cdot \frac{e^{in(2\pi\gamma+\varphi-\pi)} - e^{in(\varphi-\pi)}}{i \,.\, n} + \right.$$
$$r^{n+1} \,.\, \frac{f'(b)}{1!} \cdot \frac{e^{i(n+1)(2\pi\gamma+\varphi-\pi)} - e^{i(n+1)(\varphi-\pi)}}{i \,.\, (n+1)} + r^{n+2} \,.\, \frac{f''(b)}{2!} \cdot \frac{e^{i(n+2)(2\pi\gamma+\varphi-\pi)} - e^{i(n+2)(\varphi-\pi)}}{i \,.\, (n+2)}$$
$$\left. + \ldots \right\}$$

$$= \frac{e^{n\pi i}}{\Pi(n-1)} \cdot \frac{i}{e^{2\pi i \,.\, n\gamma} - 1} \cdot \left\{ r^n \,.\, f(b) \,.\, \int_{\varphi-\pi}^{(\varphi-\pi)+2\pi\gamma} e^{in\psi} \,.\, d\psi + r^{n+1} \,.\, \frac{f'(b)}{1!} \,.\, \int_{\varphi-\pi}^{(\varphi-\pi)+2\pi\gamma} e^{i(n+1)\psi} \,.\, d\psi \right.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$+ r^{n+2} \cdot \frac{f''(b)}{2!} \cdot \int_{\varphi-\pi}^{(\varphi-\pi)+2\pi\gamma} e^{i(n+2)\psi} \cdot d\psi + \dots \Big\}$$

$$= \frac{e^{n\pi i}}{\Pi(n-1)} \cdot \frac{i}{e^{2\pi i \cdot n\gamma} - 1} \cdot \int_{\varphi-\pi}^{(\varphi-\pi)+2\pi\gamma} r^n \cdot e^{in\psi} \cdot f(b + r \cdot e^{in\psi}) \cdot d\psi$$

$$= \frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \frac{1}{1 - e^{2\pi i \cdot n\gamma}} \cdot \int_{\varphi-\pi}^{(\varphi-\pi)+2\pi\gamma} r^{n-1} \cdot e^{i(n-1)\cdot(\psi+\pi)} \cdot f(b + r \cdot e^{in\psi}) \cdot i r e^{i\psi} d\psi .$$

Setzen wir $b + r \cdot e^{i\psi} = z$, so ist $i r e^{i\psi} \cdot d\psi = dz$, da r in vorstehendem Integral seinen Wert nicht ändert, und demnach

$$\int_h^b f(z) \cdot dz^n = \frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \frac{1}{1 - e^{2\pi i n\gamma}} \cdot \int (b - z)^{n-1} \cdot f(z) \cdot dz .$$

Das Integral rechts ist ein Kreisintegral: die Integration geht von h aus $[\gamma]$-mal um b, und zwar in positivem Sinne, wenn γ positiv ist, in negativem Sinne, wenn γ negativ ist. Es fragt sich jetzt, welche Potenz $(b - z)^{n-1}$ darstellt. Für den Anfangspunkt h der Kreisintegration ist $(b - z)^{n-1}$ gleich

$$\Big\{ r^{n-1} \cdot e^{i(n-1)(\psi+\pi)} \Big\}_{\psi = \varphi - \pi} = r^{n-1} \cdot e^{i(n-1)\varphi} ,$$

also ist die fragliche Potenz bei Beginn der Integration die Hauptpotenz. Nach γ-maligem Umkreisen des Punktes b ist $(b - z)^{n-1}$ gleich

$$\Big\{ \text{Hauptpotenz v. } (b - z)^{n-1} \Big\} \cdot e^{2\pi i(n-1)\gamma} ;$$

mit diesem Werte langt $(b - z)^{n-1}$ zum Schlufs der Integration im Punkte h wieder an.

2. $$\frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \int_a^h (b - z)^{n-1} \cdot f(z) \cdot dz .$$

In diesem gradlinigen Integral ist $(b - z)^{n-1}$ von a bis h die Hauptpotenz. Durch Multiplikation mit

$$1 = \frac{1}{1 - e^{2\pi i \cdot n\gamma}} - \frac{e^{2\pi i(n-1)\gamma}}{1 - e^{2\pi i \cdot n\gamma}}$$

zerlegen wir unser Integral in

$$\frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \frac{1}{1 - e^{2\pi i \cdot n\gamma}} \cdot \int_a^h (b - z)^{n-1} \cdot f(z) \cdot dz$$

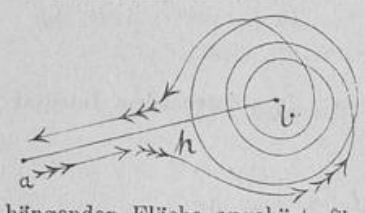
$$+ \frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \frac{1}{1 - e^{2\pi i \cdot n\gamma}} \cdot \int_h^a (b - z)^{n-1} \cdot e^{2\pi i(n-1)\gamma} \cdot f(z) \cdot dz .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Stellen wir diese beiden neugewonnenen Integrale mit dem unter 1. gefundenen Kreisintegrale zusammen, so sehen wir, dafs sich diese drei Integrale in ein einziges geschlossenes Schleifenintegral zusammenziehen lassen. Wir finden

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n = \frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \frac{1}{1 - e^{2\pi i \,.\, n\gamma}} \cdot \int^{*} (b - z)^{n-1} \,.\, f(z) \,.\, dz \,.$$

Die *-Integration ist auf gradem Wege von a bis h, von h aus auf einer den Punkt b als Mittelpunkt umschliefsenden Kreislinie in γ-maliger Umkreisung wieder bis zu h und dann von h gradlinig zurück bis a auszuführen. Die Potenz $(b - z)^{n-1}$ ist bei Beginn der Integration die Hauptpotenz. Es bedarf nur der Erwähnung, dafs an Stelle des soeben angegebenen Integrationsweges jeder andere Weg, welcher von a ausgeht, den Punkt b γ-mal umläuft und in a wieder endigt, genommen werden kann, wenn dieser Weg einer einfach zusammenhängenden Fläche angehört, für welche f (z) synektisch ist. Beistehende Zeichnung stellt einen Integrationsweg für $\gamma = +3$ dar.



§. 7. Zusätze zum vorhergehenden Paragraphen.

1. Zusatz: Wir untersuchen die Grenze, welcher sich das Kreisintegral für ein zu Null konvergierendes r (= [b — h]) nähert. Nach §. 6. ist

$$\int_h^b f(z) \,.\, dz^n = \frac{(b-h)^n}{\Pi(n)} \cdot \left\{ f(b) - \frac{b-h}{1!} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot f'(b) + \frac{(b-h)^2}{2!} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot f''(b) - \ldots \right\},$$

folglich ist

1) für ein n mit positivem reellen Teile

$$\lim_{r=0} \int_h^b f(z) \,.\, dz^n = \frac{f(b)}{\Pi(n)} \cdot \lim \left\{ r^n \,.\, e^{in\varphi} \right\} = 0 \,,$$

mithin kann für ein positivreelles n

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n = \frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \int_a^b (b - z)^{n-1} \,.\, f(z) \,.\, dz \quad \text{gesetzt werden.}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung läfst sich für solche n, deren reeller Teil nicht unter 1 liegt, auch ohne die Annahme eines in der Umgebung des Punktes b synektischen f (z) erweisen. Nehmen wir in

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n = \int_h^b f(z) \,.\, dz^n + \lim G_\nu$$

[b — h] sehr klein, so ist das erste Integral rechts (vergleiche §. 5.)

$$= \vartheta \,.\, (b-h)^n \,.\, \frac{\mu+1}{\mu} \cdot \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\lambda-1}{1 \,.\, 2 \ldots \lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^{n-1}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} \cdot f(z'_\lambda)$$

— $\lambda \leqq \mu$ —, demnach bei entsprechender Wahl von [b — h] beliebig klein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Für ein rein imaginäres n nähert sich das Kreisintegral mit abnehmendem r keinem festen Werte, wenn $[f(b)] > 0$ ist.

3) Für ein negativreelles n, mit Ausnahme der negativen ganzen Zahlen, divergiert

$$\lim_{r=0} \left\{ \int_h^b f(z) \,.\, dz^n \right\},$$

wenn wie unter 2) $[f(b)] > 0$ angenommen wird.

4) Für $n = -g$ $(g = 0, 1, 2, \ldots)$ ist

$$\int_h^b f(z) \,.\, dz^n = f^{(g)}(b) \,.$$

2. Zusatz: n sei eine ganze Zahl.

1) n sei eine positive ganze Zahl $(n = +g)$: alsdann ist das Schleifenintegral gleich Null; der konstante Faktor des Integrals unendlich grofs, also

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n = \infty \,.\, 0 \,.$$

An Stelle dieses unbestimmten Ausdruckes liefert das unter Zusatz 1. angegebene gradlinige Integral

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^g = \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (g-1)} \,.\, \int_a^b (b-z)^{g-1} \,.\, f(z) \,.\, dz \,.$$

2) n sei eine negative ganze Zahl $(n = -g)$: in diesem Falle wird das Schleifenintegral selbst nicht zu Null, wohl aber erscheint sein konstanter Faktor unter der vieldeutigen Form $(0 \,.\, \infty)$. Wir ermitteln den wahren Wert des Faktors, indem wir $n = -g + \varepsilon$ setzen und ε zu Null werden lassen. Es ist $\frac{1}{\Pi(-g+\varepsilon-1)} \,.\, \frac{1}{1 - e^{2\pi i(-g+\varepsilon)\gamma}}$

$$= \frac{(-g+\varepsilon) \,.\, (-g+1+\varepsilon) \,.\, (-g+2+\varepsilon) \ldots (-2+\varepsilon) \,.\, (-1+\varepsilon) \,.\, \varepsilon}{\Pi(\varepsilon) \,.\, (1 - e^{2\pi i \varepsilon \gamma})},$$

also $\lim\limits_{\varepsilon=0} \left\{ \frac{1}{\Pi(-g+\varepsilon-1)} \,.\, \frac{1}{1 - e^{2\pi i(-g+\varepsilon)\gamma}} \right\} = (-1)^g \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots g \,.\, \lim\limits_{\varepsilon=0} \left\{ \frac{\varepsilon}{1 - e^{2\pi i \varepsilon \gamma}} \right\}.$

Da $e^{2\pi i \varepsilon \gamma} = 1 + \frac{2\pi i \,.\, \varepsilon\gamma}{1!} + \frac{(2\pi i \,.\, \varepsilon\gamma)^2}{2!} + \ldots$ ist, so ergiebt sich

$$\lim_{\varepsilon=0} \left\{ \frac{\varepsilon}{1 - e^{2\pi i \,.\, \varepsilon\gamma}} \right\} = -\frac{1}{2\pi i \,.\, \gamma} \,.$$

Wir erhalten demnach die bekannte Formel:

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^{-g} = \left\{ \frac{d^g f(z)}{dz^g} \right\}_{z=b} = (-1)^{g+1} \,.\, \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots g}{2\pi i \,.\, \gamma} \,.\, \int \frac{f(z)}{(b-z)^{g+1}} \,.\, dz \,.$$

(γ-mal von a aus um b)

3) Ist $n = 0$, so ergiebt sich ähnlich wie unter 2)

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^0 = \left\{ f(z) \right\}_{z=b} = -\frac{1}{2\pi i \,.\, \gamma} \,.\, \int \frac{f(z)}{b-z} \,.\, dz \,.$$

(γ-mal von a aus um b)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

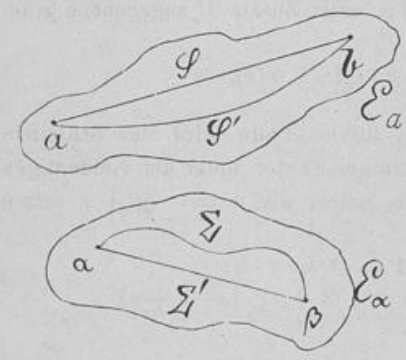
3. Zusatz. Ist n keine ganze Zahl, so ist die bei der Integration durchlaufene Kurve nur für $n\gamma$, gleich ganzer Zahl, wirklich geschlossen. Das Integral selbst wird dann $= 0$, der Faktor desselben $= \infty$. Zur Vermeidung dieser unbestimmten Form wählen wir ein γ, welches $n\gamma$ nicht zu einer ganzen Zahl werden läfst, am einfachsten $\gamma = 1$.

---

§. 8. Einführung neuer Integrationsvariabeln.

In dem Integrale $\int_a^b f(z) \,.\, dz^n$ wollen wir für die Variable z eine neue Variable ζ einführen, welche mit z durch die Gleichung $z = \varphi(\zeta)$, resp. deren Umkehrung $\zeta = \psi(z)$ verbunden ist.

Lassen wir dem Werte $z = a$ den Wert $\zeta = \alpha = \psi(a)$ entsprechen, und gehen wir von a auf dem gradlinigen Wege S bis zu b, so werden wir gleichzeitig von $\alpha = \psi(a)$ auf einer bestimmten Kurve Σ bis zu $\beta = \psi(b)$ gelangen. Wir wollen nun voraussetzen, dafs



$$\varphi(\zeta)$$

innerhalb eines einfach zusammenhängenden Flächenstücks E_α, welches α, β, die sie verbindende Kurve Σ, sowie die gradlinige Verbindung von α und β, die wir mit Σ' bezeichnen wollen, umfafst, synektisch sei.

Durch Abbildung der Fläche E_α mittels der Funktion $\varphi(\zeta)$ erhalten wir ein ebenfalls einfach zusammenhängendes Flächenstück E_a, welches a, b, die gradlinige Verbindung von a und b, die wir mit S bezeichnet haben, und eine im allgemeinen krummlinige Verbindung S', welche Σ' entspricht, in sich enthält. Von der Funktion

$$\psi(z)$$

wollen wir nun voraussetzen, dafs sie innerhalb dieses Flächenstücks E_a synektisch sei. Hieraus folgt, dafs $\varphi(\zeta)$ innerhalb E_α für verschiedene Werte der Variabeln ζ niemals denselben Funktionswert z annehmen kann, denn sonst wäre $\psi(z)$ innerhalb E_a mehrdeutig, was wir ja ausschliefsen.

Setzen wir die zu integrierende Funktion f (z) gleichfalls als innerhalb E_a synektisch voraus, so ist die Funktion

$$F(\zeta) = f\left\{\varphi(\zeta)\right\} \cdot \varphi'(\zeta) \cdot \left\{\frac{\varphi(\beta) - \varphi(\zeta)}{\beta - \zeta}\right\}^{n-1}$$

innerhalb E_α synektisch, wenn $[\varphi'(\beta)] > 0$ ist.*) Dafs $f(\varphi(\zeta)) \,.\, \varphi'(\zeta)$ innerhalb E_α synektisch ist, ist nach den gemachten Voraussetzungen ohne weiteres klar; ebenso ist aber auch die Funktion

$$\left\{\frac{\varphi(\beta) - \varphi(\zeta)}{\beta - \zeta}\right\}^{n-1},$$

---

*) Für $n = 0$ oder positiver ganzer Zahl kann $\varphi'(\beta)$ auch gleich Null sein

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welche für $\zeta = \beta$ in $(\varphi'(\beta))^{n-1}$ übergeht und wegen $[\varphi'(\beta)] > 0$ innerhalb E_α weder gleich Null noch unendlich grofs wird, in diesem Bereiche synektisch.

Nach §. 6. ist

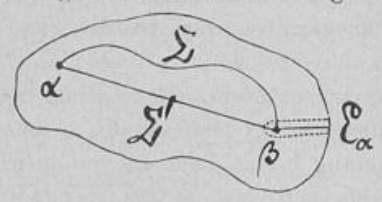
$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n = \frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \frac{1}{1 - e^{2\pi i n \gamma}} \cdot \int (b - z)^{n-1} \,.\, f(z) \,.\, dz \;;$$

der Integrationsweg dieses Schleifenintegrals erstreckt sich von a auf S bis in die Nähe von b, dann γ-mal um b und auf S wieder zurück bis a. Führen wir in dem Schleifenintegral die neue Variable ζ ein, so erhalten wir

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n = \frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \frac{1}{1 - e^{2\pi i \,.\, n\gamma}} \cdot \int \left\{\varphi(\beta) - \varphi(\zeta)\right\}^{n-1} \cdot f\left\{\varphi(\zeta)\right\} \cdot \varphi'(\zeta) \,.\, d\zeta \;;$$

der neue Integrationsweg geht vom Punkte α aus, auf der Kurve Σ bis in die Nähe von β, dann γ-mal um β und auf derselben Kurve Σ zurück bis α.

Ziehen wir von β aus, ohne den von Σ und Σ' umschlossenen Teil von E_α zu berühren, eine grade Linie bis zur Umgrenzung von E_α, so ist die Funktion



$$\left\{\varphi(\beta) - \varphi(\zeta)\right\}^{n-1} \cdot f\left\{\varphi(\zeta)\right\} \cdot \varphi'(\zeta)$$

innerhalb des Flächenstücks E_α, mit Ausnahme des Punktes β und der von β gezogenen Graden, synektisch. Folglich können wir den soeben angegebenen Integrationsweg in einen andern Weg umändern, welcher von α auf Σ' bis in die Nähe von β geht, den Punkt β γ-mal umwindet und auf Σ' wieder zu α zurückführt.

Diesen selben Integrationsweg besitzt das Schleifenintegral, welches wir durch Anwendung des §. 6. auf das Integral

$$\int_\alpha^\beta F(\zeta) \,.\, d\zeta^n$$

erhalten, nämlich

$$\frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \frac{1}{1 - e^{2\pi i \,.\, n\gamma}} \cdot \int \left\{\varphi(\beta) - \varphi(\zeta)\right\}^{n-1} \cdot f\left\{\varphi(\zeta)\right\} \cdot \varphi'(\zeta) \,.\, d\zeta \,.$$

Aus der völligen Identität dieses Schleifenintegrals mit dem vorhergehenden folgt die Gleichung:

$$\int_a^b f(z) \,.\, dz^n = \int_\alpha^\beta f\left\{\varphi(\zeta)\right\} \,.\, \varphi'(\zeta) \,.\, \left\{\frac{\varphi(\beta) - \varphi(\zeta)}{\beta - \zeta}\right\}^{n-1} \cdot d\zeta^n \;,$$

deren Giltigkeit an Erfüllung der vier Bedingungen:

1) $\varphi(\zeta)$ synektisch innerhalb E_α,
2) $\psi(z)$ synektisch innerhalb E_a,
3) $f(z)$ synektisch innerhalb E_a,
4) $[\varphi'(\beta)] > 0$

geknüpft ist.

Ist n eine positive oder negative ganze Zahl oder Null, so kommen die in §. 7., Zusatz 2. angegebenen Formeln zur Anwendung. Eine Änderung des Resultates findet für

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

diese Spezialfälle nur bezüglich der Bedingungen statt: Bedingung 2. kommt in Wegfall, ebenso für n gleich Null oder positiver ganzer Zahl Bedingung 4.; ferner reduzieren sich für n gleich Null oder negativer ganzer Zahl in den Bedingungen 1. und 3. die Flächen E_α und E_a auf die Punkte β und b, sowie deren unmittelbare Umgebung.

§. 9. Orientierende Bemerkungen.

Die in den vorhergehenden Paragraphen begonnene Reihe von Untersuchungen soll mit §. 8. ihren vorläufigen Abschlufs finden; einer späteren Abhandlung sei eine Fortsetzung derselben vorbehalten. Die Untersuchungen, welche uns in Kapitel II und III beschäftigen werden, haben als Endziel die Diskussion der Gleichung

$$\int_a^b \left\{ \int_a^u f(z) \,.\, dz^n \right\} . \, du^m = \int_a^b f(z) \,.\, dz^{n+m}$$

im Auge. Es wird sich zeigen, dafs der Giltigkeitsbereich dieser Gleichung ein beschränkter ist. Wichtig ist diese Gleichung, weil sie die Identität unseres allgemeinen Integrals mit den höheren Differentialquotienten und den mehrfachen Integralen für negative, resp. positive ganzzahlige Exponenten desselben ausspricht.

Der Weg, den Verfasser eingeschlagen hat, um zu dem angegebenen Ziele zu gelangen, ist ein verhältnismäfsig weitläufiger, liefert aber verschiedene interessante Nebenresultate, so dafs es sich nach des Verfassers Ansicht verlohnt, denselben von Anfang bis zu Ende zu verfolgen. Die Neuheit der Methode bringt es mit sich, dafs neue Begriffe auftreten, so die „Grenzgleichung“ und der „Quotient“ einer Reihe, deren Erklärung die nächsten Paragraphen bringen werden. Verschiedene Versuche, einen schneller zum Ziele führenden Weg, dem gleiche Strenge der Beweisführung eigen, ausfindig zu machen, sind bisher erfolglos geblieben.

Zweites Kapitel.

Grenzgleichungen einfach schreitender Reihen. Verwendung derselben für die Integralrechnung.

§. 10. Einfach und doppelt schreitende Reihen.

Gegeben sei eine Reihe von Gliedern; die Zahl der Glieder sei $(\nu + 1)$. Sind die einzelnen Glieder dieser Reihe von der Gesamtzahl der Reihenglieder, also von ν unabhängig, wie es bei den Gliedern der Reihe

$$\varphi(0),\ \varphi(1),\ \varphi(2),\ \ldots\ \varphi(\lambda),\ \ldots\ \varphi(\nu)$$

der Fall sein soll, so wollen wir von einer „einfach schreitenden Reihe“ sprechen. Sind dagegen die Reihenglieder aufser von ihrer Stellenzahl λ, auch noch von der Differenz derselben mit der Gliederzahl, also von $(\nu - \lambda)$ abhängig, so wollen wir von einer „doppelt schreitenden Reihe“ sprechen. Die allgemeinste Form einer doppelt schreitenden Reihe ist:

$$\varphi(0, \nu),\ \varphi(1, \nu - 1),\ \varphi(2, \nu - 2),\ \ldots\ \varphi(\lambda, \nu - \lambda),\ \ldots\ \varphi(\nu, 0).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eine einfachere Form einer doppelt schreitenden Reihe ist die Reihe:

$$\varphi(0) \cdot \psi(\nu),\ \varphi(1) \cdot \psi(\nu-1),\ \varphi(2) \cdot \psi(\nu-2),\ \ldots\ \varphi(\lambda) \cdot \psi(\nu-\lambda),\ \ldots\ \varphi(\nu) \cdot \psi(0),$$

welche in Kapitel III unter bestimmten Voraussetzungen über die Natur der Funktionen $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$ untersucht werden soll.

§. 11. Erklärung der Grenzgleichungen.

Gegeben sei eine Funktion. Unter den in dieser Funktion auftretenden Variabeln sei eine bestimmt, auf der positiven Axe ins Unendliche zu eilen. Wir bezeichnen diese Variable mit ν.

Unter der Grenzgleichung der gegebenen Funktion wollen wir nun eine Gleichung verstehen, welche über das Verhalten der Funktion beim Übergang zur Grenze, d. h. für $\nu = \infty$, Auskunft giebt, welche die Konvergenz, Oscillation und Divergenz der Funktion für bestimmte Variabelngebiete anzeigt.

Wir entwickeln eine solche Grenzgleichung. Die gegebene Funktion sei die Summe der einfach schreitenden Reihe

$$\varphi(0),\ \varphi(1),\ \varphi(2),\ \ldots\ \varphi(\lambda),\ \varphi(\lambda+1),\ \ldots\ \varphi(\nu),$$

welche wir mit Φ_ν bezeichnen. Für $\nu = \infty$ wird Φ_ν entweder divergieren, oscillieren oder zu einem bestimmten endlichen Werte konvergieren. Andre Möglichkeiten sind ausgeschlossen, wenn wir annehmen, dass die einzelnen Glieder der Reihe für endliche Werte ihrer Stellenzahl (λ) endlich bleiben. Die Funktion, welcher sich Φ_ν für den Fall seiner Konvergenz nähert, sei Φ; alsdann wird die Differenz $(\Phi_\nu - \Phi)$ entweder divergieren oder oscillieren oder zu Null konvergieren. Unter allen Funktionen, welche dasselbe Verhalten wie die Differenz $(\Phi_\nu - \Phi)$ zeigen, — d. h. sich stets so verhalten, dafs der Quotient, welcher aus der Differenz als Dividenden und einer dieser Funktionen als Divisor besteht, eine feste, endliche, von Null verschiedene Gröfse zur Grenze hat, — suchen wir uns diejenige aus, welche sich vor den übrigen durch Einfachheit ihrer Zusammensetzung auszeichnet; diese Funktion wollen wir mit $F(\nu)$ bezeichnen.*) Der Quotient $((\Phi_\nu - \Phi) : F(\nu))$ konvergiert alsdann zu einer festen, endlichen, von Null verschiedenen Gröfse (A); die Gleichung:

$$\lim_{\nu=\infty} \left\{ \frac{\Phi_\nu - \Phi}{F(\nu)} \right\} = A$$

ist daher die Grenzgleichung der Funktion Φ_ν.

Aus dieser Grenzgleichung können wir folgendes entnehmen:

1) für den Fall „$\lim F(\nu) = 0$“ : Φ_ν konvergiert zum Werte Φ, und zwar in derselben Weise, wie $A \cdot F(\nu)$ zu Null konvergiert;

2) für ein oscillierendes $F(\nu)$: Φ_ν oscilliert, und zwar in derselben Weise um den Punkt Φ, wie $A \cdot F(\nu)$ um den Nullpunkt;

*) Fraglich ist, ob stets derartige einfach gebaute Funktionen existieren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) für den Fall „Lim $F(\nu) = \infty$“: Φ_ν divergiert in derselben Weise wie $A \,.\, F(\nu)$. Für den letzten Fall ist der Wert von Φ gleichgiltig; er könnte durch jeden anderen endlichen Wert ersetzt werden.

Wir fassen die Anforderungen zusammen, denen obige Gleichung genügen mufs, damit sie in Wirklichkeit eine Grenzgleichung darstellt. Es sind folgende:

1) mufs Φ_ν von ν abhängig und für endliche ν endlich sein,

2) mufs Φ eine feste, endliche, von ν unabhängige Gröfse sein,

3) darf $F(\nu)$ für endliche ν weder gleich Null noch unendlich grofs sein und darf für ein ins Unendliche zunehmendes ν nur divergieren, oscillieren oder zu Null konvergieren,

4) mufs A eine feste, endliche, von Null verschiedene und von ν unabhängige Gröfse sein.

---

§. 12. Einführung eines neuen Funktionszeichens.

Die Benutzung der Grenzgleichungen erfordert das Rechnen mit Gröfsen, von denen nur der Grenzzustand (der Wert derselben für $\nu = \infty$) bekannt ist. Behufs leichterer Handhabung derartiger Gröfsen ist es nötig, ein neues Funktionszeichen einzuführen, welches im Gegensatz zu dem Funktionszeichen Lim steht. Es mag nämlich eine jede Funktion, welche sich für $\nu = \infty$ einem gewissen Werte A nähert, mit $(A)_\nu$ bezeichnet werden, so dafs

$$\lim_{\nu=\infty} \left\{ (A)_\nu \right\} = A \quad \text{ist.}$$

Die Funktion Lim ist eindeutig, sobald die Funktion, auf welche sich das Zeichen Lim bezieht, eindeutig ist; $(A)_\nu$ dagegen ist unendlich vieldeutig.

Es folgen vier Sätze über Benutzung derartiger Gröfsen:

1) $(A)_\nu \pm (B)_\nu = (A \pm B)_\nu$, daher

1*) $(A)_\nu - (A)_\nu = (A - A)_\nu$, also, sobald A nicht unendlich grofs ist, $= (0)_\nu$;

2) $(A)_\nu \,.\, (B)_\nu = (A \,.\, B)_\nu$;

3) $(A)_\nu : (B)_\nu = (A : B)_\nu$;

4) $(A)_\nu = A \,.\, (1)_\nu$, wenn A weder unendlich grofs noch gleich Null ist.

Die Anwendung dieses Funktionszeichens erspart, wie man sich leicht überzeugt, das Rechnen mit den sogen. „unendlich kleinen“ Zahlen. Wegen der Vieldeutigkeit von $(A)_\nu$ hat ein und dasselbe Zeichen $(A)_\nu$ in verschiedenen, eventuell auch derselben Gleichung nicht ein und dieselbe Funktion zu bedeuten; es ist, wie Satz 1*) besagt, $(A)_\nu - (A)_\nu$ nicht gleich Null, sondern gleich $(0)_\nu$.

Die in §. 11. entwickelte Grenzgleichung können wir mit Benutzung des neuen Zeichens folgendermafsen schreiben:

$$\left\{ \Phi_\nu - \Phi \right\} : F(\nu) = (A)_\nu$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 13. Grenzgleichungen zweier einfach schreitenden Reihen.

1. Es sei $\varphi(\lambda) = q^{\lambda}$, alsdann ist

$$\Phi_{\nu} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{\nu} = (1 - q^{\nu+1}) : (1 - q) .$$

Die Funktion, welcher sich Φ_{ν} für den Fall seiner Konvergenz nähert, ist

$$\Phi = 1 : (1 - q), \text{ also ist}$$

$$\Phi_{\nu} - \Phi = q^{\nu+1} : (1 - q) \quad \text{und}$$

$$\left\{\Phi_{\nu} - \Phi\right\} : q^{\nu} = \frac{q}{1 - q} .$$

Diese Grenzgleichung von Φ_{ν} stimmt auch in der Form vollständig mit der Grenzgleichung des §. 12. überein, wenn wir

$$\left\{\Phi_{\nu} - \Phi\right\} : q^{\nu} = \left(\frac{q}{1 - q}\right)_{\nu} \quad \text{setzen.}$$

Die in §. 11. angegebenen Bedingungen werden von vorstehender Gleichung nicht erfüllt, wenn $q = 1$ oder $= 0$ ist.

Für $q = 1$ ersetzen wir obige Gleichung durch die „Ersatzgrenzgleichung“:

$$\left\{\Phi_{\nu} - \Phi\right\} : \nu = (1)_{\nu} .$$

Für spätere Anwendungen sei an dieser Stelle ein für alle Mal bemerkt, dafs, wenn die ursprüngliche Grenzgleichung ihres Charakters als Grenzgleichung verlustig geht, es aber möglich ist, dieselbe für den betreffenden Fall durch eine andere, wirkliche Grenzgleichung zu ersetzen, sich die Ausführungen späterer Paragraphen für diesen Fall stets auf die Ersatzgrenzgleichung beziehen.

Für $q = 0$ ist eine Ersatzgrenzgleichung nicht möglich; für spätere Anwendungen ist daher der Fall: „$q = 0$“ ohne weiteres auszuschliefsen.

2. Es sei $\varphi(\lambda) = \frac{n \,.\, n+1 \,.\, n+2 \ldots n+\lambda+1}{1 \,.\, 2 \quad 3 \ldots \lambda}$; die Summe der Reihe $\varphi(\lambda)$, nämlich

$$\Phi_{\nu} = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n \,.\, n+1}{1 \,.\, 2} + \ldots + \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\nu-1}{1 \,.\, 2 \ldots \nu} = \frac{n+1 \,.\, n+2 \ldots n+\nu}{1 \,.\, 2 \ldots \nu}$$

konvergiert, sobald der reelle Teil von n negativ ist, zu Null; in allen übrigen Fällen findet Konvergenz nicht statt; es ist demnach $\Phi = 0$ Die Grenzgleichung, welche nur eine Umformung der Gleichung

$$\frac{n+1 \,.\, n+2 \ldots n+\nu}{1 \,.\, 2 \ldots \nu} \cdot \frac{1}{\nu^n} = (1 : \Pi\,(n))_{\nu}$$

darstellt, lautet:

$$\left\{\Phi_{\nu} - \Phi\right\} : \nu^n = (1 : \Pi\,(n))_{\nu} .$$

Für n gleich Null oder negativer ganzer Zahl ($n = -g$) verschwinden sämtliche Glieder, deren Stellenzahl gleich g oder gröfser als g ist. Da vorstehende Grenzgleichung, ebenso wie die unter 1. entwickelte, zur Auffindung anderer Grenzgleichungen benutzt werden soll, so wollen wir, um auch für n gleich Null oder negativer ganzer Zahl eine passende Grenz-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gleichung als Ausgangspunkt zu haben, eine neue Reihe bilden, welche sich von der obigen nur durch das Fehlen einiger konstanter, endlicher Faktoren unterscheidet, unter denen sich auch derjenige befindet, welcher das Verschwinden der Reihenglieder verursacht. Wir benutzen für $n = -g$ $(g = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ die Funktion Φ_ν, gleich

$$\Phi_\nu(-g) = \frac{1}{1.2\ldots g+1} + \frac{1}{2.3\ldots g+2} + \ldots + \frac{1}{\nu-g.\nu-g+1\ldots\nu},$$

deren g erste Glieder gleich Null sind. Multiplizieren wir die einzelnen Glieder rechterseits mit $(g+1)-1 = (g+2)-2 = \ldots = \nu-(\nu-g) = g$, so ergiebt sich die Gleichung:

$$g.\Phi_\nu(-g) = \Phi_{\nu-1}(-g+1) + \frac{1}{1.2\ldots g} - \Phi_\nu(-g+1)$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots g} - \frac{1}{\nu-g+1.\nu-g+2\ldots\nu};$$

aus derselben folgt für $g = 1, 2, \ldots$:

$$\lim_{\nu=\infty}\left\{\Phi_\nu(-g)\right\} = \frac{1}{g}\cdot\frac{1}{\Pi(g)},$$

mithin lautet für n gleich negativer ganzer Zahl $(n = -g,\ g > 0)$ die Grenzgleichung:

$$\left\{\Phi_\nu - \frac{1}{g.\Pi(g)}\right\} : \frac{1}{\nu^g} = \left(-\frac{1}{g}\right)_\nu;$$

für $n = 0$ besitzt die Grenzgleichung die Form:

$$(\Phi_\nu - 0) : 1\nu = (1)_\nu .$$

Von diesen beiden Grenzgleichungen gilt dasselbe, was unter 1. von der Ersatzgrenzgleichung für $q = 1$ gesagt worden ist.

---

§. 14. Erklärung des Quotienten einer Reihe.

Unter dem „Quotienten einer Reihe“ wollen wir diejenige positive Gröfse Q verstehen, welche wir mittels Division der Summe der Moduln der einzelnen Glieder durch den Modul der Summe der Reihe erhalten. Ist die gegebene Reihe

$$A_{\varrho+1}, A_{\varrho+2}, A_{\varrho+3}, \ldots A_{\varrho+\tau},$$

so ist der Quotient dieser Reihe

$$Q = \frac{[A_{\varrho+1}] + [A_{\varrho+2}] + [A_{\varrho+3}] + \ldots + [A_{\varrho+\tau}]}{[A_{\varrho+1} + A_{\varrho+2} + A_{\varrho+3} + \ldots + A_{\varrho+\tau}]}.$$

Da der Dividend dieses Quotienten nicht kleiner als der Divisor sein kann, so liegt Q in den Grenzen:

$$1 \leqq Q \leqq \infty .$$

Liegen sämtliche Glieder der Reihe auf einem vom Nullpunkte ausgehenden Strahle, d. h. sind ihre Amplituden gleich, so ist $Q = 1$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 15. Ein Lehrsatz, welcher sich auf den Reihenquotienten stützt.

Es seien zwei Reihen von gleicher Gliederzahl gegeben:

1) $A_{\varrho+1}, A_{\varrho+2}, A_{\varrho+3}, \ldots . A_{\varrho+\tau}$ und

2) $a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, a_{\varrho+3}, \ldots . a_{\varrho+\tau}$.

Sämtliche Glieder der zweiten Reihe mögen innerhalb, resp. auf der Peripherie eines Kreises liegen, der den Punkt h der Zahlenebene zum Mittelpunkt und r zum Radius hat. Alsdann kann

$$A_{\varrho+1} \cdot a_{\varrho+1} + A_{\varrho+2} \cdot a_{\varrho+2} + \ldots + A_{\varrho+\tau} \cdot a_{\varrho+\tau}$$
$$= (h + \vartheta \cdot Q \cdot r) \cdot (A_{\varrho+1} + A_{\varrho+2} + \ldots . + A_{\varrho+\tau})$$

gesetzt werden, wenn ϑ eine Zahl bedeutet, deren Modul $\leqq 1$ ist, und Q den Quotienten der A-Reihe vorstellt.

Beweis: Besitzt die Summe der A-Reihe die Amplitude ψ, so ist

$$[A_{\varrho+1}] + [A_{\varrho+2}] + \ldots . + [A_{\varrho+\tau}] = Q \cdot e^{-i\psi} \cdot (A_{\varrho+1} + A_{\varrho+2} + \ldots A_{\varrho+\tau}) \,. \qquad \text{(I)}$$

Setzen wir nun

$$a_{\varrho+1} = h + b_{\varrho+1} \;,$$
$$a_{\varrho+2} = h + b_{\varrho+2} \;,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{\varrho+\tau} = h + b_{\varrho+\tau} \;,$$

so bilden die b eine Reihe, deren Glieder dieselbe Lage zum Nullpunkt, wie die a zum Punkte h besitzen. Der Modul M der Summe

$$A_{\varrho+1} \cdot b_{\varrho+1} + A_{\varrho+2} \cdot b_{\varrho+2} + \ldots . + A_{\varrho+\tau} \cdot b_{\varrho+\tau}$$

liegt daher in den Grenzen

$$0 \leqq M \leqq r \cdot ([A_{\varrho+1}] + [A_{\varrho+2}] + \ldots . + [A_{\varrho+\tau}]) \;.$$

Hieraus ergiebt sich

$$A_{\varrho+1} \cdot b_{\varrho+1} + A_{\varrho+2} \cdot b_{\varrho+2} + \ldots . + A_{\varrho+\tau} \cdot b_{\varrho+\tau} = \vartheta' \cdot r \cdot ([A_{\varrho+1}] + [A_{\varrho+2}] \ldots + [A_{\varrho+\tau}]). \qquad (2)$$

Durch Verbindung der Gleichungen (1) und (2) ergiebt sich weiter

$$A_{\varrho+1} \cdot b_{\varrho+1} + A_{\varrho+2} \cdot b_{\varrho+2} + \ldots . + A_{\varrho+\tau} \cdot b_{\varrho+\tau} = \vartheta \cdot Q \cdot r \cdot (A_{\varrho+1} + A_{\varrho+2} + \ldots . + A_{\varrho+\tau})$$

und

$$A_{\varrho+1} \cdot a_{\varrho+1} + A_{\varrho+2} \cdot a_{\varrho+2} + \ldots . + A_{\varrho+\tau} \cdot a_{\varrho+\tau} = (h + \vartheta \cdot Q \cdot r) \cdot (A_{\varrho+1} + A_{\varrho+2} + \ldots . + A_{\varrho+\tau}).$$

---

§. 16. Bestimmung des Reihenquotienten unter besonderen Voraussetzungen.

Gegeben sei die Reihe:

$$\varphi(0),\ \varphi(1),\ \varphi(2),\ \ldots .\ \varphi(\lambda),\ \ldots .\ ,$$

sowie deren Grenzgleichung

$$(\Phi_\nu - \Phi) : F(\nu) = (A)_\nu \,.$$

Unter Voraussetzung sehr grofser ϱ soll mit besonderer Rücksicht auf die beiden Fälle: „Lim $F(\nu) = 0$“ und „Lim $F(\nu) = \infty$“ der Quotient eines Teils obiger Reihe, nämlich der Quotient (Q) von

$$\varphi(\varrho+1),\ \varphi(\varrho+2),\ \ldots .,\ \varphi(\varrho+\tau),$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

untersucht werden. Ganz allgemein ist die Bestimmung dieses Quotienten möglich, wenn wir annehmen, dafs sich zu $\varphi(\lambda)$ eine nur reelle Bestandteile enthaltende Funktion $\varphi'(\lambda)$ bilden läfst, welche folgenden Anforderungen gerecht wird:

1. Lim $[\varphi(\lambda) : \varphi'(\lambda)]$ ist gleich einer endlichen, von Null verschiedenen positiven Zahl p;
2. $\varphi'(\lambda)$ ändert von einem bestimmten endlichen λ an sein Vorzeichen nicht mehr;
3. die Grenzgleichung von $\Sigma\varphi'(\lambda)$ ist bekannt, sie laute:
$$(\Phi'_\nu - \Phi') : F'(\nu) = (A')_\nu ;$$
4. Lim $[F(\lambda) : F'(\lambda)]$ ist für „Lim $F(\nu) = 0$" und für „Lim $F(\nu) = \infty$" gleich einer endlichen, von Null verschiedenen positiven Zahl P.

Mit Beachtung dieser Annahmen und unter Anwendung des Satzes vom Reihenquotienten (§. 15.) läfst sich Q folgendermafsen umformen:

$$\begin{aligned}
Q &= ([\varphi(\varrho+1)] + [\varphi(\varrho+2)] + \ldots + [\varphi(\varrho+\tau)]) : [\varphi(\varrho+1) + \varphi(\varrho+2) + \ldots + \varphi(\varrho+\tau)] \\
&= (p)_\varrho \cdot ([\varphi'(\varrho+1)] + [\varphi'(\varrho+2)] + \ldots + [\varphi'(\varrho+\tau)]) : [\varphi(\varrho+1) + \varphi(\varrho+2) + \ldots + \varphi(\varrho+\tau)] \\
&= (p)_\varrho \cdot [\varphi'(\varrho+1) + \varphi'(\varrho+2) + \ldots + \varphi'(\varrho+\tau)] : [\varphi(\varrho+1) + \varphi(\varrho+2) + \ldots + \varphi(\varrho+\tau)] \\
&= (p)_\varrho \cdot [\Phi'_{\varrho+\tau} - \Phi'_\varrho] : [\Phi_{\varrho+\tau} - \Phi_\varrho] \\
&= (p)_\varrho \cdot [(A')_{\varrho+\tau} \cdot F'(\varrho+\tau) - (A')_\varrho \cdot F'(\varrho)] : [(A)_{\varrho+\tau} \cdot F(\varrho+\tau) - (A)_\varrho \cdot F(\varrho)] .
\end{aligned}$$

Lassen wir ϱ und $(\varrho + \tau)$ gleichzeitig so unendlich werden, dafs
$$\text{Lim } (F(\varrho + \tau) : F(\varrho))$$
gleich einer bestimmten von Eins verschiedenen Gröfse F wird, so ist
$$\text{Lim } (F'(\varrho + \tau) : F'(\varrho))$$
gleich einer Gröfse F', welche nach den gemachten Annahmen denselben Modul wie F besitzt. Für „Lim $F(\nu) = 0$" ist $[F] < 1$, und für „Lim $F(\nu) = \infty$" ist $[F] > 1$. Der Quotient Q hat dann
$$\frac{p}{P} \cdot \left[\frac{A'}{A} \cdot \frac{F' - 1}{F - 1}\right]$$
zur Grenze. Wählt man das Verhältnis von ϱ und $(\varrho + \tau)$ derart, dafs F

für „Lim $F(\nu) = 0$" zu Null und

für „Lim $F(\nu) = \infty$" unendlich grofs wird, so besitzt der Quotient Q den Grenzwert
$$\frac{p}{P} \cdot \left[\frac{A'}{A}\right].$$
Lassen wir τ allein unendlich grofs werden, so erhalten wir sowohl für „Lim $F(\nu) = 0$" als auch für „Lim $F(\nu) = \infty$"
$$Q = \left(\frac{p}{P} \cdot \left[\frac{A'}{A}\right]\right)_\varrho .$$

Für die beiden in §. 13. behandelten Reihen treffen die oben gemachten Annahmen zu:

1. $\varphi(\lambda) = q^\lambda$. Die beiden in Betracht kommenden Fälle: „Lim $F(\nu) = 0$" und „Lim $F(\nu) = \infty$" treten ein, wenn q gleich Eins und $r = [q]$ von Eins verschieden ist. Für ein reelles positives q ist $Q = 1$; für ein komplexes (aber nicht rein imaginäres), sowie ein reelles negatives q bilden wir die Funktion $\varphi'(\lambda) = r^\lambda$, welche den gestellten Anforderungen genügt; p ist gleich Eins, ebenso P.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. $\varphi(\lambda) = \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+\lambda-1}{1 \,.\, 2 \ldots \lambda}$ (für n gleich Null oder negativer ganzer Zahl $(n = -g)$ sei $\varphi(\lambda) = 1 : (\lambda - g \,.\, \lambda - g + 1 \ldots \lambda))$.

Lim $F(\nu)$ ist gleich Null oder unendlich grofs, wenn der reelle Teil von $n = a + bi$ von Null verschieden ist, aufserdem wenn n gleich Null ist. Für reelle n ist $Q = 1$. Für ein komplexes n, dessen reeller Teil keine negative ganze Zahl ist (rein imaginäre n sind ausgeschlossen), setzen wir $\varphi'(\lambda) = \frac{a \,.\, a+1 \ldots a+\lambda-1}{1 \,.\, 2 \ldots \lambda}$, alsdann ist

$$p = [\Pi(a-1) : \Pi(n-1)] \text{ und } P = 1 .$$

Für komplexe n, deren reeller Teil eine negative ganze Zahl $(-g)$ ist, setzen wir

$$\varphi'(\lambda) = 1 : (\lambda - g \,.\, \lambda - g + 1 \ldots \lambda) , \text{ so dafs}$$

$$p = 1 : [\Pi(n-1)] \text{ und } P = 1 \text{ ist.}$$

§. 17. Ableitung von Grenzgleichungen für verwandte Reihen.

Gegeben sei die Reihe:

$$\varphi(0),\ \varphi(1),\ \varphi(2),\ \ldots\ \varphi(\lambda),\ \ldots$$

mit der Grenzgleichung:

$$(\Phi_\nu - \Phi) : F(\nu) = (A)_\nu ,$$

ferner die Reihe:

$$\chi(0),\ \chi(1),\ \chi(2),\ \ldots\ \chi(\lambda),\ \ldots ,$$

deren Grenzgleichung ermittelt werden soll. Für endliche Stellenzahlen mögen die Glieder dieser zweiten Reihe endliche Werte besitzen. Die Verwandtschaft beider Reihen bestehe darin, dafs

$$\text{Lim } (\chi(\lambda) : \varphi(\lambda))$$

gleich einer endlichen, festen Gröfse V ist, so dafs wir unter Voraussetzung der Gleichung: „Lim $(\varepsilon_\varrho) = 0$“

$$\begin{aligned} \chi(0) : \varphi(0) &= V + \varepsilon_0 , \\ \chi(1) : \varphi(1) &= V + \varepsilon_1 , \\ \chi(2) : \varphi(2) &= V + \varepsilon_2 , \\ \vdots \qquad \vdots \qquad & \vdots \\ \chi(\nu) : \varphi(\nu) &= V + \varepsilon_\nu \text{ setzen können.} \end{aligned}$$

Die drei Fälle: „Lim $F(\nu) = \infty$“, „Lim $F(\nu) = 0$“ und „$F(\nu)$ oscilliert“ behandeln wir getrennt.

I. Lim $F(\nu) = \infty$. Wir setzen $\nu = \varrho + \tau$ und bilden die Differenz

$$\begin{aligned} X_\nu - X_\varrho &= \chi(\varrho+1) + \chi(\varrho+2) + \ldots + \chi(\varrho+\tau) \\ &= \varphi(\varrho+1) \,.\, (V + \varepsilon_{\varrho+1}) + \varphi(\varrho+2) \,.\, (V + \varepsilon_{\varrho+2}) + \ldots + \varphi(\varrho+\tau) \,.\, (V + \varepsilon_{\varrho+\tau}) . \end{aligned}$$

Durch Anwendung des Satzes §. 15. erhalten wir hieraus

$$X_\nu - X_\varrho = (V + \vartheta \,.\, Q \,.\, \eta_\varrho) \,.\, (\varphi(\varrho+1) + \varphi(\varrho+2) + \ldots + \varphi(\varrho+\tau)) ,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn unter η_ϱ der dem absoluten Betrage nach gröfste unter den Werten: $\varepsilon_{\varrho+1}$, $\varepsilon_{\varrho+2}$, ... $\varepsilon_{\varrho+\tau}$ verstanden wird. Führen wir die gegebene Grenzgleichung ein, so erhalten wir

$$(X_\nu - X_\varrho) : F(\nu) = (V + \vartheta \,.\, Q \,.\, \eta_\varrho) \,.\, \left\{(\Phi_\nu - \Phi) \,.\, F(\nu) - (\Phi_\varrho - \Phi) : F(\nu)\right\}$$

und
$$\frac{X_\nu}{F(\nu)} - \frac{X_\varrho}{F(\varrho)} \cdot \frac{F(\varrho)}{F(\nu)} = (V + \vartheta \,.\, Q \,.\, \eta_\varrho) \,.\, \left\{(A)_\nu - (A)_\varrho \cdot \frac{F(\varrho)}{F(\nu)}\right\} . \qquad (1)$$

Lassen wir in dieser Gleichung $\nu = \varrho + \tau$ bei endlich bleibendem ϱ ins Unendliche wachsen und beachten $\operatorname{Lim}\,(F(\varrho) : F(\nu)) = 0$, so ergiebt sich

$$\operatorname{Lim}\,(X_\nu : F(\nu)) = (V + \vartheta \,.\, Q \,.\, \eta_\varrho) \,.\, A \quad .$$

Können wir nun voraussetzen, dafs der Quotient (Q) der Reihe: „$\varphi(\varrho+1)$, $\varphi(\varrho+2)$, ... $\varphi(\varrho+\tau)$“ für ein endliches, aber beliebig grofses ϱ und ein unendlich grofses τ endlich bleibt (vergl. §. 16.), so lehrt uns diese Gleichung, dafs der Grenzwert des Quotienten $(X_\nu : F(\nu))$ endlich ist: er liegt auf einer Kreisfläche, die $V \,.\, A$ zum Mittelpunkt und $Q \,.\, [A \,.\, \eta_\varrho]$ zum Radius hat. Lassen wir nachträglich auch ϱ unendlich grofs werden, so folgt unter der Voraussetzung, dafs Q nicht unendlich grofs wird,

$$\operatorname{Lim}\,(X_\nu : F(\nu)) = V \,.\, A \quad .$$

Für ein oscillierendes und ein zu Null konvergierendes $F(\nu)$ gehen wir von der Gleichung:

$$X_\nu = \Phi_\nu \,.\, V + (\varepsilon_0 \,.\, \varphi(0) + \varepsilon_1 \,.\, \varphi(1) + \ldots + \varepsilon_\nu \,.\, \varphi(\nu)) \quad \text{oder}$$

$$\left\{X_\nu - \left(\Phi \,.\, V + \varepsilon_0 \,.\, \varphi(0) + \varepsilon_1 \,.\, \varphi(1) + \ldots + \varepsilon_\nu \,.\, \varphi(\nu)\right)\right\} : F(\nu) = (V \,.\, A)_\nu \qquad (2)$$

aus.

II. $\operatorname{Lim} F(\nu) = 0$. Die Grenzgleichung lehrt, dafs Φ_ν in diesem Falle zu Φ konvergiert, also ist

$$\varphi(\nu+1) + \varphi(\nu+2) \ldots \qquad = \Phi - \Phi_\nu \,,$$
$$[\varphi(\nu+1) + \varphi(\nu+2) + \ldots] : [F(\nu)] = [(A)_\nu] \,,$$
$$([\varphi(\nu+1)] + [\varphi(\nu+2)] + \ldots) : [F(\nu)] = Q \,.\, [(A)_\nu],$$

wenn Q den Quotienten der unendlichen Reihe: „$\varphi(\nu+1)$, $\varphi(\nu+2)$, ...“ darstellt, weiter

$$([\varepsilon_{\nu+1} \cdot \varphi(\nu+1)] + [\varepsilon_{\nu+2} \cdot \varphi(\nu+2)] \ldots) : [F(\nu)] = Q \,.\, [\eta_\nu \,.\, (A)_\nu] \quad \text{und}$$
$$(\varepsilon_{\nu+1} \cdot \varphi(\nu+1) + \varepsilon_{\nu+2} \cdot \varphi(\nu+2) + \ldots) : F(\nu) = \vartheta \,.\, Q \,.\, \eta_\nu \,.\, (A)_\nu \quad .$$

Dies in Gleichung (2) eingeführt giebt unter der Voraussetzung, dafs die unendliche Reihe: „$\varphi(\nu+1)$, $\varphi(\nu+2)$, ...“ einen endlichen Quotienten (Q) besitzt, welcher auch für $\nu = \infty$ endlich bleibt,

$$\left\{X_\nu - \left(\Phi \,.\, V + \varepsilon_0 \,.\, \varphi(0) + \varepsilon_1 \,.\, \varphi(1) + \ldots \text{ in inf.}\right)\right\} : F(\nu) = (V \,.\, A)_\nu \quad .$$

Für das ganze Bereich, in welchem $F(\nu)$ unendlich klein wird, konvergiert unter obiger Voraussetzung über das Verhalten des Quotienten Q die Summe:

$$\Phi \,.\, V + \varepsilon_0 \,.\, \varphi(0) + \varepsilon_1 \,.\, \varphi(1) + \ldots \quad .$$

Bezeichnen wir den Grenzwert dieser Summe für den Fall ihrer Konvergenz mit X, so kommen wir auf

$$(X_\nu - X) : F(\nu) = (V \,.\, A)_\nu \quad . \qquad (2^*)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Summe der Reihe: „$\chi(0), \chi(1), \chi(2), \ldots$“ konvergiert absolut; es folgt dies aus der Gleichung:

$$[\chi(\nu+1)] + [\chi(\nu+2)] + \ldots \leqq Q \cdot [F(\nu) \cdot (V \cdot A)_\nu] \quad ,$$

welche leicht aus den oben entwickelten Gleichungen abzuleiten ist. Da nun die Summe der Reihe: „$\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots$“ ebenfalls absolute Konvergenz besitzt, so gilt dies auch von der Reihe: „$\varepsilon_0 \cdot \varphi(0), \varepsilon_1 \cdot \varphi(1), \varepsilon_2 \cdot \varphi(2), \ldots$“ .

III. Oscilliert $F(\nu)$, so oscilliert auch Φ_ν. Die Summe der Reihe:

$$\varepsilon_0 \cdot \varphi(0), \quad \varepsilon_1 \cdot \varphi(1), \quad \varepsilon_2 \cdot \varphi(2), \quad \ldots \quad \varepsilon_\nu \cdot \varphi(\nu)$$

kann für ein wachsendes ν konvergieren, oscillieren und divergieren. Wir beachten nur den einen, aber wichtigsten Fall, den Fall der Konvergenz und gelangen dann ebenfalls zur Gleichung (2*).

Fassen wir das unter I, II und III Gefundene zusammen, so können wir als Resultat unserer Untersuchungen folgendes verzeichnen:

„Ist der Quotient der unendlichen Reihe: „$\varphi(\nu+1), \varphi(\nu+2), \ldots$“ sowohl für „$\operatorname{Lim} F(\nu) = 0$“ als auch für „$\operatorname{Lim} F(\nu) = \infty$“ endlich, und bleibt er auch endlich für $\nu = \infty$, konvergiert weiter für ein oscillierendes $F(\nu)$ die Summe der Reihe: „$\varepsilon_0 \cdot \varphi(0), \varepsilon_1 \cdot \varphi(1), \varepsilon_2 \cdot \varphi(2), \ldots$“, so gilt für ein oscillierendes, divergierendes und zu Null konvergierendes $F(\nu)$ die Grenzgleichung:

$$(X_\nu - X) : F(\nu) = (V \cdot A)_\nu \quad .$$

Nur für Unendlichkeitspunkte der Funktion X, die lediglich im Falle „$\operatorname{Lim} F(\nu) = \infty$“ möglich sind, haben wir die Ersatzgrenzgleichung:

$$X_\nu : F(\nu) = (V \cdot A)_\nu \quad .$$

X ist diejenige Funktion, welcher sich die Summe:

$$\Phi \cdot V + \varepsilon_0 \cdot \varphi(0) + \varepsilon_1 \cdot \varphi(1) + \varepsilon_2 \cdot \varphi(2) + \ldots + \varepsilon_\nu \cdot \varphi(\nu)$$

für den Fall ihrer Konvergenz mit wachsendem ν nähert.“

---

§. 18. Grenzgleichung der die Π erzeugenden Funktion.

Wir setzen $\dfrac{n+1 \,.\, n+2 \ldots n+\nu}{1 \,.\, 2 \ldots \nu} \cdot \dfrac{1}{\nu^n} = 1 : \Pi_\nu(n)$,

also $\operatorname{Lim}(1 : \Pi_\nu(n)) = 1 : \Pi(n)$.

In dem bekannten Gaussschen Beweise für die Konvergenz von $\Pi_\nu(n)$ findet sich die Gleichung:

$$l\left\{\frac{\Pi(n)}{\Pi_\nu(n)}\right\} = \frac{n+n^2}{2} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} (\nu+\lambda)^{-2} + \frac{n-n^3}{3} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} (\nu+\lambda)^{-3} + \frac{n+n^4}{4} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} (\nu+\lambda)^{-4} + \ldots,$$

deren rechte Seite absolut konvergiert. Die Grenzgleichungen der einzelnen, rechterseits auftretenden Summen finden wir nach §. 17, indem wir von

$$\varphi(\lambda) = 1 : ((\lambda - g) \,.\, (\lambda - g + 1) \ldots \lambda))$$

— g sei eine positive ganze Zahl —, sowie der zugehörigen Grenzgleichung:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(\Phi_\nu - \Phi) : \nu^{-g} = \left(-\frac{1}{g}\right)_\nu$$

ausgehen und $\chi(\lambda) = 1 : \lambda^{g+1}$ setzen. Alsdann ist

$$V = \operatorname{Lim}(\chi(\lambda) : \varphi(\lambda)) = 1, \quad \text{folglich}$$

$$(X_\nu - X) : \nu^{-g} = \left(-\frac{1}{g}\right)_\nu \quad \text{und}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} (\nu+\lambda)^{-g-1} = X - X_\nu = \frac{1}{\nu^g} \cdot \left(\frac{1}{g}\right)_\nu .$$

Führen wir diese Summenwerte ein, so erhalten wir

$$l(\Pi(n) : \Pi_\nu(n)) = \left(\frac{n \,.\, n+1}{2}\right)_\nu \cdot \frac{1}{\nu},$$

$$\Pi(n) : \Pi_\nu(n) = 1 + \left(\frac{n \,.\, n+1}{2}\right)_\nu \cdot \frac{1}{\nu},$$

$$\left\{\frac{\Pi(n)}{\Pi_\nu(n)} - 1\right\} : \nu^{-1} = \left(\frac{n \,.\, n+1}{2}\right)_\nu .$$

Ist $F(\nu)$, wie in vorstehender Grenzgleichung, eine (negativreelle) Potenz von ν, so wollen wir von potentieller Konvergenz sprechen. Für das $\varphi(\lambda)$ des §. 13., 2. folgt aus dieser Gleichung

$$\left\{\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{n-1}} - \frac{1}{\Pi(n-1)}\right\} : \lambda^{-1} = \left(\frac{n-1 \,.\, n}{2}\right)_\lambda ,$$

ausgenommen n gleich Null oder negativer ganzer Zahl; für $n = 0$ ist

$$\varphi(\lambda) : \lambda^{n-1} = 1 ,$$

und für n gleich negativer ganzer Zahl ($n = -g$) ist

$$\left\{\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{n-1}} - 1\right\} : \lambda^{-1} = \left(\frac{n \,.\, n-1}{2}\right)_\lambda .$$

Die Funktion $(\varphi(\lambda) : \lambda^{n-1})$ konvergiert demnach potentiell; konvergiert nun $(\chi(\lambda) : \lambda^{n-1})$ ebenfalls potentiell, so gilt dies auch von $(\chi(\lambda) : \varphi(\lambda))$, so dafs wir

$$\chi(\lambda) : \varphi(\lambda) = V + (\alpha)_\lambda \,.\, \lambda^k$$

setzen können, mit der Mafsgabe, dafs α endlich und der reelle Teil von $k = k' + i\,k''$ negativ und verschieden von Null sein soll. Ziehen wir nur derartige $\chi(\lambda)$ in Betracht, so konvergiert die Summe:

$$\varepsilon_0 \,.\, \varphi(0) + \varepsilon_1 \,.\, \varphi(1) + \ldots .$$

für ein oscillierendes $F(\nu)$ absolut, da der Modul von $\varepsilon_\lambda \,.\, \varphi(\lambda)$ gleich

$$[(\beta)_\lambda] \,.\, \lambda^{k'-1}$$

ist. Das $\chi(\lambda)$ des §. 19. ist solcher Art.

§. 19. Grenzgleichung der Gaussschen hypergeometrischen Reihe für $x = 1$.

Es sei

$$X_\nu = \frac{1}{\Pi(\gamma-1)} \cdot \left\{1 + \frac{\alpha \,.\, \beta}{1 \,.\, \gamma} + \frac{\alpha \,.\, \alpha+1 \,.\, \beta \,.\, \beta+1}{1 \,.\, 2 \,.\, \gamma \,.\, \gamma+1} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha \,.\, \alpha+1 \ldots \alpha+\nu-1 \,.\, \beta \,.\, \beta+1 \ldots \beta+\nu-1}{1 \,.\, 2 \ldots \nu \,.\, \gamma \,.\, \gamma+1 \,.\,\vdots\,.\, \gamma+\nu-1}\right\} .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Hinzufügung des Faktors $(1 : \Pi(\gamma - 1))$ hat den Zweck, der Reihe auch für $\gamma = 0$ oder negativer ganzer Zahl die Endlichkeit zu wahren. Wie bekannt, ist

$$X = \frac{\Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1) \,.\, \Pi(\gamma - \beta - 1)}.$$

In dem $\varphi(\lambda)$ des §. 13., 2. haben wir uns $n = \alpha + \beta - \gamma$ zu denken, alsdann ist V . A für $n = 0$ gleich

$$1 : (\Pi(\alpha - 1) \,.\, \Pi(\beta - 1))$$

und für andere n gleich

$$1 : ((\alpha + \beta - \gamma) \,.\, \Pi(\alpha - 1) \,.\, \Pi(\beta - 1)).$$

Die Grenzgleichung lautet demnach:

$$\operatorname{Lim}\left\{\left(X_\nu - \frac{\Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1) \,.\, \Pi(\gamma - \beta - 1)}\right) : \nu^{\alpha + \beta - \gamma}\right\} = \frac{1}{(\alpha + \beta - \gamma) \,.\, \Pi(\alpha - 1) \,.\, \Pi(\beta - 1)}.$$

Dieselbe ist

1. für $\alpha + \beta - \gamma = 0$ durch $\operatorname{Lim}\left\{X_\nu : l\nu\right\} = \dfrac{1}{\Pi(\alpha - 1) \,.\, \Pi(\beta - 1)}$ und

2. für $(\alpha + \beta - \gamma)$ gleich positiver ganzer Zahl durch

$$\operatorname{Lim}\left\{X_\nu : \nu^{\alpha + \beta - \gamma}\right\} = \frac{1}{(\alpha + \beta - \gamma) \,.\, \Pi(\alpha - 1) \,.\, \Pi(\beta - 1)}$$ zu ersetzen.

---

§. 20. Ueber die Π- und die Ω-Funktion.

Die Definition der Π-Funktion ist:

$$\Pi(n) = \operatorname{Lim}\left\{\Pi_\nu(n)\right\} = \operatorname{Lim}\left\{\frac{1 \,.\, 2 \ldots \nu}{n + 1 \,.\, n + 2 \ldots n + \nu} \cdot \nu^n\right\}.$$

Die Ω-Funktion — $[q] < 1$ — definiert Heine folgendermafsen:

$$\Omega(n) = \frac{1 - q \,.\, 1 - q^2 \,.\, 1 - q^3 \ldots}{1 - q^{n+1} \,.\, 1 - q^{n+2} \,.\, 1 - q^{n+3} \ldots};$$

an dieser Definition nehmen wir nur insofern eine Änderung vor, als wir noch den konstanten Faktor $(1 - q)^{-n}$ hinzufügen und definieren:

$$\Omega(n) = \operatorname{Lim}\left\{\Omega_\nu(n)\right\} = \operatorname{Lim}\left\{\frac{1}{(1 - q)^n} \cdot \frac{1 - q \,.\, 1 - q^2 \ldots 1 - q^\nu}{1 - q^{n+1} \,.\, 1 - q^{n+2} \ldots 1 - q^{n+\nu}}\right\}.$$

Den drei für die Π geltenden Formeln:

1. $\Pi(0) = 1$, 2. $\Pi(g) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots g$, 3. $\Pi(n + 1) : \Pi(n) = n + 1$

entsprechen dann folgende drei Formeln:

1. $\Omega(0) = 1$, 2. $\Omega(g) = \dfrac{1 - q \,.\, 1 - q^2 \,.\, 1 - q^3 \ldots 1 - q^g}{1 - q \,.\, 1 - q \,.\, 1 - q \ldots 1 - q}$, 3. $\Omega(n + 1) : \Omega(n) = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Für $[q] > 1$ können wir

$$\Omega(n) = \operatorname{Lim}\left\{\Omega_\nu(n)\right\} = \operatorname{Lim}\left\{q^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{1 - q \,.\, 1 - q^2 \ldots 1 - q^\nu}{1 - q^{n+1} \,.\, 1 - q^{n+2} \ldots 1 - q^{n+\nu}} \cdot \left(\frac{1 - q^\nu}{1 - q}\right)^n\right\}$$

definieren, so dafs für die Ω dieser Definition ebenfalls die vorstehenden drei Formeln Giltigkeit haben. Sämtliche drei Definitionen (für $q = 1$, $[q] < 1$, $[q] > 1$) sind in der Definition:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\Omega(n) = \operatorname{Lim}\left\{\frac{1-q \quad .1-q^2 \quad \ldots 1-q^\nu}{1-q^{n+1}.1-q^{n+2}\ldots 1-q^{n+\nu}} \cdot \left(\frac{1-q^\nu}{1-q}\right)^n \cdot \left(\frac{1-q^{\nu+1}}{1-q^\nu}\right)^{\frac{n.n+1}{2}}\right\}$$

enthalten. Wie leicht nachzuweisen, gilt ferner für sämtliche drei Fälle die Gleichung:

$$4.\quad \Omega(n, q) : \Omega\left(n, \frac{1}{q}\right) = q^{\frac{n.n-1}{2}}.$$

§. 21. Grenzgleichung der die Ω erzeugenden Funktion.

Es sei $[q] < 1$. Wir setzen

$$X_\nu = \Omega(n).\left\{1 + q.\frac{1-q^n}{1-q} + q^2.\frac{1-q^n.1-q^{n+1}}{1-q \quad .1-q^2} + \ldots + q^\nu.\frac{1-q^n.1-q^{n+1}\ldots 1-q^{n+\nu-1}}{1-q \quad .1-q^2 \quad \ldots 1-q^\nu}\right\}$$

$$= \Omega(n).\frac{1-q^{n+1}.1-q^{n+2}\ldots 1-q^{n+\nu}}{1-q \quad .1-q^2 \quad \ldots 1-q^\nu}.$$

Für n gleich negativer ganzer Zahl $(n = -g)$ werden die Anfangsglieder bis zum g-ten unendlich grofs, die folgenden Glieder dagegen, welche ohne den Faktor $\Omega(n)$ verschwinden würden, bleiben mit dem Faktor $\Omega(n)$ vereinigt endlich und von Null verschieden. Um das Unendlichwerden der Anfangsglieder zu vermeiden, ziehen wir dieselben in ein Glied, nämlich in das stets endlich bleibende Glied $(\Omega(n+g) : \Omega(g))$ zusammen und bestimmen, dafs an die Stelle des g-ten Gliedes dieses neugeschaffene Glied und an die Stelle der vorhergehenden Glieder jedesmal Null treten soll. Der Quotient, welcher aus dem allgemeinen Glied obiger Summe, aus

$$\chi(\lambda) = \Omega(n).q^\lambda.\frac{1-q^n.1-q^{n+1}\ldots 1-q^{n+\lambda-1}}{1-q \quad .1-q^2 \quad \ldots 1-q^\lambda}$$

und dem $\varphi(\lambda)$ des §. 13., 1. gebildet wird, hat $(1-q^n).(1-q)^{-n}$ zur Grenze, folglich ist

$$\operatorname{Lim}\left\{\left(X_\nu - \frac{1}{(1-q)^n}\right) : q^\nu\right\} = \frac{q}{q-1}.\frac{1-q^n}{(1-q)^n}$$

$$\text{und}\quad \operatorname{Lim}\left\{\left(\Omega(n) : \Omega_\nu(n) - 1\right) : q^\nu\right\} = -q.\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Die Konvergenz der Funktion $\Omega_\nu(n)$ ist demnach für $[q] < 1$ eine exponentielle (vergleiche §. 18.). Gleiches ist für $[q] > 1$ der Fall.

§. 22. Grenzgleichung der Heineschen hypergeometrischen Reihe.

Es sei wiederum $[q] < 1$. Wir setzen

$$X_\nu = \frac{1}{\Omega(\gamma-1)}\left\{1 + \frac{1-q^\alpha.1-q^\beta}{1-q \;.\; 1-q^\gamma}.x + \frac{1-q^\alpha.1-q^{\alpha+1}.1-q^\beta.1-q^{\beta+1}}{1-q \;.\; 1-q^2 \;.\; 1-q^\gamma.1-q^{\gamma+1}}.x^2 + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1-q^\alpha.1-q^{\alpha+1}\ldots 1-q^{\alpha+\nu-1}.1-q^\beta.1-q^{\beta+1}\ldots 1-q^{\beta+\nu-1}}{1-q \;.\; 1-q^2 \quad \ldots 1-q^\nu \quad .1-q^\gamma.1-q^{\gamma+1}\ldots 1-q^{\gamma+\nu-1}}.x^\nu\right\}$$

und benutzen das $\varphi(\lambda)$ des §. 13., 1. in der Form $\varphi(\lambda) = x^\lambda$. Es ist dann

$$V = 1 : ((1-q)^{\alpha+\beta-\gamma-1}.\Omega(\alpha-1).\Omega(\beta-1)).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da nach §. 21. der Quotient $(\chi(\lambda) : x^{\lambda})$ exponentiell konvergiert, konvergiert die Summe der Reihe: $_{n}\varepsilon_0 \cdot \varphi(0), \varepsilon_1 \cdot \varphi(1), \ldots$" für ein oscillierendes x^{λ} absolut. Die Grenzgleichung lautet demnach:

$$\operatorname{Lim} \left\{ \left(X_\nu - \frac{1}{\Omega(\gamma-1)} \cdot \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) \right) : x^\nu \right\}$$

$$= \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{(1-q)^{\alpha+\beta-\gamma-1} \cdot \Omega(\alpha-1) \cdot \Omega(\beta-1)} \cdot \qquad *)$$

Dieselbe ist

1. für $x = 1$ durch

$$\operatorname{Lim}(X_\nu : \nu) = 1 : ((1-q)^{\alpha+\beta-\gamma-1} \cdot \Omega(\alpha-1) \cdot \Omega(\beta-1)) \quad \text{und}$$

2. für weitere Unendlichkeitspunkte von $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) : \Omega(\gamma-1)$, welche nur für $[x] > 1$ möglich sind, durch

$$\operatorname{Lim}(X_\nu : x^\nu) = \frac{x}{x-1} : \left((1-q)^{\alpha+\beta-\gamma-1} \cdot \Omega(\alpha-1) \cdot \Omega(\beta-1) \right) \quad \text{zu ersetzen.}$$

Für $x = q^{\gamma-\alpha-\beta}$ ist

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) : \Omega(\gamma-1) = \frac{\Omega(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Omega(\gamma-\alpha-1) \cdot \Omega(\gamma-\beta-1)} \cdot$$

---

§. 23. Untersuchung des Integrals $\int_0^1 (1-z)^\alpha \cdot dz^n$ für sämtliche Werte von α.

Setzen wir

$$\chi(\lambda) = \frac{n \cdot n+1 \ldots n+\lambda-1}{1 \cdot 2 \ldots \lambda} \cdot (\gamma+\lambda)^\alpha$$

und benutzen das $\varphi(\lambda)$ des §. 13., 2. in der Form

$$\varphi(\lambda) = \frac{n+\alpha \cdot n+\alpha+1 \ldots n+\alpha+\lambda-1}{1 \cdot 2 \ldots \lambda},$$

so erhalten wir nach §. 17. für die Summe $\Sigma\chi(\lambda)$ die Grenzgleichung:

$$(X_\nu - X) : \nu^{n+\alpha} = \left(\frac{1}{n+\alpha} \cdot \frac{1}{\Pi(n-1)} \right)_\nu$$

mit den beiden Ersatzgrenzgleichungen:

1. $X_\nu : 1\nu = \left(\frac{1}{\Pi(n-1)} \right)_\nu$ für $n+\alpha = 0$ und

2. $X_\nu : \nu^{n+\alpha} = \left(\frac{1}{n+\alpha} \cdot \frac{1}{\Pi(n-1)} \right)_\nu$

für (sonstige) Unendlichkeitspunkte der Funktion X.

---

*) $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ ist Heines Bezeichnung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mit Bezug auf das Integral $\int_{0c}^{1} (1 - z)^{\alpha} \cdot dz^{n}$, welches nach §. 2. gleich dem Grenzwerte von $(X_{\nu} : \nu^{n+\alpha})$ ist, ergiebt sich aus der Grenzgleichung folgendes:

1. Ist der reelle Teil von $(n + \alpha)$ positiv, so hat das Integral einen bestimmten endlichen Wert; es ist

$$\int_{0c}^{1} (1 - z)^{\alpha} \cdot dz^{n} = \frac{1}{n + \alpha} \cdot \frac{1}{\Pi(n - 1)}.$$

2. Ist $n + \alpha = 0$, so ist nach Ersatzgrenzgleichung 1. das Integral unendlich grofs; nur für n gleich Null oder negativer ganzer Zahl oder, was dasselbe bedeutet, für α gleich Null oder positiver ganzer Zahl kann das Integral einen endlichen Wert haben. Wie uns aus §. 2. bekannt ist, ist

$$\int_{0c}^{1} (1 - z)^{g} \cdot dz^{n} = \frac{1}{n + g} \cdot \frac{1}{\Pi(n - 1)} = \frac{n \cdot n + 1 \ldots n + g - 1}{\Pi(n + g)};$$

hieraus folgt für $n + \alpha = 0$ und α gleich Null oder positiver ganzer Zahl

$$\int_{0c}^{1} (1 - z)^{\alpha} \cdot dz^{n} = (-1)^{\alpha} \cdot \Pi(\alpha).$$

Eine Vergleichung mit der Erklärung des Integrals in §. 2. ergiebt als bemerkenswertes Nebenresultat die für ganzzahlige positive α und beliebige γ giltige Gleichung:

$$\gamma^{\alpha} - \frac{\alpha}{1} \cdot (\gamma + 1)^{\alpha} + \frac{\alpha \cdot \alpha - 1}{1 \cdot 2} \cdot (\gamma + 2)^{\alpha} - \ldots = (-1)^{\alpha} \cdot \Pi(\alpha).$$

3. Ist $(n + \alpha)$ rein imaginär, so oscilliert $(X_{\nu} : \nu^{n+\alpha})$ mit Ausnahme des Falles: „$X = 0$“.

4. Ist der reelle Teil von $(n + \alpha)$ negativ, so divergiert $(X_{\nu} : \nu^{n+\alpha})$ mit gleicher Ausnahme.

Den Ausnahmefall: „$X = 0$“ wollen wir näher betrachten. Wir unterscheiden zwei wesentlich verschiedene Fälle:

1. Ein Nullwerden von X findet für spezifisch bestimmte Werte von γ, also nur in einzelnen Punkten der γ-Zahlenebene statt;
2. X wird unabhängig von γ zu Null: das Nullwerden findet für die gesamte γ-Zahlenebene statt.

Nach der Integralerklärung (§. 1.) kann für die Verschiebungskonstante (c) jeder beliebige endliche Wert gewählt werden; nur solche Werte sind zu vermeiden, welchen ein Unstetigkeitspunkt der zu integrierenden Funktion entspricht. In gleicher Weise, wie wir isolierte Unstetigkeitspunkte der c-Zahlenebene aufser Acht lassen, wollen wir auch isolierte Konvergenzpunkte nicht berücksichtigen. Dieser Festsetzung gemäfs haben wir ausschliefslich die zweite Art des Nullwerdens zu untersuchen.

Ist X unabhängig von γ, so ergiebt sich aus den den beiden Werten γ' und γ'' entsprechenden Grenzgleichungen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$X'_\nu - X = \nu^{n+\alpha} \cdot \left(\frac{1}{n+\alpha} \cdot \frac{1}{\Pi(n-1)}\right)_\nu \text{ und } X''_\nu - X = \nu^{n+\alpha} \cdot \left(\frac{1}{n+\alpha} \cdot \frac{1}{\Pi(n-1)}\right)_\nu$$

sowohl für ein negativreelles, als auch für ein rein imaginäres $(n+\alpha)$

$$X'_\infty - X''_\infty = 0 \qquad \text{oder}$$

$$(\gamma' - \gamma'') \cdot \left\{\frac{\gamma'^\alpha - \gamma''^\alpha}{\gamma' - \gamma''} + \frac{n}{1} \cdot \frac{(\gamma'+1)^\alpha - (\gamma''+1)^\alpha}{\gamma' - \gamma''} + \frac{n.n+1}{1.\ 2} \cdot \frac{(\gamma'+2)^\alpha - (\gamma''+2)^\alpha}{\gamma' - \gamma''} + \ldots\right\} = 0.$$

Die unendliche Reihe: „$\varphi(\nu+1)$, $\varphi(\nu+2)$, ...“, deren allgemeines Glied

$$\varphi(\lambda) = \frac{n.n+1 \ldots n+\lambda-1}{1.\ 2 \ \ldots \ \lambda} \cdot \frac{(\gamma'+\lambda)^\alpha - (\gamma''+\lambda)^\alpha}{\gamma' - \gamma''}$$

ist, hat nach §. 16. einen endlichen Quotienten, wenn der reelle Teil von $(n+\alpha-1)$ negativ ist. Hieraus geht hervor, dafs die in der zweiten Klammer obiger Gleichung enthaltene Summe absolut konvergiert. Da nun diese selbe Summe für beliebige, aber verschiedene γ' und γ'' gleich Null ist, so können wir mit Rücksicht auf die absolute Konvergenz derselben schliefsen, dafs die Summe auch für $\gamma' = \gamma''$ gleich Null sein mufs. Es ist also für beliebige γ

$$\alpha \cdot \left(\gamma^{\alpha-1} + \frac{n}{1} \cdot (\gamma+1)^{\alpha-1} + \frac{n.n+1}{1.\ 2} \cdot (\gamma+2)^{\alpha-1} + \ldots\right) = 0 .$$

In derselben Weise folgt weiter für ein positives ganzzahliges μ

$$\alpha.(\alpha-1).(\alpha-2)\ldots(\alpha-\mu) \cdot \left(\gamma^{\alpha-\mu-1} + \frac{n}{1} \cdot (\gamma+1)^{\alpha-\mu-1} + \frac{n.n+1}{1.\ 2} \cdot (\gamma+2)^{\alpha-\mu-1} + \ldots\right) = 0 .$$

Die Gröfsen: „γ, $\gamma+1$, $\gamma+2$, ...“ bilden, wenn γ positivreell gewählt wird, eine dem Modul nach steigende Reihe, folglich werden für sehr grofse μ die einzelnen Glieder der in der Klammer befindlichen Summe eine stark fallende Reihe bilden; für genügend grofse μ wird der Modul des ersten Gliedes gröfser als der Modul der Summe der folgenden Glieder sein, mithin wird das Verschwinden obigen Ausdrucks durch die vor der Klammer stehenden Faktoren bewirkt werden müssen. Wir schliefsen hieraus, dafs X nur für α gleich Null oder positiver ganzer Zahl von γ unabhängig sein kann. In Wirklichkeit ist für diese Fälle ($n+\alpha$ als rein imaginär oder negativreell vorausgesetzt) X nicht nur unabhängig von γ, sondern auch gleich Null, denn nach den Untersuchungen des §. 2. hat das Integral für α gleich Null oder positiver ganzer Zahl stets einen endlichen, festen Wert.

Als Resultat unserer gesamten Betrachtungen ergiebt sich demnach folgendes:

Das Integral

$$\int_0^1 (1-z)^\alpha . dz^n$$

hat einen bestimmten endlichen Wert, nämlich den Wert $((n+\alpha) . \Pi(n-1))^{-1}$,

1. wenn der reelle Teil von $(n+\alpha)$ positiv ist,

2. wenn α gleich Null oder positiver ganzer Zahl ist.

In allen übrigen Fällen besitzt das Integral entweder keinen bestimmten endlichen oder aber einen unendlich grofsen Wert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 24. Grenzgleichung der Gaussschen hypergeometrischen Reihe für ein von 1 verschiedenes x.

Nach den Untersuchungen der §§. 16. bis 20. sind für sämtliche potentiell konvergierenden $(\chi_1(\lambda) : \lambda^{n-1})$ und sämtliche exponentiell konvergierenden $(\chi_2(\lambda) : q^\lambda)$ die zugehörigen Grenzgleichungen direkt, ohne jegliche Nebenuntersuchungen, aufstellbar. Anders verhält es sich mit dem Produkt $\chi(\lambda) = \chi_1(\lambda) \cdot \chi_2(\lambda)$, da der Quotient einer solchen Produktreihe die in §. 16. unter 4. gemachte Voraussetzung für gewisse Variabelnwerte nicht erfüllt. Hierzu kommt, dafs es uns für diesen Fall an einer passenden Ausgangsreihe mangelt. Die Grenzgleichung der Gaussschen hypergeometrischen Reihe, deren allgemeines Glied aus einem solchen Produkte besteht, leiten wir daher auf anderem Wege ab.

Wir setzen

$$X_\nu = \frac{1}{\Pi(\gamma-1)} \cdot \left\{ 1 + \frac{\alpha \,.\, \beta}{1 \,.\, \gamma} \,.\, x + \frac{\alpha \,.\, \alpha+1 \,.\, \beta \,.\, \beta+1}{1 \,.\, 2 \,.\, \gamma \,.\, \gamma+1} \,.\, x^2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha \,.\, \alpha+1 \ldots \alpha+\nu-1 \,.\, \beta \,.\, \beta+1 \ldots \beta+\nu-1}{1 \,.\, 2 \ldots \nu \,.\, \gamma \,.\, \gamma+1 \ldots \gamma+\nu-1} \,.\, x^\nu \right\}_\infty .$$

Den Fall: „$x = 0$“, sowie den schon in §. 19. behandelten Fall: „$x = 1$“ schliefsen wir hier aus. Bekanntlich konvergiert X_ν absolut zu $X = F(\alpha, \beta, \gamma, x) : \Pi(\gamma-1)$

1. für $[x] < 1$ und

2. für $[x] = 1$, wenn der reelle Teil von $(\alpha + \beta - \gamma)$ negativ ist; folglich konvergiert in diesen beiden Fällen auch

$$X_\nu - X = -\frac{1}{\Pi(\gamma-1)} \cdot \frac{\alpha \,.\, \alpha+1 \ldots \alpha+\nu \,.\, \beta \,.\, \beta+1 \ldots \beta+\nu}{1 \,.\, 2 \ldots \nu+1 \,.\, \gamma \,.\, \gamma+1 \ldots \gamma+\nu} \,.\, x^{\nu+1} \cdot \left\{ 1 + \frac{\alpha+\nu+1 \,.\, \beta+\nu+1}{\nu+2 \,.\, \gamma+\nu+1} \,.\, x + \ldots \right\} \quad (1)$$

und die Klammergröfse (K) rechterseits absolut. Nun ist

$$K \,.\, (1-x) = 1 + \frac{\alpha-1 \,.\, \beta-1}{\nu+2 \,.\, \gamma+\nu+1} \cdot x \cdot \left\{ 1 + \frac{\alpha+\nu+1 \,.\, \beta+\nu+1}{\nu+3 \,.\, \gamma+\nu+2} \cdot x + \ldots \right\}$$
$$+ \frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{\gamma+\nu+1} \cdot x \cdot \left\{ 1 + \frac{\alpha+\nu+1 \,.\, \beta+\nu+1}{\nu+2 \,.\, \gamma+\nu+2} \cdot x + \ldots \right\}$$
$$= 1 + \frac{\alpha-1 \,.\, \beta-1}{\nu+2 \,.\, \gamma+\nu+1} \cdot x \cdot K_1 + \frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{\gamma+\nu+1} \cdot x \,.\, K_2 \,;$$

folglich ist, da K_1 und K_2 auch für $\nu = \infty$ endlich bleiben, für $[x] < 1$

$$\operatorname{Lim} K = 1 : (1-x) \quad . \qquad (2)$$

Dies auf Gleichung (1) angewandt liefert

$$\operatorname{Lim} \left\{ \left(X_\nu - \frac{1}{\Pi(\gamma-1)} \cdot F(\alpha, \beta, \gamma, x) \right) : \left(\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1} \,.\, x^\nu \right) \right\} = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{\Pi(\alpha-1) \,.\, \Pi(\beta-1)} \,. \quad (I)$$

Um auch für den Fall, dafs $[x] = 1$ und der reelle Teil von $(\alpha + \beta - \gamma)$ negativ ist, die Richtigkeit der Gleichung (2) und damit der Grenzgleichung (I) nachzuweisen, bilden wir

$$K_2 \,.\, (1-x) = 1 + \frac{\alpha-1 \,.\, \beta-1}{\nu+2 \,.\, \gamma+\nu+2} \cdot x \cdot \left\{ 1 + \frac{\alpha+\nu+1 \,.\, \beta+\nu+1}{\nu+3 \,.\, \gamma+\nu+3} \cdot x + \ldots \right\}$$
$$+ \frac{\alpha+\beta-\gamma-2}{\gamma+\nu+2} \cdot x \cdot \left\{ 1 + \frac{\alpha+\nu+1 \,.\, \beta+\nu+1}{\nu+2 \,.\, \gamma+\nu+3} \cdot x + \ldots \right\}$$
$$= 1 + \frac{\alpha-1 \,.\, \beta-1}{\nu+2 \,.\, \gamma+\nu+2} \cdot x \,.\, K' + \frac{\alpha+\beta-\gamma-2}{\gamma+\nu+2} \cdot x \,.\, K''$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und haben dann nur zu zeigen, dafs Lim $(K_1 : \nu)$, Lim $(K' : \nu)$ und Lim $(K'' : \nu)$ endliche Werte besitzen. Wir beginnen mit K_1. Es ist

$$K_1 = \vartheta \cdot \left\{ 1 + \left[\frac{\alpha + \nu + 1 \,.\, \beta + \nu + 1}{\nu + 3 \,.\, \gamma + \nu + 2} \right] + \ldots \right\} ,$$

daher mit Rücksicht auf die Gleichung:

$$\lim_{\nu=\infty} \left\{ \Pi(\varkappa) \cdot \frac{\varkappa + 1 \,.\, \varkappa + 2 \ldots \varkappa + \nu \,.\, \varkappa + \nu + 1 \ldots \varkappa + \nu + \lambda}{1 \,.\, 2 \ldots \nu \quad \nu + 1 \ldots \nu + \lambda} \cdot \frac{1}{(\nu + \lambda)^{\varkappa}} \right\} = 1 \text{ oder}$$

$$\lim_{\nu=\infty} \left\{ \frac{\varkappa + \nu + 1 \,.\, \varkappa + \nu + 2 \ldots \varkappa + \nu + \lambda}{\nu + 1 \,.\, \nu + 2 \ldots \nu + \lambda} \cdot \left(\frac{\nu}{\nu + \lambda} \right)^{\varkappa} \right\} = 1$$

$$K_1 = \vartheta \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{\nu}{\nu + 1} \right)^{k+1} \cdot (1 + \varepsilon'_\nu) + \left(\frac{\nu}{\nu + 2} \right)^{k+1} \cdot (1 + \varepsilon''_\nu) + \ldots \right\} ,$$

wenn wir den reellen Teil von $(\alpha + \beta - \gamma)$ mit $(-k)$ bezeichnen. Weiter ist

$$K_1 = \vartheta \,.\, (1 + \eta_\nu) \,.\, \nu^{k+1} \,.\, \left(\nu^{-k-1} + (\nu + 1)^{-k-1} + (\nu + 2)^{-k-1} + \ldots \right)$$

$$= \nu \,.\, \vartheta \,.\, (1 + \eta_\nu) \,.\, \left(\frac{1}{k} \right)_\nu , \qquad \text{— vergleiche §. 18. —}$$

also ist Lim $(K_1 : \nu)$ endlich. Die Endlichkeit von Lim $(K' : \nu)$ und Lim $(K'' : \nu)$ ergiebt sich in analoger Weise.

3. Es sei $[x] = 1$ und $(\alpha + \beta - \gamma)$ beliebig. Wir multiplizieren X_ν mit $(1 - x)$ und erhalten

$$(1 - x) \,.\, X_\nu (\alpha, \beta, \gamma) = X_\nu (\alpha - 1, \beta - 1, \gamma) + (\alpha + \beta - \gamma - 1) \,.\, x \,.\, X_\nu (\alpha, \beta, \gamma + 1)$$

$$- \frac{\alpha \,.\, \alpha + 1 \ldots \alpha + \nu - 1 \,.\, \beta \,.\, \beta + 1 \ldots \beta + \nu - 1}{1 \,.\, 2 \ldots \nu \quad \gamma \,.\, \gamma + 1 \ldots \gamma + \nu - 1} \cdot \frac{x^{\nu+1}}{\Pi(\gamma - 1)} \cdot \left\{ \frac{\alpha + \beta - \gamma - 1}{\gamma + \nu} + 1 \right\} , \quad (3)$$

woraus für $[x] < 1$ und für $[x] = 1$, wenn der reelle Teil von $(\alpha + \beta - \gamma - 1)$ negativ ist,

$$(1 - x) \cdot \frac{1}{\Pi(\gamma - 1)} \,.\, F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{\Pi(\gamma - 1)} F(\alpha - 1, \beta - 1, \gamma, x)$$

$$+ \frac{\alpha + \beta - \gamma - 1}{\Pi(\gamma)} \,.\, x \,.\, F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x) \qquad \text{folgt.}$$

Nehmen wir an, dafs dieser Gleichung allgemeine Giltigkeit zukommt*), so können wir Gleichung (3) in der Form:

---

*) Beweisbar durch Verlegung des Konvergenzkreismittelpunktes: es liege ξ innerhalb des Hauptkonvergenzkreises (d. i. des Konvergenzkreises um den Nullpunkt) und x innerhalb des Konvergenzkreises um den Punkt ξ, dann ist

$$\frac{1}{\Pi(\gamma - 1)} \,.\, F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{\Pi(\gamma - 1)} \,.\, F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) + \frac{x - \xi}{1!} \cdot \frac{\alpha \,.\, \beta}{\Pi(\gamma)} \,.\, F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, \xi)$$

$$+ \frac{(x - \xi)^2}{2!} \cdot \frac{\alpha \,.\, \alpha + 1 \,.\, \beta \,.\, \beta + 1}{\Pi(\gamma + 1)} \,.\, F(\alpha + 2, \beta + 2, \gamma + 2, \xi) + \ldots \quad .$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $(1 - x) = (1 - \xi) - (x - \xi)$ und beachten, dafs

1. $(1 - \xi) \,.\, F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = F(\alpha - 1, \beta - 1, \gamma, \xi) + (\alpha + \beta - \gamma - 1) \,.\, \xi \,.\, F(\alpha, \beta, \gamma + 1, \xi) : \gamma$ und
2. $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = F(\alpha, \beta, \gamma + 1, \xi) - \alpha \,.\, \beta \,.\, \xi \,.\, F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 2, \xi) : (\gamma \,.\, \gamma + 1)$ ist, so

folgt ohne weiteres auch die Richtigkeit der Gleichung:

$$(1 - x) \cdot \frac{1}{\Pi(\gamma - 1)} \,.\, F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{\Pi(\gamma - 1)} \,.\, F(\alpha - 1, \beta - 1, \gamma, x) + \frac{\alpha + \beta - \gamma - 1}{\Pi(\gamma)} \,.\, x \,.\, F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x) \,.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\left\{X_\nu(\alpha,\beta,\gamma)-\frac{1}{\Pi(\gamma-1)}\cdot F(\alpha,\beta,\gamma,x)\right\}:\left(\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}\cdot x^\nu\right)= \tag{4}$$

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{\nu^2}\cdot\left\{X_\nu(\alpha-1,\beta-1,\gamma)-\frac{1}{\Pi(\gamma-1)}\cdot F(\alpha-1,\beta-1,\gamma,x)\right\}:\left(\nu^{\alpha+\beta-\gamma-3}\cdot x^\nu\right)$$

$$+(\alpha+\beta-\gamma-1)\cdot\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1}{\nu}\cdot\left\{X_\nu(\alpha,\beta,\gamma+1)-\frac{1}{\Pi(\gamma)}\cdot F(\alpha,\beta,\gamma+1,x)\right\}:\left(\nu^{\alpha+\beta-\gamma-2}\cdot x^\nu\right)$$

$$+\frac{\alpha.\alpha+1\ldots\alpha+\nu-1.\beta.\beta+1\ldots\beta+\nu-1}{1.\ 2\ \ldots\ \nu\ .\gamma.\gamma+1\ldots\gamma+\nu-1}\cdot\frac{1}{\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1}}\cdot\frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{\Pi(\gamma-1)}\cdot\left\{\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{\gamma+\nu}+1\right\}$$

schreiben. Durch Induktion ergiebt sich aus dieser Gleichung die allgemeine Giltigkeit der Grenzgleichung für $[x]=1$. Ausgenommen ist selbstverständlich: „$x=1$“.

4. Für $[x]>1$ gehen wir von der Summe:

$$S_\nu=(\varphi(0)+x\,.\,\varphi(1)+x^2\,.\,\varphi(2)+\ldots+x^\nu\,.\,\varphi(\nu)):(x^\nu\,.\,\psi(\nu))$$

$$=(\varphi(\nu)+x^{-1}.\,\varphi(\nu-1)+x^{-2}.\,\varphi(\nu-2)+\ldots+x^{-\nu}.\,\varphi(0)):\psi(\nu)$$ aus

und nehmen an, dafs (1) $\operatorname{Lim}(\varphi(\mu):\psi(\mu))=A$ und (2) $\operatorname{Lim}(\varphi(\mu-1):\varphi(\mu))=1$ sei.

Zwischen $[x]$ und 1 schieben wir eine positive Gröfse p so ein, dafs $[x]>p>1$ ist, dann ist $q=p:[x]$ eine positive Zahl, kleiner als 1. Zufolge der Annahme (2) läfst sich stets eine ganze, positive, endliche Zahl σ von solcher Gröfse angeben, dafs für sämtliche positiven ganzzahligen λ $[\varphi(\sigma+\lambda-1):\varphi(\sigma+\lambda)]:p<1$, also

$$\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{\varphi(\sigma+\lambda-1)}{\varphi(\sigma+\lambda)}\right]<q \tag{5}$$

ist. In derselben Weise finden wir, dafs für grofse ν $[x\,.\,\psi(\nu+1):\psi(\nu)]>1:q$ ist und bleibt, also $\operatorname{Lim}(\psi(\nu)\,.\,x^\nu)=\infty$ sein mufs.

Schneiden wir in der gegebenen Summe S_ν die letzten σ Glieder ab:

$$S_\nu=\frac{1}{\psi(\nu)}\left\{\varphi(\nu)+x^{-1}.\,\varphi(\nu-1)+\ldots+x^{\sigma-\nu}.\,\varphi(\sigma)\right\}+$$

$$\frac{1}{x^\nu.\,\psi(\nu)}\cdot\left\{\varphi(0)+x\,.\,\varphi(1)+\ldots+x^{\sigma-1}.\,\varphi(\sigma-1)\right\}\quad,$$

so verschwindet, da σ endlich bleiben soll, für $\nu=\infty$ das zweite Glied rechterseits. Die Zahl der Glieder unserer Summe ist gleich $(\nu+1)$, setzen wir $\nu+1=\tau+\varrho+\sigma$, so haben wir noch $(\tau+\varrho)$ Glieder zu berücksichtigen. Von diesen lassen wir die τ ersten im wesentlichen unverändert; die ϱ folgenden ziehen wir in ein Glied zusammen, indem wir von der Gleichung (5) Gebrauch machen. Wir erhalten

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty}\left\{S_\nu\right\}=\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty}\left\{1+x^{-1}\cdot\frac{\varphi(\nu-1)}{\varphi(\nu)}+x^{-2}\cdot\frac{\varphi(\nu-2)}{\varphi(\nu)}+\ldots\right.$$

$$\left.+x^{-\tau+1}\cdot\frac{\varphi(\nu-\tau+1)}{\varphi(\nu)}\right\}\cdot\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty}\left\{\frac{\varphi(\nu)}{\psi(\nu)}\right\}$$

$$+\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty}\left\{\vartheta\cdot\frac{\varphi(\nu-\tau)}{\varphi(\nu)}\cdot\frac{\varphi(\nu)}{\psi(\nu)}\cdot\frac{1}{x^\tau}\cdot\frac{1-q^{\varrho+1}}{1-q}\right\}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lassen wir τ endlich, dagegen ϱ ins Unendliche zunehmen, so kommen wir auf

$$\operatorname{Lim}(S_\nu) = A \cdot \left\{ \frac{x}{x-1} - x^{-\tau} \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{\vartheta}{x \,.\, (1-q)} \right) \right\}$$

und wegen der willkürlichen Wahl von τ auf

$$\operatorname{Lim} S_\nu = A \,.\, x : (x-1) \quad .$$

Setzen wir

$$\varphi(\nu) = \frac{\alpha \,.\, \alpha+1 \ldots \alpha+\nu-1 \,.\, \beta \,.\, \beta+1 \ldots \beta+\nu-1}{1 \,.\, 2 \ldots \nu \,.\, \gamma \,.\, \gamma+1 \ldots \gamma+\nu-1} \cdot \frac{1}{\Pi(\gamma-1)} \text{ und } \psi(\nu) = \nu^{\alpha+\beta-\gamma-1},$$

so werden die Annahmen (1) und (2) verwirklicht; also ist für $[x] > 1$

$$\operatorname{Lim} \left\{ X_\nu : (\nu^{\alpha+\beta-\gamma-1} \,.\, x^\nu) \right\} = \frac{x}{x-1} : \left\{ \Pi(\alpha-1) \,.\, \Pi(\beta-1) \right\} \quad . \qquad \text{(II)}$$

Die Grenzgleichung (I) gilt demnach mit Ausnahme der Punkte: „$x = 0$“ und „$x = 1$“ allgemein und ist nur für Unendlichkeitspunkte der Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma, x) : \Pi(\gamma-1)$ durch (II) zu ersetzen.

Anhangsweise folgt die Grenzgleichung der Exponentialreihe. Für

$$X_\nu = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!}$$

ist

$$\operatorname{Lim} \left\{ (X_\nu - e^x) : \left(x^{\nu+1} \,.\, \Pi(\nu+1) \right) \right\} = 1 \quad .$$

Drittes Kapitel.

Untersuchung einer doppelt schreitenden Reihe. Verwendung derselben für die Integralrechnung.

§. 25. Vergleichung zweier doppelt schreitenden Reihen.

Wir gehen von den Summen $\Sigma\varphi(\lambda) \,.\, \psi(\nu-\lambda)$, $\Sigma\chi(\lambda)$ und $\Sigma\omega(\lambda)$ aus und schliefsen aus dem Verhalten derselben für ins Unendliche wachsende ν auf das Verhalten der Summe $\Sigma\chi(\lambda) \,.\, \omega(\nu-\lambda)$. Bezüglich der Funktionen $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$, $\chi(\lambda)$ und $\omega(\lambda)$ machen wir folgende Voraussetzungen:

1. $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$ sind für endliche Werte ihrer Stellenzahl λ weder unendlich grofs noch gleich Null,

2. $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$ genügen den in §. 16. unter 1. bis 4. angegebenen Anforderungen,

3. $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$, $\chi(\lambda)$ und $\omega(\lambda)$ sind Funktionen, wie sie in §. 18., pag. 28. charakterisiert wurden,

4. die Grenzwerte

$$V_\chi = \operatorname{Lim}(\chi(\lambda) : \varphi(\lambda)) \text{ und } V_\omega = \operatorname{Lim}(\omega(\lambda) : \psi(\lambda))$$

sind endliche, feste Gröfsen, welche nur dann gleich Null sind, wenn $\chi(\lambda)$ resp. $\omega(\lambda)$ von einem bestimmten endlichen Werte der Stellenzahl λ an zu Null wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Behufs Vergleichung der beiden doppelt schreitenden Reihen müssen $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$ so gewählt werden, dafs $\varphi(\lambda)$ und $\chi(\lambda)$ einerseits, $\psi(\lambda)$ und $\omega(\lambda)$ andererseits für unendlich grofs werdende λ (vergleiche §. 11.) gleiches Verhalten zeigen. Sollte $(\chi(\lambda):\varphi(\lambda))$ zu Null konvergieren, d. h. erst für $\lambda=\infty$ zu Null werden, so ist dieses nur ein Anzeichen, dafs dem gegebenen $\chi(\lambda)$ nicht $\varphi(\lambda)$, sondern $\varphi(\lambda)\,.\,\eta(\lambda)$ entspricht, wenn wir unter $\eta(\lambda)$ dasjenige $\varphi(\lambda)$ verstehen, welches in gleicher Weise wie der Quotient $(\chi(\lambda):\varphi(\lambda))$ zu Null konvergiert.

Wir setzen $\nu=\varrho+\sigma+\varrho$ und zerlegen dementsprechend die zu untersuchende Summe in drei Summen:

$$\sum_0^{\nu}\chi(\lambda)\,.\,\omega(\nu-\lambda)=\sum_0^{\varrho}\chi(\lambda)\,.\,\omega(\nu-\lambda)+\sum_{\varrho+1}^{\varrho+\sigma-1}\chi(\lambda)\,.\,\omega(\nu-\lambda)+\sum_0^{\varrho}\omega(\lambda)\,.\,\chi(\nu-\lambda)\quad .$$

Die drei Teilsummen untersuchen wir einzeln:

I: $\sum_0^{\varrho}\chi(\lambda)\,.\,\omega(\nu-\lambda)$.

Wir formen folgendermafsen um:

$$\sum_0^{\varrho}\chi(\lambda)\,.\,\omega(\nu-\lambda)=\psi(\nu)\,.\sum_0^{\varrho}\chi(\lambda)\,.\left\{V_\omega+\left(\frac{\omega(\nu-\lambda)}{\psi(\nu)}-V_\omega\right)\right\}\quad ;$$

hieraus erhalten wir nach §. 15. mit Benutzung der Grenzgleichung (§. 17.):

$$\left\{\sum_0^{\varrho}\chi(\lambda)-X\right\}:F_\varphi(\varrho)=(V_\chi\,.\,A_\varphi)_\varrho \qquad \text{die Gleichung:}$$

$$\sum_0^{\varrho}\chi(\lambda)\,.\,\omega(\nu-\lambda)=\psi(\nu)\cdot\left\{V_\omega+\vartheta\,.\,Q_\chi\cdot\left(\frac{\omega(\nu-\lambda_1)}{\psi(\nu)}-V_\omega\right)\right\}\cdot\left\{X+(V_\chi\,.\,A_\varphi)_\varrho\,.\,F_\varphi(\varrho)\right\}\quad .$$

In dieser Gleichung ist λ_1 derjenige in den Grenzen: „$0\leqq\lambda\leqq\varrho$“ liegende Wert von λ, welcher der Differenz $(\omega(\nu-\lambda):\psi(\nu)-V_\omega)$ ihren gröfsten Modul erteilt; ϱ, welches kleiner als ν ist, sei eine bestimmte Funktion von ν, die mit ν gleichzeitig unendlich grofs wird. Nehmen wir nun an, ϱ lasse sich als Funktion von ν so wählen, dafs die Gleichung:

$$\operatorname{Lim}\left\{Q_\chi\,.\left(\omega(\nu-\lambda_1):\psi(\nu)-V_\omega\right)\right\}=0 \tag{1}$$

erfüllt wird, so können wir

$$\sum_0^{\varrho}\chi(\lambda)\,.\,\omega(\nu-\lambda)=\psi(\nu)\,.\,(V_\omega)_\nu\cdot\left\{X+(V_\chi\,.\,A_\varphi)_\varrho\,.\,F_\varphi(\varrho)\right\}\qquad \text{setzen.} \tag{I}$$

II: $\sum_0^{\varrho}\omega(\lambda)\,.\,\chi(\nu-\lambda)$.

Durch dieselbe Umformung, wie unter I, erhalten wir

$$\sum_0^{\varrho}\chi(\lambda)\,.\,\omega(\nu-\lambda)=\varphi(\nu)\,.\,(V_\chi)_\nu\cdot\left\{\Omega+(V_\omega\,.\,A_\psi)_\varrho\,.\,F_\psi(\varrho)\right\} \tag{II}$$

mit der Bedingungsgleichung:

$$\operatorname{Lim}\left\{Q_\omega\cdot\left(\chi(\nu-\lambda_2):\varphi(\nu)-V_\chi\right)\right\}=0\quad . \tag{2}$$

III: $\sum_{\varrho+1}^{\varrho+\sigma-1}\chi(\lambda)\,.\,\omega(\nu-\lambda)$. In vorstehender Summe werden die Gröfsen λ und $(\nu-\lambda)$, welche innerhalb der Grenzen ϱ und $(\varrho+\sigma)$ liegen, mit ϱ, also auch mit ν gleichzeitig unendlich grofs. Führen wir in derselben

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\chi(\lambda) \,.\, \omega(\nu - \lambda) = \varphi(\lambda) \,.\, \psi(\nu - \lambda) \cdot \left\{ V_\chi \,.\, V_\omega + \left(\frac{\chi(\lambda) \,.\, \omega(\nu - \lambda)}{\varphi(\lambda) \,.\, \psi(\nu - \lambda)} - V_\chi \,.\, V_\omega \right) \right\}$$

ein, so erhalten wir

$$\sum_{\varrho+1}^{\varrho+\sigma-1} \chi(\lambda) \,.\, \omega(\nu - \lambda) = \left\{ V_\chi \,.\, V_\omega + \vartheta \,.\, Q \cdot \left(\frac{\chi(\mu) \,.\, \omega(\nu - \mu)}{\varphi(\mu) \,.\, \psi(\nu - \mu)} - V_\chi \,.\, V_\omega \right) \right\} \cdot \sum_{\varrho+1}^{\varrho+\sigma-1} \varphi(\lambda) \,.\, \psi(\nu - \lambda),$$

wenn wir unter Q den Quotienten der Reihe $\varphi(\lambda) : \psi(\nu - \lambda)$, von $\lambda = \varrho + 1$ bis $\lambda = \varrho + \sigma - 1$ genommen, und unter μ diejenige in den Grenzen: „$\varrho < \mu < \varrho + \sigma$“ liegende positive ganze Zahl verstehen, welcher der gröfste Modul der Differenz:

$$(\chi(\mu) \,.\, \omega(\nu - \mu)) : (\varphi(\mu) \,.\, \psi(\nu - \mu)) - V_\chi \,.\, V_\omega$$

entspricht. Können wir nun voraussetzen, dafs

$$\operatorname{Lim} \left\{ Q \,.\, \left(\frac{\chi(\mu) \,.\, \omega(\nu - \mu)}{\varphi(\mu) \,.\, \psi(\nu - \mu)} - V_\chi \,.\, V_\omega \right) \right\} = 0 \qquad (3)$$

ist, so kommen wir auf die Gleichung:

$$\sum_{\varrho+1}^{\varrho+\sigma-1} \chi(\lambda) \,.\, \omega(\nu - \lambda) = (V_\chi \,.\, V_\omega)_\nu \,.\, \sum_{\varrho+1}^{\varrho+\sigma-1} \varphi(\lambda) \,.\, \psi(\nu - \lambda) \quad . \qquad \text{(III)}$$

Durch Einsetzung der gefundenen Summenwerte ergiebt sich

$$\sum_{0}^{\nu} \chi(\lambda) \,.\, \omega(\nu - \lambda) = \psi(\nu) \,.\, (V_\omega)_\nu \,.\, X + \varphi(\nu) \,.\, (V_\chi)_\nu \,.\, \Omega + \psi(\nu) \,.\, (V_\chi \,.\, V_\omega \,.\, A_\varphi)_\nu \,.\, F_\varphi(\varrho)$$

$$+ \varphi(\nu) \,.\, (V_\chi \,.\, V_\omega \,.\, A_\psi)_\nu \,.\, F_\psi(\varrho) + (V_\chi \,.\, V_\omega)_\nu \,.\, \sum_{\varrho+1}^{\varrho+\sigma-1} \varphi(\lambda) \,.\, \psi(\nu - \lambda) \quad .$$

Diese Gleichung basiert, wie nochmals hervorgehoben werden soll, abgesehen von den sonst gemachten Vorbedingungen auf den Gleichungen (1), (2) und (3).

---

§. 26. Specialisierung der Funktionen $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$.

Es sei $\varphi(\lambda) = \dfrac{n \,.\, n+1 \ldots n+\lambda-1}{1 \,.\, 2 \ldots \lambda}$, eine Gröfse, welche für endliche Werte von λ endlich bleibt und nur in den Fällen: „n gleich Null oder negativer ganzer Zahl“ verschwindet; für diese Fälle wählen wir eine andere Definition von $\varphi(\lambda)$; wir setzen

1. für n gleich Null $\quad \varphi(\lambda) = 1 : \lambda$ mit der Ausnahme: „$\varphi(0) = 0$“,
2. für n gleich negativer ganzer Zahl $(n = -g)$

$$\varphi(\lambda) = 1 : (\lambda - g \,.\, \lambda - g + 1 \ldots \lambda) \text{ mit den Ausnahmen:}$$
$$\varphi(0) = \varphi(1) = \ldots = \varphi(g) = 0.$$

Weiter setzen wir $\psi(\lambda) = \dfrac{m \,.\, m+1 \ldots m+\lambda-1}{1 \,.\, 2 \ldots \lambda}$, wofür, wenn m gleich Null oder negativer ganzer Zahl $(-h)$ ist,

$$\psi(\lambda) = 1 : (\lambda - h \,.\, \lambda - h + 1 \ldots \lambda) \qquad \text{zu nehmen ist.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bezeichnen wir die Grenzwerte der vier Quotienten:

$$\varphi(\lambda) : \lambda^{n-1},\ \psi(\lambda) : \lambda^{m-1},\ \chi(\lambda) : \lambda^{n-1},\ \omega(\lambda) : \lambda^{m-1}$$

beziehungsweise mit φ, ψ, χ, ω, so können wir der Schlufsgleichung des §. 25. mit Beachtung der Beziehungen: „$V_\chi = \chi : \varphi$" und „$V_\omega = \omega : \psi$" folgende Form geben:

$$\frac{1}{\nu^{n+m-1}} \cdot \sum_0^\nu \chi(\lambda) \cdot \omega(\nu-\lambda) = \frac{X}{\nu^n} \cdot (\omega)_\nu + \frac{\Omega}{\nu^m} \cdot (\chi)_\nu + (\omega \cdot \chi)_\nu \cdot \left\{ \frac{1}{\nu^n} \cdot (A_\varphi : \varphi)_\nu \cdot F_\varphi(\varrho) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\nu^m} \cdot (A_\psi : \psi)_\nu \cdot F_\psi(\varrho) + \frac{1}{\varphi \cdot \psi} \cdot \frac{1}{\nu^{n+m-1}} \sum_{\varrho+1}^{\nu-\varrho-1} \varphi(\lambda) \cdot \psi(\nu-\lambda) \right\}.$$

Mit Bezug auf einzelne Gröfsen dieser Gleichung sei noch folgendes bemerkt: wenn n gleich Null oder negativer ganzer Zahl ist, so ist $\varphi = 1$, in allen übrigen Fällen $= 1 : \Pi(n-1)$; weiter ist $A_\varphi : \varphi = 1 : n$ und $F_\varphi(\varrho) = \varrho^n$, nur für $n = 0$ ist $A_\varphi : \varphi = 1$ und $F_\varphi(\varrho) = 1\varrho$. Entsprechendes gilt von ψ und den zugehörigen Gröfsen.

---

§. 27. Über die Quotienten der Reihen $\chi(\lambda)$ und $\omega(\lambda)$.

Wir untersuchen nur den Quotienten der Reihe $\chi(\lambda)$, nämlich

$$Q_\chi = \sum_0^\varrho [\chi(\lambda)] : [\sum_0^\varrho \chi(\lambda)].$$

Was von diesem Quotienten gilt, gilt in entsprechender Weise auch vom Quotienten der Reihe $\omega(\lambda)$. Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. Es verschwinden von einem bestimmten endlichen Werte der Stellenzahl λ an sämtliche $\chi(\lambda)$ und es ist

1*) gleichzeitig $X = 0$; alsdann ist der Quotient unendlich grofs,

2*) $[X] > 0$: der Quotient ist endlich.

2. Ist $\chi(\lambda)$ für endliche λ endlich und von Null verschieden, weiter

1*) der reelle Teil von $n = a + bi$ negativ, so konvergiert für $[X] > 0$ sowohl Zähler als auch Nenner zu einer endlichen, festen, von Null verschiedenen Gröfse; der Quotient ist demnach endlich; ist dagegen $X = 0$, so ist unser Quotient gleich

$$\sum_0^\varrho [\chi(\lambda)] : [\varrho^a \cdot (\chi \cdot A_\varphi : \varphi)_\varrho],$$

er wird also derart unendlich, dafs das Produkt $Q_\chi \cdot \varrho^a$ endlich bleibt.

2*) Ist der reelle Teil von n gleich Null, so wird für ein rein imaginäres n der Zähler logarithmisch unendlich, während der Nenner längs eines Kreises oscilliert, der X zum Mittelpunkt und $[\chi : n]$ zum Radius hat; geht dieser Kreis durch den Nullpunkt, so wollen wir ϱ beim Unendlichwerden alle diejenigen positiven ganzen Zahlen, welche ein Verschwinden des Nenners ermöglichen, überspringen lassen. Ist $n = 0$, so ist der Quotient gleich $(1)_\varrho$.

3*) Ist der reelle Teil von n positiv, so untersuchen wir Q in der Form:

$$\left\{ \sum_0^\mu [\chi(\lambda)] + ([\chi : \varphi'])_\mu \cdot \left[\Phi' - \sum_0^\mu \varphi'(\lambda) + \varrho^a \cdot \left(\frac{1}{\Pi(a)} \right)_\varrho \right] \right\} : [X + \varrho^n \cdot (\chi : n)_\nu].$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In diesem Ausdruck, dessen Ableitung nach §. 16. keine Schwierigkeiten bietet, bedeutet μ eine grofse, aber endliche positive ganze Zahl. Dividieren wir Dividend und Divisor dieses Ausdruckes durch ϱ^a, so finden wir als Grenzwert desselben $[n:a]$.

Wählen wir demnach eine positive Zahl k, die gröfser als der absolute Betrag des reellen Teils sowohl von $n = a + bi$ als auch von $m = c + di$ ist, so kann

sowohl Q_χ als auch Q_ω gleich $\varrho^k \cdot (0)_\varrho$

gesetzt werden. Ausgenommen ist nur der eine Fall, dafs $\chi(\lambda)$, resp. $\omega(\lambda)$ von einer bestimmten Stellenzahl an verschwindet und gleichzeitig X, resp. Ω gleich Null ist. In den folgenden Paragraphen soll von diesem Sonderfalle zunächst gänzlich abgesehen werden.

§. 28. Über die Bedingungsgleichungen (1) und (2).

Nach §. 25. ist ϱ so als Funktion von ν zu wählen, dafs die Bedingungsgleichungen (1) und (2) erfüllt werden. Wir wählen $\varrho = \nu^{1:(k+1)}$ oder $\varrho^{k+1} = \nu$ und haben zu zeigen, dafs durch ein derartig gewähltes ϱ den beiden Bedingungsgleichungen Genüge geschieht.

Nach den Untersuchungen des §. 27. haben wir zum Nachweis der Richtigkeit der Bedingungsgleichung (1) nur darzuthun, dafs

$$\varrho^k \cdot (\omega(\nu - \lambda_1) : \psi(\nu) - V_\omega)$$

auch für ein unendlich grofses ϱ das Bereich der Endlichkeit nicht verläfst. Setzen wir $\lambda_1 = \vartheta \cdot \varrho$, so ist ϑ wegen $0 \leqq \lambda_1 \leqq \varrho$ auf das Intervall: „$0 \leqq \vartheta \leqq 1$" zu beschränken; hieraus folgt, dafs $(\nu - \lambda_1) = \nu \cdot (1 - \vartheta \cdot \varrho^{-k}) = \nu \cdot (1)_\nu$ gesetzt werden kann. Nach §. 18. ist

$$(\psi(\nu - \lambda_1) : (\nu - \lambda_1)^{m-1}) : (\psi(\nu) : \nu^{m-1}) = 1 + \nu^{-1} \cdot (0)_\nu \text{ , also}$$

$$\psi(\nu - \lambda_1) : \psi(\nu) = 1 - \varrho^{-k} \cdot (\vartheta \cdot (m-1))_\varrho \text{ ;}$$

entspricht nun die Art der Konvergenz von $(\omega(\nu) : \psi(\nu))$ der Gleichung:

$$\omega(\nu) : \psi(\nu) = V_\omega + \nu^{-1} (W_\omega)_\nu \text{ ,}$$

in welcher W_ω eine endliche Gröfse darstellt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \omega(\nu - \lambda_1) : \psi(\nu) &= (\omega(\nu - \lambda_1) : \psi(\nu - \lambda_1)) \cdot (\psi(\nu - \lambda_1) : \psi(\nu)) \\ &= (V_\omega + \nu^{-1} \cdot (W_\omega)_\nu) \cdot (1 - \varrho^{-k} \cdot (\vartheta \cdot (m-1))_\varrho) \\ &= V_\omega - \varrho^{-k} \cdot (V_\omega \cdot \vartheta \cdot (m-1))_\varrho \end{aligned}$$ und hieraus die Gleichung:

$$\varrho^k \cdot (\omega(\nu - \lambda_1) : \psi(\nu) - V_\omega) = -(V_\omega \cdot \vartheta \cdot (m-1))_\varrho \text{ ,}$$

welche die Endlichkeit des betreffenden Ausdrucks ausspricht. Die Konvergenz kann auch derart sein, dafs

$$\omega(\nu) : \psi(\nu) = V_\omega + \nu^{-h} \cdot (W_\omega)_\nu$$

mit h in den Grenzen: „$0 < h < 1$" zu setzen ist; in solchem Falle wählt man

$$\varrho = \nu^{h:(k+1)} \text{ .}$$

Bedingungsgleichung (2) ist in derselben Weise zu erledigen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 29. Untersuchung der Summe $\Sigma\, \varphi(\lambda) \,.\, \psi(\nu - \lambda)$.

Die Summe der Reihe $\varphi(\lambda) \,.\, \psi(\nu - \lambda)$ tritt in §. 25. erstens explicite in der Schlufsgleichung und zweitens implicite als Element des Quotienten Q in der Bedingungsgleichung (3) auf, in beiden Fällen in den Grenzen $\lambda = \varrho + 1$ und $\lambda = \nu - \varrho - 1$. Eine gleichmäfsige Bestimmung dieser Summe ist nicht möglich, weil die Definition der Funktionen $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$ für n, resp. m gleich Null oder negativer ganzer Zahl von der allgemeinen Definition abweicht. Wir haben daher eine Reihe wesentlich verschiedener Fälle zu unterscheiden und die denselben entsprechenden Summen getrennt zu untersuchen.

1. Ist keins der beiden Argumente, $n = a + bi$ und $m = c + di$, gleich Null oder negativer ganzer Zahl, so ist

$$\sum_0^{\nu} \varphi(\lambda) \,.\, \psi(\nu - \lambda) = \frac{n + m \,.\, n + m + 1 \ldots n + m + \nu - 1}{1 \;.\; 2 \;\ldots\; \nu} = \left(\frac{1}{\Pi(n + m - 1)}\right)_\nu . \nu^{n + m - 1} ,$$

ferner nach §. 25. I unter Beachtung der Gleichung: „$\Phi = 0$"

$$\sum_0^{\varrho} \varphi(\lambda) \,.\, \psi(\nu - \lambda) = \left(\frac{1}{\Pi(n) \,.\, \Pi(m - 1)}\right)_\nu . \nu^{m-1} \,.\, \varrho^n \quad , \quad \text{also}$$

$$\sum_{\varrho + 1}^{\nu - \varrho - 1} \varphi(\lambda) \,.\, \psi(\nu - \lambda) = \frac{\nu^{n + m - 1}}{\Pi(n) \,.\, \Pi(m)} \cdot \left\{ \left(\frac{\Pi(n) \,.\, \Pi(m)}{\Pi(n + m - 1)}\right)_\nu - (m)_\nu \,.\, \varrho^{-nk} - (n)_\nu \,.\, \varrho^{-mk} \right\} .$$

2. Ist nur eins der beiden Argumente, etwa m, gleich Null oder negativer ganzer Zahl, und zwar

1*) $m = 0$, so ist

$$\sum_0^{\varkappa} = \frac{1}{\nu} + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{\nu - 1} + \frac{n \,.\, n + 1}{1 \,.\; 2} \cdot \frac{1}{\nu - 2} + \ldots + \frac{n \,.\, n + 1 \ldots n + \varkappa - 1}{1 \,.\; 2 \;\ldots\; \varkappa} \cdot \frac{1}{\nu - \varkappa} \quad ;$$

multiplizieren wir die einzelnen Glieder rechterseits mit

$$1 = \frac{\nu - 1}{\nu} + \frac{1}{\nu} = \frac{\nu - 2}{\nu} + \frac{2}{\nu} = \ldots = \frac{\nu - \varkappa}{\nu} + \frac{\varkappa}{\nu} \quad ,$$

so erhalten wir eine Rekursionsformel, durch deren wiederholte Anwendung sich

$$\sum_0^{\varkappa} = \frac{n}{\nu} \cdot \frac{n + 1 \,.\, n + 2 \ldots n + \varkappa}{1 \;.\; 2 \;\ldots\; \varkappa} \cdot \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1} \cdot \frac{\varkappa}{\nu - 1} + \frac{1}{n + 2} \cdot \frac{\varkappa \,.\, \varkappa - 1}{\nu - 1 \,.\, \nu - 2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n + \varkappa} \cdot \frac{\varkappa \,.\; \varkappa - 1 \ldots 1}{\nu - 1 \,.\, \nu - 2 \ldots \nu - \varkappa} \right\}$$

ergiebt. Aus dieser Gleichung, sowie der in §. 25. unter II angegebenen, durch die entsprechenden Einsetzungen umgeformten Gleichung folgt leicht

$$\sum_{\varrho + 1}^{\nu - \varrho - 1} = \nu^{n - 1} \,.\, l\nu \,.\, \frac{1}{\Pi(n - 1)} \cdot \left\{ \left(\frac{k}{k + 1}\right)_\nu - \varrho^{-nk} \,.\, \frac{1}{l\nu} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)_\nu \right\} .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2*) Ist $m = -h$, so ist

$$\sum_0^{\varkappa} = \frac{1}{\nu-h.\nu-h+1\ldots\nu} + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{\nu-h-1.\nu-h\ldots\nu-1} + \frac{n.n+1}{1.\ 2}\cdot\frac{1}{\nu-h-2.\nu-h-1\ldots\nu-2}$$
$$+ \ldots + \frac{n.n+1\ldots n+\varkappa-1}{1.\ 2\ \ldots\ \varkappa}\cdot\frac{1}{\nu-h-\varkappa.\nu-h-\varkappa+1\ldots\nu-\varkappa}.$$

Durch Multiplikation nach dem Gleichungssystem:

$$\frac{\nu}{g} - \frac{\nu-g}{g} = \frac{\nu-1}{g} - \frac{\nu-g-1}{g} = \frac{\nu-2}{g} - \frac{\nu-g-2}{g} = \ldots = \frac{\nu-\varkappa}{g} - \frac{\nu-g-\varkappa}{g}$$

erhalten wir die Differenz zweier Summen und weiter durch Anwendung der Formel:

$$\frac{n.n+1\ldots n+\lambda-1}{1.\ 2\ \ldots\ \lambda} = \frac{n.n+1\ldots n+\lambda}{1.\ 2\ \ldots\lambda+1} - \frac{n-1.n\ldots n+\lambda-1}{1\ .2\ldots\ \lambda+1}$$

auf die Glieder der ersten Summe eine Rekursionsformel, deren wiederholte Benutzung uns den Wert der Summe in brauchbarer Form liefert, wenn dieselbe in den Grenzen $\lambda = 0$ und $\lambda = \nu - \varrho - 1$ genommen wird. Zur Bestimmung des Summenwertes in den Grenzen $\lambda = 0$ und $\lambda = \varrho$ gehen wir von der Summe:

$$\sum_0^{\varkappa}{}' = \frac{n}{\nu.\nu-1\ldots\nu-h}\cdot\frac{n+1.n+2\ldots n+\varkappa}{1\ .\ 2\ \ldots\ \varkappa}\cdot\left\{\frac{1}{n} + \frac{h+1}{1}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\varkappa}{\nu-h-1} + \right.$$
$$\frac{h+1.h+2}{1\ .\ 2}\cdot\frac{1}{n+2}\cdot\frac{\varkappa.\varkappa-1}{\nu-h-1.\nu-h-2} + \ldots$$
$$\left. + \frac{h+1.h+2\ldots h+\varkappa}{1\ .\ 2\ \ldots\ \varkappa}\cdot\frac{1}{n+\varkappa}\cdot\frac{\varkappa.\varkappa-1\ldots 1}{\nu-h-1.\nu-h-2\ldots\nu-h-\varkappa}\right\}$$

aus; wir finden erstens, dafs Σ' dieselbe Rekursionsformel wie Σ besitzt, und zweitens, dafs Σ' für $h = 0$ in die unter 2. 1*) angegebene Summe übergeht; hieraus schliefsen wir, dafs Σ' mit Σ identisch ist. Durch Benutzung der beiden Summen Σ und Σ' erhalten wir

$$\sum_{\varrho+1}^{\nu-\varrho-1} = \nu^{n-1}\cdot\varrho^{-h}\cdot\frac{1}{\Pi(n)}\cdot\left\{\left(\frac{n}{h}\right)_\nu - (1)_\nu\cdot\varrho^{-k(n+h)}\right\}.$$

Es sei noch bemerkt, dafs für den Fall: „$(n + h)$ rein imaginär" die Klammer rechterseits oscilliert ohne den Nullpunkt zu berühren.

3. Sind beide Argumente gleich Null oder negativer ganzer Zahl: $n = -g$ und $m = -h$, so ist

$$\sum_0^{\varkappa} = \frac{1}{1.2\ldots g+1}\cdot\frac{1}{\nu-h-g-1.\nu-h-g\ldots\nu-g-1}$$
$$+ \frac{1}{2.3\ldots g+2}\cdot\frac{1}{\nu-h-g-2.\nu-h-g-1\ldots\nu-g-2}$$
$$+ \ldots + \frac{1}{\varkappa-g.\varkappa-g+1\ldots\varkappa}\cdot\frac{1}{\nu-h-\varkappa.\nu-h-\varkappa+1\ldots\nu-\varkappa}.$$

Durch Zerlegung der einzelnen Glieder nach dem Gleichungssystem:

$$\frac{g+1}{\nu} + \frac{\nu-g-1}{\nu} = \frac{g+2}{\nu} + \frac{\nu-g-2}{\nu} = \ldots = \frac{\varkappa}{\nu} + \frac{\nu-\varkappa}{\nu}$$

erhalten wir eine Rekursionsformel, welche

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1*) für $g=0$ und $h=0$ auf $\sum\limits_{\varrho+1}^{\nu-\varrho-1} = \left(\frac{2\,k}{k+1}\right)_\nu \cdot \frac{l\nu}{\nu}$,

2*) für $g=h$ und $h>0$ auf $\sum\limits_{\varrho+1}^{\nu-\varrho-1} = \nu^{-g-1} \,.\, \varrho^{-g} \,.\, \left(\frac{2}{g}\right)_\nu$,

3*) für $g<h$ auf $\sum\limits_{\varrho+1}^{\nu-\varrho-1} = \nu^{-g-1} \,.\, \varrho^{-h} \,.\, \left(\frac{1}{h}\right)_\nu$ führt.

---

§. 30. Bestimmung des Quotienten Q.

Q ist der Quotient der Reihe $\varphi(\lambda) \,.\, \psi(\nu-\lambda)$ in den Grenzen $\lambda = \varrho+1$ und $\lambda = \nu-\varrho-1$. Durch Einsetzung der in §. 29. gefundenen Summenwerte in

$$Q = \sum_{\varrho+1}^{\nu-\varrho-1} [\varphi(\lambda) \,.\, \psi(\nu-\lambda)] : \left[\sum_{\varrho+1}^{\nu-\varrho-1} \varphi(\lambda) \,.\, \psi(\nu-\lambda)\right]$$

$$= \left(\left[\frac{\varphi \,.\, \psi}{\varphi' \,.\, \psi'}\right]\right)_\nu \cdot \left[\sum_{\varrho+1}^{\nu-\varrho-1} \varphi'(\lambda) \,.\, \psi'(\nu-\lambda) : \sum_{\varrho+1}^{\nu-\varrho-1} \varphi(\lambda) \,.\, \psi(\nu-\lambda)\right]$$

(vergleiche §. 16.) erhalten wir folgende Wertetabelle für Q:

I. Beide Argumente reell: $Q=1$.

II. Nicht beide Argumente reell:

1. Beide reellen Teile positiv:

$$\operatorname{Lim} Q = \left[\frac{\Pi(a-1) \,.\, \Pi(c-1)}{\Pi(a+c-1)} \cdot \frac{\Pi(n+m-1)}{\Pi(n-1) \,.\, \Pi(m-1)}\right].$$

2. Beide reellen Teile gleich Null:

1*) Ein Argument gleich Null, das andere rein imaginär: $\operatorname{Lim} Q = 2$.

2*) Beide Argumente rein imaginär:

$$Q = l\nu \,.\, \left(\frac{2\,k}{k+1}\right)_\nu : \left[\left(\frac{\Pi(n-1) \,.\, \Pi(m-1)}{\Pi(n+m-1)}\right)_\nu - \left(\frac{1}{n}\right)_\nu \cdot \varrho^{-nk} - \left(\frac{1}{m}\right)_\nu \cdot \varrho^{-mk}\right].$$

3. Ein reeller Teil (c) gleich Null, der andere (a) positiv:

1*) Das erste Argument (m) gleich Null: $\operatorname{Lim} Q = 1$.

2*) Das erste Argument (m) rein imaginär:

$$Q = l\nu \,.\, \left(\frac{k}{k+1}\right)_\nu \cdot \left[\left(\frac{\Pi(n-1) \,.\, \Pi(m-1)}{\Pi(n+m-1)}\right)_\nu - \left(\frac{1}{m}\right)_\nu \cdot \varrho^{-mk}\right].$$

4. Wenigstens ein reeller Teil negativ:

1*) Beide reellen Teile ungleich: n besitze den kleineren reellen Teil:

$$\operatorname{Lim} Q = [n : a].$$

2*) Beide reellen Teile gleich (und negativ):

$$Q = (2)_\nu : \left[\left(\frac{a}{n}\right)_\nu + \left(\frac{c}{m}\right)_\nu \cdot \varrho^{(b-d)\,i\,k}\right].$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus dieser Tabelle ersehen wir, dafs, abgesehen von den mit 2*) bezeichneten Fällen der Grenzwert des Quotienten Q eine endliche, feste Gröfse ist. In den Fällen 2*) oscilliert der Divisor innerhalb endlicher Grenzen. Das Nullwerden des Divisors, welches für bestimmte Wertepaare von n und m und gewisse Wertereihen von ϱ eintreten kann, zu vermeiden, bestimmen wir, dafs ϱ beim Unendlichwerden alle derartigen Werte überspringt. In dem Falle 4. 2*) hat der Dividend einen endlichen, festen Grenzwert, während er in den Fällen 2. 2*) und 3. 2*) logarithmisch unendlich wird.

§. 31. Über die Bedingungsgleichung (3).

Nach §. 30. kann $Q = \vartheta \,.\, G \,.\, l\nu$ gesetzt werden, wenn G eine feste, endliche, positive Gröfse bedeutet; demnach tritt an Stelle der Bedingungsgleichung (3) die Gleichung:

$$l\nu \cdot \left\{ \frac{\chi(\mu) \,.\, \omega(\nu - \mu)}{\varphi(\mu) \,.\, \psi(\nu - \mu)} - V_\chi \,.\, V_\omega \right\} = (0)_\nu \quad .$$

Da sich sowohl μ als auch $(\nu - \mu)$ innerhalb der Grenzen ϱ und $(\nu - \varrho)$ halten, so sind $\alpha = \varrho : \mu$ und $\beta = \varrho : (\nu - \mu)$ positive, zwischen Null und Eins liegende Zahlen. Durch Benutzung der Beziehungen:

$$\chi(\nu) : \varphi(\nu) = V_\chi + \frac{1}{\nu} \cdot (W_\chi)_\nu \quad \text{und} \quad \omega(\nu) : \psi(\nu) = V_\omega + \frac{1}{\nu} \cdot (W_\omega)_\nu$$

geht die linke Seite obiger Gleichung über in

$$l\nu \cdot \left\{ \frac{1}{\mu} \cdot V_\omega \,.\, (W_\chi)_\mu + \frac{1}{\nu - \mu} \cdot V_\chi \,.\, (W_\omega)_{\nu - \mu} + \frac{1}{\mu \,.\, (\nu - \mu)} \cdot (W_\chi \,.\, W_\omega)_\nu \right\}$$
$$= l\nu \,.\, \varrho^{-1} \,.\, (\alpha \,.\, V_\omega \,.\, W_\chi + \beta \,.\, V_\chi \,.\, W_\omega)_\nu \,,$$

einen Ausdruck, welcher Null zur Grenze hat.

§. 32. Resultat der bisherigen Untersuchungen.

Führen wir in die Schlussgleichung des §. 26. die in §. 29. gefundenen Summenwerte ein, so erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{1}{\nu^{n+m-1}} \cdot \sum_0^\nu \chi(\lambda) \,.\, \omega(\nu - \lambda) = \frac{1}{\nu^n} \cdot (X \,.\, \omega)_\nu + \frac{1}{\nu^m} \cdot (\Omega \,.\, \chi)_\nu + (\chi \,.\, \omega)_\nu \,.\, H \quad ,$$

in welcher H folgende vier Werte annehmen kann: $2l\nu$, $l\nu$, 0 und $\Pi(n-1) \,.\, \Pi(m-1) : \Pi(n+m-1)$, den ersten, wenn beide Argumente gleich Null sind, den zweiten, wenn nur ein Argument gleich Null ist, den dritten, wenn keins der beiden Argumente gleich Null, aber wenigstens eins gleich einer negativen ganzen Zahl ist, und den letzten in allen übrigen Fällen.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dafs der Ausdruck linkerseits nur dann konvergiert, wenn m und n positivreell sind; sind beide Argumente gleich Null oder eins derselben gleich Null, das andere entweder rein imaginär oder positivreell, so findet logarithmische Divergenz statt; sind beide Argumente rein imaginär oder das eine rein imaginär, das andere positivreell, so findet Oscillation statt; in allen übrigen Fällen, d. h. sobald wenigstens ein Argument

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

negativreell ist, divergiert der Ausdruck potentiell. Gleichzeitig sehen wir, dafs in allen denjenigen Fällen, in denen wir ϱ beim Unendlichwerden zur Wahrung der Endlichkeit eines der drei Reihenquotienten, resp. des Produktes aus $l\nu$ und diesem Quotienten gewisse Werte überspringen liefsen, potentielle Divergenz, resp. Oscillation stattfindet.

Besonderer Untersuchung bedürfen die Fälle, für welche die Richtigkeit obiger Gleichung nicht nachgewiesen ist, sowie die Fälle, in welchen die rechte Seite der Gleichung unbestimmt wird.

Wir fassen die Bedingungen, von denen die Giltigkeit obiger Gleichung abhängt, nochmals zusammen. Es sind folgende:

1. χ und ω sind endliche, feste Gröfsen, welche nur dann verschwinden, wenn $\chi(\lambda)$, resp. $\omega(\lambda)$ von einem endlichen Werte der Stellenzahl λ an zu Null wird (§. 25.);

2. $\lim\limits_{\lambda=\infty}\left\{\left(\chi(\lambda):\lambda^{n-1}-\chi\right)\cdot\lambda\right\}$ und $\lim\limits_{\lambda=\infty}\left\{\left(\omega(\lambda):\lambda^{m-1}-\omega\right)\cdot\lambda\right\}$

sind endliche Werte (§. 25., §. 28.);

3. Für den Fall, dafs $\chi(\lambda)$, resp. $\omega(\lambda)$ von einer bestimmten endlichen Stellenzahl an verschwindet, ist X, resp. Ω von Null verschieden (§. 27.).

---

§. 33. Untersuchung des Integrals $\int\limits_{0e}^{1} z^{\beta}\,.\,dz^{n}$.

Setzen wir $\chi(\lambda)=\dfrac{n\,.\,n+1\ldots n+\lambda-1}{1.\;\;2\;\;\ldots\;\;\lambda}$ und $\omega(\lambda)=(\lambda-\gamma)^{\beta}$, also $m=\beta+1$, so ist nach §. 2., 4.

$$\lim\left\{\frac{1}{\nu^{n+\beta}}\cdot\sum_{0}^{\nu}\chi(\lambda)\,.\,\omega(\nu-\lambda)\right\}=\int\limits_{0e}^{1} z^{\beta}\,.\,dz^{n}\,.$$

Durch Einführung der bezüglichen Werte in die Gleichung des §. 32. erhalten wir

$$\frac{1}{\nu^{n+\beta}}\cdot\sum_{0}^{\nu}\chi(\lambda)\,.\,\omega(\nu-\lambda)=\frac{1}{\nu^{n}}\cdot(0)_{\nu}+\frac{1}{\nu^{\beta+1}}\cdot\left(\frac{\Omega}{\Pi(n-1)}\right)_{\nu}+\left(\frac{1}{\Pi(n-1)}\right)_{\nu}\cdot H\quad.\qquad(I)$$

Diese Gleichung ist nicht giltig für negative ganzzahlige n wegen Nichterfüllung der Bedingung 3. des §. 32.. Ohne Auskunft läfst uns die Gleichung für $n=0$, und weiter für negativreelle (nicht ganzzahlige) n, sobald der reelle Teil von $(\beta+1)$ gröfser als der reelle Teil von n ist.

1. Ist der reelle Teil von n positiv oder n rein imaginär, so ergiebt Gleichung (I), dafs das Integral für positivreelle $(\beta+1)$ gleich $\Pi(\beta):\Pi(n+\beta)$ ist, für nicht positivreelle $(\beta+1)$ dagegen einen bestimmten endlichen Wert nicht besitzt. Die Möglichkeit einer Konvergenz infolge Nullwerdens von Ω ist ausgeschlossen, da nach §. 23. Ω nur für positive ganzzahlige β von γ unabhängig ist.

2. Ist der reelle Teil von n negativ, n selbst aber keine ganze Zahl, so lehrt Gleichung (I) für den Fall, dafs der reelle Teil von $(\beta+1)$ gröfser als der reelle Teil von n ist, die Divergenz des Integrals.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Zur Erledigung der noch restierenden Fälle, für welche Gleichung (I) entweder nicht giltig oder nicht geeignet ist, müssen wir uns anderer Mittel bedienen:

1) Ist $n = 0$, so ergiebt die Definition des Integrals (§. 2.) für dasselbe den Wert 1.

2) Ist der reelle Teil von n negativ (negative ganzzahlige n mit eingeschlossen) und

1*) der reelle Teil von β positiv, so können wir das Integral nach §. 5. in

$$\int_0^1 z^\beta \, dz^n = \frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \int_0^h (1-z)^{n-1} \, . \, z^\beta \, . \, dz + \int_h^1 z^\beta \, . \, dz^n$$

zerlegen. Das erste Teilintegral besitzt wie bekannt stets einen endlichen festen Wert, ebenso das zweite Teilintegral, weil die zu integrierende Funktion in nächster Umgebung des Punktes 1 synektisch ist. Es fragt sich, ob der endliche, feste Wert unseres Integrals, den wir fürs erste mit J bezeichnen wollen, gleich $(\Pi(\beta) : \Pi(n+\beta))$ ist. Wenden wir auf die einzelnen Glieder der in §. 2. unter 4. angegebenen Funktion ψ die Formel:

$$\frac{n \, . \, n+1 \ldots n+\nu-1}{1 \, . \, 2 \ldots \nu} = \frac{n+1 \, . \, n+2 \ldots n+\nu}{1 \, . \, 2 \ldots \nu} - \frac{n+1 \, . \, n+2 \ldots n+\nu-1}{1 \, . \, 2 \ldots \nu-1}$$

an, so erhalten wir die Beziehung:

$$\psi_\nu(n, \beta) = \psi_\nu(n+1, \beta) - \psi_{\nu-1}(n+1, \beta) \quad \text{und hieraus}$$

$$\sum_0^\nu \psi_\lambda(n, \beta) = \psi_\nu(n+1, \beta) \quad . \qquad \text{(II)}$$

Von dieser Gleichung machen wir für den Fall Gebrauch, dafs der reelle Teil von $(n+\beta+1)$ positiv ist. Liegt der reelle Teil von n in den Grenzen: „$0 > a \geqq -1$“, so ist

$$\text{Lim} \left(\psi_\nu(n+1, \beta) : \nu^{n+\beta+1} \right) = \Pi(\beta) : \Pi(n+\beta+1) \quad ;$$

nach §. 17. ist nun

$$\text{Lim} \left\{ \sum_0^\nu \psi_\lambda(n, \beta) : \nu^{n+\beta+1} \right\} = J : (n+\beta+1) \quad ,$$

folglich resultiert für $0 > a \geqq -1$, sobald der reelle Teil von $(n+\beta+1)$ positiv ist, $J = \Pi(\beta) : \Pi(n+\beta)$. In gleicher Weise verfahren wir für $-1 > a \geqq -2$ usf.. Wir finden allgemein, dafs unser Integral für jedes negativreelle n den Wert $(\Pi(\beta) : \Pi(n+\beta))$ besitzt, wenn der reelle Teil von $(n+\beta+1)$ positiv ist. Wir benutzen weiter die in §. 2. unter 4. abgeleitete Formel:

$$(\nu - \gamma) . \psi_\nu(n, \beta) = \psi_\nu(n, \beta+1) + n \, . \, \psi_{\nu-1}(n+1, \beta) \quad ; \qquad \text{(III)}$$

aus derselben folgt durch Induktion, dafs für positivreelle β die beschränkende Bedingung: „$(n+\beta+1)$ positivreell“ in Wegfall kommt, dafs also das Integral den Wert $(\Pi(\beta) : \Pi(n+\beta))$ für jedes beliebige n besitzt, sobald der reelle Teil von β positiv ist.

2*) Liegt der reelle Teil von β in den Grenzen 0 und -1, die untere Grenze ausgeschlossen, so ergiebt Gleichung III den gleichen Integralwert wie unter 1*).

3*) Ist $(\beta+1)$ rein imaginär oder gleich Null, so findet nach III Oscillation, resp. logarithmische Divergenz statt, falls nicht n gleich Null oder negativer ganzer Zahl ist. Ist letzteres der Fall, so hat das Integral (nach §. 7., Zusatz 1. wegen $G_\nu = 0$ (vergl. §. 5.)) den oben angegebenen Wert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4*) Ist der reelle Teil von $(\beta + 1)$ negativ, so zerlegen wir in ähnlicher Weise, wie es in §. 5. geschehen ist,

$$\psi_\nu\,(n, \beta) : \nu^{n+\beta} \text{ in } \left\{G_\nu + \left(\int_h^1 z^\beta \,.\, dz^n\right)_\nu\right\} \quad .$$

Das Integral rechts hat für jedes β und jedes n einen bestimmten, endlichen Wert; anders G_ν. Es ist

$$G_\nu = \left\{\frac{n\,.\,n+1\,\ldots\,n+\nu-1}{1\,.\;\;2\;\;\ldots\;\;\nu}\cdot(-\gamma)^\beta + \frac{n\,.\,n+1\,\ldots\,n+\nu-2}{1\,.\;\;2\;\;\ldots\;\;\nu-1}\cdot(-\gamma+1)^\beta + \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + \frac{n\,.\,n+1\,\ldots\,n+\mu}{1\,.\;\;2\;\;\ldots\;\;\mu+1}\cdot(-\gamma+\nu-\mu-1)^\beta\right\} : \nu^{n+\beta}$$

$$= \left\{\frac{n\,.\,n+1\,\ldots\,n+\nu-1}{1\,.\;\;2\;\;\ldots\;\;\nu}\cdot\left(\frac{1}{\nu}\right)^{n-1}\cdot(-\gamma)^\beta + \frac{n\,.\,n+1\,\ldots\,n+\nu-2}{1\,.\;\;2\;\;\ldots\;\;\nu-1}\cdot\left(\frac{1}{\nu-1}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^{n-1}\cdot(-\gamma+1)^\beta\right.$$

$$\left. + \ldots\ldots + \frac{n\,.\,n+1\,\ldots\,n+\mu}{1\,.\;\;2\;\;\ldots\;\;\mu+1}\cdot\left(\frac{1}{\mu+1}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{\mu+1}{\nu}\right)^{n-1}\cdot(-\gamma+\nu-\mu-1)^\beta\right\} : \nu^{\beta+1}$$

$$= \left(\frac{1}{\Pi(n-1)}\cdot\left\{(-\gamma)^\beta + (-\gamma+1)^\beta + (-\gamma+2)^\beta + \ldots \text{ in inf.}\right\}\right)_\nu : \nu^{\beta+1} \quad .$$

Aus der zuletzt gewonnenen Form von G_ν ersehen wir, dafs für negativreelle $(\beta + 1)$ der Quotient $\psi_\nu\,(n, \beta) : \nu^{n+\beta}$ in demselben Grade wie $\nu^{-\beta-1}$ divergiert, wiederum ausgenommen den Fall: „n gleich Null oder negativer ganzer Zahl".

Als Gesamtresultat hat sich demnach folgendes ergeben:

„Das Integral $\int_0^1 z^\beta \,.\, dz^n$ ist gleich $\dfrac{\Pi(\beta)}{\Pi(n+\beta)}$, wenn entweder n gleich Null, resp. negativer ganzer Zahl oder der reelle Teil von $(\beta + 1)$ positiv ist.

In allen übrigen Fällen besitzt das Integral keinen endlichen, festen Wert."

---

§. 34. Untersuchung des Integrals $\int_0^1 (1-z)^\alpha \,.\, z^\beta \,.\, dz^n$.

Nach der Integralerklärung ist

$$\int_0^1 (1-z)^\alpha \,.\, z^\beta \,.\, dz^n = \lim_{\nu=\infty}\left\{\psi_\nu\,(n, \alpha, \beta) : \nu^{n+\alpha+\beta}\right\} \quad , \text{ wenn}$$

$$\psi_\nu\,(n, \alpha, \beta) = \gamma^\alpha \,.\, (\nu-\gamma)^\beta + \frac{n}{1}\cdot(\gamma+1)^\alpha \,.\, (\nu-\gamma-1)^\beta + \frac{n\,.\,n+1}{1\,.\;\;2}\cdot(\gamma+2)^\alpha \,.\, (\nu-\gamma-2)^\beta +$$

$$\ldots\ldots + \frac{n\,.\,n+1\,\ldots\,n+\nu-1}{1\,.\;\;2\;\;\ldots\;\;\nu}\cdot(\gamma+\nu)^\alpha \,.\, (-\gamma)^\beta$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gesetzt wird. Wir beginnen mit dem Spezialfalle: „n gleich Null oder negativer ganzer Zahl", für den die Giltigkeit der Gleichung des §. 32. zufolge Bedingung 3. fraglich ist, und benutzen die Definition des Integrals in der Form:

$$\int_{0e}^{1} (1-z)^{\alpha} \,.\, z^{\beta} \,.\, dz^{n} = \lim_{\nu=\infty} \left\{ \frac{1}{\nu^{n+\alpha}} \cdot \left(\gamma^{\alpha} + \frac{n}{1} \cdot (\gamma+1)^{\alpha} + \frac{n \,.\, n+1}{1 \,.\, 2} \cdot (\gamma+2)^{\alpha} + \ldots \right)_{\nu} \right\} \quad ;$$

aus derselben folgt zunächst, dafs unser Integral dann einen endlichen, festen Wert, nämlich den Wert Null, besitzt, wenn der reelle Teil von $(n + \alpha)$ positiv ist; weiter folgt mit Rücksicht auf die Untersuchungen des §. 23., dafs das Integral auch für nicht positivreelle $(n + \alpha)$ einen endlichen festen Wert haben kann, sobald α gleich Null oder positiver ganzer Zahl ist. In §. 33. ist der Fall: „$\alpha = 0$" bereits untersucht worden. Im Anschlufs an die in §. 33. gefundenen Resultate untersuchen wir das Integral für positive ganzzahlige α. Durch Zerlegung der einzelnen Glieder von ψ gemäfs

$$(\gamma + \lambda)^{\alpha} = \gamma \,.\, (\gamma + \lambda)^{\alpha-1} + \lambda \,.\, (\gamma + \lambda)^{\alpha-1}$$

finden wir die Gleichung:

$$\psi_{\nu}\,(n,\ \alpha,\ \beta) = \gamma \,.\, \psi_{\nu}\,(n,\ \alpha-1,\ \beta) + n \,.\, \psi'_{\nu}\,(n+1,\ \alpha-1,\ \beta)$$
$$- n \cdot \frac{n+1 \,.\, n+2 \ldots n+\nu}{1 \,.\, 2 \ldots \nu} \cdot (\gamma + \nu + 1)^{\alpha-1} \,.\, (-\gamma-1)^{\beta} \ ,$$

in welcher sich die Funktion ψ' von den Funktionen ψ dadurch unterscheidet, dafs in ihr $(\gamma + 1)$ an Stelle von γ steht. Mittels dieser Gleichung finden wir ohne Schwierigkeit, dafs für ganzzahlige positive α das Integral einen endlichen, festen Wert besitzt, sobald der reelle Teil von β über (-1) liegt, und weiter in Ergänzung des ersten Teils unserer Untersuchung, sobald n gleich Null oder negativer ganzer Zahl ist. Als Wert des Integrals ergiebt sich

$$\frac{\Pi\,(n+\alpha-1) \,.\, \Pi\,(\beta)}{\Pi\,(n-1) \,.\, \Pi\,(n+\alpha+\beta)} = (n+\alpha-1) \,.\, (n+\alpha-2) \ldots n \,.\, \frac{\Pi\,(\beta)}{\Pi\,(n+\alpha+\beta)} \quad ;$$

für n gleich Null oder negativer ganzer Zahl ist der Wert rechts zu benutzen.

Ist weder α gleich Null, resp. positiver ganzer Zahl noch n gleich Null, resp. negativer ganzer Zahl, so halten wir uns an die durch die bezüglichen Einsetzungen umgeformte Gleichung des §. 32.:

$$\left\{ \sum_{0}^{\nu} \chi\,(\lambda) \,.\, \omega\,(\nu-\lambda) \right\} : \nu^{n+\alpha+\beta} = \frac{1}{\nu^{n+\alpha}} \cdot (X)_{\nu} + \frac{1}{\nu^{\beta+1}} \cdot \left(\frac{\Omega}{\Pi\,(n-1)} \right)_{\nu} + \left(\frac{1}{\Pi\,(n-1)} \right)_{\nu} \cdot H \ ,$$

welche ergiebt, dafs das Integral einen endlichen, festen Wert, nämlich den oben linkerseits angegebenen, nur dann besitzt, wenn sowohl $(n + \alpha)$ als auch $(\beta + 1)$ positivreell ist.

Demnach ist
$$\int_{0e}^{1} (1-z)^{\alpha} \,.\, z^{\beta} \,.\, dz^{n} = \frac{\Pi\,(n+\alpha-1) \,.\, \Pi\,(\beta)}{\Pi\,(n-1) \,.\, \Pi\,(n+\alpha+\beta)} \ ,$$

wenn 1. entweder $(n + \alpha)$ positivreell oder α gleich Null, resp. positiver ganzer Zahl und gleichzeitig

2. entweder $(\beta + 1)$ positivreell oder n gleich Null, resp. negativer ganzer Zahl ist.

In allen übrigen Fällen besitzt das Integral keinen festen, endlichen Wert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 35. Über mehrfache Integration.

Wir bilden das Doppelintegral

$$\int_a^b \left\{ \int_a^u f(z) \,.\, dz^n \right\} \cdot du^m$$

und führen dasselbe durch Entwickelung des inneren Integrals in eine Potenzreihe auf ein einfaches Integral zurück. Hierzu setzen wir die Konvergenz der beiden in §. 3. unter 2. angegebenen Reihen voraus. Das Integral

$$\int_a^u f(z) \,.\, dz^n = \frac{(u-a)^n}{\Pi(n)} \,.\, f(a) + \frac{(u-a)^{n+1}}{\Pi(n+1)} \,.\, f'(a) + \frac{(u-a)^{n+2}}{\Pi(n+2)} \,.\, f''(a) + \ldots.$$

bezeichnen wir der Kürze wegen mit $\varphi(u)$, so dafs das Doppelintegral gleich dem Grenzwerte von

$$J_\nu = \left(\frac{b-a}{\nu}\right)^m \cdot \left\{ \varphi(u'_0) + \frac{m}{1} \cdot \varphi(u'_1) + \frac{m \,.\, m+1}{1 \,.\, 2} \cdot \varphi(u'_2) + \ldots + \frac{m \,.\, m+1 \ldots m+\nu-1}{1 \,.\, 2 \ldots \nu} \cdot \varphi(u'_\nu) \right\}$$

ist. Geben wir der Integrationskonstanten c die Form $(-\gamma \,.\, (b-a))$, so ist

$$u'_\lambda - a = (b-a) \,.\, (\nu - \gamma - \lambda) : \nu \quad ,$$

$$\varphi(u'_\lambda) = \frac{(b-a)^n}{\Pi(n)} \,.\, f(a) \,.\, \left(\frac{\nu-\gamma-\lambda}{\nu}\right)^n + \frac{(b-a)^{n+1}}{\Pi(n+1)} \,.\, f'(a) \,.\, \left(\frac{\nu-\gamma-\lambda}{\nu}\right)^{n+1} + \ldots.$$

und (vergl. §. 2.)

$$J_\nu = \frac{(b-a)^{n+m}}{\Pi(n)} \,.\, f(a) \,.\, \frac{\psi_\nu(m, n)}{\nu^{n+m}} + \frac{(b-a)^{n+m+1}}{\Pi(n+1)} \,.\, f'(a) \,.\, \frac{\psi_\nu(m, n+1)}{\nu^{n+m+1}} + \ldots. \quad .$$

Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. $m = 0$: das Doppelintegral ist (nach §. 1.) identisch mit dem einfachen Integral

$$\int_a^b f(v) \,.\, dv^{n+m} \quad .$$

2. m gleich negativer ganzer Zahl: mit Beachtung des Endresultates des §. 33. und der Ausführungen des §. 3., 2. ergiebt sich dasselbe Integral wie unter 1.

3. m weder gleich Null noch gleich negativer ganzer Zahl:

1*) $n = 0$: auch in diesem Falle kommen wir auf obiges Integral.

2*) n gleich negativer ganzer Zahl $(n = -g)$: in diesem Falle ist

$$J_\nu = \frac{(b-a)^m}{\Pi(0)} \,.\, f^{(g)}(a) \,.\, \frac{\psi_\nu(m, 0)}{\nu^m} + \frac{(b-a)^{m+1}}{\Pi(1)} \,.\, f^{(g+1)}(a) \cdot \frac{\psi_\nu(m, 1)}{\nu^{m+1}} + \ldots. \quad ,$$

$$\operatorname{Lim} J_\nu = \frac{(b-a)^m}{\Pi(m)} \,.\, f^{(g)}(a) + \frac{(b-a)^{m+1}}{\Pi(m+1)} \,.\, f^{(g+1)}(a) + \ldots. \quad , \quad \text{also}$$

$$\int_a^b f(v) \,.\, dv^{n+m} - \int_a^b \left\{ \int_a^u f(z) \,.\, dz^n \right\} \cdot du^m = \frac{(b-a)^{m-g}}{\Pi(m-g)} \cdot f(a) + \frac{(b-a)^{m-g+1}}{\Pi(m-g+1)} \cdot f'(a)$$

$$+ \ldots + \frac{(b-a)^{m-1}}{\Pi(m-1)} \cdot f^{(g-1)}(a) \quad .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3*) n weder gleich Null noch gleich negativer ganzer Zahl:

1**) der reelle Teil von $(n+1)$ sei positiv: nach §. 33. und §. 3., 2. ist dann

$$\int_a^b \left\{ \int_a^u f(z) \,.\, dz^n \right\} . \, du^m = \int_a^b f(v) \,.\, dv^{n+m} \quad ;$$

2**) $(n+1)$ sei rein imaginär: das Doppelintegral besitzt wegen Oscillation des ersten Gliedes von J_ν keinen festen Wert;

3**) der reelle Teil von $(n+1)$ sei negativ: das Doppelintegral besitzt keinen endlichen Wert; ist λ diejenige positive ganze Zahl, für welche der reelle Teil von $(n+\lambda+2)$ positiv, dagegen der reelle Teil von $(n+\lambda+1)$ gleich Null oder negativ wird, so divergieren nach §. 33. die λ ersten Glieder von J_ν, und zwar das Anfangsglied am stärksten; die folgenden Glieder, vom $(\lambda+1)$-ten an, bilden eine absolut konvergente Reihe.

Als Resultat hat sich demnach folgendes ergeben:

„Ist entweder m gleich Null, resp. negativer ganzer Zahl oder der reelle Teil von $(n+1)$ positiv, so ist

$$\int_a^b \left\{ \int_a^u f(z) \,.\, dz^n \right\} . \, du^m = \int_a^b f(v) \,.\, dv^{n+m} \quad .$$

Ist n gleich negativer ganzer Zahl, so besitzt das Doppelintegral wohl einen endlichen, festen Wert, unterscheidet sich aber von dem einfachen Integrale um eine im allgemeinen von Null verschiedene endliche Gröfse (siehe oben).

In allen übrigen Fällen besitzt das Doppelintegral keinen endlichen, festen Wert."

Das Vorhandensein einer Differenz für negative ganzzahlige n kann nicht überraschen, da das Integral eines Differentialquotienten im allgemeinen nicht identisch ist mit der Funktion, welche den Differentialquotienten lieferte.

Durch Einführung der einfachen Integrale des §. 7., 1. in obige Gleichung erhalten wir für positivreelle $(m+1)$ und n den bemerkenswerten Integralsatz:

$$\frac{1}{\Pi(m-1) \,.\, \Pi(n-1)} \,.\, \int_a^b (b-u)^{m-1} \,.\, \left\{ \int_a^u (u-z)^{n-1} \,.\, f(z) \,.\, dz \right\} \cdot du =$$

$$\frac{1}{\Pi(n+m-1)} \,.\, \int_a^b (b-v)^{n+m-1} \,.\, f(v) \,.\, dv \quad .$$

Die Voraussetzung der Konvergenz der beiden in §. 3., 2. angegebenen Reihen, auf welche sämtliche Ergebnisse dieses Paragraphen basiert sind, läfst sich voraussichtlich durch einfachere Bedingungen, zu deren Ermittelung es noch eingehenderer Untersuchungen bedarf, ersetzen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3*) n weder gleich … l:

1**) der reelle … 3. und §. 3., 2. ist dann

$$\int_a \ldots \quad {}^{n} \quad ;$$

2**) $(n+1)$ se … sitzt wegen Oscillation des ersten Gliedes von J_ν keine …

3**) der reelle … ppelintegral besitzt keinen endlichen Wert; ist λ diejen … reelle Teil von $(n+\lambda+2)$ positiv, dagegen der reelle … negativ wird, so divergieren nach §. 33. die λ ersten Gl … gsglied am stärksten; die folgenden Glieder, vom $(\lambda+$ … gente Reihe.

Als Resultat hat si …

„Ist entweder … ganzer Zahl oder der reelle Teil von $(n+1)$ …

$$\int_a \ldots \quad {}^{m} \quad .$$

Ist n gleich n … zt das Doppelintegral wohl einen endlichen … ich aber von dem einfachen Integrale um e … erschiedene endliche Gröſse (siehe oben).

In allen übrige … gral keinen endlichen, festen Wert."

Das Vorhandensein … e n kann nicht überraschen, da das Integral eines Differe … entisch ist mit der Funktion, welche den Differentialquoti …

Durch Einführung … in obige Gleichung erhalten wir für positivreelle $(m+1$ … satz:

$$\frac{1}{\Pi(m-1).\Pi \ldots} \ldots {}^{-1}.\, f(z)\,.\,dz \Big\} \cdot du =$$

$$\frac{}{\Pi(n \ldots} \quad {}^{v} \quad .$$

Die Voraussetzung … 2. angegebenen Reihen, auf welche sämtliche Ergebnisse … sich voraussichtlich durch einfachere Bedingungen, zu d … tersuchungen bedarf, ersetzen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf