Ueber eine mit dem goldenen Schnitte in Zusammenhang stehende Kreisgruppe.

Indem ich darauf ausgieng, statt der gewöhnlichen auf Construction einer arithmetischen Formel beruhenden und darum bei heuristischem Verfahren unbequemen Lösung der Aufgabe des goldenen Schnitts eine einfachere zu finden, gelangte ich zu einer Gruppe von Kreisen, die mich durch die Fülle von Gesetzmäßigkeit in Größen- und Formverhältnissen überraschte. Diese Gesetzmäßigkeit darzustellen, soll die Aufgabe der folgenden Abhandlung sein.

§. 1.

Die Aufgabe, eine Linie nach dem goldenen Schnitte zu theilen, führt zunächst auf die allgemeinere Aufgabe, eine Linie nach einem bestimmten Verhältnisse zu theilen. Wenn nämlich das Verhältniß der beiden durch den goldenen Schnitt erhaltenen Theile einer Linie ein constantes ist, das heißt, wenn die Stücke einer nach dem goldenen Schnitte getheilten Linie sich eben so verhalten, wie die Theile einer anderen, auch nach dem goldenen Schnitte getheilten Linie, dann ist nur erforderlich, daß man irgend eine Linie habe, die nach dem goldenen Schnitte getheilt ist; man kann sich dann dieser gleichsam als eines Maßstabes bedienen, um jede gegebene grade Linie in der verlangten Weise zu theilen. Daß aber die eben ausgesprochene Bedingung wahr ist, d. h. daß das Verhältniß der Theile einer nach dem goldenen Schnitte getheilten Linie ein constantes ist, folgt aus den beiden folgenden Sätzen.

§. 2.

Lehrsatz. Wenn eine grade Linie nach dem goldenen Schnitte getheilt ist und man legt in dem einen Endpunkte derselben unter einem beliebigen Winkel eine beliebige gerade Linie an, verbindet den andern Endpunkt der ersten Linie mit dem Endpunkte der zweiten und zieht durch den Theilpunkt der ersten eine grade Linie parallel der gezogenen Verbindungslinie, so wird durch diese Parallele auch die zweite Linie nach dem goldenen Schnitte getheilt.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. Fig. 1. Es sei ad : dc = dc : ac und de || ab, so soll sich auch verhalten be : ec = ec : bc.

Es ist

$$\begin{array}{lll} ad : dc & = be : ec & (^1) \\ dc : ac & = ec : bc & (^2) \end{array}$$

Da nun die ersten Verhältnisse in beiden Proportionen gleich sind (nach der Annahme) so müßen es auch die beiden letzten sein; d. h. es ist

be : ec = ec : bc.

§. 3.

Lehrsatz. Sind zwei grade Linien nach dem goldenen Schnitte getheilt und man legt dieselben mit ihren Anfangspunkten unter einem beliebigen Winkel aneinander, so daß entweder die größeren oder die kleineren Abschnitte beider von jenen Punkten ausgehen, so ist die Verbindungslinie der Theilpunkte der Verbindungslinie der Endpunkte parallel.

Beweis. (Fig. 1.)

Es sei also ad : dc = dc : ac und

be : ec = ec : bc

so soll de = ab sein.

Gesetzt es sei de nicht parallel ab, so ziehe man df || ab; dann ist

$$\begin{array}{l} ec^2 = bc.\ be \text{ (nach der Annahme)} \\ fc^2 = bc.\ bf \text{ (nach §. 2.)} \end{array}$$

da nun $ec^2 > fc^2$ ist, so müßte

bc . be > bc . bf und

be > bf sein, was unmöglich ist. Also ist keine andere durch d gehende Linie außer de zu ab parallel, folglich ist de || ab und es verhalten sich also die Stücke einer nach dem goldenen Schnitte getheilten Linie wie die Stücke jeder anderen auch nach dem goldenen Schnitte getheilten Linie.

§. 4.

Um nun irgend eine Linie zu erhalten (vgl. §. 1.), die nach dem goldenen Schnitte getheilt ist, wird man diejenigen Sätze heranziehen, in denen, wie beim goldenen Schnitte, eine mittlere Proportionale zwischen zwei Linien vorkommt. Nehmen wir das rechtwinklige Dreieck, so würden wir auf die Aufgabe geführt, ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, in dem eine Kathete gleich ist dem ihr nicht anliegenden Segmente der Hypotenuse, oder auf die andere: in einem Endpunkte eines Durchmessers ein Loth zu errichten so lang, daß, wenn man seinen Endpunkt mit dem andern Endpunkte des Durchmessers verbindet, das Innenstück dieser Sekante gleich wird jenem Lothe. Nehmen wir den Satz von der Tangente, so erhalten wir folgenden Lehrsatz.

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

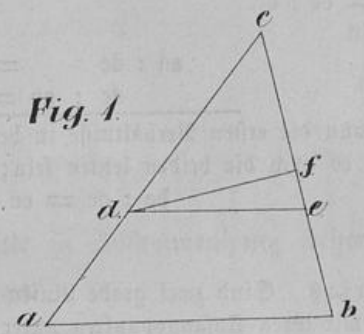
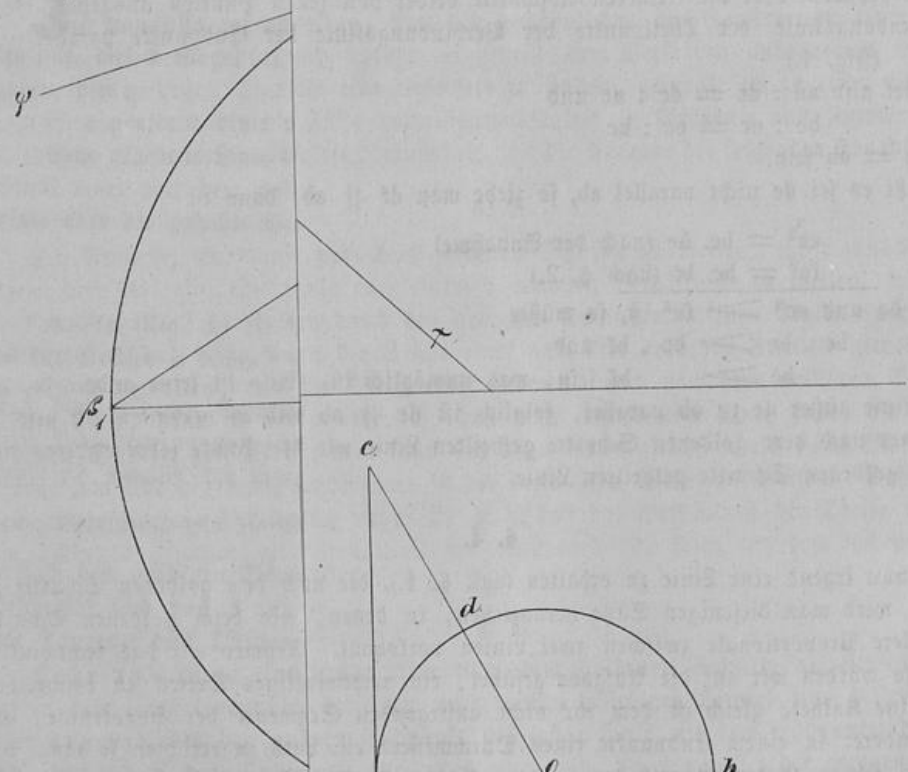


Fig. 1.



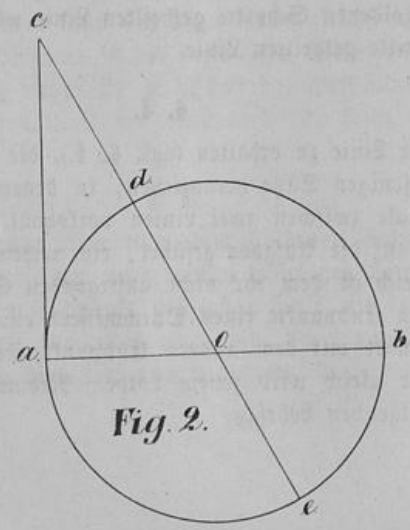


Fig. 2.

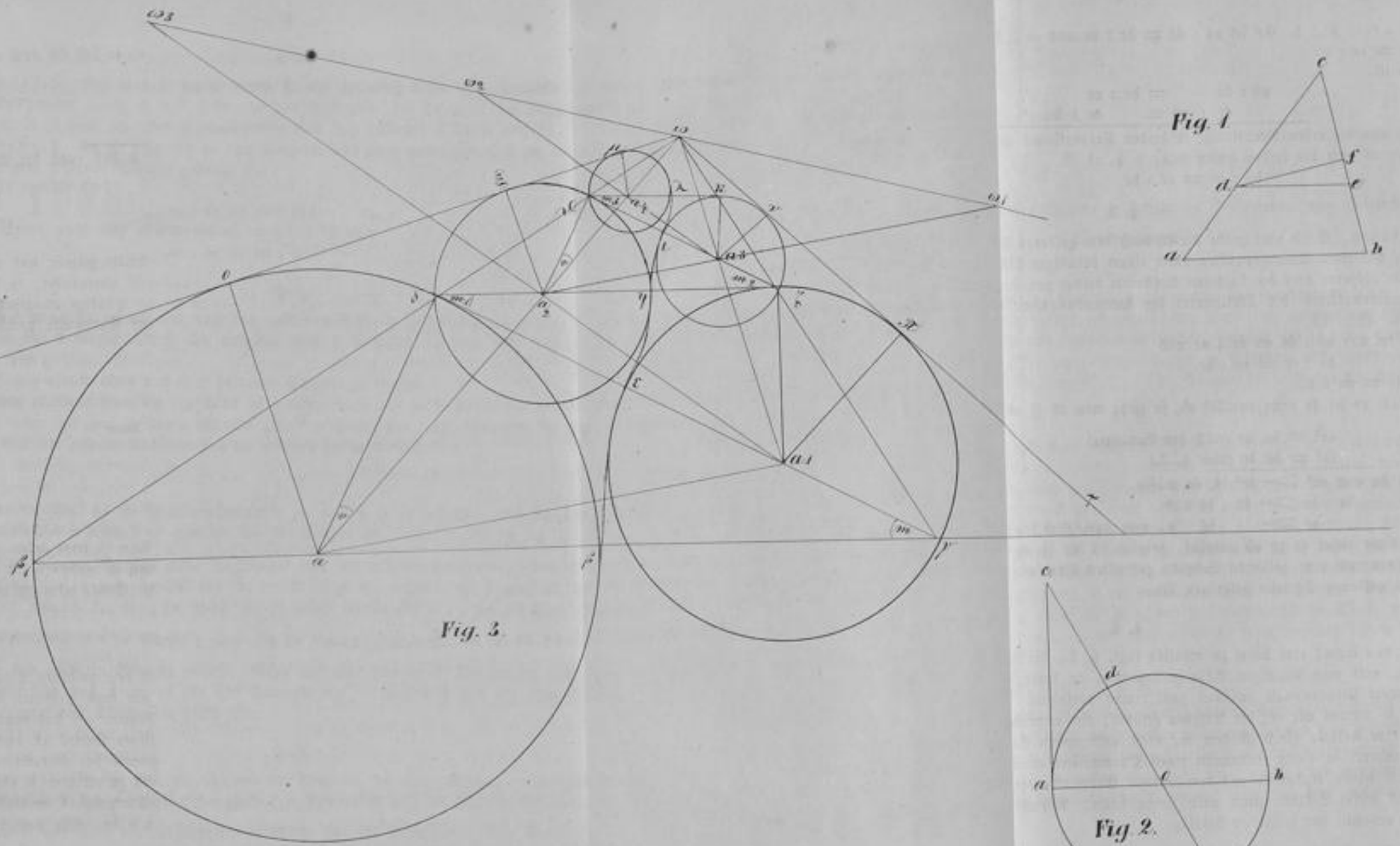


Fig. 3.

Fig. 1

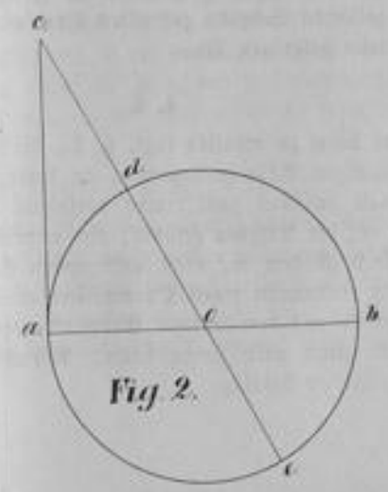


Fig. 2.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 5.

Lehrsatz. Legt man in irgend einem Punkte an einen Kreis eine Tangente, welche dem Durchmesser gleich ist und zieht von dem Endpunkte der Tangente die Mittelpunkts-Sekante, so ist diese im ersten Schneidepunkte nach dem goldenen Schnitte getheilt.

Beweis. Es sei (Fig. 2.) ac eine Tangente und zwar = ab; so soll ce im Punkte d nach dem goldenen Schnitte getheilt sein.

Es verhält sich

$$ce : ca = ca : cd;$$

da nun $ca = ab = de$, so ist auch

$$ce : ed = ed : dc.$$

§. 6.

Wie man also irgend eine nach dem goldenen Schnitte getheilte Linie erhält, ergiebt sich aus diesem Satze. Durch ihn und den Satz §. 2. lassen sich nun leicht folgende Aufgaben lösen:

Eine gegebene Linie nach dem goldenen Schnitte zu theilen.

Eine gegebene Linie um ein Stück zu verlängern, so daß beide Theile der ganzen Linie Stücke einer nach dem goldenen Schnitte getheilten Linie sind, und entweder die gegebene Linie oder die gesuchte Verlängerung die mittlere Proportionale wird.

§. 7.

Es sei (Fig. 3.) die Mittelpunktssekante $\gamma\alpha$ nach §. 5. so bestimmt, daß die Tangente $\gamma\delta$ des Kreises α doppelt so groß ist als der Radius $\alpha\delta$, dann ist also $\gamma\beta_1$ im Punkte β nach dem goldenen Schnitte getheilt. Wendet man nun auf die Tangente $\gamma\delta$ das gewöhnliche Verfahren an und schneidet von ihr ein Stück $\gamma\varepsilon$ ab, welches dem Außenstücke der Sekante $\gamma\beta_1$ nämlich der Linie $\gamma\beta$ gleich ist, so haben die Punkte $\delta\ \varepsilon\ \gamma$ für die Linie $\delta\gamma$ dieselbe Bedeutung wie die Punkte $\gamma\ \beta\ \beta_1$ für die Linie $\gamma\beta_1$ das heißt, es ist die Linie $\delta\gamma$ in ε nach dem goldenen Schnitte getheilt. Wenn man also über $\varepsilon\gamma$ als Durchmesser einen Kreis beschreibt und von δ aus an ihn eine Tangente legt, so muß auch hier wie beim Kreise α die Tangente dem Durchmesser gleich sein.

§. 8.

Lehrsatz. Wenn man (Fig. 3.) von der Tangente ($\gamma\delta$) eines Kreises, welche gleich ist dem Durchmesser ($\beta\beta_1$), ein Stück ($\gamma\varepsilon$) gleich dem Außenstücke ($\gamma\beta$) der Mittelpunktssekante ($\gamma\beta_1$) abschneidet und über dem abgeschnittenen Stücke ($\gamma\varepsilon$) als Durchmesser einen Kreis (α_1) be-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schreibt, dann von dem Berührungspunkte (δ) der Tangente ($\gamma\delta$) an diesen Kreis ($\underset{1}{\alpha}$) eine Tangente ($\delta\zeta$) legt: so ist diese gleich dem Durchmesser ($\varepsilon\gamma$) des zweiten Kreises ($\underset{1}{\alpha}$) und parallel der Mittelpunktssekante ($\underset{1}{\gamma\beta}$) des ersten Kreises.

Beweis. Es ist $\underset{1}{\gamma\beta} : \gamma\delta = \gamma\delta : \gamma\beta$;

folglich $\underset{1}{\gamma\beta} - \gamma\delta : \gamma\delta = \gamma\delta - \gamma\beta : \gamma\beta$

$$\underset{1}{\gamma\beta} - \underset{1}{\beta\beta} : \gamma\delta = \gamma\delta - \gamma\varepsilon : \gamma\varepsilon$$

$$\gamma\varepsilon : \gamma\delta = \varepsilon\delta : \gamma\varepsilon$$

oder $\gamma\delta : \gamma\varepsilon = \gamma\varepsilon : \varepsilon\delta$.

Es ist aber $\gamma\delta : \delta\zeta = \delta\zeta : \varepsilon\delta$

Folglich $\delta\zeta = \gamma\varepsilon$.

Werden die Radien $\alpha\delta$ und $\underset{1}{\alpha\zeta}$ gezogen, so ist $\alpha\delta : \delta\gamma = \underset{1}{\alpha\zeta} : \zeta\delta = 2 : 1$. Folglich sind die rechtwinkligen Dreiecke $\alpha\gamma\delta$ und $\underset{1}{\alpha\delta\zeta}$ ähnlich; darum $\mathrm{m} = \underset{1}{\mathrm{m}}$ und $\delta\zeta \parallel \gamma\alpha$.

§. 9.

Wendet man dieselbe Construction an auf den Kreis $\underset{1}{\alpha}$ so erhält man einen Kreis $\underset{2}{\alpha}$ und auch bei diesem ist aus demselben Grunde $\zeta\vartheta \parallel \underset{1}{\alpha\delta}$

$$\vartheta\zeta = \delta\eta.$$

Wiederholt mann dann noch einmal dieselbe Construction in Beziehung auf den Kreis $\underset{2}{\alpha}$ so ergiebt sich der Kreis $\underset{3}{\alpha}$, und es ist auch hier $\vartheta\varkappa \parallel \underset{2}{\alpha\zeta}$.

$$\vartheta\varkappa = \iota\zeta.$$

Auf diese Weise kann man in der Construction fortfahren und es gilt für alle folgenden Kreise dasselbe Gesetz wie für die genannten, nämlich:

Jede Tangente ist gleich dem Durchmesser ihres Kreises und parallel dem gezogenen Durchmesser des vorhergehenden Kreises, oder, was dasselbe ist, parallel der Tangente an den diesem Kreise vorhergehenden Kreis, und es sind somit alle von den Punkten δ ϑ u. s. w. nach rechts, sowie alle von den Punkten γ ζ u. s. w. nach links gehenden Tangenten einander parallel.

§. 10.

Betrachten wir die Dreiecke $\alpha\gamma\delta$ $\underset{1}{\alpha\delta\zeta}$ $\underset{2}{\alpha\zeta\vartheta}$ $\underset{3}{\alpha\vartheta\varkappa}$ u. s. w. so sind alle diese Dreiecke ähnlich, weil sie rechtwinklig sind und ihre Katheten sämmtlich im Verhältnisse 1 : 2 stehen. Es sind also eine Reihe ähnlicher Dreiecke symmetrisch auf einander gelegt, so daß die klei-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

neren Katheten dieser ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke abwechselnd nach links und nach rechts liegen, während bei den größeren Katheten das umgekehrte statt findet.

§. 11.

Nach (§. 3.) ist das Verhältniß der Theile aller nach dem goldenen Schnitte getheilten Linien constant; darum verhält sich in (Fig. 3)

$$\beta\underset{1}{\beta} : \beta\gamma = \varepsilon\gamma : \varepsilon\delta \text{ oder}$$

$$\frac{\beta\beta_1}{2} : \frac{\beta\gamma}{2} = \frac{\varepsilon\gamma}{2} : \frac{\eta\delta}{2} \text{ oder}$$

$$\alpha\delta : \alpha\underset{1}{\zeta} = \alpha\underset{1}{\zeta} : \alpha\underset{2}{\vartheta} \text{ d. h.}$$

der Radius irgend eines Kreises ist die mittlere Proportionale zwischen den Radien des in der Construction vorhergehenden und des folgenden Kreises und es bilden so nach sämmtliche Radien eine fallende geometrische Reihe.

§. 12.

Es ist also

$$\alpha\underset{1}{\zeta}^2 = \alpha\delta \,.\, \alpha\underset{2}{\vartheta} \quad (1)$$

$$\alpha\underset{2}{\vartheta}^2 = \alpha\underset{1}{\zeta} \,.\, \alpha\underset{3}{\varkappa} \quad (2)$$

$$\alpha\underset{3}{\varkappa}^2 = \alpha\underset{2}{\vartheta} \,.\, \alpha\underset{4}{\vartheta} \quad (3)$$

Folglich $\alpha\delta \,.\, \alpha\underset{2}{\vartheta} : \alpha\underset{2}{\vartheta}^2 = \alpha\underset{1}{\zeta}^2 : \alpha\underset{1}{\zeta} \,.\, \alpha\underset{3}{\varkappa}$

oder

$$\alpha\delta : \alpha\underset{2}{\vartheta} = \alpha\underset{1}{\zeta} : \alpha\underset{3}{\varkappa} \quad (A)$$

Ferner ist

$$\alpha\underset{1}{\zeta} \,.\, \alpha\underset{3}{\varkappa} : \alpha\underset{3}{\varkappa}^2 = \alpha\underset{2}{\vartheta}^2 : \alpha\underset{2}{\vartheta} \,.\, \alpha\underset{4}{\vartheta}$$

oder

$$\alpha\underset{1}{\zeta} : \alpha\underset{3}{\varkappa} = \alpha\underset{2}{\vartheta} : \alpha\underset{4}{\vartheta} \quad (B)$$

Aus (A) und (B) folgt

$$\alpha\delta : \alpha\underset{2}{\vartheta} = \alpha\underset{2}{\vartheta} : \alpha\underset{4}{\vartheta} \text{ d. h.}$$

die Radien der Kreise, welche sich links gruppiren, bilden eine geometrische Reihe, ebenso natürlich die Radien der Gruppe rechts; was auf arithmetischem Wege aus §. 11 leicht gefolgert werden konnte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 13.

Da also $\alpha\delta : \delta\underset{2}{\alpha} = \underset{2}{\alpha}\vartheta : \vartheta\underset{4}{\alpha}$

und der Winkel $\alpha\delta\underset{2}{\alpha} = \underset{2}{\alpha}\vartheta\underset{4}{\alpha}$ weil beide aus bezüglich gleichen Theilen R und $\underset{1}{m} = \underset{3}{m}$ bestehen, so ist Dreieck $\alpha\delta\underset{2}{\alpha} \sim \underset{2}{\alpha}\vartheta\underset{4}{\alpha}$, folglich $v = \underset{1}{v}$, und da $\alpha\delta \parallel \underset{2}{\alpha}\vartheta$, wie aus $\alpha\gamma\delta \sim \underset{2}{\alpha}\zeta\vartheta$ folgt, so ist $\alpha\ \underset{2}{\alpha}\ \underset{4}{\alpha}$ eine gerade Linie und die Mittelpunkte aller Kreise der Gruppe links und rechts liegen bezüglich in einer geraden Linie.

§. 14.

Die beiden Linien, von denen die eine durch alle Mittelpunkte der Kreise links, die andere durch alle Mittelpunkte der Kreise rechts geht, müßen einander schneiden; wie sich unter andern aus der Convergenz der beiden Radien $\alpha\delta$ und $\underset{1}{\alpha}\zeta$ sogleich ergiebt. Der Schneidepunkt sei ω.

§. 15.

Die Dreiecke $\alpha\gamma\delta$ und $\underset{2}{\alpha}\zeta\vartheta$ sind ähnlich. Darum $\alpha\delta : \underset{2}{\alpha}\vartheta = \delta\gamma : \vartheta\zeta$.

Da aber $\delta\gamma$ und $\vartheta\zeta$ in ε und ι nach dem goldenen Schnitte getheilt sind, so verhalten sich die entsprechenden Stücke $\delta\varepsilon$ und $\vartheta\iota$, so wie die andern gleichfalls entsprechenden Stücke $\varepsilon\gamma$ und $\iota\zeta$ oder deren Hälften $\varepsilon\underset{1}{\alpha}$ und $\iota\underset{3}{\alpha}$ somit auch die Summen $\delta\varepsilon + \varepsilon\underset{1}{\alpha}$ und $\vartheta\iota + \iota\zeta$ oder $\delta\underset{1}{\alpha}$ und $\vartheta\underset{3}{\alpha}$ wie $\alpha\delta : \underset{2}{\alpha}\vartheta$. Darum ist $\alpha\underset{1}{\alpha}\delta \sim \underset{2}{\alpha}\ \underset{3}{\alpha}\ \vartheta$, und da $\alpha\delta \parallel \underset{2}{\alpha}\vartheta$ und $\delta\underset{1}{\alpha} \parallel \vartheta\underset{3}{\alpha}$ so ist auch $\alpha\underset{1}{\alpha} \parallel \underset{2}{\alpha}\ \underset{3}{\alpha}$. Folglich gehen die durch die homologen Punkte $\underset{1}{\alpha}$ und $\underset{3}{\alpha}$ α und $\underset{2}{\alpha}$ δ und ϑ gehenden Linien durch einen Punkt; also geht auch $\delta\vartheta$ durch ω, und wie wenn sich leicht ergiebt auch durch $\underset{1}{\beta}$. Da nun die Bogen $\underset{1}{\beta}\delta$ und $\delta\vartheta$ ähnliche Bogen sind, so folgt, daß ω der äußere Ähnlichkeitspunkt für die Gruppe der Kreise links ist. Dasselbe läßt sich auch in gleicher Weise für die Gruppe rechts zeigen, und es liegen demnach auch die Punkte $\omega\ \varkappa\ \zeta\ \gamma$ in einer geraden Linie.

§. 16.

Daraus, daß ω der gemeinschaftliche Ähnlichkeitspunkt für die Kreisgruppe rechts und links ist, folgt, daß die an die nächsten Kreise nach außen angelegten Tangenten $\omega\mu$ und $\omega\nu$ auch Tangenten an die übrigen Kreise sind, so daß alle Kreise die beiden Linien $\omega\psi$ und $\omega\chi$ berühren und zwischen ihnen liegen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 17.

Der äußere Ähnlichkeitspunkt für die Kreise $\underset{2}{\alpha}$ und $\underset{4}{\alpha}$ ist ω, für $\underset{2}{\alpha}$ und $\underset{3}{\alpha}$ sei er $\underset{1}{\omega}$ für $\underset{3}{\alpha}$ und $\underset{4}{\alpha}$ sei er $\underset{2}{\omega}$; dann liegen bekanntlich $\omega\,\underset{1}{\omega}\,\underset{2}{\omega}$ in einer geraden Linie. Nehmen wir statt des Kreises $\underset{4}{\alpha}$ den Kreis $\underset{1}{\alpha}$ zu den beiden anderen hinzu, so muß der äußere Ähnlichkeitspunkt von $\underset{1}{\alpha}$ und $\underset{2}{\alpha}$ nämlich $\underset{3}{\omega}$ in der Verlängerung der Verbindungslinie der Ähnlichkeitspunkte der Kreise $\underset{1}{\alpha}$ und $\underset{3}{\alpha}$ (nämlich α) und der Kreise $\underset{2}{\alpha}$ und $\underset{3}{\alpha}$ (nämlich $\underset{1}{\omega}$) liegen. Demzufolge haben alle Kreise in beiden Gruppen an der Linie $\omega\underset{1}{\omega}$ eine gemeinsame Symmetrale.

§. 18.

Nennen wir eine Linie l, so ist, wenn sie nach dem goldenen Schnitte getheilt wird, das kleinere Segment $= \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. l. Setzen wir nun $\alpha\beta = \frac{1}{2}$ also $\beta\underset{1}{\beta} = 1$, so ist $\delta\gamma = \beta\underset{1}{\beta} = 1$ und $\delta\varepsilon = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ und $\varepsilon\gamma = \delta\zeta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Folglich ist $\underset{1}{\alpha\zeta} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Ferner ist $\underset{2}{\alpha\vartheta} = \frac{1}{2}\,\delta\eta = \frac{1}{2}\,\delta\varepsilon = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$. Ferner $\underset{3}{\alpha\varkappa} = \frac{1}{2}\,\vartheta\varkappa = \frac{1}{2}\,\iota\zeta = \frac{1}{2}\,\vartheta\zeta\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\delta\eta\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-2+\sqrt{5}}{2}$. Somit bilden die Radien der Kreise von α angefangen eine geometrische Reihe, deren Anfangsglied $= \frac{1}{2}$, deren Exponent $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, also ein echter Bruch ist. Die Summe aller Radien ist also $1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$.

Nehmen wir das n^{te} $(n+1)^{te}$ und $(n+2)^{te}$ Glied dieser Radienreihe, so ist $\frac{1}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$, denn nach geschehener Division durch die linke Seite der Gleichung erhalten wir $1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ oder $1 = \frac{4}{4}$. Folglich ist jeder Radius so groß als die beiden nächst kleinern Radien zusammen. Da aber nach §. 11 jeder Radius die mittlere Proportionale ist zwischen dem ihm vorhergehenden und dem ihm folgenden, so folgt der merkwürdige Satz, daß je zwei auf einander folgende Radien die Theile des nach dem goldenen Schnitte getheilten vorhergehenden Radius sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 19.

Die Radien der paaren Kreise bilden eine geometrische Reihe, deren Anfangsglied $= \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, deren Exponent $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; die Summe derselben ist also $\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}{1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = 1/2$.

Folglich sind die Radien aller Kreise der Gruppe rechts (denn das sind die paaren Kreise) zusammen so groß als der Radius des ihnen vorhergehenden Kreises links.

Die Summe aller Radien der Gruppe links mit Ausschluß des ersten Kreises ist $\frac{\frac{3-\sqrt{5}}{4}}{1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Also ist die Summe aller Radien der Kreise links so groß als der Radius des ihnen vorhergehenden Kreises rechts.

§. 20.

Werden von den Mittelpunkten $\alpha\ \underset{2}{\alpha}\ \underset{4}{\alpha}$ der Gruppe links, sowie von den Mittelpunkten $\underset{1}{\alpha}\ \underset{3}{\alpha}$ u. s. w. der Gruppe rechts Lothe auf die Tangenten $\omega\psi$ und $\omega\chi$ gezogen, so entstehen einerseits die rechtwinkligen ähnlichen Dreiecke $\alpha o\omega\ \underset{2}{\alpha\xi\omega}\ \underset{4}{\alpha\mu\omega}$, andererseits die gleichfalls ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke $\underset{1}{\alpha\pi\omega}\ \underset{3}{\alpha\nu\omega}$. Da in jenen die Radien $\alpha o\ \underset{2}{\alpha\xi}\ \underset{4}{\alpha\mu}$ u. s. w. und in diesem die Radien $\underset{1}{\alpha\pi}\ \underset{3}{\alpha\nu}$ u. s. w. eine Reihe bilden mit dem Exponenten $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, so muß das auch von den Abständen der Mittelpunkte beider Gruppen von ω gelten, und wie sich leicht ergiebt auch von den parallelen Linien $\underset{1}{\alpha\alpha}\ \underset{23}{\alpha\alpha}$ u. s. w., sowie von den gleichfalls parallelen Linien $\underset{12}{\alpha\alpha}\ \underset{34}{\alpha\alpha}$ u. s. w. Auch die Abstände der Punkte $o\ \xi\ \mu$ u. s. w. und der Punkte $\pi\ \nu$ u s. w. von ω bilden eine geometrische Reihe mit dem Exponenten $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf