Ein sphärisches Analogon zum Lehrsatz des Pythagoras.

Von Oberlehrer Dr. Carl Piel.

Soll der Lehrsatz des Pythagoras:

„In rechtwinkligen Dreiecken ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich den Quadraten über den Katheten." (Euclid El. lib. I, 47).

von der Ebene auf die Kugel übertragen werden, so ist damit wegen des fehlenden Parallelenaxioms notwendigerweise eine „Verzerrung" der Figur verbunden. Die Abhandlung gibt in ihren Resultaten diese Umdeutung an und zeigt, daß der Satz auf der Kugel einer auch in der Ebene gültigen Verallgemeinerung fähig ist, ferner daß trotz der Umdeutung gewisse Beweismethoden der ebenen Geometrie ihre Gültigkeit behalten und demnach auf einer geringeren Anzahl von Voraussetzungen beruhen als andere. Im ganzen werden drei Beweisverfahren geprüft; endlich wird nachgewiesen, daß einer der einfachsten Beweise in der Ebene sich nicht übertragen läßt.

Alle Figuren mit Ausnahme von 4 und 5 sind stereographisch skizziert, ohne genau zu sein. Die Winkel mit 1 Bogen bedeuten immer rechte, die mit 2 und 3 Bogen stumpfe Winkel.[1])

§ 1.

Wir wollen den Begriff eines sphärischen Vierecks mit besonderen Eigenschaften festlegen. Man sieht leicht ein, daß das gleichschenklige Dreieck auf der Kugel dieselben Eigenschaften besitzt, wie in der Ebene: es hat gleiche Winkel an der „Grundlinie", die Winkelhalbierende des Winkels an der „Spitze ist zugleich Mittelsenkrechte zur „Grundlinie" usw. Diese Beziehungen fließen alle aus der Zerlegbarkeit eines gleichschenkligen Dreiecks in zwei symmetrische und darum kongruente rechtwinklige Dreiecke. Ein solches gleichschenkliges Dreieck soll nun an der „Grundlinie" gespiegelt werden; dann entsteht ein Viereck, in welchem zunächst alle Seiten gleich sind und welches daher durch beide Diagonalen in je zwei gleichschenklige Dreiecke zerfällt; außerdem sind die Gegenwinkel paarweise einander gleich und werden von den Diagonalen halbiert. Diese selbst stehen aufeinander senkrecht und halbieren einander. Das entstandene Viereck besitzt also dieselben Eigenschaften wie der Rhombus in der ebenen Geometrie und soll ein „sphärischer Rhombus" heißen.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, daß diese Beziehungen gelten, obwohl die Gegenseiten nicht parallel sind, weil es ja auf der Kugel Parallele nicht gibt; immerhin treffen die Senkrechten, welche vom Schnittpunkt der Diagonalen auf die Gegenseiten gefällt werden, diese in

[1]) Vergl. zur ganzen Arbeit den Artikel des Verfassers: Der Lehrsatz des Pythagoras in der Hyperbolischen Geometrie. Archiv der Math. u. Phys. III. Reihe XXII. Heft 2/3 (1914).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zwei Punkten, welche den größten Abstand von einander haben, wenn derselbe auf „Geraden" gemessen wird, welche die Gegenseiten unter gleichen Winkeln schneiden. An dieser Stelle haben aber zwei größte Kugelkreise die meiste „Aehnlichkeit" mit den Parallelen der Ebene, sodaß z. B. die Längenkreise der Erde in der Nähe des Aequators ohne Fehler als parallel gelten können. Es sei noch bemerkt, daß durch die Seite und einen der Winkel ein sphärischer Rhombus eindeutig bestimmt ist.

Sei nun A B C D in Fig. 1 ganz beliebiger Rhombus; wir zeichnen im Punkte A einen zweiten Rhombus A E F G so an den ersten, daß $\sphericalangle$ E A G den $\sphericalangle$ B A D zu 180^0 ergänzt und daß ferner die Diagonalen A C und A F in einer Geraden liegen, während seine Seite A E beliebig vorgeschrieben sein soll. Wenn man noch F E mit C B und F G mit C D zum Schnitt in H und G bringt und D G sowie B E zieht, so ist $\sphericalangle$ B A E $=$ $\sphericalangle$ D A G $= 90^0$, ferner $\triangle$ A B E $\cong$ $\triangle$ A D G, da sie in zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, $\triangle$ B E H $\cong$ $\triangle$ D G K, da sie in zwei Winkeln und der eingeschlossenen Seite übereinstimmen. In Fig. 2 werden nun dieselben Dreiecke in anderer Weise aneinandergelegt. Wir zeichnen $\triangle$ $\mathfrak{B}\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{H}$ ($\cong$ $\triangle$ B H E) so an $\triangle$ $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{E}$ ($\cong$ A B E), daß der Punkt B beiden gemeinsam ist und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B}\,\mathfrak{H}$ eine Gerade bilden: dann ist $\sphericalangle$ $\mathfrak{E}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{G} = 2\beta$ und $\mathfrak{B}\,\mathfrak{E} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{G}$. In entsprechender Weise liegt zwischen $\triangle$ $\mathfrak{A}'\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{G}$ ($\cong$ $\triangle$ A D G) und $\triangle$ $\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{K}$ ($\cong$ $\triangle$ D K G) der Winkel 2β; auch hier ist $\mathfrak{D}\,\mathfrak{E} = \mathfrak{D}\,\mathfrak{G}$. Da aber $\triangle$ $\mathfrak{B}\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{G}$ $\cong$ $\triangle$ $\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{G}$ ist, so lassen sich diese Dreiecke mit der Seite $\mathfrak{E}\,\mathfrak{G}$ aneinanderlegen, sodaß die bei $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ entstehenden Winkel gleich 2γ sind. Es sind die Dreiecke $\mathfrak{C}\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{K}$, $\mathfrak{C}\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{H}\,\mathfrak{A}'$ einander kongruent, da sie in 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen; daher ist

$$\mathfrak{C}\,\mathfrak{H}\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{K} = \mathrm{A\,G\,A'K}.$$

Subtrahieren wir links $2\triangle$ A B E $+$ $2\triangle$ B E H und rechts die gleiche Summe $2\triangle$ $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{E}$ $+$ $2\triangle$ $\mathfrak{B}\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{H}$, so ergibt sich der Rest

$$\mathbf{ABCD} + \mathbf{AEFG} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}. \quad \text{(I)}$$

$\mathfrak{B}\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}$ ist aber ein Rhombus mit den Winkeln 2β und 2γ, da $\mathfrak{E}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\,\mathfrak{D} = \mathfrak{D}\,\mathfrak{E}$ ist.

Es sind die Seite des Rhombus A B C D und diejenigen des Rhombus A E F G Katheten, endlich diejenigen des Rhombus $\mathfrak{B}\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}$ Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{E}$, sodaß sich die Gleichung auf folgende Weise in Worte kleiden läßt:

> „Zeichnet man über den Katheten eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks beliebige Rhomben mit Winkeln, die sich zu 180^0 ergänzen, so ist die Summe dieser Rhomben gleich einem Rhombus über der Hypotenuse, welcher die übrigen Winkel der beiden ersten Rhomben enthält."

Unsere nächste Untersuchung gilt der Frage, welchem Satz der ebenen Geometrie der eben aufgestellte entspricht. Zu diesem Zwecke erinnern wir uns, daß ein sphärischer Rhombus durch seine Diagonalen in 4 kongruente rechtwinklige Dreiecke zerfällt. Es gelten daher folgende Formeln, welche die Seiten der oben erwähnten Rhomben mit ihren Winkeln verbinden:

$$\cos a = \operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{ctg} \gamma,\ \cos b = \operatorname{ctg} \alpha \,.\, \operatorname{ctg} \beta,\ \cos c = \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \beta.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir untersuchen die Veränderung dieser Formeln, wenn der Radius der Kugel stetig bis ∞ wächst. Sei a die Sehne zum Bogen a usw.; dann ist für $r = \infty$ $\sin a = a = \frac{a}{r}$ und unsere Ausdrücke lassen sich für $r = \infty$

$$\left[1 - \frac{a^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{ctg} \gamma, \quad \left[1 - \frac{b^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \operatorname{ctg} \alpha \,.\, \operatorname{ctg} \beta, \quad \left[1 - \frac{c^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \operatorname{ctg} \gamma \,.\, \operatorname{ctg} \beta.$$

schreiben. Da $r = \infty$ sein soll, so verschwindet unter der Wurzel überall der zweite Term, und die Produkte der Winkelfunktionen werden gleich 1; d. h. $\alpha = \gamma$, $\alpha = 90^0 - \beta$, $\gamma = 90^0 - \beta$ oder die 3 Rhomben stimmen in ihren Winkeln bezüglich überein, sind also ähnlich Damit erhalten wir für die Ebene einen Satz, der in den folgenden XXXI. aus dem VI. Buche der Elemente des Euclid enthalten ist.

„In rechtwinkligen Dreiecken ist die Figur, die über der Hypotenuse beschrieben wird, gleich den Figuren, welche über den Katheten ähnlich und in ähnlicher Lage beschrieben sind".

Euclid beweist diesen Satz nur mit Hülfe der Aehnlichkeitslehre, ohne auf den Lehrsatz des Pythagoras Rücksicht zu nehmen, von dem er eine Verallgemeinerung darstellt Da es auf der Kugel keine „Aehnlichkeit" gibt, so steht es dahin, ob er auf andere Figuren als Rhomben anwendbar ist; indes läßt sich eine Spezialisierung in der Richtung des Lehrsatzes des Pythagoras versuchen. In der ebenen Geometrie wird ein Rhombus zum Quadrat, wenn einer seiner Winkel gleich 90^0 wird; auf der Kugel gibt es rechtwinklige Rhomben, in denen zwei Gegenwinkel gleich 90^0 und die andern beiden größer als 90^0 sind, da ja die Winkelsumme des Vierecks größer als 360^0 sein muß. Nehmen wir nun zunächst an, daß die Kathetenquadrate rechtwinklig seien, so bilden diese rechten die beiden Winkel, welche sich zu 180^0 ergänzen, wir erhalten den Satz:

II a) „Die Summe der rechtwinkligen Kathetenrhomben in rechtwinkligem Dreieck ist gleich dem Rhombus über der Hypotenuse, der die übrigen Winkel der Kathetenrhomben enthält."

An zweiter Stelle wollen wir den Winkel 2β in Fig. 1 zu einem rechten machen; da ein rechtwinkliger Rhombus durch seine Seite allein bestimmt ist, so ist damit über den Winkel 2α entschieden. Folglich ist auch der Rhombus über der Kathete a, der den Winkel $180^0 - 2\alpha$ enthält, festgelegt. Jetzt wird der Rhombus über der Hypotenuse rechtwinklig, und wir können den Satz formulieren:

II b) „Die Differenz des rechtwinkligen Rhombus über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks und des rechtwinkligen Rhombus über einer Kathete ist gleich dem Rhombus über der andern Kathete, der den zweiten Winkel des Hypotenusenrhombus und den Supplementwinkel des zweiten Winkels des Kathetenrhombus enthält."

Es entsprechen also dem einen pythagoreischen Lehrsatze der Ebene zwei Sätze auf der Kugel, wieder ein Beweis, daß die sphärische Geometrie wie übrigens auch die „hyperbolische" an Mannigfaltigkeit die ebene Geometrie übertrifft.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 2.

Wir sind im 1. Abschnitt zu 2 Sätzen gelangt, welche dem Lehrsatze des Pythagoras entsprechen, indem wir einen allgemeineren Satz bewiesen und dann angewandt haben. Wir hätten den angeführten Beweis für beide Sätze gebrauchen können; allerdings ergibt sich der Nachteil, daß wir 2 Beweise zu führen haben. Wir versuchen nun, andere Beweismethoden, welche in der ebenen Geometrie zum pythagoreischen Lehrsatz führen, auf die Kugel zu übertragen.

Soweit es sich um geometrische Beweise des pythagoreischen Satzes in der Ebene handelt, lassen sich dieselben in drei Gruppen einteilen;

A) Beweise, welche auf dem Satze beruhen, daß Parallelogramme und Dreiecke inhaltsgleich sind, wenn sie in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen. Euklid gibt in seinem ersten Buche der Elemente das klassische Beispiel dieser Methode. Sie ist auf der Kugel deshalb unbrauchbar, weil ein so einfacher Zusammenhang zwischen den erwähnten Figuren mit gleicher „Grundlinie" nicht besteht. [1])

B) Additionsbeweise; d. h. solche, bei denen die beiden Kathetenquadrate in eine Anzahl Figuren zerlegt werden, die sich zum Hypotenusenquadrat zusammensetzen lassen.

C) Subtraktionsbeweise. „Der Grundgedanke ist der: Von zwei gleichen Flächen werden flächengleiche Stücke abgezogen derart, daß einmal die beiden Kathetenquadrate, das andere Mal das Hypotenusenquadrat übrig bleiben." (W. Lietzmann: der pythagoreische Lehrsatz. Teubner 1912).

Da die unter B) und C) angeführten Methoden sich auf die Congruenzsätze stützen, so erscheint eine Uebertragung auf die Kugel nicht von Anfang an unmöglich. In der Tat ist der oben in § 1 angeführte Beweis ein Subtraktionsbeweis; von der Art der Gruppe B) werden wir später Beispiele anführen.

Zunächst läßt sich ein allgemeiner Zusammenhang zwischen den Methoden der ebenen und sphärischen Geometrie feststellen. Die unter B) und C) angegebenen Beweise lassen sich so formulieren: alle drei Rhomben werden in eine Anzahl Polygone zerlegt oder als Differenz von Polygonen aufgefaßt. Da jedes Polygon einmal in einem der Kathetenrhomben, das andere Mal im Hypotenusenrhombus vorkommt, so ist die algebraische Summe der Polygone in den Kathetenrhomben gliedweise gleich derjenigen der Polygone des Hypotenusenrhombus.

Wir nehmen nun an, es liege ein derartiger Beweis für die Sätze auf der Kugel vor und machen den Grenzübergang von der Kugel zur Ebene, indem wir, wie vorher, $r = \infty$ werden lassen. Dann werden aus den rechtwinkligen Rhomben Quadrate, während die einzelnen Polygone nach Form und Inhalt bestimmten Grenzwerten zustreben. Weil nur größte Kugelkreise vorkommen, so ist die Möglichkeit ausgeschlossen, daß größte und kleinere Kugelkreise zusammenfallen, dadurch also Stücke der Fläche verschwinden. Man kann den Uebergang auch auffassen, als wenn die nichtrechten Winkel der Rhomben zu 90^0 würden, oder der Satz in der Ebene stellt einen ausgezeichneten Fall desjenigen auf der Kugel dar, in welchem die vier Winkel der Rhomben sämtlich rechte sind. Daher behält ein Beweis, der auf der Kugel einen dem pythagoreischen entsprechenden Satz liefert, auch in der Ebene seine Gültigkeit. Dagegen ist umgekehrt die Methode in der Ebene

[1]) Dem Satz in der Ebene entspricht der sogen. Lexell'sche Satz. Vergl. Nova Acta Petropolitan V, 1 (1781).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nicht ohne weiteres auf die Kugel übertragbar, weil sie nur für den singulären Fall der Ebene gilt, so wenig, wie Beweise der Ebene für ein besonderes Verhältnis der Katheten für den allgemeinen Fall gelten.

Mit Hülfe dieser Betrachtung läßt sich ein wichtiger Lehrsatz über die Additionsbeweise auf die Kugel übertragen, welchen H. Brandes für die Ebene gefunden hat (Dissertation Braunschweig 1908). Dort wird bewiesen, daß der einfachste aller Beweise eine Zerlegung des Hypotenusenquadrates in mindestens 7 Dreiecke verlangt; Beweise, in denen das Hypothenusenquadrat in weniger als 7 Dreiecke zerlegt wird, sind nur für einzelne Fälle möglich, in denen die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks bestimmte einfache Zahlenverhältnisse haben; z. B. genügen im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck 4 Zerlegungsdreiecke. Würde es nun auf der Kugel Additionsbeweise geben, in denen der Hypotenusenrhombus in weniger als 7 Dreiecke zerfällt, so könnte durch Uebergang auch ein solcher für die Ebene gefunden werden. Da er aber in Ebene nicht existiert, so folgt, daß der einfachste Zerlegungsbeweis auf der Kugel wenigstens 7 Dreiecke erfordert. Es fragt sich nun, ob der Beweis, welcher gerade 7 Zerlegungsdreiecke in der Ebene nötig hat, auch auf der Kugel gilt.

In Fig. 3 ist der fragliche Beweis angedeutet; kongruente Dreiecke sind in ihr mit der gleichen Zahl bezeichnet. Er ist zuerst angegeben in einem arabischen Euclidkommentar des Annairizi um 900 n. Chr; dann findet er sich bei Hauff 1803, Göpel 1824 und endlich bei H. Brandes. Er hat übrigens, wie man leicht bei näherem Zusehen bemerkt, eine Verwandschaft mit dem Subtraktionsbeweis, der in § 1 angegeben wurde und der ebenfalls ein hohes Alter haben dürfte.

Bei dem Beweis des Annairizi ist zu bemerken, daß das größere Kathetenquadrat in vier, das kleinere in drei Dreiecke zerlegt wird. Man beginne diese Zerlegung etwa, indem man mit der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks um A einen Kreis beschreibt (Fig. 3). Wollen wir nun diesen Beweis auf die Kugel übertragen, so gibt es verschiedene Möglichkeiten:

a) Die Hypotenuse A B zerlegt den stumpfen Winkel des größeren Kathetenrhombus.

b) Die Hypotenuse A B zerlegt den rechten Winkel des größeren Kathetenrhombus.

Da es sich um 2 Sätze handelt, so ergibt diese Einteilung 4 Fälle.

c) Der größere Rhombus ist im Falle IIb nicht rechtwinklig, sondern besitzt einen spitzen und einen stumpfen Winkel; auch hier liefert die Teilung des einen oder anderen Winkels je eine Möglichkeit.

So sind also 6 verschiedene Lagen von A B zu untersuchen. Wir werden nun den größeren Kathetenrhombus zerschneiden und seine Teile im Hypotenusenrhombus unterbringen. Dann muß der Nachweis geführt werden, daß die drei Teile des andern Kathetenrhombus noch im Rest des Hypotenusenrhombus Platz haben. Wir erledigen 2 Fälle, welche als besonders charakteristisch gelten, während die andern 4 in ähnlicher Weise behandelt werden.

a_1) Von dem Kathetenrhombus wird das rechtwinklige Dreieck 1 abgeschnitten. Es läßt sich zusammen mit dem Viereck 2 in der aus der Figur 4 ersichtlichen Weise in dem Hypotenusenrhombus unterbringen. Das übrigbleibende Dreieck 3 kann nicht wie in der Ebene bei Punkt D angelegt werden, da der Rhombuswinkel D kein rechter ist; daher muß Dreieck 3 beim Punkt G angelegt werden. Es bleibt ein Viereck A D F H übrig, das durch Transversalen in drei Dreiecke zerlegt werden muß.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In dem kleineren Rhombus haben die Hypotenuse und die Diagonale D H, welche größer als die Hypotenuse ist, keinen Platz; sie müssen also zerlegt werden. Nun ist es aber unmöglich, sowohl A D als auch H D zu zerlegen, wenn nur drei Dreiecke entstehen sollen; folglich scheidet H D als zerlegende Gerade aus, vielmehr müsien die in Frage kommenden Schnittlinien von F und H aus gehen. Denken wir uns nun △ D F K sei eines der drei Dreiecke des kleineren Rhombus, beliebig welches. Da der Beweis für alle Fälle gelten soll, so muß er auch stichhaltig sein, wenn der kleinere Rhombus unendlich klein wird. Mit ihm werden die Strecken D F, D K, F K und A H unendlich klein, während A K und F H endlich bleiben. Außer D F K entstehen zwei Dreiecke, die sich nicht in einem unendlich kleinen Rhombus unterbringen lassen, da sie eine endliche Seite haben. Zum selben Ergebnis führt die Einlagerung eines Dreiecks im Punkte A, etwa des △ A H K. Folglich ist es unmöglich, den Beweis auf diese Art zu führen.

a_2) Auch in diesem Falle schneidet man von dem größeren Kathetenrhombus das rechtwinklige Dreieck 1 ab (Fig. 5); es läßt sich mitsamt den andern Stücken 2 und 3 in der in der Figur angegebenen Weise übertragen. Dem Dreieck 3 kann hier dieselbe Lage wie in der Ebene gegeben werden. Da nun aber ∢ D C B größer ist als der stumpfe Winkel im größeren Kathetenrhombus, so wird zwischen den Figuren 1 und 2 bei der Uebertragung der Winkelraum G C H freibleiben. Ferner liegen die Strecken D G und H K nicht in einer Geraden, da sonst von C aus auf die Gerade D K zwei Senkrechte gefällt werden können. Es bleibt also im Hypotenusenrhombus das Siebeneck A E F G C H K nach der Uebertragung des größeren Rhombus übrig. Da dasselbe in mindestens 5 Dreiecke zerlegt werden muß, so ist die Zerlegung in drei Dreiecke unmöglich, mithin der Beweis, der sich auf eine Zerlegung in 7 Dreiecke stützt, ebenfalls unbrauchbar.

Dasselbe Resultat ergibt sich auf nur wenig verschiedene Weise für die andern Fälle; zwar läßt sich der Rest des Hypotenusenrhombus in drei Dreiecke zerlegen, es ist aber nicht möglich, dieselbe alle in dem kleineren Kathetenrhombus unterzubringen, da unter ihnen wenigstens ein Dreieck mit der Hypotenuse als Seite vorkommt, diese sich aber nicht in dem kleineren Rhombus eintragen läßt. Mithin ergibt sich als Resultat der ganzen Erörterung, daß sich der Beweis des Annairizi nicht auf der Kugel führen läßt. Bis jetzt ist kein anderer Beweis bekannt, der eine Zerlegung in 7 Dreiecke verlangt, sodaß die Wahrscheinlichkeit besteht, daß die Zerlegung in nur 7 Dreiecke für die Kugel überhaupt unmöglich ist.

In Fig. 6 ist nun ein Additionsbeweis dargestellt, der zuerst von P. Epstein [Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 37 (1906)] angegeben worden ist. Er läßt sich auf beide Sätze, die dem pythagoreischen auf der Kugel entsprechen, anwenden, in der vorliegenden Figur wird der Satz IIb bewiesen. Die mit gleichen Zahlen bezeichneten Dreiecke sind kongruent, wie sich leicht beweisen läßt. Außerdem ist zu bemerken, daß die Transversale den rechten Winkel bei C in zwei Teile zerlegt, welche bezüglich gleich den halben Winkeln bei C in den beiden Rhomben sind. Für unsere Erörterung aber ist wichtig, daß der Hypotenusenrhombus sich aus 8 Dreiecken aufbauen läßt. Der Beweis wird also unter den oben gemachten Annahmen zur Gruppe der einfachsten Zerlegungsbeweise für die Sätze auf der Kugel gerechnet werden müssen.

Durch die Figuren 7) und 8) soll endlich ein Beweis des Satzes IIa erläutert werden, der m. W. neu ist. Er gilt auch für IIb und beruht auf der Zerlegung eines Kathetenrhombus in nur 8 Dreiecke; es ist aber ein Hülfssatz zuerst zu beweisen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

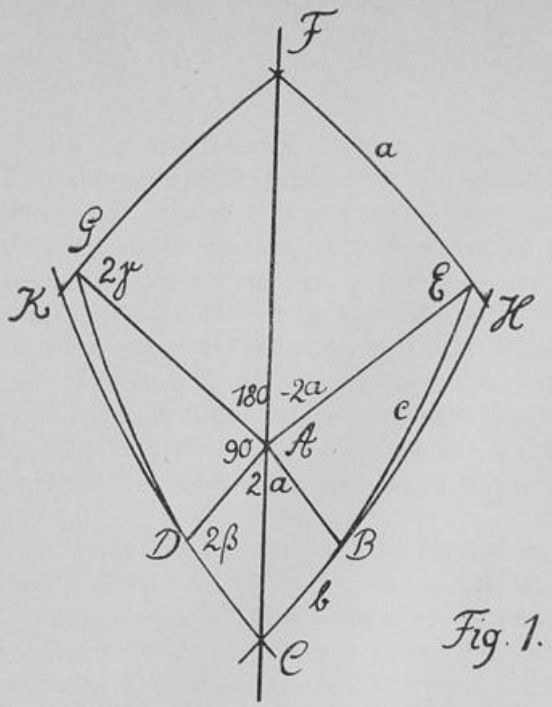

Fig. 1.

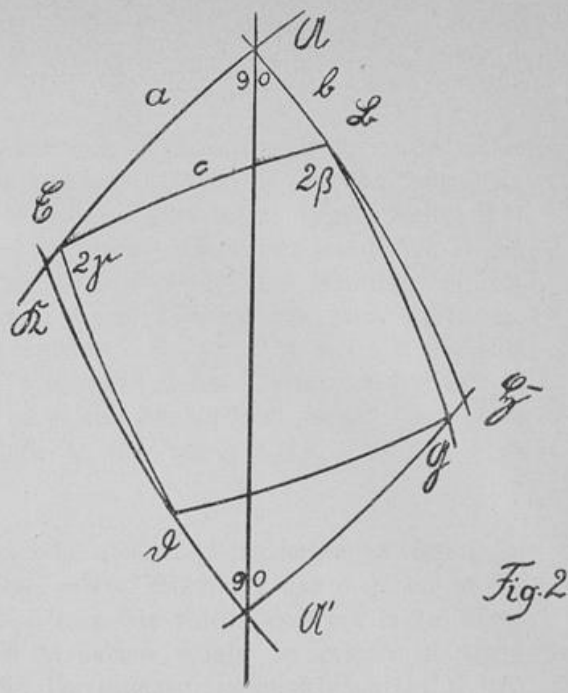

Fig. 2.

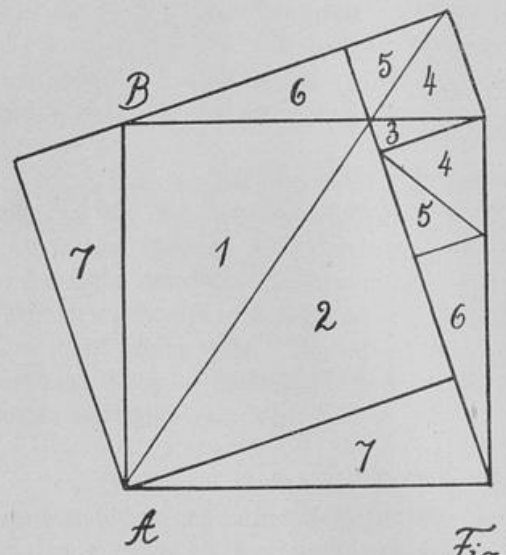

Fig. 3.

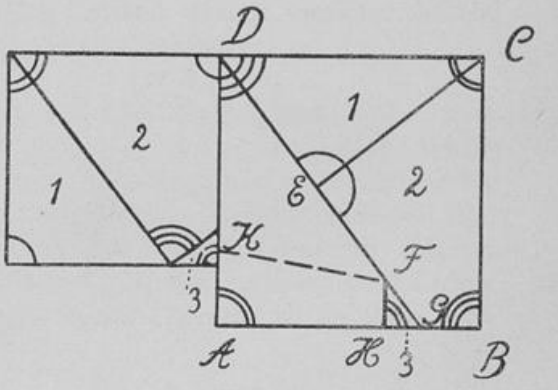

Fig. 4.

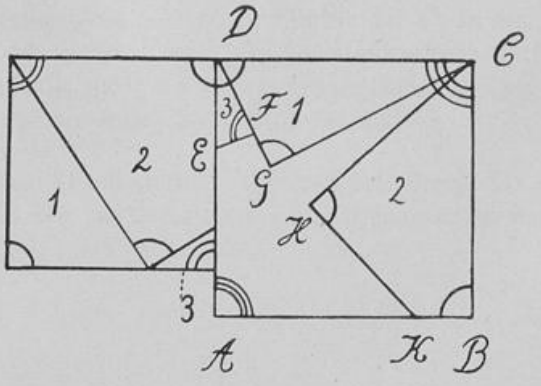

Fig. 5

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

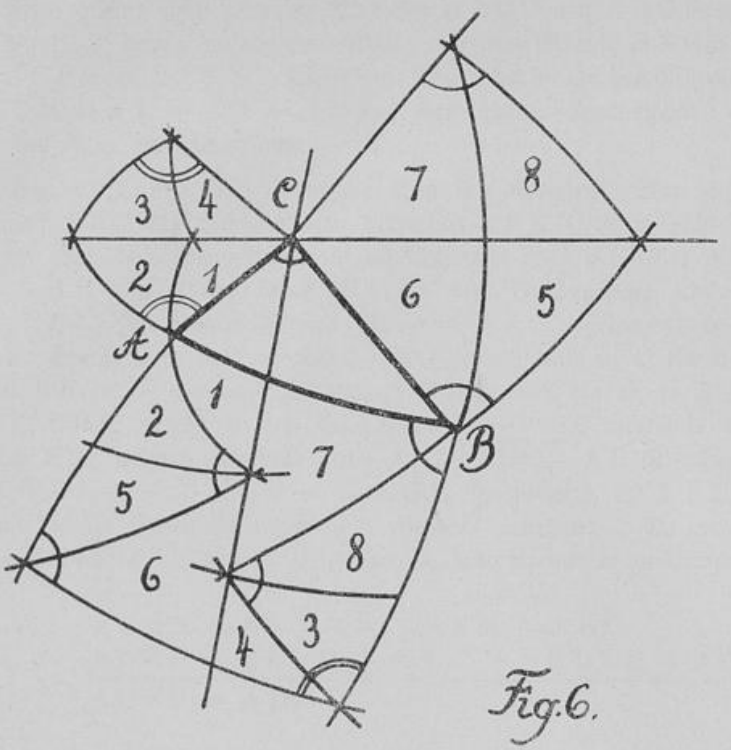

Fig. 6.

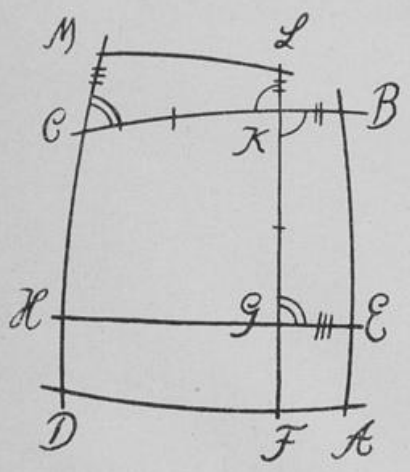

Fig 7.

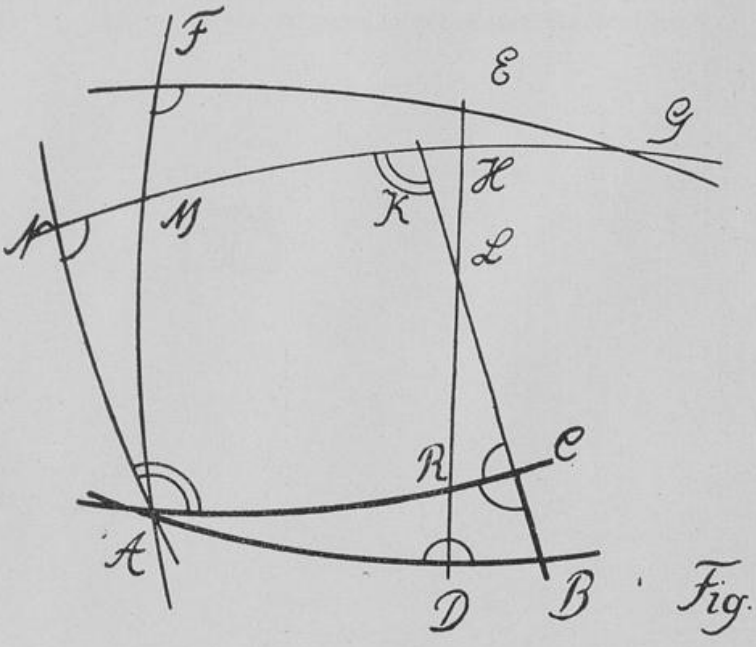

Fig. 8.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In Figur 7 sind zwei sphärische Rhomben ABCD und AEGF mit den gleichen Winkeln, die sie beim Punkte A haben, aufeinander gelegt. Da nun Viereck BKGE = CKLM ist, so ist ABCD — AEFG = DFLM Dieses letzte Viereck hat die gleichen Gegenseiten DF = ML = AD — AF und DM = FL = AD + AF und ebensogleiche Gegenwinkel. Es vertritt also in diesen Eigenschaften das ebene Parallelogramm.

In Fig. 8 ist nun der eigentliche Satz II a bewiesen. Man zeichnet über AC im rechtwinkligen Dreieck ABC den rechtwinkligen Rhombus ACKN, dann beschreibt man mit AB um A den Kreis, der auf NK den Punkt M ausscheidet. $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ ANM. Ferner legen wir $\triangle$ GMF $\cong$ $\triangle$ ABC in M an, sodaß MF in der Verlängerung von AM liegt, und machen FE = AB — BC. Im Punkte E wird sodann $\sphericalangle$ NAC angetragen, dessen freier Schenkel NG in H schneidet. Ebenso wird AD = AB — BC gemacht und in D die Senkrechte errichtet, welche AC in R und CK in L schneidet. Da nun $\triangle$ BDR $\cong$ $\triangle$ BCR, so ist RD = RC und folglich $\triangle$ ADR $\cong$ $\triangle$ CRL. Daher ist LC = AD = AB — BC und KL = AC + CB — AB, also auch gleich EG, welches ebenfalls gleich AC + CB — AB ist. Beachten wir nun noch das $\sphericalangle$ BAC = $\sphericalangle$ RLC = $\sphericalangle$ KLH = $\sphericalangle$ EGH ist, so wird $\triangle$ KLH$_1$ $\cong$ EGH, wenn wir zunächst einmal H$_1$ als Schnittpunkt von DL mit KG annehmen. Da nun aber in Folge dieser Congruenz die Winkel bei H$_1$ und H gleich sind, so fällt H$_1$ mit H zusammen. Wir haben also zum Schlusse:

$$\begin{array}{l} ACKN = ANM + ARLKM + RLC \\ \underline{ADEF = MFEH + HLK + ARLKM + ADR} \\ ACKN = ADEF. \end{array}$$

Nun ist aber ADEF ein Viereck mit den gleichen Gegenseiten AD = FE = AB — BC und AF = DE = AB + BC und rechten Winkeln bei D und F, also gleich der Differenz zweier Rhomben mit gleichen Winkeln, von denen der eine AB zur Seite und den Winkel des andern rechtwinkligen über BC zum Winkel hat. Hiermit ist die Behauptung des Satzes IIa bewiesen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In Figur 7 sind zwei F mit den gleichen Winkeln, die sie beim Punkte A haben, a GE = CKLM ist, so ist ABCD — AEFG = DFL egenseiten DF = ML = AD — AF und DM = FL = A el. Es vertritt also in diesen Eigenschaften das ebene Parallel

In Fig. 8 ist nun d n zeichnet über AC im recht- winkligen Dreieck ABC den re eschreibt man mit AB um A den Kreis, der auf NK den △ ANM. Ferner legen wir △ GMF ≅ △ ABC in M ar von AM liegt, und machen FE = AB — BC. Im Punk , dessen freier Schenkel NG in H schneidet. Ebenso wird A ie Senkrechte errichtet, welche AC in R und CK in L schnei ist RD = RC und folglich △ ADR ≅ △ CRL. Daher L = AC + CB — AB, also auch gleich EG, welches e Beachten wir nun noch das ∢ BAC = ∢ RLC = ∢ K LH₁ ≅ EGH, wenn wir zunächst einmal H_1 als Schnittp nun aber in Folge dieser Congruenz die Winkel bei H_1 ur mmen. Wir haben also zum Schlusse:

ACKN =
ADEF = — ADR
ACKN =

Nun ist aber ADEF AD = FE = AB — BC und AF = DE = AB + B also gleich der Differenz zweier Rhomben mit gleichen Winkeln, den Winkel des andern recht- winkligen über BC zum Winkel Satzes IIa bewiesen.

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
R G B W G K C Y M

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf