Ueber das

Zusammenfallen der beiden gebrochenen Strahlen

in

einaxigen und zweiaxigen Krystallen der Richtung nach.

Ein Beitrag zur theoretischen Optik

von

Carl Cavan.

(Dritter Abschnitt.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dritter Abschnitt*).

Zweiaxige Krystalle.

Hauptschnitt xy.

§ 12. Für den Durchschnitt des Hauptschnitts xy mit der Wellenfläche haben wir (§ 4, Gl. 2) gefunden:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= c^2, \\ a^2x^2 + b^2y^2 &= a^2b^2. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Da nach unserer Annahme $a < b < c$ ist, so wird die Ellipse vom Kreise ganz umschlossen. (S. Fig. 1 u. 2). Denken wir uns nun einen gemeinschaftlichen Radius von Kreis und Ellipse gezogen, welcher mit der + x-Axe den Winkel φ bildet, so sind die Coordinaten des Endpunktes des Ellipsenradius:

$$x' = \frac{ab\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2}}, \quad y' = \frac{ab\sin\varphi}{\sqrt{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2}}.$$

Wir setzen $\sqrt{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2} = w$, wo w als wesentlich positiv anzusehen ist, und erhalten:

$$x' = \frac{ab\cos\varphi}{w}, \quad y' = \frac{ab\sin\varphi}{w}. \quad (2)$$

Die Coordinaten des Endpunktes des Kreisradius sind:

$$x'' = c\cos\varphi, \quad y'' = c\sin\varphi. \quad (3)$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte (x', y') der Ellipse ist demnach:

$$a^2x\cos\varphi + b^2y\sin\varphi = abw;$$

und die Gleichung der Tangente im Punkte (x'', y'') des Kreises ist:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = c.$$

Als Coordinaten des Durchschnitts beider Tangenten findet man:

$$x = \frac{b\,(bc - aw)}{(b^2 - a^2)\cos\varphi}, \quad y = \frac{a\,(bw - ac)}{(b^2 - a^2)\sin\varphi}. \quad (4)$$

*) Abschnitt 1 und 2 stehen in dem Züllichauer Programm von 1865.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieser Durchschnitt soll nun liegen auf dem Durchmesser, der mit der $+$ x-Axe den Winkel λ bildet und dessen Gleichung also ist: $y = x \operatorname{tg} \lambda$; mithin muß sein

$$\frac{a\,(bw - ac)}{(b^2 - a^2)\,\sin\varphi} = \frac{b\,(bc - aw)}{(b^2 - a^2)\,\cos\varphi}\,\operatorname{tg}\lambda,$$

woraus:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{a\,(bw - ac)}{b\,(bc - aw)}\,\operatorname{ctg}\varphi, \qquad (5)$$

$$\text{und:}\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a\,(bw - ac)}{b\,(bc - aw)}\,\operatorname{ctg}\lambda. \qquad (6)$$

Da nun nach dem, was in § 5 festgesetzt ist, λ stets als spitzer Winkel, $\operatorname{ctg}\lambda$ also als positiv anzusehen ist, so hängt das Zeichen des Ausdrucks für $\operatorname{tg}\varphi$ nur ab von dem des Quotienten $\frac{bw - ac}{bc - aw}$. Der größte Werth, den $w = \sqrt{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2}$ erlangen kann, ist b. Für diesen Werth ist der Nenner gleich $b\,(c - a)$, also positiv, da $c > a$; mithin ist der Nenner stets positiv. Was den Zähler betrifft, so sieht man zunächst, daß für den kleinsten Werth a des w sein Werth gleich $a\,(b - c)$, also negativ wird. Soll er nun auch Null oder positiv werden, so muß er gewiß für den größten Werth b des w Null oder positiv werden, d. h. es muß sein $b^2 - ac \geqq 0$. Da das Zeichen dieses Ausdrucks im Allgemeinen unbestimmt ist, so haben wir die drei Fälle zu unterscheiden $b^2 - ac \gtreqless 0$.

I. Fall: $b^2 - ac > 0$.

§ 13. Für $b^2 - ac > 0$ kann, wie aus § 12, Gl. (6) und aus dem folgt, was eben auseinander gesetzt ist, $\operatorname{tg}\varphi$ positive und negative Werthe annehmen, φ kann also in allen vier Quadranten liegen. Der Symmetrie halber reicht es jedoch zunächst hin, nur die Werthe im ersten und vierten Quadranten näher zu betrachten, wobei wir der Bequemlichkeit wegen die Winkel im vierten Quadranten von der $+$ x-Axe nach der $-$ y-Axe rechnen und sie demgemäß als spitze negative Winkel ansehen.

Aus Gl. (5) des § 12 folgt:

Für $\varphi = 0$ wird $\lambda = \pm 90^0$,
für $\varphi = \pm 90^0$ wird $\lambda = 0$.

Sollte λ noch einmal 90^0 werden, so müßte $bc - aw = 0$, also $w = \frac{bc}{a}$ werden, was nicht möglich ist, da $\frac{bc}{a} > b$, während der größte Werth des w gleich b ist. Dagegen wird λ noch einmal Null für $bw - ac = 0$, also $bw = ac$.

Für diesen Werth hat man

$$b^2 w^2 = b^2\,(a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2) = a^2 c^2,$$

$$\text{mithin}\quad \cos\varphi^2 = \frac{a^2c^2 - b^4}{a^2b^2 - b^4}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bezeichnen wir den hieraus sich ergebenden Winkel φ mit φ_0, so ist

$$\cos\varphi_0 = \sqrt{\frac{a^2c^2 - b^4}{a^2b^2 - b^4}}.$$

Der Wurzel ist nur das positive Zeichen gegeben, weil wir zunächst nur die Winkel des ersten und vierten Quadranten betrachten. Daß der Radicandus positiv und ein echter Bruch ist, läßt sich leicht übersehen.

Wir haben demnach folgendes Resultat:

Für $\varphi = 0$ wird $\lambda = 90^0$; für $\varphi = \pm 90^0$ wird $\lambda = 0$;
für $\varphi = \pm \varphi_0$ wird $\lambda = 0$;

d. h. während φ von φ_0 bis 90^0 geht, geht λ von 0 bis zu einem gewissen Werthe Λ des λ und kehrt zu 0 zurück. Es muß also λ für einen der Werthe zwischen φ_0 und 90^0 zum Maximum Λ werden, das wir später bestimmen werden.

Nun läßt sich aber zeigen, das die Werthe des φ von 0 bis φ_0 einen negativen Werth des λ ergeben. Denn bezeichnet φ_1 einen solchen Werth, so ist

$$\cos\varphi_1^2 > \cos\varphi_0^2 \text{ oder } \cos\varphi_1^2 > \frac{a^2c^2 - b^4}{a^2b^2 - b^4}.$$

Demnach ist für diesen Werth φ_1:

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{a^2\cos\varphi_1^2 + b^2\sin\varphi_1^2} \\ &= \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2)\cos\varphi_1^2} \\ &< \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2)\frac{a^2c^2 - b^4}{a^2b^2 - b^4}} \\ &< \sqrt{b^2 + \frac{a^2c^2 - b^4}{b^2}} \\ &< \frac{ac}{b}. \end{aligned}$$

Mithin wird für φ_1 der Ausdruck $bw - ac < 0$, also nach Gl. 5, § 12 $\operatorname{tg}\lambda$ und somit λ selbst negativ.

Für die Werthe des φ dagegen von φ_0 bis 90^0 wird λ positiv, wie durch dieselbe Betrachtung sich zeigen läßt.

Für die negativen Werthe des φ bleibt Alles ungeändert bis auf das Zeichen des Factors $\operatorname{ctg}\varphi$; mithin nimmt λ positive Werthe an für φ von 0 bis $-\varphi_0$, und negative für φ von $-\varphi_0$ bis -90^0.

Demnach haben wir gefunden, daß λ positive Werthe annimmt für φ von 0 bis $-\varphi_0$ und von φ_0 bis 90^0, und daß es in dem Intervalle φ_0 bis 90^0 ein Maximum Λ des λ giebt. Während also φ von φ_0 bis 90^0 geht, geht λ von 0 bis Λ und zu 0 zurück. Mithin gehören in dem Intervalle des λ von 0 bis Λ zu jedem Werthe λ zwei Werthe φ im ersten Quadranten. Ferner geht λ von 0 bis 90^0, während φ von $-\varphi_0$ bis 0 geht. Im Ganzen also ergiebt sich:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für $\lambda < \Lambda$ gehören zu jedem Werthe λ drei Werthe φ, zwei positive und ein negativer, d. h. zwei Werthe im ersten und ein Werth im vierten Quadranten.

Für $\lambda = \Lambda$ giebt es zwei Werthe φ, je einen im ersten und vierten Quadranten.

Für $\lambda > \Lambda$ giebt es nur einen Werth des φ im vierten Quadranten.

§ 14. Machen wir jetzt die Anwendung auf das physikalische Problem, so sind die Werthe φ des zweiten Quadranten ganz zu verwerfen, da er außerhalb des Krystalls liegt. Die Werthe φ des ersten Quadranten, die außerhalb des Krystalls liegen, sind nach dem symmetrischen vom Krystall erfüllten Raum des dritten Quadranten zu übertragen. Dies sind aber die Werthe des φ, die größer als λ sind. Daß es solche giebt, folgt schon daraus, daß, wie wir oben gefunden haben, φ von φ_0 bis 90^0 geht, während λ von 0 bis Λ und zu 0 zurückgeht. Wenn es nun auch solche Werthe φ gäbe, die kleiner sind als die zugehörigen Winkel λ, so müßte zunächst $\lambda = \varphi$ werden können. Dies würde stattfinden, wenn nach Gl. (5) des § 11:

$$\operatorname{tg}\varphi^2 = \operatorname{tg}\lambda^2 = \frac{a\,(bw - ac)}{b\,(bc - aw)}, \text{ oder:}$$

$$abw\,(1 + \operatorname{tg}\varphi^2) = c\,(a^2 + b^2 \operatorname{tg}\varphi^2), \text{ oder:}$$

$$abw = c\,(a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2), \text{ oder:}$$

$$abw = cw^2.$$

Da w nicht gleich Null sein kann, so müßte sein $w = a\,\frac{b}{c}$, was nicht angeht, da $\frac{b}{c}$ ein echter Bruch ist, w also kleiner als a sein würde.

Daraus folgt, daß die Werthe φ des ersten Quadranten stets größer sind als die zugehörigen Werthe des λ. Die Lösungen des ersten Quadranten sind mithin sämmtlich nach dem dritten Quadranten zu übertragen.

Wir haben demnach folgendes Resultat:

Ist $b^2 - ac > 0$, so giebt es für einen Krystallschnitt, der unter dem spitzen Winkel λ gegen die $+$ x-Axe geneigt ist,

wenn $\lambda < \Lambda$, drei zugehörige Richtungen, nach denen keine Zerlegung des gebrochenen Strahls stattfindet, zwei im dritten und eine im vierten Quadranten.

Wenn $\lambda = \Lambda$, so giebt es zwei solche Richtungen, je eine im dritten und vierten Quadranten.

Wenn $\lambda > \Lambda$, so giebt es nur **eine** solche Richtung im vierten Quadranten.

§ 15. Wir bestimmen jetzt das Maximum von λ. Differentiiren wir den Ausdruck (5) im § 12 nach φ und setzen den Differential-Quotienten gleich Null, so ergiebt sich mit Unterdrückung des constanten Factors $\frac{a}{b}$:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$-\frac{bw-ac}{(bc-aw)\sin\varphi^2}+\frac{b\,(bc-aw)+a\,(bw-ac)}{(bc-aw)^2}\operatorname{ctg}\varphi\,\frac{dw}{d\varphi}=0,$$

oder, da $bc-aw$ nicht Null sein kann,

$$-\frac{bw-ac}{\sin\varphi^2}+\frac{c\,(b^2-a^2)\operatorname{ctg}\varphi}{bc-aw}\cdot\frac{dw}{d\varphi}=0.$$

Nun ist $\frac{dw}{d\varphi}=\frac{d\sqrt{a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2}}{d\varphi}=\frac{(b^2-a^2)\sin\varphi\cos\varphi}{w}$; mithin geht die Gl. über in:

$$-(bw-ac)+\frac{c\,(b^2-a^2)^2\sin\varphi^2\cos\varphi^2}{w\,(bc-aw)}=0,$$

oder, wenn wir $\sin\varphi^2=\frac{w^2-a^2}{b^2-a^2}$, $\cos\varphi^2=\frac{b^2-w^2}{b^2-a^2}$ einsetzen:

$$-(bw-ac)+\frac{c\,(w^2-a^2)\,(b^2-w^2)}{w\,(bc-aw)}=0,\text{ oder:}$$

$$cw^4-abw^3-abc^2w+a^2b^2c=0,\text{ oder:}$$

$$(w^3-abc)\,(cw-ab)=0.$$

$cw-ab$ kann nicht Null sein, mithin muß für das Maximum gelten:

$$w^3-abc=0,\text{ also } w=\sqrt[3]{abc}\,.$$

Für den zugehörigen Werth des φ, den wir mit Φ bezeichnen, hat man also:

$$\operatorname{tg}\Phi=\sqrt{\frac{w^2-a^2}{b^2-w^2}}=\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}-a^2}{b^2-\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}}.$$

Mithin erhält man für den Grenzwinkel A nach Gl. (5) des § 12:

$$\operatorname{tg}A=\frac{a\,(b\sqrt[3]{abc}-ac)}{b\,(bc-\sqrt[3]{abc})}\cdot\sqrt{\frac{b^2-\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}-a^2}}.$$

Wir erweitern den ersten Bruch mit $(bc-\varrho\sqrt[3]{abc})\,(bc-\varrho^2\sqrt[3]{abc})$, den Radicandus mit $(\sqrt[3]{a^2b^2c^2}-\varrho a^2)\,(\sqrt[3]{a^2b^2c^2}-\varrho^2a^2)$, wo ϱ und ϱ^2 die beiden imaginären dritten Wurzeln der Einheit sind, und erhalten nach Ausführung der Multiplicationen:

$$\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}\,\frac{c\{(b^2-a^2)\,[bc\sqrt[3]{abc}+a\sqrt[3]{a^2b^2c^2}]+ab^2\,(a^2-c^2)\}}{bc\,(b^2c^2-a^4)}\times$$

$$\sqrt{\frac{a\{(b^2-a^2)\,[bc\sqrt[3]{abc}+a\sqrt[3]{a^2b^2c^2}]+ab^2\,(a^2-c^2)\}}{a^2\,(b^2c^2-a^4)}}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{b}\left\{\frac{(b^2-a^2)\,[bc\sqrt[3]{abc}+a\sqrt[3]{a^2b^2c^2}]+ab^2\,(a^2-c^2)}{b\,(b^2c^2-a^4)}\right\}^3}.\qquad(1)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Heben wir den Bruch durch b^3c^2 und setzen dabei $\frac{a}{b} = e$, $\frac{a}{c} = f$, so ergiebt sich:

$$\operatorname{tg} \Lambda = \sqrt[3]{e \left\{ \frac{(1-e^2)\left[\frac{f^{\frac{2}{3}}}{e^{\frac{1}{3}}} + e^{\frac{1}{3}} f^{\frac{4}{3}}\right] + e\,(f^2-1)}{1-e^2f^2} \right\}}$$

$$= \left\{ \frac{(1-e^2)\, f^{\frac{2}{3}} \left[1 + (ef)^{\frac{2}{3}}\right] + e^{\frac{4}{3}}\,(f^2-1)}{1-e^2f^2} \right\}^{\frac{3}{2}} \qquad (2)$$

Diese Gleichung entspricht der Gleichung (8) des § 7 für das Minimum von λ bei einaxigen Krystallen. Setzen wir in (2) $c = a$, also $f = 1$, so erhalten wir die frühere Gleichung.

Die Gleichung (2) läßt sich umformen in:

$$\operatorname{tg} \Lambda = \left\{ \frac{(f^{\frac{2}{3}} - e^{\frac{4}{3}})\left[1 + (ef)^{\frac{2}{3}} + (ef)^{\frac{4}{3}}\right]}{1-e^2f^2} \right\}^{\frac{3}{2}} \qquad (3)$$

Da $e = \frac{a}{b}$, $f = \frac{a}{c}$ echte Brüche sind, so ist der Nenner $1 - e^2f^2$ positiv. Der Zähler dagegen ist nur positiv, wenn

$$f^{\frac{2}{3}} - e^{\frac{4}{3}} > 0, \text{ also } f > e^2,$$

$$\text{oder: } \frac{a}{c} - \frac{a^2}{c^2} > 0,$$

$$\text{oder: } b^2 > ac.$$

Die Bedingung, daß $\operatorname{tg} \Lambda$ reell wird, fällt, wie es auch natürlich ist, mit der Annahme zusammen, die wir für die von § 13 an geführte Untersuchung gemacht haben.

II. Fall: $b^2 - ac \lesseqgtr 0$.

§ 16. Wenn $b^2 - ac \lesseqgtr 0$, so ist der Ausdruck $bw - ac$, da er für den größten Werth b des $w \leq 0$ ist, stets negativ. Demnach ist der Werth (5) in § 12 für $\operatorname{tg}\varphi$ im allgemeinen negativ, φ kann also nur Werthe im zweiten und vierten Quadranten annehmen. Die zugehörigen Radien im zweiten Quadranten sind aber nur die Verlängerungen der entsprechenden Radien des vierten Quadranten; es ist also nur nöthig, die Lösungen des vierten Quadranten zu suchen. Nehmen wir wie vorher die Winkel des vierten Quadranten als negative spitze Winkel, so sehen wir aus Gl. (5) des § 12:

Für $\varphi = 0$ wird $w = a$ und $\lambda = 90^0$;

für $\varphi = -90^0$ wird $w = b$ und $\lambda = 0$.

λ kann nicht noch einmal 0^0 oder 90^0 werden, wie sich aus Gl. (5), § 12 leicht ableiten läßt. Da ferner der Ausdruck für das Maximum oder Minimum von λ in Gl. (3), § 15 für $b^2 - ac < 0$ imaginär und für $b^2 - ac = 0$ selbst Null wird, so ergiebt sich leicht, daß, während φ von 0^0 bis -90^0 geht, λ von 90^0 zu 0^0 geht, daß also zu einem Werthe φ nur ein Werth λ im vierten Quadranten gehört. Der zweite Quadrant liegt außerhalb des Krystalls. Mithin haben wir folgendes Resultat:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist $b^2 - ac < 0$, so giebt es im Hauptschnitte xy nur **eine** Richtung für jeden Werth des λ, nach welcher der gebrochene Strahl keine Zerlegung erleidet.

§ 17. In derselben Weise wie früher bei den einarigen Krystallen wollen wir auch jetzt die geometrische Anschauung zu Hülfe nehmen, um von den in den vorhergehenden Paragraphen durch Rechnung gewonnenen Resultaten eine deutliche Uebersicht zu bekommen.

Die Gleichung der Curve, in welcher die Durchschnitte der Tangentenpaare an den Endpunkten der gemeinschaftlichen Kreis- und Ellipsen-Durchmesser liegen, erhalten wir durch Elimination von φ und w aus den Gleichungen (4) des § 12:

$$x = \frac{b\,(bc - aw)}{(b^2 - a^2)\,\cos\varphi},\quad y = \frac{a\,(bw - ac)}{(b^2 - a^2)\,\sin\varphi}.$$

Quadriren wir dieselben und setzen ein $\sin\varphi^2 = \frac{w^2 - a^2}{b^2 - a^2}$, $\cos\varphi^2 = \frac{b^2 - w^2}{b^2 - a^2}$, so ergiebt sich:

$$x^2\,(b^2 - a^2)\,(b^2 - w^2) = b^2\,(bc - aw)^2, \text{ und:}$$
$$y^2\,(b^2 - a^2)\,(w^2 - a^2) = a^2\,(bw - ac)^2.$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} w^2\,[a^2b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)] - 2wab^3c + b^2\,[b^2c^2 - x^2\,(b^2 - a^2)] &= 0, \text{ und} \\ w^2\,[a^2b^2 - y^2\,(b^2 - a^2)] - 2wa^3bc + a^2\,[a^2c^2 + y^2\,(b^2 - a^2)] &= 0. \end{aligned}\right\} (1)$$

Hat man nun zwei Gleichungen zweiten Grades:

$$\left.\begin{aligned} w^2 + lw + m &= 0, \\ w^2 + l'w + m' &= 0, \end{aligned}\right\} 2)$$

so erhält man durch die Elimination von w:

$$(lm' - l'm)\,(l - l') + (m - m')^2 = 0.$$

Hierin ist nun zu setzen:

$$l = \frac{-2ab^3c}{a^2b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)},\quad m = b^2\,\frac{b^2c^2 - x^2\,(b^2 - a^2)}{a^2b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)};$$

$$l' = \frac{-2a^3bc}{a^2b^2 - y^2\,(b^2 - a^2)},\quad m' = a^2\,\frac{a^2c^2 + y^2\,(b^2 - a^2)}{a^2b^2 - y^2\,(b^2 - a^2)}.$$

Mithin erhalten wir als Gleichung der gesuchten Curve:

$$0 = \left\{\begin{aligned} &\left\{\frac{-2a^3b^3c\,[a^2c^2 + y^2\,(b^2 - a^2)]}{[a^2b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)]\,[a^2b^2 - y^2\,(b^2 - a^2)]} + \frac{2a^3b^3c\,[b^2c^2 - x^2\,(b^2 - a^2)]}{[a^2b^2 - y^2\,(b^2 - a^2)]\,[a^2b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)]}\right\} \\ &\times\left[\frac{-2ab^3c}{a^2b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)} + \frac{2a^3bc}{a^2b^2 - y^2\,(b^2 - a^2)}\right] + \left[b^2\,\frac{b^2c^2 - x^2\,(b^2 - a^2)}{a^2b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)} - a^2\,\frac{a^2c^2 + y^2\,(b^2 - a^2)}{a^2b^2 - y^2\,(b^2 - a^2)}\right]^2 \end{aligned}\right.$$

Schaffen wir die Nenner weg und sondern im ersten Gliede den Factor $4a^4b^4c^2$ aus, so folgt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\left.\begin{array}{l}4a^4b^4c^2[-a^2c^2+b^2c^2-y^2(b^2-a^2)-x^2(b^2-a^2)][-a^2b^4+a^4b^2+b^2y^2(b^2-a^2)+a^2x^2(b^2-a^2)]\\ +\{b^2[b^2c^2-x^2(b^2-a^2)][a^2b^2-y^2(b^2-a^2)]-a^2[a^2b^2+x^2(b^2-a^2)][a^2c^2+y^2(b^2-a^2)]\}^2\end{array}\right\}=0,$$

oder nach einigen Umformungen:

$$\left.\begin{array}{l}[x^2y^2(b^2-a^2)^2-a^2x^2(b^4+a^2c^2)-b^2y^2(a^4+b^2c^2)+a^2b^2c^2(b^2+a^2)]^2\\ +4a^4b^4c^2\,(c^2-x^2-y^2)\,(a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2)\end{array}\right\}=0. \qquad (3)$$

Es ist zu bemerken, daß diese Curve auch für die Durchschnitte derjenigen Tangentenpaare gilt, welche an entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Kreis- und Ellipsen-Durchmesser gezogen werden. Für ein solches Tangentenpaar nämlich sind die Coordinaten x', y' und x'', y'' in Gl. (4), § 12 mit einander entgegengesetzten Zeichen zu versehen, etwa:

$$x' = -\frac{ab\cos\varphi}{w},\ y' = -\frac{ab\sin\varphi}{w};$$

$$x'' = c\cos\varphi,\ \ y'' = c\sin\varphi.$$

Diese Werthe unterscheiden sich von den früheren nur durch das Vorzeichen von w, demnach werden die Coordinaten des Durchschnitts der Tangenten in den Punkten (x', y') und (x'', y'') lauten nach Gl. (4), § 12:

$$x = \frac{b\,(bc+aw)}{(b^2-a^2)\cos\varphi},\ y = \frac{a\,(-bw-ac)}{(b^2-a^2)\sin\varphi}. \qquad (4)$$

Daß man nun durch Elimination von w und φ aus diesen beiden Gleichungen dieselbe Gleichung (3) erhält, läßt sich leicht übersehen.

§ 18. Wie man sieht ist die Curve vom achten Grade. Sie hat natürlicherweise einen Mittelpunkt, der mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte von Kreis und Ellipse zusammenfällt.

Auf eine genauere Discussion der Curve können wir hier nicht eingehen, nur die Durchschnitte mit den Coordinatenaxen und die Asymptoten wollen wir bestimmen.

Setzen wir in der Gl. der Curve $y = 0$, so ergiebt sich nach einigen leichten Umformungen für den Durchschnitt mit der x-Axe:

$$x^4\,(b^4-a^2c^2)^2 - 2x^2b^2c^2\,(b^2-a^2)\,(b^4-a^2c^2) + b^4c^4\,(b^2-a^2)^2 = 0, \text{ oder:}$$

$$\{x^2\,(b^4-a^2c^2) - b^2c^2\,(b^2-a^2)\}^2 = 0, \text{ also:}$$

$$x = \pm\, bc\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^4-a^2c^2}} \qquad (1)$$

Da b^2-a^2 positiv ist, so wird der Durchschnitt nur reell sein für $b^2-ac > 0$; für $b^2-ac = 0$ liegt er im Unendlichen.

Vertauschen wir in dem Werthe (1) für x a mit b, so erhalten wir für den Durchschnitt der Curve mit der y-Axe:

$$y = \pm\, ac\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2c^2-a^4}} \qquad (2)$$

Dieser Werth ist allerdings reell, schreiben wir ihn jedoch $y = c\sqrt{\frac{a^2b^2-a^4}{b^2c^2-a^4}}$, so ist,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

da $a^2b^2 - a^4 < b^2c^2 - a^4$, der Werth der Wurzel ein echter Bruch, der Werth von y mithin kleiner als c. Ein Punkt ($x = 0$, $y < c$) kann jedoch keinem reellen Curvenzweige angehören, da er innerhalb des Kreises mit dem Radius c fällt. Mithin schneidet die Curve die y-Axe nicht.

Um die Asymptoten zu bestimmen, welche nicht der y-Axe parallel sind, nehmen wir als Gleichung derselben an:

$$y = lx + m.$$

Setzen wir $y = lx$ in die Gleichung (3), § 17 der Curve ein, so ergiebt sich, wenn wir mit x^8 dividiren, $l = 0$ für $x = \pm\infty$. Setzen wir jetzt ein $y = m$, so erhalten wir nach der Division durch x^4 für $x = \pm\infty$ leicht:

$$\{-a^2(b^4 + a^2c^2) + m^2(b^2 - a^2)^2\}^2 - 4a^6b^4c^2 = 0, \text{ also:}$$

$$m^2(b^2 - a^2)^2 = a^2(b^4 + a^2c^2) \pm 2a^3b^2c$$

$$= a^2(b^2 \pm ac)^2, \text{ also:}$$

$$m = \pm a\,\frac{b^2 \pm ac}{b^2 - a^2}.$$

Die Curve hat demnach vier zur x-Axe parallele Asymptoten, die gegeben sind durch die Gleichung:

$$y = \pm a\,\frac{b^2 \pm ac}{b^2 - a^2}. \qquad (3)$$

Ist $b^2 - ac = 0$, so wird die x-Axe selbst Asymptote.

Nehmen wir als Gleichung der nicht zur x-Axe parallelen Asymptoten an:

$$x = ly + m,$$

so setzen wir in die Gleichung (3), § 17 der Curve ein $x = ly$ und erhalten $l = o$ für $y = \pm\infty$. Setzen wir jetzt ein $x = m$ und dividiren mit y^4, so ergiebt sich für $y = \pm\infty$:

$$\{-b^2(a^4 + b^2c^2) + m^2(b^2 - a^2)^2\}^2 - 4a^4b^6c^2 = 0, \text{ also:}$$

$$m^2(b^2 - a^2)^2 = b^2(a^4 + b^2c^2) \pm 2a^2b^3c$$

$$= b^2(a^2 \pm bc)^2, \text{ also:}$$

$$m = \pm b\,\frac{a^2 \pm bc}{b^2 - a^2}.$$

Mithin hat die Curve vier zur y-Axe parallele Asymptoten, die bestimmt sind durch die Gleichung:

$$x = \pm b\,\frac{a^2 \pm bc}{b^2 - a^2}. \qquad (4)$$

§ 18. Die Figuren 1. u. 2. stellen die Curven dar für $b^2 - ac > 0$ und $b^2 - ac < 0$; in 1. ist $a = 5$, $b = 10$, $c = 12$; in 2. ist $a = 4$, $b = 7$, $c = 18$. Für $b^2 - ac = 0$ ist keine Curve gezeichnet; sie stimmt in der Gestalt mit Fig. 2. überein, doch wird die x-Axe selbst Asymptote, wie oben gefunden ist. Die Curven bestehen aus acht unendlichen Zweigen, es sind aber nur diejenigen vier gezeichnet, welche auf der positiven Seite der x-Axe liegen. Die inneren Zweige sind der Ort der Durchschnitte der Tangenten an derselben Seite der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gemeinschaftlichen Durchmesser, und zwar der Zweig **I.** für den ersten Quadranten und der Zweig **IV.** für den vierten Quadranten. Die äußeren Zweige sind der Ort der Durchschnitte der Tangenten an entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Durchmesser, und zwar der Zweig (E_2, K_4) für die Durchschnitte der Ellipsentangenten des zweiten und der Kreistangenten des vierten Quadranten u. s. w. Es läßt sich leicht bestimmen, welchen Zweigen die durch die Gleichungen (3) und (4) des vorigen Paragraphen bestimmten Asymptoten angehören. Für die Coordinaten der inneren Curvenzweige haben wir § 12, Gl. 4 gefunden:

$$x = \frac{b\,(bc - aw)}{(b^2 - a^2)\cos\varphi},\quad y = \frac{a\,(bw - ac)}{(b^2 - a^2)\sin\varphi}.$$

Setzen wir hierin $\varphi = 0$, so folgt, da $w = a$ wird:

$$x = \frac{b\,(bc - a^2)}{b^2 - a^2},\quad y = \infty$$

Setzen wir $\varphi = 90^0$, so wird $w = b$ und:

$$x = \infty,\quad y = \frac{a\,(b^2 - ac)}{b^2 - a^2}.$$

Die Gleichungen $x = \pm b\,\frac{a^2 - bc}{b^2 - a^2}$ u. $y = \pm a\,\frac{b^2 - ac}{b^2 - a^2}$ geben also die vier Asymptoten der inneren Zweige. Ganz ebenso folgt aus den Gl. (4) des § 17, daß die Gleichungen $x = \pm b\,\frac{a^2 + bc}{b^2 - a^2}$ und $y = \pm a\,\frac{b^2 + ac}{b^2 - a^2}$ die Asymptoten die äußeren Zweige darstellen.

Ueber die Lage der Asymptoten wollen wir noch einige nähere Bestimmungen machen.

a. Die Asymptoten der inneren Zweige parellel der x-Axe sind gegeben durch: $y = \pm a\,\frac{b^2 - ac}{b^2 - a^2}$. Ist nun $b^2 - ac > 0$, so ist die absolute Entfernung derselben von der x-Axe $a\,\frac{b^2 - ac}{b^2 - a^2}$. Da $a - a\,\frac{b^2 - ac}{b^2 - a^2} = a^2\,\frac{c - a}{b^2 - a^2}$ jedenfalls positiv ist, so schneiden die Asymptoten die y-Axe innerhalb der Ellipse.

Ist dagegen $b^2 - ac < 0$, so ist die Entfernung der Asymptoten von der x-Axe $a\,\frac{ac - b^2}{b^2 - a^2}$. Es ist nun $a - a\,\frac{ac - b^2}{b^2 - a^2} = a\,\frac{2b^2 - a\,(a + c)}{b^2 - a^2}$. Das Zeichen dieses Ausdrucks ist im allgemeinen unbestimmt.

Ist also $2b^2 > a\,(a + c)$, so durchschneidet die Asymptote die Ellipse;
ist $2b^2 = a\,(a + c)$, so berührt die Asymptote die Ellipse;
ist $2b^2 < a\,(a + c)$, so liegt die Asymptote außerhalb der Ellipse.

In unserer Fig. 2. ist $a = 4$, $b = 7$, $c = 18$, also $2b^2 > a\,(a + c)$, die Asymptote schneidet also die Ellipse.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ferner ist $c - a \frac{ac - b^2}{b^2 - a^2} = \frac{b^2 (c + a) - 2a^2c}{b^2 - a^2}$. Je nachdem also $\frac{c + a}{c} \gtreqless 2 \frac{a^2}{b^2}$ ist, schneiden die Asymptoten den Kreis, berühren ihn, liegen außerhalb desselben. Daß diese Bedingungen mit den vorigen eng zusammenhängen, bedarf kaum der Erwähnung.

b. Die Asymptoten der inneren Zweige parallel der y-Axe sind: $x = \pm b \frac{a^2 - bc}{b^2 - a^2}$, ihre absolute Entfernung von der y-Axe ist $b \frac{bc - a^2}{b^2 - a^2}$. Da $c - b \frac{bc - a^2}{b^2 - a^2} = \frac{a^2 (b - c)}{b^2 - a^2}$ jedenfalls negativ ist, so liegen die Asymptoten stets außerhalb des Kreises.

c. Die Asymptoten der äußeren Zweige parallel der x-Axe sind bestimmt durch: $y = \pm a \frac{b^2 + ac}{b^2 - a^2}$. Da $c - a \frac{b^2 + ac}{b^2 - a^2} = \frac{b^2 (c - a)}{b^2 - a^2}$ positiv ist, und da $a - a \frac{b^2 + ac}{b^2 - a^2} = - a^2 \frac{c + a}{b^2 - a^2}$ negativ ist, so schneiden die Asymptoten die y-Axe zwischen Kreis und Ellipse.

d. Die Asymptoten der äußeren Zweige parallel der y-Axe werden gegeben durch: $x = \pm b \frac{a^2 + bc}{b^2 - a^2}$. Es ist $c - b \frac{a^2 + bc}{b^2 - a^2} = - a^2 \frac{b + c}{b^2 - a^2}$ negativ, mithin liegen die Asymptoten stets außerhalb des Kreises.

Die in den Figuren leicht aufzufindenden Asymptoten sind nicht erst mit besonderen Bezeichnungen versehen. In Uebereinstimmung mit § 18 schneidet die Curve (Fig. 1) die x-Axe, und zwar ist der Durchschnitt für die oben angegebenen Zahlenwerthe $x = \pm 12{,}99 \ldots$. Die Asymptoten der inneren Zweige sind: $x = \pm 12\frac{2}{3}$ und $y = \pm 2\frac{2}{3}$; die der äußeren Zweige: $x = \pm 19\frac{1}{3}$ und $y = \pm 10\frac{2}{3}$. In Fig. 2. trifft die x-Axe die Curve nicht; für die oben angegebenen Zahlenwerthe sind die Asymptoten der inneren Zweige: $x = \pm 23\frac{1}{3}$ und $y = \pm 2\frac{26}{33}$ (2,8); die der äußeren Zweige: $x = \pm 30\frac{4}{33}$ (30,1) und $y = \pm 14\frac{2}{3}$.

§ 19. Ziehen wir nun in Fig. 1 einen unter dem Winkel λ gegen die x-Axe geneigten Durchmesser, welcher die Curve in einer Anzahl von Punkten trifft, so liegen die Berührungspunkte des von einem jeden Durchschnittspunkte an Kreis und Ellipse gezogenen Tangentenpaares auf einem zweiten Durchmesser, welcher unter dem Winkel φ gegen die x-Axe geneigt ist; und zwar sind die Tangenten nach den Quadranten zu ziehen, wie es die den einzelnen Curvenzweigen zugesetzten Bezeichnungen angeben. Lassen wir die für das physikalische Problem nicht brauchbaren Durchschnitte mit den äußeren Curvenzweigen unberücksichtigt, so sehen wir zunächst, daß für $\lambda = 0$ sich außer den in unendlicher Entfernung liegenden Durchschnitten, als Durchschnitt der Doppelpunkt (1, IV.) ergiebt. Die beiden von diesem Punkte an Kreis und Ellipse gezogenen Tangentenpaare bestimmen durch ihre Berührungspunkte zwei Radien, die unter den in § 13 mit $+ \varphi_0$ und $- \varphi_0$ bezeichneten Winkeln gegen die x-Axe geneigt sind. Lassen wir λ wachsen, so ergeben sich zwei Durchschnitte mit I. und ein

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durchschnitt mit **IV.**, also drei zugehörige Werthe φ, von denen der eine im vierten Quadranten, die beiden andern im ersten Quadranten liegen. Berührt endlich der Durchmesser den Zweig **I.**, ist also $\lambda = \Lambda$, so ergeben sich zwei Durchschnitte und zwei zugehörige Werthe φ, je einer im ersten und vierten Quadranten. Wird $\lambda > \Lambda$, so schneidet der Durchmesser nur den Curvenzweig **IV.** in einem Punkte, es ergiebt sich also nur ein Werth φ im vierten Quadranten. Daß die Werthe φ des ersten Quadranten Radien außerhalb des Krystalls liefern und daß demnach die zugehörigen Radien des dritten Quadranten für das physikalische Problem zu wählen sind, ist ersichtlich. Die Uebereinstimmung der durch die geometrische Anschauung gewonnenen Resultate mit der in § 14 gefundenen bedarf keiner weiteren Erläuterung, sowie daß die (in der Figur nicht gezeichneten) Curvenzweige **II.** und **III.** der Symmetrie halber dieselben Resultate ergeben.

Denken wir uns in Fig. 2 irgend einen Durchmesser des ersten Quadranten unter dem Winkel λ gezogen, so trifft derselbe nur den Curvenzweig **IV.** in einem Punkte; es ergiebt sich also nur ein zugehöriger Winkel φ des vierten Quadranten in Uebereinstimmung mit § 14.

§ 20. Es bleibt noch übrig, die Gleichung aufzustellen zur Bestimmung der einem Werthe λ entsprechenden Werthe φ. Wir haben § 12, Gl. (5) gefunden:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{a\,(bw - ac)}{b\,(bc - aw)}\operatorname{ctg}\varphi.$$

Daraus folgt:

$$c^2\,(b^2\operatorname{tg}\lambda + a^2\operatorname{ctg}\varphi)^2 = a^2b^2w^2\,(\operatorname{tg}\lambda + \operatorname{ctg}\varphi)^2.$$

Aus $w = \sqrt{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2}$ folgt: $w^2 = \dfrac{b^2 + a^2\operatorname{ctg}\varphi^2}{1 + \operatorname{ctg}\varphi^2}$. Setzen wir diesen Werth ein, so ergiebt sich:

$$c^2\,(b^2\operatorname{tg}\lambda + a^2\operatorname{ctg}\varphi)^2\,(1 + \operatorname{ctg}\varphi^2) = a^2b^2\,(\operatorname{tg}\lambda + \operatorname{ctg}\varphi)^2\,(b^2 + a^2\operatorname{ctg}\varphi^2).$$

Setzen wir wie früher § 15 $\dfrac{a}{b} = e$, $\dfrac{a}{c} = f$, so erhalten wir nach der Division durch b^4c^2:

$$(\operatorname{tg}\lambda + e^2\operatorname{ctg}\varphi)^2\,(1 + \operatorname{ctg}\varphi^2) = f^2\,(\operatorname{tg}\lambda + \operatorname{ctg}\varphi)^2\,(1 + e^2\operatorname{ctg}\varphi^2), \text{ oder:}$$

$$(1)\quad \operatorname{ctg}\varphi^4.\,e^2\,(e^2 - f^2) + 2\operatorname{ctg}\varphi^3.\,e^2\operatorname{tg}\lambda\,(1 - f^2) + \operatorname{ctg}\varphi^2\,[e^4 - f^2 + \operatorname{tg}\lambda^2\,(1 - e^2f^2)]$$
$$+ 2\operatorname{ctg}\varphi.\,\operatorname{tg}\lambda\,(e^2 - f^2) + \operatorname{tg}\lambda^2\,(1 - f^2) = 0.$$

Daß diese Gleichung zugleich diejenigen Werthe φ liefert, welche nur geometrische Bedeutung haben, läßt sich leicht erweisen, wie es in § 17 schon für die Curve dargethan ist.

Die directe Discussion der biquadratischen Gleichung führt zu weitläufiger Rechnung, die ich allerdings bis zu einem gewissen Punkte durchgeführt habe, aber hier anzuführen für überflüssig halte, da sich aus der geometrischen Anschauung leicht über die Beschaffenheit der Wurzeln urtheilen läßt.

Nehmen wir zunächst an $b^2 - ac > 0$ oder $f - e^2 > 0$, so denken wir uns in Fig. 1 unter dem Winkel λ einen Durchmesser gezogen, dessen Durchschnitte mit der Curve auf die bekannte Weise die zugehörigen Winkel φ, also die Anzahl der reellen Wurzeln bestimmen. Daß wir auch hier nur die Durchschnitte mit den im ersten Quadranten liegenden Curvenästen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zu berücksichtigen haben, folgt daraus, daß die Durchschnitte mit den im entgegengesetzten Quadranten liegenden Curvenzweigen Winkel φ liefern, deren Cotangenten mit denen der Winkel φ aus den ersten Durchschnitten übereinstimmen. Es ergiebt sich nun leicht:

α. Für $\lambda < \Lambda$ trifft der unter dem Winkel λ gezogene Durchmesser den Curvenzweig **IV.** in einem, den Zweig **I.** in zwei und den Zweig (E_2, K_4) in einem Punkte. Die Gleichung (1) hat mithin vier reelle Wurzeln, zwei positive und zwei negative.

β. Für $\lambda = \Lambda$ trifft der Durchmesser die Curvenzweige **IV.** und (E_2, K_4) in je einem Punkte und berührt den Zweig **I.** Die Gleichung (1) hat vier reelle Wurzeln, zwei positive und zwei negative; die beiden positiven sind jedoch gleich groß.

γ. Für $\lambda > \Lambda$ trifft der Durchmesser nur die Curvenzweige **IV.** und (E_2, K_4) in je einem Punkte. Die Gleichung (1) hat blos zwei reelle negative Wurzeln.

Daß einige Wurzeln auch unendlich werden können, bedarf nur der Andeutung.

Hauptschnitt yz.

§ 21. Für den Durchschnitt des Hauptschnitts yz mit der Wellenfläche haben wir § 4, Gl. (4) gefunden:

$$b^2y^2 + c^2z^2 = b^2c^2$$
$$y^2 + z^2 = a^2.$$

Da $a < b < c$, so wird der Kreis von der Ellipse ganz umschlossen. S. Fig. 3 und 4.

Die hierher gehörigen Gleichungen leiten wir am kürzesten aus denen für den Hauptschnitt xy ab durch folgende Buchstabenvertauschung:

x in y, y in z, a in b, b in c, c in a.

Aus den Gleichungen (5) und (6) des § 12 erhält man demnach:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{b\,(cw - ab)}{c\,(ac - bw)}\operatorname{ctg}\varphi, \qquad (1)$$

$$\text{und: } \operatorname{tg}\varphi = \frac{b\,(cw - ab)}{c\,(ac - bw)}\operatorname{ctg}\lambda, \qquad (2)$$

worin $w = \sqrt{b^2\cos\varphi^2 + c^2\sin\varphi^2}$ ist.

Da nach den in § 5 gemachten Bestimmungen λ stets als spitzer Winkel anzusehen ist, so hängt das Zeichen des Ausdrucks für $\operatorname{tg}\varphi$ nur ab von dem des Quotienten $\frac{cw - ab}{ac - bw}$. Für den kleinsten Werth b des w wird der Zähler gleich $b\,(c - a)$, also positiv; er bleibt mithin stets positiv. Für den größten Werth c des w wird der Nenner gleich $c\,(a - b)$, also

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

negativ. Für den kleinsten Werth b des w wird der Nenner gleich $ac - b^2$. Das Vorzeichen dieses Ausdruckes ist unbestimmt. Wir werden also die drei Fälle unterscheiden $ac - b^2 \gtreqless 0$.

I. Fall: $ac - b^2 > 0$ oder: $b^2 - ac < 0$.

§ 22. Für $b^2 - ac < 0$ kann der Werth für $\operatorname{tg}\varphi$ positiv und negativ werden, φ also in allen Quadranten liegen. Es reicht jedoch (gerade wie früher § 13) hin, zunächst die Werthe φ in zwei anstoßenden Quadranten zu berücksichtigen, etwa die des ersten und vierten, wobei wir der Bequemlichkeit halber die Winkel des vierten Quadranten als negative spitze Winkel ansehen.

Aus den Gleichungen (1) und (3) in § 18 folgt:

$$\text{für } \varphi = 0^0 \text{ wird } w = b \text{ und } \lambda = 90^0,$$
$$\text{für } \varphi = \pm 90^0 \text{ wird } w = c \text{ und } \lambda = 0^0.$$

λ kann nicht noch einmal Null werden, weil $cw - ab$ nicht Null sein kann. Dagegen wird λ noch einmal gleich 90^0 für $ac - bw = 0$, also für $w = \frac{ac}{b}$.

Aus $w^2 = b^2 \cos\varphi^2 + c^2 \sin\varphi^2$ folgt:

$$\cos\varphi^2 = \frac{c^2 - w^2}{c^2 - b^2},$$

also wird $\lambda = 90^0$ für $\cos\varphi^2 = \dfrac{c^2 - \dfrac{a^2c^2}{b^2}}{c^2 - b^2}$

$$= \frac{b^2c^2 - a^2c^2}{b^2c^2 - b^4}.$$

Nennen wir den Winkel φ, für welchen λ noch einmal 90^0 wird, φ_0, so ist

$$\cos\varphi_0 = \sqrt{\frac{b^2c^2 - a^2c^2}{b^2c^2 - b^4}},$$

wobei wir aus demselben Grunde wie § 13 der Wurzel nur das positive Zeichen gegeben haben. Demnach haben wir:

$$\text{für } \varphi = 0^0 \text{ wird } \lambda = 90^0,$$
$$\text{für } \varphi = \pm \varphi_0 \text{ wird } \lambda = 90^0,$$
$$\text{für } \varphi = \pm 90^0 \text{ wird } \lambda = 0^0.$$

Nun ergeben aber die Werthe des φ von $+\varphi_0$ bis $+90^0$ negative Werthe des λ. Denn bezeichnet φ_1 einen zwischen φ_0 und 90^0 liegenden Winkel, so ist:

$$\cos\varphi_1^2 < \cos\varphi_0^2$$
$$< \frac{b^2c^2 - a^2c^2}{b^2c^2 - b^4}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für den φ_1 entsprechenden Werth des w hat man also:

$$w_1 = \sqrt{b^2 \cos \varphi_1^2 + c^2 \sin \varphi_1^2}$$
$$= \sqrt{c^2 - (c^2 - b^2) \cos \varphi_1^2}$$
$$> \sqrt{c^2 - (c^2 - b^2) \frac{b^2c^2 - a^2c^2}{b^2c^2 - b^4}}$$
$$> \sqrt{c^2 - \frac{b^2c^2 - a^2c^2}{b^2}}$$
$$> \frac{ac}{b}.$$

Demnach wird der Nenner des Werthes (1), § 22 für $\operatorname{tg} \lambda$

$$ac - bw_1 < ac - ac$$
$$< 0,$$

während die übrigen Factoren positiv sind; mithin wird λ für die Werthe des φ zwischen $+ \varphi_0$ und $+ 90^0$ negativ. Dagegen ergeben die Werthe des φ von 0^0 bis $+ \varphi_0$ positive Werthe λ. Anderseits folgt, daß die Werthe des φ von 0^0 bis $- \varphi_0$ negative und die Werthe von $- \varphi_0$ bis $- 90^0$ positive Werthe λ ergeben. λ wird also positiv für die Werthe des φ von 0^0 bis $+ \varphi_0$ und von $- \varphi_0$ bis $- 90^0$. Da außerdem, wie schon früher erwähnt, $\lambda = 90^0$ für $\varphi = 0^0$, so ist ersichtlich, daß, während φ von 0^0 bis $+ \varphi_0$ geht, λ von 90^0 bis zu einem Minimum Λ geht und zu 90^0 zurückkehrt. Zu jedem Werthe λ in dem Intervalle Λ bis 90^0 gehören mithin zwei Werthe φ des ersten Quadranten. Ferner fällt λ von 90^0 bis 0^0, während φ von $- \varphi_0$ bis $- 90^0$ geht. Wir haben also folgendes Resultat:

> In dem Intervalle des λ von Λ bis 90^0 giebt es zu jedem Werthe des λ drei zugehörige Werthe φ, zwei im ersten und einen im vierten Quadranten.
>
> Für $\lambda = \Lambda$ giebt es zwei zugehörige Werthe φ, je einen im ersten und vierten Quadranten.
>
> Für $\lambda < \Lambda$ giebt es nur einen zugehörigen Werth φ im vierten Quadranten.

Für das physikalische Problem sind die Werthe φ des ersten Quadranten, welche Radien außerhalb des Krystalls liefern, nach dem dritten Quadranten zu übertragen. Für solche Werthe müßte aber sein $\varphi > \lambda$. Nun ist ersichtlich, daß es Werthe φ giebt, die kleiner sind als die zugehörigen Werthe λ, da z. B. $\lambda = 90^0$ wird für $\varphi = 0$. Wenn es auch solche Werthe φ geben sollte, die größer sind als die zugehörigen Werthe λ, so müßte zunächst der Fall eintreten, daß $\varphi = \lambda$ wird. Für diesen Fall aber würde aus Gl. (2), § 21 folgen:

$$\operatorname{tg} \varphi^2 = \frac{b\,(cw - ab)}{c\,(ac - bw)},$$

$$\text{oder: } a\,(b^2 + c^2 \operatorname{tg} \varphi^2) = bcw\,(1 + \operatorname{tg} \varphi^2),$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

woraus mit Rücksicht auf $w^2 = \frac{b^2 + c^2 \operatorname{tg}\varphi^2}{1 + \operatorname{tg}\varphi^2}$ folgen würde:

$$aw^2 = bcw.$$

Da w nicht Null sein kann, müßte sein $w = \frac{bc}{a}$, was ebenfalls nicht angeht; denn $\frac{bc}{a} > c$.

Mithin sind sämmtliche Werthe φ des ersten Quadranten kleiner als die zugehörigen Werthe λ; die zu den Werthen φ des ersten Quadranten gehörigen Radien liegen innerhalb des Krystalls, ebenso der zum Winkel φ des vierten Quadranten gehörige Radius. Da der zweite Quadrant ganz außerhalb des Krystalls liegt, so haben wir folgendes Resultat:

Ist $b^2 - ac < 0$, so giebt es im Hauptschnitte yz für einen Krystallschnitt, der unter dem spitzen Winkel λ gegen die + y-Axe geneigt ist,

für λ zwischen Λ und 90° drei Richtungen, nach denen der gebrochene Strahl nicht zerlegt wird, zwei im ersten und eine im vierten Quadranten;

für $\lambda = \Lambda$ giebt es zwei solche Richtungen, je eine im ersten und vierten Quadranten;

für λ zwischen 0 und Λ giebt es nur **eine** solche Richtung im vierten Quadranten.

§ 23. Aus dem in Gl. (1) des § 15 für das Maximum von λ im Hauptschnitte xy gefundenen Werthe erhalten wir vermittelst der im Anfange des § 21 angegebenen Buchstaben-Vertauschung für das Minimum von λ im Hauptschnitte yz:

$$\operatorname{tg}\Lambda = \sqrt{\frac{b}{c}\left\{\frac{(c^2 - b^2)\left[ac\sqrt[3]{abc} + b\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right] + bc^2(b^2 - a^2)}{c\,(a^2c^2 - b^4)}\right\}^3}. \qquad (1)$$

Um die mit den Gl. (2) und (3) des § 15 übereinstimmenden Ausdrücke zu erhalten, setzen wir:

$$\frac{b}{c} = e, \quad \frac{b}{a} = f;$$

und es wird:

$$\operatorname{tg}\Lambda = \left\{\frac{(1 - e^2)\, f^{\frac{2}{3}}\left[1 + (ef)^{\frac{2}{3}}\right] + e^{\frac{4}{3}}(f^2 - 1)}{1 - e^2f^2}\right\}^{\frac{3}{2}} \qquad (2)$$

$$\text{oder: } \operatorname{tg}\Lambda = \left\{\frac{(f^{\frac{2}{3}} - e^{\frac{4}{3}})\left[1 + (ef)^{\frac{2}{3}} + (ef)^{\frac{4}{3}}\right]}{1 - e^2f^2}\right\}^{\frac{3}{2}}. \qquad (3)$$

Da $f = \frac{b}{a} > 1$ und $e = \frac{b}{c} < 1$, so ist der Zähler stets positiv. Damit es auch der Nenner ist, muß sein

$$1 - e^2f^2 > 0, \text{ oder } a^2c^2 - b^4 > 0,$$
$$\text{oder } b^2 - ac < 0,$$

welche Bedingung mit unserer Annahme von § 22 an übereinstimmt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Fall: $ac - b^2 \leqq 0$ oder: $b^2 - ac \geqq 0$.

§ 24. In dem Falle $b^2 - ac \geqq 0$ behält der Nenner des Ausdruckes für $\operatorname{tg}\varphi$ in § 21 stets das negative Zeichen. Da nun auch, wie aus der am Ende des vorigen Paragraphen angegebenen Bedingung folgt, für $b^2 - ac > 0$ sich kein Maximum oder Minimum des λ ergiebt, so gehört zu jedem Werthe λ nur ein Werth φ im vierten Quadranten, der ganz innerhalb des Krystalls liegt. Wir haben also folgendes Resultat:

Ist $b^2 - ac \geqq 0$, so giebt es im Hauptschnitte yz zu einem Krystallschnitte, der unter dem spitzen Winkel λ gegen die $+$ y-Axe geneigt ist, nur **eine** Richtung im vierten Quadranten, nach welcher keine Zerlegung des gebrochenen Strahls erfolgt.

§ 25. Durch die in § 21 angegebene Buchstaben-Vertauschung erhalten wir für die Curve, in welcher die Durchschnitte sämmtlicher Tangentenpaare an den Endpunkten der gemeinschaftlichen Kreis- und Ellipsen-Durchmesser liegen, aus Gl. (3), § 17 die folgende Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}\{y^2z^2(c^2-b^2)^2 - b^2y^2(a^2b^2+c^4) - c^2z^2(a^2c^2+b^4) + a^2b^2c^2(b^2+c^2)^2\}^2 \\ \qquad + 4a^2b^4c^4(a^2-y^2-z^2)(b^2y^2+c^2z^2-b^2c^2)\end{array}\right\} = 0. \qquad (1)$$

Für den Durchschnitt der Curve mit der y-Axe erhalten wir:

$$y = \pm ac\sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^4-a^2b^2}}.$$

Da dieser Werth kleiner ist als a, so kann der dadurch bestimmte Punkt der y-Axe keinem reellen Curvenzweige angehören. Die Curve trifft die y-Axe nicht.

Für den Durchschnitt mit der z-Axe ergiebt sich:

$$z = \pm ab\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2c^2-b^4}}.$$

Dieser Werth ist nur reell für $ac - b^2 \geqq 0$. Die Curve trifft mithin die z-Axe, wenn $b^2 - ac < 0$ ist; ist $b^2 - ac = 0$, so liegt der Durchschnitt in unendlicher Entfernung.

Für die vier der y-Axe parallelen Asymptoten erhalten wir die Gleichung:

$$z = \pm b\,\frac{c^2 \pm ab}{c^2-b^2}; \qquad (2)$$

und die der z-Axe parallelen Asymptoten sind bestimmt durch:

$$y = \pm c\,\frac{b^2 \pm ac}{c^2-b^2}. \qquad (3)$$

Die Curve ist für $b^2 - ac < 0$ gezeichnet in Fig. 3, und zwar ist $a = 3$, $b = 4$, $c = 8$; doch sind nur die Zweige dargestellt, welche auf der positiven Seite der z-Axe liegen. Für $b^2 - ac > 0$ ist die Curve gezeichnet in Fig. 4, jedoch nur mit den Zweigen auf der positiven Seite der y-Axe. Es ist genommen $a = 2\frac{1}{2}$, $b = 5$, $c = 7\frac{1}{2}$. Ueber die Bezeichnung in beiden Figuren gilt das früher in § 18 Bemerkte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Asymptoten der inneren Zweige sind

$$z = \pm b \frac{c^2 - ab}{c^2 - b^2} \text{ und } y = \pm c \frac{b^2 - ac}{c^2 - b^2},$$

oder für die angegebenen Zahlenwerthe: $z = \pm 4\frac{1}{6}$, $y = \pm 1\frac{1}{3}$ in Fig. 3, und $z = \pm 7$, $y = \pm 1\frac{1}{2}$ in Fig. 4. Ueber die Lage der Asymptoten lassen sich die Betrachtungen wiederholen, welche wir für die Asymptoten des Hauptschnitts xy in § 18 gemacht haben. Auf dieselbe Weise wie in § 18 für den Hauptschnitt xy lassen sich die in den §§ 23 und 24 durch Rechnung gewonnenen Resultate an den Figuren 3 und 4 leicht veranschaulichen. Wir enthalten uns deshalb der weiteren Ausführung und bemerken nur, daß die vom Mittelpunkte an den Curvenzweig 1. in Fig. 3 gezogene Tangente mit der + y den Winkel Λ bildet (cf. § 23); ferner, daß die vom Durchschnitte der Curve mit der + z-Axe an den Kreis oder die Ellipse gezogene Tangente des ersten Quadranten durch ihren Berührungspunkt den Radius bestimmt, welcher mit der + y-Axe den Winkel φ_0 bildet (cf. § 22).

§ 26. Zur Bestimmung der Neigung φ der gebrochenen Strahlen gegen die y-Axe für einen gegebenen Neigungswinkel λ des Krystallschnitts erhält man aus der Gl. (1) des § 20 die biquadratische Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{ctg}\varphi^4 . e^2 (e^2 - f^2) + 2\operatorname{ctg}\varphi^3 . e^2 \operatorname{tg}\lambda (1 - f^2) + \operatorname{ctg}\varphi^2 [e^4 - f^2 + \operatorname{tg}\lambda^2 (1 - e^2 f^2)] \\ \qquad + 2\operatorname{tg}\varphi . \operatorname{tg}\lambda (e^2 - f^2) + \operatorname{tg}\lambda^2 (1 - f^2) \end{array}\right\} = 0, \quad (1)$$

worin wie in § 23 $e = \frac{b}{c}$, $f = \frac{b}{a}$ ist.

Die Gleichung giebt, wie aus der analogen für den Hauptschnitt xy in § 20 gemachten Bemerkung klar ist, zugleich die Winkel φ, welche nur die geometrische Bedeutung haben, daß die Tangenten, welche an entgegengesetzten Endpunkten eines unter dem Winkel φ geneigten Durchmessers gezogen werden, sich auf dem unter dem Winkel λ gegen die y-Axe geneigten Durchmesser schneiden. Vermittelst desselben Verfahrens wie in § 20 läßt sich nun aus den Figuren 3 und 4 die Beschaffenheit der Wurzeln der Gl. (1) beurtheilen.

Ist erstens $b^2 - ac < 0$ oder $ef < 1$, so ergiebt sich aus Fig. 3 Folgendes:

α. Ist $\lambda > \Lambda$, so hat die Gl. (1) vier reelle Wurzeln, zwei positive und zwei negative.

β. Ist $\lambda = \Lambda$, so hat die Gl. (1) vier reelle Wurzeln, zwei negative und zwei gleiche positive.

γ. Ist $\lambda < \Lambda$, so hat die Gl. (1) nur zwei reelle negative Wurzeln.

Ist zweitens $b^2 - ac \geq 0$ oder $ef \geq 1$, so ergiebt sich aus der Fig. 4, daß die Gl. (1) stets nur zwei reelle negative Wurzeln hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hauptschnitt xz.

§ 27. Für den Durchschnitt des Hauptschnitts xz mit der Wellenfläche sind § 4 die Gleichungen gefunden:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + z^2 &= b^2 \\ a^2 x^2 + c^2 z^2 &= a^2 c^2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Der Radius b des Kreises hat einen zwischen den Halbaren a und c der Ellipse gelegenen mittleren Werth; Kreis und Ellipse schneiden sich mithin in vier Punkten, die gegen die Axen symmetrisch und einander paarweise diametral gegenüberliegen. (S. Fig. 5.) Die hierher gehörigen Gleichungen leiten wir aus denen für den Hauptschnitt xy durch folgende Buchstaben-Vertauschung ab:

x in x, y in z, a in a, b in c, c in b.

Hiernach gehen die Gleichungen (5) und (6) des § 12 über in:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{a\,(cw - ab)}{c\,(bc - aw)} \operatorname{ctg} \varphi, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a\,(cw - ab)}{c\,(bc - aw)} \operatorname{ctg} \lambda, \qquad (3)$$

$$\text{worin} \quad w = \sqrt{a^2 \cos \varphi^2 + c^2 \sin \varphi^2}. \qquad (4)$$

Da λ als spitzer Winkel anzusehen ist, hängt das Zeichen von $\operatorname{tg} \varphi$ nur ab von dem des Quotienten $\frac{cw - ab}{bc - aw}$. Nun wird für den kleinsten Werth a des w der Zähler gleich $a\,(c - b)$, also positiv; und für den größten Werth c des w wird der Nenner gleich $c\,(b - a)$, also ebenfalls positiv. Mithin ist $\operatorname{tg} \varphi$ stets positiv, φ kann also nur im ersten und dritten Quadranten liegen. Bleiben wir zunächst im ersten Quadranten, so ergiebt sich aus Gl. (2) und (4):

Für $\varphi = 0^0$ wird $w = a$ und $\lambda = 90^0$;
für $\varphi = 90^0$ wird $w = c$ und $\lambda = 0$.

λ kann nicht noch einmal 0^0 oder 90^0 werden, da $cw - ab$ und $bc - aw$ stets positiv sind, wie wir eben gesehen haben.

Für das physikalische Problem sind die Werthe φ des ersten Quadranten, welche Radien außerhalb des Krystalls liefern, nach dem vom Krystalle erfüllten symmetrischen Raum des dritten Quadranten zu übertragen. Dies sind die Werthe φ, welche größer sind als die zugehörigen Werthe λ. Daß es Werthe φ giebt, welche größer sind als die zugehörigen Werthe λ, folgt schon daraus, daß $\lambda = 0^0$ für $\varphi = 90^0$ wird; ebenso, daß es Werthe φ giebt, welche kleiner sind als die zugehörigen Werthe λ, da $\lambda = 90^0$ für $\varphi = 0$ wird. Es wird also einmal der Fall eintreten, daß $\varphi = \lambda$ ist. Dies findet statt, wenn nach Gl. (3)

$$\operatorname{tg} \varphi^2 = \frac{a\,(cw - ab)}{c\,(bc - aw)}, \text{ also}$$

$$acw\,(1 + \operatorname{tg} \varphi^2) = b\,(a^2 + c^2 \operatorname{tg} \varphi^2),$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder, da $w^2 = \frac{a^2 + c^2 \operatorname{tg} \varphi^2}{1 + \operatorname{tg} \varphi^2}$, wenn

$$a c w = b w^2.$$

$w = 0$ ist unmöglich, also bleibt nur übrig $w = \frac{ac}{b}$.

Nun ist

$$\operatorname{tg} \varphi^2 = \frac{w^2 - a^2}{c^2 - w^2};$$

bezeichnen wir also die Werthe, für welche φ gleich λ ist, mit φ_0 und λ_0, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi_0^2 = \operatorname{tg} \lambda_0^2 = \frac{\frac{a^2 c^2}{b^2} - a^2}{c^2 - \frac{a^2 c^2}{b^2}}$$

$$= \frac{a^2 (c^2 - b^2)}{c^2 (b^2 - a^2)},$$

$$\text{also } \operatorname{tg} \varphi_0 = \operatorname{tg} \lambda_0 = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{b^2 - a^2}}.$$

Aus den Gleichungen (1) ergiebt sich für die Coordinaten der Durchschnittspunkte von Kreis und Ellipse:

$$z' = \pm a \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}, \qquad x' = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}}. \qquad (5)$$

Denken wir uns nach dem Durchschnitte im ersten Quadranten einen Radius gezogen, so wird der Winkel v, den er mit der + x-Axe bildet, bestimmt durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} v = \frac{z'}{x'} = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{b^2 - a^2}}, \qquad (6)$$

mithin ist $v = \varphi_0 = \lambda_0$. Demnach sind für die Werthe $\lambda \begin{smallmatrix} > \lambda_0 \\ < 90^0 \end{smallmatrix}$ die zugehörigen Werthe φ kleiner als λ; und für $\lambda \begin{smallmatrix} < \lambda_0 \\ > 0 \end{smallmatrix}$ sind die zugehörigen Winkel φ größer als λ.

Um nun die Anzahl der zu einem Winkel λ gehörigen Werthe φ zu bestimmen, bedienen wir uns der geometrischen Anschauung.

§ 28. Vermittelst der im Anfange des vorigen Paragraphen angegebenen Buchstaben-Vertauschung erhalten wir für die Curve, in welcher die Durchschnitte sämmtlicher Tangentenpaare an den Enden der gemeinschaftlichen Kreis- und Ellipsen-Durchmesser liegen, aus Gl. (3), § 17 die Gleichung:

$$F = \left\{ \begin{array}{l} [x^2 z^2 (c^2 - a^2)^2 - a^2 x^2 (c^4 + a^2 b^2) - c^2 z^2 (a^4 + b^2 c^2) + a^2 b^2 c^2 (c^2 + a^2)]^2 \\ \qquad + 4 a^4 b^2 c^4 (b^2 - x^2 - z^2)(a^2 x^2 + c^2 z^2 - a^2 c^2) \end{array} \right\} = 0. \qquad (1)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für den Durchschnitt mit der x-Axe ergiebt sich aus Gl. (1), § 18:

$$x = \pm bc \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^4 - a^2b^2}}.$$

Dieser Werth ist, wie leicht zu zeigen, kleiner als b; der dadurch bestimmte Punkt der x-Axe fällt demnach in den Kreis mit dem Radius b und kann keinem reellen Curvenzweige angehören.

Als Durchschnitt der Curve mit der z-Axe ergiebt sich aus Gl. (2), § 18:

$$z = \pm ab \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{b^2c^2 - a^4}}.$$

Dieser Werth ist ebenfalls kleiner als b; der dadurch bestimmte Punkt der z-Axe kann keinem reellen Curvenzweige angehören. Die Curve trifft demnach keine der Coordinatenaxen.

Aus Gl. (3) des § 17 erhalten wir vermittelst der angegebenen Buchstabenvertauschung für die Asymptoten, welche der x-Axe parallel sind:

$$z = \pm a \frac{c^2 \pm ab}{c^2 - a^2},$$

und aus Gl. (4) des § 15 für die Asymptoten, welche der z-Axe parallel sind:

$$x = \pm c \frac{a^2 \pm bc}{c^2 - a^2}.$$

Setzt man in die linke Seite F der Gleichung (1) die Werthe (5) des § 27 für die Coordinaten x′ und z′ der Durchschnittspunkte von Kreis und Ellipse ein, so verschwindet das letzte Glied, weil jene Coordinaten, als die eines Punktes des Kreises, den Ausdruck $b^2 - x^2 - z^2$ identisch gleich Null machen müssen. Ferner läßt sich durch eine leichte Rechnung zeigen, daß auch das erste Glied identisch Null wird. Demnach liegen die Punkte, in denen Kreis und Ellipse sich schneiden, in der Curve (1), wie es sich auch ohne Rechnung daraus ersehen läßt, daß die Tangenten an dem Endpunkte des nach einem solchen Punkte gezogenen Radius sich in dem Punkte selbst schneiden.

Bilden wir die partiellen Differential-Quotienten des Ausdrucks F in (1), so ergiebt sich:

$$\frac{dF}{dx} = \begin{cases} 4x\,[x^2z^2(c^2 - a^2) - a^2x^2(c^4 + a^2b^2) - c^2z^2(a^4 + b^2c^2) + a^2b^2c^2(c^2 + a^2)] \\ \times\,[z^2(c^2 - a^2)^2 - a^2(c^4 + a^2b^2)] \\ +\,8xa^6b^2c^4(b^2 - x^2 - z^2) - 8xa^4b^2c^4(a^2x^2 + c^2z^2 - a^2c^2) \end{cases}$$

$$\frac{dF}{dz} = \begin{cases} 4z\,[x^2z^2(c^2 - a^2) - a^2x^2(c^4 + a^2b^2) - c^2z^2(a^4 + b^2c^2) + a^2b^2c^2(c^2 + a^2)] \\ \times\,[x^2(c^2 - a^2)^2 - c^2(a^4 + b^2c^2)] \\ +\,8za^4b^2c^6(b^2 - x^2 - z^2) - 8za^4b^2c^4(a^2x^2 + c^2z^2 - a^2c^2). \end{cases}$$

Die Coordinaten x′, z′ der Durchschnittspunkte von Kreis und Ellipse machen nun die Ausdrücke $b^2 - x^2 - z^2$ und $a^2x^2 + c^2z^2 - a^2c^2$ identisch gleich Null, und da auch der erste Factor, wie schon oben bemerkt ist, identisch für x′ und z′ gleich Null wird, so verschwinden die Differential-Quotienten $\frac{dF}{dx}$ und $\frac{dF}{dz}$ gleichzeitig für $x = x'$ und $z = z'$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wollte man nun den wahren Werth des Differential-Quotienten $\frac{dz}{dx}$ für $x = x'$, $z = z'$ direkt aus der Gleichung (1) bestimmen, so würde man zu einer weitläufigen Rechnung gelangen. Kürzer verfahren wir auf folgende Weise.

Aus § 17 erhalten wir durch Buchstabenvertauschung:

$$x = \frac{c}{\sqrt{c^2 - a^2}} \frac{bc - aw}{\sqrt{c^2 - w^2}}, \quad z = \frac{a}{\sqrt{c^2 - a^2}} \frac{cw - ab}{\sqrt{w^2 - a^2}}. \qquad (2)$$

Hieraus ergiebt sich durch Differentiation:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{a}{\sqrt{c^2 - a^2}} \frac{c\sqrt{w^2 - a^2} - \frac{w(cw - ab)}{\sqrt{w^2 - a^2}}}{w^2 - a^2}$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} \frac{bw - ac}{(w^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ferner ist:

$$\frac{dx}{dw} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - a^2}} \frac{-a\sqrt{c^2 - w^2} + \frac{w(bc - aw)}{\sqrt{c^2 - w^2}}}{c^2 - w^2}$$

$$= \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} \frac{bw - ac}{(c^2 - w^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mithin ist:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{dw}}{\frac{dx}{dw}} = \frac{a^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} \frac{bw - ac}{(w^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c^2} \frac{(c^2 - w^2)^{\frac{3}{2}}}{bw - ac}$$

$$= \frac{a^2}{c^2} \left(\frac{c^2 - w^2}{w^2 - a^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (3)$$

Aus § 27 haben wir nun für den Durchschnittspunkt (x', y') von Kreis und Ellipse $w = \frac{ac}{b}$. Setzen wir diesen Werth ein, so ergiebt sich:

$$\frac{dz'}{dx'} = \frac{a^2}{c^2} \left(\frac{c^2 - \frac{a^2c^2}{b^2}}{\frac{a^2c^2}{b^2} - a^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{c}{a} \left(\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (4)$$

$\frac{dz'}{dx'}$ hat also nur einen Werth. Daraus folgt, daß die Curve (1) im Punkte (x', z') nur eine Tangente hat. Da nun die Curve sich über den Punkt (x', z') hinaus nicht in Kreis und Ellipse

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

erstrecken kann, da ferner die partiellen Differential-Quotienten $\frac{dF}{dx'}$ und $\frac{dF}{dz'}$ verschwinden und endlich die Curve im Punkte (x', z') nur eine Tangente hat, so ist der Punkt (x', z') ein Rückkehrpunkt.

Die Curve ist dargestellt in Fig. 5 für $a = 4$, $b = 6$, $c = 8$, doch sind nur diejenigen vier Zweige gezeichnet, welche auf der positiven Seite der x-Axe liegen. Die beiden äußeren Zweige gehören den Durchschnitten der Tangentenpaare an den Endpunkten auf entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Kreis- und Ellipsen-Durchmesser an, und zwar der Zweig (E_2, K_4) den Durchschnitten je einer Ellipsentangente des zweiten und einer Kreistangente des vierten Quadranten; und ähnlich für den Zweig (E_1, K_3).

Die vier inneren Zweige gehören den Durchschnitten der Tangentenpaare an derselben Seite der gemeinschaftlichen Durchmesser oder Radien an. Die Punkte **P** und **P'**, in denen Kreis und Ellipse sich schneiden, sind die Rückkehrpunkte. Jeder innere Zweig besteht also aus zwei Aesten, z. B. der im ersten Quadranten aus den mit **Ia** und **Ib** bezeichneten. Der Ast **Ia** gehört nun an den Durchschnitten der Tangenten an den Endpunkten der Radien in dem mit **Ia** bezeichneten Theile des ersten Quadranten. Der Ast **Ib** gehört den Durchschnitten der Tangenten an, welche an den Endpunkten der Radien des mit **Ib** bezeichneten Theils des ersten Quadranten gezogen werden. Die Linie **OP**, welche den ersten Quadranten in die beiden Theile **Ia** und **Ib** zerlegt, bildet mit der positiven x-Axe den Winkel v, für welchen wir in § 21 die Gl. (5) gefunden haben, und der gleich $\lambda_0 = \varphi_0$ ist. Wie aus der für den Hauptschnitt xy in § 18 gemachten analogen Untersuchung sich ergiebt, bestimmen die Gleichungen: $z = \pm a \frac{c^2 - ab}{c^2 - a^2}$ und $x = \pm c \frac{a^2 - bc}{c^2 - a^2}$ die Asymptoten der inneren Curvenzweige, die Gleichungen: $z = \pm a \frac{c^2 + ab}{c^2 - a^2}$ und $x = \pm c \frac{a^2 + bc}{c^2 - a^2}$ dagegen die Asymptoten der äußeren Zweige. Für die angegebenen Zahlenwerthe erhält man als Gleichungen für die Asymptoten der inneren Zweige: $z = \pm 3\frac{1}{3}$ und $x = \pm 5\frac{1}{3}$, und für die der äußeren: $z = \pm 7\frac{1}{3}$ und $x = \pm 10\frac{1}{3}$. — Ueber die Lage der Asymptoten gegen Kreis und Ellipse kann man die Betrachtungen des § 18 wiederholen. Denken wir uns nun im ersten Quadranten einen Radius gezogen, der unter dem spitzen Winkel λ gegen die x-Axe geneigt ist. Trifft der Radius die inneren Curvenäste **Ia** und **Ib** in einer Anzahl von Punkten, so ziehe man von den Durchschnittspunkten mit **Ia** die Kreis- oder Ellipsentangenten nach dem mit **Ia** bezeichneten Raume des ersten Quadranten; und von den Durchschnittspunkten mit **Ib** ziehe man die Tangenten nach **Ib**. Die Radien nach den Berührungspunkten geben für die Neigung λ eines Krystallschnitts gegen die x-Axe diejenigen Richtungen an, nach denen der gebrochene Strahl nicht zerlegt wird, wenn man die Richtungen, die in den Raum des ersten Quadranten außerhalb des Krystalls fallen, nach dem symmetrischen Raume des dritten Quadranten innerhalb des Krystalls verlängert. Es ist aber offenbar, daß die Durchschnittspunkte mit dem Curvenaste **Ib** solche Radien ergeben, die außerhalb des Krystalls

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

liegen. Es handelt sich nun darum, die Anzahl der Punkte zu bestimmen, in denen ein Radius des ersten Quadranten die inneren Curvenäste **Ia** und **Ib** schneidet.

§ 29. Die Gleichung der Tangente im Punkte **P**, dessen Coordinaten wir in § 21, Gl. (4) gefunden haben, ist mit Rücksicht auf Gl. (3) des § 22:

$$z - a\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}} = x - \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{(b^2 - a^2)^2}{c^2 - b^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}.$$

Für den Durchschnitt mit der z-Axe hat man also:

$$z = a\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}} - \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{(b^2 - a^2)^2}{c^2 - b^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}$$

$$= \frac{a^2 (c^2 - b^2)^2 - c^2 (b^2 - a^2)^2}{a (c^2 - b^2) \sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}$$

$$= \frac{a^2 c^4 + a^2 b^4 - b^4 c^2 - a^4 c^2}{a (c^2 - b^2) \sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}$$

$$= \frac{a^2 c^2 (c^2 - a^2) - b^4 (c^2 - a^2)}{a (c^2 - b^2) \sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}$$

$$z = \frac{a^2 c^2 - b^4}{a (c^2 - b^2)} \cdot \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2}} \qquad (1)$$

Nun sind $c^2 - a^2$ und $c^2 - b^2$ positiv, das Zeichen des Ausdrucks hängt demnach ab von $a^2c^2 - b^4$. Wir unterscheiden also die drei Fälle $ac - b^2 \gtreqless 0$.

I. Fall: $ac - b^2 = 0$ oder: $b^2 - ac = 0$.

In diesem Falle wird der Werth (1) gleich Null, die Tangente im Punkte **P** geht also durch den Mittelpunkt. Die betreffende Figur ist dargestellt in Fig. 5a, wo **O** den Mittelpunkt bezeichnet. Es ist klar, daß eine jede von **O** aus gezogene Linie nur einen der beiden Aeste treffen kann und nur in einem Punkte. Demnach wird auch nach dem, was am Ende des vorigen Paragraphen bemerkt ist, zu der Neigung λ eines Krystallschnitts gegen die $+$ x-Axe nur eine Richtung gehören, nach welcher keine Zerlegung des gebrochenen Strahls stattfindet, und zwar ist diese Richtung im ersten oder dritten Quadranten, je nachdem die unter dem Winkel λ von **O** aus gezogene gerade Linie den Curvenzweig **Ia** oder **Ib** trifft, d. h. je nachdem $\lambda \gtreqless \lambda_0$ ist.

Für $b^2 - ac = 0$ giebt es demnach nur **eine** Richtung, nach welcher keine Zerlegung des gebrochenen Strahls stattfindet; dieselbe liegt im ersten Quadranten für $\lambda > \lambda_0$; die Richtung liegt im dritten Quadranten für $\lambda < \lambda_0$, für $\lambda = \lambda_0$ fällt sie mit der Brechungs-Ebene zusammen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Fall: $ac - b^2 > 0$, oder: $b^2 - ac < 0$.

In diesem Falle ist der Ausdruck (1) für z positiv und die Figur gestaltet sich wie in Fig. 5b. Die Tangente des Punktes **P** geht durch den Punkt **M** auf der positiven Seite der z-Axe. Es ist ersichtlich, daß die gerade Linie **OP** die Curve außer in **P** noch in einem Punkte **P'** des Zweiges **Ia** trifft. Ferner läßt sich von **O** aus an den Zweig **Ia** die Tangente **OT** legen, und es ist klar, daß die von **O** aus gezogenen Durchmesser, welche zwischen **OT** und **OPP'** fallen, die Curve in drei Punkten treffen, den oberen Zweig **Ia** in zwei und den unteren **Ib** in einem Punkte. Die außerhalb dieses Raumes liegenden Durchmesser treffen die Curve nur in einem Punkte.

Nennen wir den Winkel, den die Tangente **OT** mit der positiven x-Axe bildet, Λ, so ergiebt sich, da der Winkel zwischen **OP** und der positiven x-Axe λ_0 ist, leicht:

Der unter dem Winkel λ gezogene Durchmesser trifft

für $\lambda < \Lambda$ den unteren Curvenzweig **Ib** in einem Punkte,

für $\lambda = \Lambda$ den unteren **Ib** in einem Punkte und den oberen im Berührungspunkte,

für $\lambda \begin{matrix} > \Lambda \\ < \lambda_0 \end{matrix}$ den unteren **Ib** in einem und den oberen **Ia** in zwei Punkten,

für $\lambda = \lambda_0$ den oberen **Ia** in einem und den oberen **Ia** und unteren **Ib** zugleich in einem Punkte,

für $\lambda > \lambda_0$ den oberen **Ia** in einem Punkte.

Daß es diesen Durchschnittspunkten für die verschiedene Größe des λ entsprechend ebenso viele Richtungen, nach denen der gebrochene Strahl nicht zerlegt wird, im ersten oder dritten Quadranten giebt, je nachdem die Durchschnitte auf dem Zweige **Ia** oder **Ib** liegen, bedarf keiner weiteren Ausführung.

III. Fall: $ac - b^2 < 0$, oder: $b^2 - ac > 0$.

Der Werth (1) von z ist negativ, die Tangente des Punktes **P** trifft mithin die z-Axe auf der negativen Seite im Punkte **M** (Fig. 5c). Es ist nun augenscheinlich, daß die gerade Linie **OP** den Curvenzweig **Ib** noch in einem Punkte **P'***) trifft. Ferner kann man von **O** aus an den Zweig **Ib** die Tangente **OT** legen, welche den Zweig **Ia** noch im Punkte **N** trifft. Nennen wir den Winkel zwischen **OT** und der positiven x-Axe Λ, so ergeben sich, da der Winkel zwischen **OP** und der positiven x-Axe unserer früheren Bezeichnung nach λ_0 ist, leicht folgende Fälle:

Der unter dem Winkel λ gezogene Durchmesser trifft

für $\lambda < \lambda_0$ den unteren Curvenzweig **Ib** in einem Punkte,

für $\lambda = \lambda_0$ den unteren Zweig **Ib** in einem Punkte und beide Zweige zugleich im Punkte **P**,

für $\lambda \begin{matrix} > \lambda_0 \\ < \Lambda \end{matrix}$ den unteren Zweig **Ib** in zwei Punkten und den oberen **Ia** in einem Punkte,

*) In der Fig. 5c ist dieser Punkt durch ein Versehen ausgelassen worden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

für $\lambda = \Lambda$ den unteren Ib im Berührungspunkte und den oberen Ia in einem Punkte,

für $\lambda > \Lambda$ den oberen Ia in einem Punkte.

Die Anwendung auf das physikalische Problem ist leicht und bedarf nach dem am Ende des § 28 Bemerkten keiner weiteren Ausführung.

§ 30. Wir wollen jetzt den Winkel Λ bestimmen, den die vom Mittelpunkte an die Curve gezogene Tangente mit der positiven x-Axe bildet.

Die Gleichung der Tangente an die Curve in einem beliebigen Punkte (x', y') des ersten Quadranten ist mit Rücksicht auf den in § 28 gefundenen Werth (3) von $\frac{dz}{dx}$:

$$z - z' = (x - x') \frac{a^2}{c^2} \left(\frac{c^2 - w^2}{w^2 - a^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Nehmen wir nun an, daß diese durch den Mittelpunkt geht, so muß sein:

$$z' = x' \frac{a^2}{c^2} \left(\frac{c^2 - w^2}{w^2 - a^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Setzen wir hierin aus Gl. 2 des § 28 die Werthe für x' und z', so ergiebt sich:

$$\frac{a}{\sqrt{c^2 - a^2}} \frac{cw - ab}{\sqrt{w^2 - a^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - a^2}} \frac{bc - aw}{\sqrt{c^2 - w^2}} \cdot \frac{a^2}{c^2} \left(\frac{c^2 - w^2}{w^2 - a^2} \right)^{\frac{3}{2}}, \text{ oder:}$$

$$c\,(cw - ab)\,(w^2 - a^2) = a\,(bc - aw)\,(c^2 - w^2) \text{ oder:}$$

$$c^2w^3 - abcw^2 - a^2c^2w + a^3bc = abc^3 - a^2c^2w - abcw^2 + a^2w^3, \text{ oder:}$$

$$c^2w^3 - a^2w^3 + a^3bc - abc^3 = 0, \text{ oder:}$$

$$(w^3 - abc)\,(c^2 - a^2) = 0, \text{ also}$$

$$w = \sqrt[3]{abc}.$$

Dies ist aber gerade der Werth des w, den wir früher im Hauptschnitte xy für das Maximum des Winkels λ erhalten haben. Durch die im § 27 angegebene Buchstabenvertauschung erhalten wir also aus Gl. (1) des § 15:

$$\operatorname{tg} = \sqrt{\frac{a}{c} \left\{ \frac{(c^2 - a^2)\,[\,bc\sqrt[3]{abc} + a\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\,] + ac^2\,(a^2 - b^2)}{c\,(b^2c^2 - a^4)} \right\}^3}. \qquad (1)$$

Setzen wir, um den mit dem früheren übereinstimmenden Ausdruck zu erhalten,

$$\frac{a}{c} = e, \quad \frac{a}{b} = f,$$

so wird:

$$\operatorname{tg} \Lambda = \left\{ \frac{(1 - e^2)\, f^{\frac{2}{3}}\,[1 + (ef)^{\frac{2}{3}}] + e^{\frac{4}{3}}\,(f^2 - 1)}{1 - e^2 f^2} \right\}^{\frac{3}{2}} \qquad (2)$$

oder anders geschrieben:

$$\operatorname{tg} \Lambda = \left\{ \frac{(f^{\frac{2}{3}} - e^{\frac{4}{3}})\,[1 + (ef)^{\frac{2}{3}} + (ef)^{\frac{4}{3}}]}{1 - e^2 f^2} \right\}^{\frac{3}{2}}. \qquad (3)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da $e = \frac{a}{c}$ und $f = \frac{a}{b}$ echte Brüche sind, so ist der Nenner $1 - e^2 f^2$ stets positiv. Der Zähler ist es ebenfalls, wenn:

$$f^{\frac{2}{3}} - e^{\frac{4}{3}} > 0, \text{ oder:}$$

$$f - e^2 > 0, \text{ oder:}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{a^2}{c^2} > 0, \text{ oder:}$$

$$c^2 - ab > 0.$$

Dieser Ausdruck ist aber stets positiv, folglich ist auch der Werth für $\operatorname{tg} A$ stets positiv.

Der Ausdruck für $\operatorname{tg} A$ nimmt eine sehr einfache Gestalt an, wenn $b^2 - ac = 0$ ist. Setzt man nämlich in Gl. (1) $c = \frac{b^2}{a}$, so ergiebt sich:

$$\operatorname{tg} A = \sqrt{\left\{\frac{(b^4 - a^4)\,[b^4 + a^2b^2] + a^2b^4\,(a^2 - b^2)}{b^2\,(b^6 - a^6)}\right\}^3 \frac{a^2}{b^2}}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{(b^2 + a^2)^2 - a^2b^2}{b^6 - a^6}\,(b^2 - a^2)\right\}^3 \frac{a^2}{b^2}}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{b^4 + a^2b^2 + a^4}{b^6 - a^6}\,(b^2 - a^2)\right\}^3 \frac{a^2}{b^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$$

$$= \frac{a}{b}.$$

Daß für $b^2 - ac = 0$ auch die Ausdrücke in § 27 für $\operatorname{tg}\varphi_0 = \operatorname{tg}\lambda_0 = \operatorname{tg} v$ diesen Werth annehmen, ist klar, da in diesem Falle die Linien, welche die Winkel λ_0 und A bilden, mit der Tangente im Rückkehrpunkte zusammenfallen.

§ 25. Setzen wir wie oben

$$e = \frac{a}{c}, \quad f = \frac{a}{b},$$

so ergiebt sich zur Bestimmung der Winkel φ, welche einem gegebenen Werthe λ entsprechen, dieselbe Gleichung wie in den Hauptschnitten xy und yz:

$$\operatorname{ctg}\varphi^4 \,.\, e^2\,(e^2 - f^2) + 2\operatorname{ctg}\varphi^3 \,.\, e^2 \operatorname{tg}\lambda\,[e^4 - f^2 + \operatorname{tg}\lambda^2\,(1 - e^2 f^2)] + 2\operatorname{ctg}\varphi \operatorname{tg}\lambda\,(e^2 - f^2)$$
$$+ \operatorname{tg}\lambda\,(1 - f^2) = 0.$$

Die Winkel φ, welche dieser Gleichung genügen, lassen sich an den Fig. 5 construiren, wie am Ende des § 28 auseinandergesetzt ist. Nur sind, da die biquadratische Gleichung auch für die nur geometrischen Lösungen gilt, noch die Durchschnitte mit dem äußeren Curvenzweige zu berücksichtigen. Ziehen wir nun im ersten Quadranten einen Radius, so trifft dieser stets den

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Curvenzweig (E_2, K_4). Zu dem Durchschnittspunkte gehört ein Durchmesser des zweiten und vierten Quadranten. Es giebt demnach stets einen Winkel im zweiten Quadranten, welcher der Gleichung genügt; die Gleichung hat also stets eine negative Wurzel, welche aber nur geometrische Bedeutung hat. Die Durchschnitte des unter dem Winkel λ im ersten Quadranten gezogenen Radius mit den inneren Curvenzweigen **Ia** und **Ib** bestimmen die Anzahl der übrigen reellen Wurzeln. Fassen wir das, was § 29 über die Anzahl und Beschaffenheit der Durchschnitte für $b^2 - ac = 0$, $b^2 - ac < 0$, $b^2 - ac > 0$ gesagt ist, zusammen, so ergiebt sich Folgendes über die Beschaffenheit der Wurzeln der biquadratischen Gleichung:

I. Fall: $b^2 - ac = 0$, oder: $e - f^2 = 0$.

Die Gleichung hat zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative.

II. Fall: $b^2 - ac < 0$, oder: $e - f^2 < 0$.

Die Gleichung hat für $\lambda > \Lambda$ und für $\lambda < \lambda_0$ nur zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative;

für $\lambda = \Lambda$ und für $\lambda = \lambda_0$ vier reelle Wurzeln, eine negative und drei positive, von denen jedoch zwei gleich sind;

für $\lambda \begin{matrix} > \Lambda \\ < \lambda_0 \end{matrix}$ vier reelle Wurzeln, eine negative und drei positive.

III. Fall: $b^2 - ac > 0$, oder: $e - f^2 > 0$.

Die biquadratische Gleichung hat

für $\lambda < \lambda_0$ und für $\lambda > \Lambda$ zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative;

für $\lambda = \lambda_0$ und für $\lambda = \Lambda$ vier reelle Wurzeln, eine negative und drei positive, von denen jedoch zwei einander gleich sind;

für $\lambda \begin{matrix} > \lambda_0 \\ < \Lambda \end{matrix}$ vier relle Wurzeln, eine negative und drei positive.

Die negative Wurzel hat nur geometrische Bedeutung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf