Ueber das

Zusammenfallen der beiden gebrochenen Strahlen

in

einaxigen und zweiaxigen Krystallen der Richtung nach.

Ein Beitrag zur theoretischen Optik

von

Carl Cavan.

(Erster und zweiter Abschnitt.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In Grunert's Archiv habe ich vor Kurzem das Problem behandelt, in welchem Falle der ordentlich und der außerordentlich gebrochene Strahl in einarigen Krystallen der Richtung nach zusammenfallen. Der Gegenstand ist seitdem von mir weiter verfolgt und das Problem auch auf zweiarige Krystalle ausgedehnt worden. Daß in der vorliegenden Abhandlung die Untersuchung für einarige Krystalle noch einmal gemacht wird, ist einerseits der Vollständigkeit halber geschehen, anderseits der mannigfachen Zusätze wegen, zu denen ich besonders die durch die geometrische Anschauung gewonnenen Resultate rechne.

Die optisch ein- und zweiarigen Krystalle zerlegen bekanntlich einen auffallenden Lichtstrahl im allgemeinen in zwei Strahlen. In den einarigen Krystallen folgt der eine der gebrochenen Strahlen stets den gewöhnlichen Brechungsgesetzen, der andere dagegen liegt im allgemeinen außerhalb der Einfallsebene und hat kein constantes Brechungsverhältniß; der erste Strahl heißt deshalb der ordentlich gebrochene, der andere der außerordentlich gebrochene Strahl. In den zweiarigen Krystallen dagegen folgen beide Strahlen, in welche ein auffallender beim Eindringen in den Krystall zerlegt wird, außerordentlichen Brechungsgesetzen.

Ausgehend von der allgemeinen Huyghens'schen Construction vermittelst der Wellenfläche habe ich in der folgenden Abhandlung es unternommen, die Bedingungen zu untersuchen, welche stattfinden müssen, damit die beiden gebrochenen Strahlen der Richtung nach zusammenfallen, und zwar ist das Problem für einarige Krystalle ganz allgemein behandelt, für die zweiarigen dagegen nur unter der Voraussetzung, daß die gebrochenen Strahlen in der Einfallsebene liegen. Dies muß bei den einarigen Krystallen ohnehin der Fall sein, da der ordentlich gebrochene Strahl stets in der Einfallsebene liegt.

In dem folgenden Abschnitte soll zunächst die allgemeine Bedingung für die Lage der Einfallsebene aufgestellt werden, unter welcher die beiden Strahlen der Richtung nach zusammenfallen können.

Erster Abschnitt.

§ 1. Zur Auffindung der beiden gebrochenen Strahlen dient die Huyghens'sche Construction.

Um den Punkt, in welchem der einfallende Lichtstrahl die Oberfläche des Krystalls trifft, construire man die Wellenfläche desselben mit den Dimensionen, wie sie der Zeiteinheit entsprechen, lege durch jenen Punkt eine zum einfallenden Strahle und zur Einfallsebene senkrechte Ebene, ziehe zu der Durchschnittsgeraden beider Ebenen bis zur Krystallfläche eine Senkrechte in der Einfallsebene, so daß diese Senkrechte gleich der Geschwindigkeit des Lichts im vorhergehenden Medium ist. Durch den Punkt, in welchem die Senkrechte die Krystallfläche trifft, lege man eine Gerade senkrecht zur Einfallsebene und durch diese Senkrechte an die Wellenfläche die beiden Tangentialebenen, welche in den Krystall fallen. Die Radien nach den beiden Berührungspunkten bestimmen die Richtungen der beiden gebrochenen Strahlen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn nun, wie unser Problem fordert, die gebrochenen Strahlen der Richtung nach zusammenfallen, so müssen die nach den Berührungspunkten gezogenen Radien ebenfalls der Richtung nach zusammenfallen. Da jedoch auch der einfallende Strahl vermittelst der umgekehrten Construction leicht aus dem gebrochenen und der Brechungsebene gefunden werden kann, so werden wir ihn von jetzt ab ganz außer Acht lassen und nur die Lage der gebrochenen Strahlen und der Brechungsebene, oder zunächst der Einfallsebene, berücksichtigen, für welche ein einfallender Lichtstrahl nicht zerlegt wird.

§ 2. Es seien a, b, c die Halbaren der Wellenfläche eines zweiaxigen Krystalls, so ist ihre Gleichung bezogen auf den Mittelpunkt als Anfangspunkt in rechtwinkligen Coordinaten:

$$F = (x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2) - [a^2x^2(b^2+c^2)+b^2y^2(a^2+c^2)+c^2z^2(a^2+b^2)]+a^2b^2c^2 = 0. \quad (1.)$$

Wir denken uns vom Mittelpunkte aus eine Gerade gezogen, welche die Richtung angeben soll, nach welcher der gebrochene Strahl nicht zerlegt wird. Die Gerade trifft die Wellenfläche in zwei Punkten, deren Coordinaten wir bezeichnen mit x', y', z' und x'', y'', z''; die zugehörigen Radien heißen r' und r''. Bildet nun die Gerade mit den Halbaren die Winkel α, β, γ, so ist:

$$(2.)\quad \begin{cases} x' = r'\cos\alpha,\ y' = r'\cos\beta,\ z' = r'\cos\gamma; \\ x'' = r''\cos\alpha,\ y'' = r''\cos\beta,\ z'' = r\cos\gamma. \end{cases}$$

Um die Brechungsebene und die Einfallsebene zu bestimmen, hat man in den Punkten (x', y', z') und (x'', y'', z'') an die Wellenfläche die Tangentialebenen zu legen. Die durch den Mittelpunkt und den Durchschnitt der beiden Tangentialebenen gelegte Ebene ist die Brechungsebene, und die durch den Mittelpunkt senkrecht zum Durchschnitte der Tangentialebenen gelegte Ebene ist die Einfallsebene. Die Lage dieser letzten Ebene wollen wir jetzt näher bestimmen.

Aus der Gleichung (1.) folgt für die partiellen Differentialquotienten nach den drei Veränderlichen:

$$\frac{dF}{dx} = 2x\left\{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+a^2(x^2+y^2+z^2) - a^2(b^2+c^2)\right\},$$

$$\frac{dF}{dy} = 2y\left\{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+b^2(x^2+y^2+z^2) - b^2(a^2+c^2)\right\},$$

$$\frac{dF}{dz} = 2z\left\{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+c^2(x^2+y^2+z^2) - c^2(a^2+b^2)\right\}.$$

Demnach erhalten wir mit Rücksicht auf die für algebraische Flächen mögliche Reduction als Gleichung der Tangentialebene im Punkte (x', y', z'):

$$\left.\begin{aligned} &xx'\{a^2x'^2+b^2y'^2+c^2z'^2+a^2(x'^2+y'^2+z'^2)-a^2(b^2+c^2)\} \\ &+yy'\{a^2x'^2+b^2y'^2+c^2z'^2+b^2(x'^2+y'^2+z'^2)-b^2(a^2+c^2)\} \\ &+zz'\{a^2x'^2+b^2y'^2+c^2z'^2+c^2(x'^2+y'^2+z'^2)-c^2(a^2+b^2)\} \\ &-\{a^2x'^2(b^2+c^2)+b^2y'^2(a^2+c^2)+c^2z'^2(a^2+b^2)\}+2a^2b^2c^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Setzen wir die Werthe aus Gleichung (2) ein, so wird die Gleichung der Tangentialebene im Punkte (x', y', z') mit Rücksicht auf $\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2 = 1$:

$$\left.\begin{aligned} &xr'\cos\alpha\ \{r'^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\cos\beta^2+c^2\cos\gamma^2)+a^2r'^2-a^2(b^2+c^2)\} \\ &+yr'\cos\beta\ \{r'^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\cos\beta^2+c^2\cos\gamma^2)+b^2r'^2-b^2(a^2+c^2)\} \\ &+zr'\cos\gamma\ \{r'^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\cos\beta^2+c^2\cos\gamma^2)+c^2r'^2-c^2(a^2+b^2)\} \\ &-r'^2\{a^2\cos\alpha^2(b^2+c^2)+b^2\cos\beta^2(a^2+c^2)+c^2\cos\gamma^2(a^2+b^2)\}+2a^2b^2c^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zur Abkürzung setzen wir:

$$a^2 \cos\alpha^2 + b^2 \cos\beta^2 + c^2 \cos\gamma^2 = A,$$

$$-r'^2 \{a^2 \cos\alpha^2 (b^2 + c^2) + b^2 \cos\beta^2 (a^2 + c^2) + c^2 \cos\gamma^2 (a^2 + b^2)\} = Br'^2;\ 2a^2 b^2 c^2 = C,$$

dann ist die Gleichung der Tangentialebene im Punkte (x', y', z'):

$$\left.\begin{array}{l} x r' \cos\alpha \ \{(A + a^2) r'^2 - a^2 (b^2 + c^2)\} + y r' \cos\beta \ \{(A + b^2) r'^2 - b^2 (a^2 + c^2)\} \\ + z r' \cos\gamma \ \{(A + c^2) r'^2 - c^2 (a^2 + b^2)\} + Br'^2 + C \end{array}\right\} = 0, \quad (3.)$$

und analog die Gleichung der Tangentialebene im Punkte (x'', y'', z''):

$$\left.\begin{array}{l} x r'' \cos\alpha \ \{(A + a^2) r''^2 - a^2 (b^2 + c^2)\} + y r'' \cos\beta \ \{(A + b^2) r''^2 - b^2 (a^2 + c^2)\} \\ + z r'' \cos\gamma \ \{(A + c^2) r''^2 - c^2 (a^2 + b^2)\} + Br''^2 + C \end{array}\right\} = 0. \quad (4.)$$

Bezeichnen wir für den Augenblick die Coefficienten der Reihe nach durch l, m, n, p und l', m', n', p', so lassen sich die Gleichungen der beiden Tangentialebenen kürzer schreiben:

$$l x + m y + n z + p = 0,$$
$$l' x + m' y + n' z + p' = 0.$$

Für die Durchschnittsgerade der Tangentialebenen ergiebt sich hieraus:

$$x = \frac{mn' - m'n}{lm' - l'm} \cdot z + \frac{mp' - m'p}{lm' - l'm},$$

$$y = \frac{l'n - ln'}{lm' - l'm} \cdot z + \frac{l'p - lp'}{lm' - l'm}.$$

Diese Gerade ist nun aber offenbar parallel der im Mittelpunkte zur Einfallsebene gezogenen Senkrechten. Die Gleichung der Normale der Einfallsebene ist mithin:

$$x = \frac{mn' - m'n}{lm' - l'm} z, \quad y = \frac{l'n - ln'}{lm' - l'm} z,$$

oder symmetrischer geschrieben:

$$\frac{x}{mn' - m'n} = \frac{y}{nl' - n'l} = \frac{z}{lm' - l'm}.$$

Für die Cosinusse der Winkel λ, μ, ν, welche die Normale mit den Coordinatenaxen bildet, hat man also:

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = mn' - m'n : nl' - n'l : lm' - l'm.$$

Setzen wir für l, m, n, l', m', n' ihre Werthe, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} mn' - m'n &= r' r'' \cos\beta \cos\gamma \ \{(A + b^2) r'^2 - b^2 (a^2 + c^2)\} \ \{(A + c^2) r''^2 - c^2 (a^2 + b^2)\} \\ &- r' r'' \cos\beta \cos\gamma \ \{(A + b^2) r''^2 - b^2 (a^2 + c^2)\} \ \{(A + c^2) r'^2 - c^2 (a^2 + b^2)\} \\ &= r' r'' \cos\beta \cos\gamma \ (r''^2 - r'^2) (c^2 - b^2) (Aa^2 - b^2 c^2) \end{aligned}$$

Analog erhält man:

$$nl' - l'n = r' r'' \cos\alpha \cos\gamma \ (r''^2 - r'^2) \ (a^2 - c^2) \ (Ab^2 - a^2 c^2),$$
$$lm' - l'm = r' r'' \cos\alpha \cos\beta \ (r''^2 - r'^2) \ (b^2 - a^2) \ (Ac^2 - a^2 b^2).$$

Demnach ergiebt sich, mit Unterdrückung des gemeinschaftlichen Factors $r' r'' (r''^2 - r'^2)$,

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = \cos\beta \cos\gamma \ (c^2 - b^2) \ (Aa^2 - b^2 c^2) : \cos\alpha \cos\gamma (a^2 - c^2) \ (Ab^2 - a^2 c^2)$$
$$: \cos\alpha \cos\beta \ (b^2 - a^2) \ (Ac^2 - a^2 b^2). \quad (5.)$$

§ 3. Untersuchen wir zunächst, welche besondere Lage die Einfallsebene für die einaxigen Krystalle hat, wenn die gebrochenen Strahlen der Richtung nach zusammenfallen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Wellenfläche der einarigen Krystalle erhält man aus der der zweiarigen, wenn zwei der Axen gleich gesetzt werden. Nehmen wir also etwa die Richtung der x-Axe als die Hauptaxe eines einarigen Krystalls, so ist zu setzen $b = c$.

Man erhält demnach

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = 0 : \cos\alpha\cos\gamma\,(a^2 - b^2)\,b^2\,(A - a^2) : \cos\alpha\cos\beta\,(b^2 - a^2)\,b^2\,(A - a^2)$$
$$= 0 : -\cos\gamma : \cos\beta.$$

Hieraus folgt $\cos\lambda = 0$. Die Normale der Einfallsebene steht also senkrecht zur x-Axe, die Einfallsebene geht demnach durch die Hauptaxe des Krystalls.

Wir haben mithin gefunden, daß für einarige Krystalle nur dann ein Zusammenfallen der beiden gebrochenen Strahlen der Richtung nach stattfinden kann, wenn die Einfallsebene durch die Hauptaxe geht, d. h. wenn die Einfallsebene ein Hauptschnitt ist.

Jetzt wollen wir untersuchen, in welchem Falle für zweiarige Krystalle die beiden gebrochenen Strahlen in der Einfallsebene liegen.

Für diesen Fall müssen die Richtungen der gebrochenen Strahlen und die Normale der Einfallsebene senkrecht zu einander sein. Dies findet statt, wenn:

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (5):

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,\{(Aa^2 - b^2c^2)(c^2 - b^2) + (Ab^2 - a^2c^2)(a^2 - c^2) + (Ac^2 - a^2b^2)(b^2 - a^2)\} = 0, \text{ oder:}$$
$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,\{A(a^2c^2 - a^2b^2 + a^2b^2 - b^2c^2 + b^2c^2 - a^2c^2) - [b^2c^2(c^2 - b^2) + a^2c^2(a^2 - c^2)$$
$$+ a^2b^2(b^2 - a^2)]\} = 0, \text{ oder:}$$
$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) = 0.$$

Mithin muß sein entweder $\cos\alpha = 0$, oder $\cos\beta = 0$, oder $\cos\gamma = 0$, d. h. der gebrochene Strahl muß mit einer der Coordinatenaxen einen Winkel von 90° bilden, die Einfallsebene muß also eine der Coordinatenebenen oder ein Hauptschnitt sein.

Die eben hergeleiteten Resultate sind nur ein besonderer Fall der allgemeinen Regel, daß nur dann beide gebrochenen Strahlen, auch wenn sie nicht der Richtung nach zusammenfallen, gleichzeitig in der Einfallsebene liegen, wenn diese ein Hauptschnitt ist. Wir haben es indessen für passend gehalten, den Beweis des Satzes, soweit er unser Problem angeht, zu geben, zumal es durch eine wenig complicirte Rechnung geschehen konnte.

§. 4. Die Wellenfläche eines einarigen Krystalls setzt sich bekanntlich zusammen aus einer Kugel und aus einem Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe in die Hauptaxe des Krystalls fällt und gleich dem Durchmesser der Kugel ist. Nennen wir die Länge der halben Rotationsaxe a und die des Aequatorialhalbmessers b, so trifft ein Hauptschnitt die Wellenfläche in einem Kreise vom Radius a und in einer Ellipse mit den Halbaxen a und b. Nimmt man die Richtung der Hauptaxe zur y-Axe und die darauf senkrechte Richtung zur x-Axe, so sind die Gleichungen von Kreis und Ellipse, in welchen die Wellenfläche von dem Hauptschnitte getroffen wird:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2, \\ a^2x^2 + b^2y^2 &= a^2b^2 \end{aligned}\right\} \quad (1.)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man in der Gleichung (1) von § 2 $z = 0$, so erhält man leicht für den Durchschnitt des Hauptschnitts xy mit der Wellenfläche eines zweiaxigen Krystalls die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= c^2, \\ a^2x^2 + b^2y^2 &= a^2b^2. \end{aligned}\right\} \quad (2.)$$

Für den Durchschnitt des Hauptschnitts yz erhält man:

$$\left.\begin{aligned} y^2 + z^2 &= a^2, \\ b^2y^2 + c^2z^2 &= b^2c^2. \end{aligned}\right\} \quad (3.)$$

Für den Durchschnitt des Hauptschnitts xz ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + z^2 &= b^2, \\ a^2x^2 + c^2z^2 &= a^2c^2. \end{aligned}\right\} \quad (4.)$$

Die Durchschnitte eines jeden Hauptschnitts bestehen demnach aus einem Kreise und einer Ellipse, die nach der verschiedenen Größe der Radien und Axen auch eine verschiedene gegenseitige Lage haben, worüber jedoch erst später bei der Discussion der einzelnen Hauptschnitte das Nähere angegeben werden soll.

§ 5. Für die ganze fernere Untersuchung setzen wir Folgendes fest:

Die Richtungen der Coordinatenaxen denken wir uns so bestimmt, daß die positive Ordinatenaxe außerhalb, die negative also innerhalb des Krystalls liegt, und daß die positive Abscissenaxe in den Krystall fällt, die negative also außerhalb desselben liegt. Der zweite Quadrant liegt demnach ganz außerhalb, der vierte ganz innerhalb des Krystalls, der erste und dritte Quadrant liegen theilweise außer-, theilweise innerhalb des Krystralls, doch so, daß der vom Krystalle nicht erfüllte Raum des ersten und der vom Krystalle erfüllte Raum des dritten Quadranten congruent sind und symmetrisch diametral gegenüberliegen. Ebenso umgekehrt.

Ferner bedeute φ den Winkel, den der gebrochene Strahl mit der positiven Abscissenaxe bildet, und λ bezeichne die Neigung, welche die Brechungsebene (oder ihr Durchschnitt mit dem Hauptschnitte) gegen die positive Abscissenaxe hat. Bei der eben festgesetzten Lage des Coordinatensystems ist also λ stets als spitzer Winkel anzusehen.

§ 6. Für die Hauptschnitte vereinfacht sich die Huyghens'sche Construction zu dem geometrischen Problem, solche der Ellipse und dem Kreise gemeinschaftlichen Durchmesser zu suchen, daß die Durchschnittspunkte der an ihren Endpunkten gezogenen Tangenten sich auf dem Durchmesser schneiden, welcher mit der positiven Abscissenaxe den Winkel λ bildet. Für das physikalische Problem sind natürlich die Tangenten an derselben Seite des Durchmessers zu ziehen. Die nur dem geometrischen Problem genügenden Tangenten an verschiedenen Seiten des Durchmessers berücksichtigen wir zunächst gar nicht, und sondern sie da aus, wo sie etwa von selbst in der Rechnung auftreten.

Ferner ist klar, daß, wenn ein Durchmesser der Bedingung genügt, daß die Tangenten an den Endpunkten der einen Seite sich auf dem ersten Durchmesser schneiden, auch der Durchschnitt der Tangenten an den Endpunkten der anderen Seite auf jenem Durchmesser liegt. Es wird demnach hinreichen, nur die Radien zweier anstoßenden Quadranten zu suchen, welche der Aufgabe Genüge leisten, etwa die des ersten und vierten Quadranten; die Lösungen im zweiten und dritten Quadranten sind damit zugleich gegeben.

Endlich sind diejenigen Lösungen, welche Radien außerhalb des Krystalls ergeben, für das physikalische Problem zu verwerfen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zweiter Abschnitt.

Einaxige Krystalle.

§ 7. Die § 4 hergeleiteten Gleichungen des Durchschnitts eines Hauptschnitts mit der Wellenfläche eines einarigen Krystalls sind:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \\ a^2 x^2 + b^2 y^2 &= a^2 b^2 \end{aligned}\right\} \quad (1.)$$

Kreis und Ellipse berühren sich in den Endpunkten der Axe 2a, s. d. Fig. Wenn nun $a > b$, so liegt die Ellipse ganz innerhalb des Kreises, der Krystall ist ein positiver. Ist dagegen $a < b$, so liegt der Kreis ganz innerhalb der Ellipse, und der Krystall ist ein negativer. Wir behandeln den Fall des negativen Krystalls, nehmen also an $a < b$. Die Rechnung für den positiven Krystall ist nicht wesentlich verschieden.

Die Coordinaten des Endpunktes eines Ellipsenradius, welcher mit der positiven x-Axe den Winkel φ bildet, sind:

$$x' = \frac{a\,b \cos\varphi}{\sqrt{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2}},\ y' = \frac{a\,b \sin\varphi}{\sqrt{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2}}.$$

Setzen wir zur Abkürzung: $\sqrt{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2} = w$, wo w als wesentlich positiv anzusehen ist, so erhalten wir:

$$x' = \frac{a\,b \cos\varphi}{w},\ y' = \frac{a\,b \sin\varphi}{w}.$$

Die Coordinaten x'', y'' des Endpunktes des Kreisradius sind:

$$x'' = a \cos\varphi,\ y'' = a \sin\varphi.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte (x', y') der Ellipse ist demnach:

$$a^2 x \cos\varphi + b^2 y \sin\varphi = a\,b\,w; \quad (2.)$$

und die Gleichung der Tangente im Punkte (x'', y'') des Kreises:

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = a. \quad (3.)$$

Daraus ergiebt sich für die Coordinaten des Durchschnitts beider Tangenten:

$$x = a\,b \frac{b - w}{(b^2 - a^2) \cos\varphi},\ y = a \frac{b\,w - a^2}{(b^2 - a^2) \sin\varphi} \quad (4.)$$

Dieser Durchschnitt soll nun liegen auf dem Durchmesser, welcher mit der positiven x-Axe den Winkel λ bildet, und dessen Gleichung also ist:

$$y = x \,.\, \mathrm{tg}\,\lambda.$$

Mithin muß sein:

$$a \frac{b\,w - a^2}{(b^2 - a^2) \sin\varphi} = a\,b \frac{b - w}{(b^2 - a^2) \cos\varphi} \mathrm{tg}\,\lambda$$

Hieraus folgt:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b\,w - a^2}{b\,(b - w)} \mathrm{ctg}\,\lambda, \quad (5.)$$

$$\text{und: } \mathrm{tg}\,\lambda = \frac{b\,w - a^2}{b\,(b - w)} \mathrm{ctg}\,\varphi. \quad (6.)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es war $w = \sqrt{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2}$, mithin ist, da unserer Annahme nach $b > a$, der größte Werth des w gleich b und der kleinste gleich a. Demnach ist $bw - a^2 > ab - a^2 > 0$, und $b - w \geqq b - b > 0$. Da nun nach dem, was § 5. festgesetzt worden ist, λ stets als spitzer Winkel, ctg λ also als positiv anzusehen ist, so wird der Werth von tg φ nach Gleichung (5) stets positiv sein. Die gebrochenen Strahlen können demnach nur im ersten und dritten Quadranten liegen. Es reicht jedoch nach § 6 zunächst hin, nur die Lösungen des ersten Quadranten zu betrachten.

Aus der Gleichung (6) ergiebt sich leicht:

$$\text{Für } \varphi = 0^\circ \text{ wird } \lambda = 90^\circ,$$
$$\text{für } \varphi = 90^\circ \text{ wird } \lambda = 90^\circ.$$

Daraus folgt, daß λ ein Minimum haben muß. Um dieses Minimum, oder zunächst den entsprechenden Werth des φ zu erhalten, setzen wir den Differentialquotienten des Ausdrucks (6) für tg λ gleich Null und erhalten:

$$-\frac{bw - a^2}{b - w} \cdot \frac{1}{\sin\varphi^2} + \frac{b(b-w) + bw - a^2}{(b-w)^2} \operatorname{ctg}\varphi \frac{dw}{d\varphi} = 0, \text{ oder:}$$

$$-\frac{1}{\sin\varphi^2}(bw - a^2)(b - w) + (b^2 - a^2) \operatorname{ctg}\varphi \frac{dw}{d\varphi} = 0.$$

Nun ist $\frac{dw}{d\varphi} = \frac{d\sqrt{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2}}{d\varphi} = \frac{(b^2 - a^2)\sin\varphi\cos\varphi}{w}$; man erhält also durch Einsetzung dieses Werthes:

$$-\frac{(bw - a^2)(b - w)}{\sin\varphi^2} + \frac{(b^2 - a^2)^2 \sin\varphi \cos\varphi \operatorname{ctg}\varphi}{w} = 0, \text{ oder:}$$

$$-(bw - a^2)(b - w)\, w + (b^2 - a^2)^2 \sin\varphi^2 \cos\varphi^2 = 0.$$

Aus $w = \sqrt{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2}$ folgt:

$$\sin\varphi^2 = \frac{w^2 - a^2}{b^2 - a^2}; \quad \cos\varphi^2 = \frac{b^2 - w^2}{b^2 - a^2}. \qquad (7.)$$

Also erhalten wir:

$$-(bw - a^2)(b - w)\, w + (w^2 - a^2)(b^2 - w^2) = 0, \text{ oder}$$

$$(b - w)\,[bw^2 - a^2 w - bw^2 + a^2 b - w^3 + a^2 w] = 0, \text{ oder:}$$

$$(b - w)(a^2 b - w^3) = 0.$$

Daraus folgt entweder $w = b$, oder $w = \sqrt[3]{a^2 b}$. Für $w = b$ erhält man aber $\varphi = 90^\circ$, also gerade das Maximum; für das Minimum wird also gelten $w = \sqrt[3]{a^2 b}$.

Für den entsprechenden Werth des φ, den wir mit Φ bezeichnen, gilt demnach:

$$\operatorname{tg}\Phi^2 = \frac{\sin\Phi^2}{\cos\Phi^2} = \frac{w^2 - a^2}{b^2 - w^2} = \frac{a\sqrt[3]{ab^2} - a^2}{b^2 - a\sqrt[3]{ab^2}}$$

Für das Minimum von λ, das wir mit Λ bezeichnen wollen, folgt also:

$$\operatorname{tg}\Lambda = \frac{b\sqrt[3]{a^2 b} - a^2}{b(b - \sqrt[3]{a^2 b})} \cdot \sqrt{\frac{b^2 - a\sqrt[3]{a^2 b}}{a(\sqrt[3]{ab^2} - a)}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir erweitern den ersten Bruch mit $(b - \varrho \sqrt[3]{a^2 b})(b - \varrho^2 \sqrt[3]{a^2 b})$, den Radicandus mit $(\sqrt[3]{a b^2} - \varrho a)(\sqrt[3]{a b^2} - \varrho^2 a)$, wo ϱ und ϱ^2 die beiden imaginären dritten Wurzeln der Einheit sind. Führt man die Multiplicationen aus, so erhält man:

$$\operatorname{tg} \varDelta = \frac{(b^2 - a^2)(b\sqrt[3]{a^2 b} + a\sqrt[3]{a b^2})}{b^2 (b^2 - a^2)} \cdot \sqrt{\frac{(b^2 - a^2)(b\sqrt[3]{a^2 b} + a\sqrt[3]{a b^2})}{a^2 (b^2 - a^2)}}$$

$$= \frac{b\sqrt[3]{a^2 b} + a\sqrt[3]{a b^2}}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{b\sqrt[3]{a^2 b} + a\sqrt[3]{a b^2}}{a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b\sqrt[3]{a^2 b} + a\sqrt[3]{a b^2})^3}{a^2 b^4}}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{b^{\frac{4}{3}} a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}}}\right\}^3}$$

$$= \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^3}$$

$$= \left\{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$(8.) \qquad \operatorname{tg} \varDelta = (1 + e^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}},$$

indem für $\frac{a}{b}$ der Kürze halber e gesetzt ist.

§ 8. Aus dem, was wir vorher auseinandergesetzt haben, folgt, daß, während φ von 0° bis 90° wächst, λ von 90° bis $\varDelta$ geht und von hier zu 90° zurückkehrt. Daraus ist ersichtlich, daß zu einem bestimmten Werthe des λ zwei Werthe φ im ersten Quadranten gehören. Die Verlängerungen der zugehörigen Radien im dritten Quadranten erfüllen ebenfalls die Bedingung, daß die Tangenten ihrer Endpunkte sich auf dem Durchmesser schneiden, welcher mit der positiven x-Axe den Winkel λ bildet. Nun sieht man aber, daß, wenn ein Radius in den Krystall fällt, seine Verlängerung nach dem gegenüberliegenden Quadranten außerhalb des Krystalls liegt. Ferner ist ersichtlich, daß der vom Krystalle nicht erfüllte Raum des ersten Quadranten und der vom Krystalle erfüllte Raum des dritten Quadranten congruent sind und symmetrisch einander gegenüberliegen. Um also die Richtungen zu finden, nach denen der gebrochene Strahl keine Zerlegung erleidet, hat man zunächst die Werthe φ des ersten Quadranten aufzusuchen und dann diejenigen, welche Radien außerhalb des Krystalls liefern, nach dem dritten Quadranten zu übertragen.

Für solche Radien des ersten Quadranten, welche außerhalb des Krystalls liegen, müßte $\varphi > \lambda$ sein. Da nun $\lambda = 90°$ wird für $\varphi = 0°$, so müßte, bevor $\varphi > \lambda$ wird, zunächst $\varphi = \lambda$, also auch $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \lambda$ werden. Für diesen Fall aber folgt aus Gleichung (5):

$$\operatorname{tg} \varphi^2 = \frac{bw - a^2}{b(b - w)}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nun ist aber nach Gleichung (7): $\operatorname{tg}\varphi^2 = \frac{w^2 - a^2}{b^2 - w^2}$, also müßte sein:

$$\frac{w^2 - a^2}{b^2 - w^2} = \frac{b\,w - a^2}{b\,(b - w)}.$$

Hieraus würde zunächst folgen: $w = b$, also $\varphi = 90°$.

Ferner hätte man:

$$b\,(w^2 - a^2) = (b + w)\,(bw - a^2),$$

$$\text{oder: } w\,(b^2 - a^2) = 0,$$

woraus folgen würde: $w = 0$, was nicht angeht.

Wir sehen demnach, daß für alle Werthe des φ zwischen $0°$ und $90° \lambda$ stets größer ist als der zugehörige Werth des φ. Mithin giebt es Lösungen des physikalischen Problems nur im ersten Quadranten.

Wir haben also folgendes Resultat:

Für jede Schnittfläche eines einaxigen Krystalls, die unter dem Winkel $90° - \lambda$ gegen die Hauptaxe geneigt ist, giebt es im allgemeinen zwei Richtungen im ersten Quadranten, nach denen keine Zerlegung des gebrochenen Strahls stattfindet, vorausgesetzt, daß λ größer ist als der Grenzwinkel Λ, der bestimmt wird durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\Lambda = (1 + e^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

§ 9. Die Gleichung (6) dient dazu, für eine gegebene Richtung φ des gebrochenen Strahls die Neigung λ des Krystallschnitts gegen die $+$ x-Axe zu berechnen. Für die umgekehrte Aufgabe: φ zu berechnen, wenn λ gegeben ist, haben wir φ aus derselben Gleichung auszudrücken.

Aus der Gleichung (6.) folgt zunächst:

$$b\,w\,(\operatorname{tg}\lambda + \operatorname{ctg}\varphi) = b^2 \operatorname{tg}\lambda + a^2 \operatorname{ctg}\varphi.$$

Setzen wir hierin $w = \sqrt{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2} = \sqrt{\frac{a^2 \operatorname{ctg}\varphi^2 + b^2}{1 + \operatorname{ctg}\varphi^2}}$ und quadriren, so ergiebt sich:

$$b^2\,(a^2 \operatorname{ctg}\varphi^2 + b^2)\,(\operatorname{tg}\lambda + \operatorname{ctg}\varphi)^2 = (b^2 \operatorname{tg}\lambda + a^2 \operatorname{ctg}\varphi)^2\,(1 + \operatorname{ctg}\varphi^2).$$

Führen wir die Rechnungen aus und fassen die gleichnamigen Glieder zusammen, so folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{ctg}\varphi^4 \,.\, a^2\,(b^2 - a^2) + 2\operatorname{ctg}\varphi^3 \,.\, \operatorname{tg}\lambda\,(a^2 b^2 - a^2 b^2) + \operatorname{ctg}\varphi^2 \,.\, (b^2 - a^2)\,(b^2 + a^2 - b^2 \operatorname{tg}\lambda^2) \\ \quad + 2\operatorname{ctg}\varphi \,.\, b^2 \operatorname{tg}\lambda\,(b^2 - a^2) + b^4 \operatorname{tg}\lambda^2 - b^4 \operatorname{tg}\lambda^2\end{array}\right\} = 0.$$

Die constanten Glieder heben sich, demnach ist eine Wurzel der Gleichung $\operatorname{ctg}\varphi = 0$, also $\varphi = 90°$ für jeden Werth des λ. Das heißt: in der Richtung der Hauptaxe findet keine Doppelbrechung statt, welches auch die Neigung der Brechungsebene gegen die Hauptaxe sein mag.

Die letzte Gleichung geht nun über in:

$$\operatorname{ctg}\varphi^3 \,.\, a^2 - \operatorname{ctg}\varphi\,[b^2 \operatorname{tg}\lambda^2 - (a^2 + b^2)] + 2\,b^2 \operatorname{tg}\lambda = 0.$$

Dividiren wir mit b^2 und setzen wie früher $\frac{a}{b} = e$, so ergiebt sich:

$$\operatorname{ctg}\varphi^3 \,.\, e^2 - \operatorname{ctg}\varphi\,[\operatorname{tg}\lambda^2 - (1 + e^2)] + 2\operatorname{tg}\lambda = 0, \text{ oder:}$$

$$\operatorname{ctg}\varphi^3 - \operatorname{ctg}\varphi \,.\, \frac{\operatorname{tg}\lambda^2 - (1 + e^2)}{e^2} + \frac{2\operatorname{tg}\lambda}{e^2} = 0. \qquad (9.)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Beschaffenheit der Wurzeln dieser Gleichung hängt ab von den Zeichen des Ausdrucks

$$(10.)\quad \left(\frac{2\,\mathrm{tg}\,\lambda}{e^2}\right)^2 - \frac{4}{27}\left\{\frac{\mathrm{tg}\,\lambda^2 - (1+e^2)}{e^2}\right\}^3.$$

Sehen wir zunächst, in welchem Falle der Ausdruck verschwindet. Dann muß sein:

$$27\,e^2\,\mathrm{tg}\,\lambda^2 - \{\mathrm{tg}\,\lambda^2 - (1+e^2)\}^3 = 0, \text{ oder:}$$

$$(11.)\quad \mathrm{tg}\,\lambda^6 - 3\,\mathrm{tg}\,\lambda^4\,(1+e^2) + 3\,\mathrm{tg}\,\lambda^2\,\{(1+e^2)^2 - 9\,e^2\} - (1+e^2)^3 = 0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf $\mathrm{tg}\,\lambda^2$ vom dritten Grade. Reduciren wir dieselbe auf die Form

$$(12.)\quad u^3 + Pu + Q = 0,$$

so ist zu setzen: $\mathrm{tg}\,\lambda^2 = u + 1 + e^2$,

$$Q = \frac{-54\,(1+e^2)^3 + 81\,(1+e^2)\,\{(1+e^2)^2 - 9e^2\} - 27\,(1+e^2)^3}{27}$$

$$= -27\,e^2\,(1+e^2);$$

$$P = \frac{9\,\{(1+e^2)^2 - 9\,e^2\} - 9\,(1+e^2)^2}{3}$$

$$= -27\,e^2.$$

Die Wurzel der Gleichung (12) ist also nach der Cardanischen Formel:

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left\{27\,e^2\,(1+e^2) + \sqrt{27^2\,e^4\,(1+e^2)^2 - 4\,.\,27^2\,e^6}\right\}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left\{27\,e^2\,(1+e^2) - \sqrt{27^2\,e^4\,(1+e^2)^2 - 4.\,27^2\,e^6}\right\}}$$

$$= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left\{27e^2(1+e^2) + 27e^2\sqrt{(1-e^2)^2}\right\}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left\{27e^2(1+e^2) - 27e^2\sqrt{(1-e^2)^2}\right\}}$$

$$= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\cdot 27\,e^2\,(1+e^2+1-e^2)} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\cdot 27\,e^2\,(1+e^2-1+e^2)}$$

$$= 3\sqrt[3]{e^2} + 3\sqrt[3]{e^4}$$

$$= 3\,e^{\frac{2}{3}} + 3\,e^{\frac{4}{3}}.$$

Dieser Werth ist die einzige reelle Wurzel der Gleichung (12), demnach hat auch die Gleichung (11) nur die eine reelle Wurzel:

$$\mathrm{tg}\,\lambda^2 = u + 1 + e^2 = 1 + 3e^{\frac{2}{3}} + 3e^{\frac{4}{3}} + e^2$$

$$= \left(1 + e^{\frac{2}{3}}\right)^3,$$

$$\mathrm{tg}\,\lambda = \left(1 + e^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Dieser Werth ist also derselbe wie der des Grenzwinkels A, den wir früher (§ 7, Gl. 8) gefunden haben. Da die Gleichung (11) nur eine reelle Wurzel hat, kann der Ausdruck (10) auch nur einmal Null werden und sein Zeichen ändern.

Für $\mathrm{tg}\,\lambda = 0$ wird aber der Ausdruck (10) positiv, demnach bleibt er positiv für alle Werthe des λ von 0° bis A; und für alle Werthe des λ von A bis 90° muß der Aus-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

druck (10) demnach negativ sein. Mithin hat die kubische Gleichung (9) für die Werthe des λ von 0° bis Λ nur eine reelle und zwar negative Wurzel, da das constante Glied stets positiv ist.

Für die Werthe des λ dagegen von Λ bis 90° hat die Gleichung (9) drei reelle Wurzeln, und zwar zwei positive und eine negative, da der Coefficient

$$\operatorname{tg}\lambda^2 - (1+e^2) > (1+e^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} - (1+e^2)$$
$$> 3(e^{\frac{2}{3}} + e^{\frac{4}{3}})$$

positiv ist.

Ist $\lambda = \Lambda$, so hat die kubische Gleichung zwar noch drei reelle Wurzeln, die beiden positiven sind jedoch gleich.

Es könnte auffallen, daß die kubische Gleichung (9), wenigstens für $\lambda \geqq \Lambda$, drei reelle Wurzeln hat, während wir früher (§ 8.) nur zwei Werthe φ gefunden haben, die einem Werthe λ entsprechen. Dieser Widerspruch erledigt sich jedoch durch die Bemerkung, daß die kubische Gleichung auch die Werthe φ giebt, welche nur geometrische Bedeutung haben. Für das allgemeinere geometrische Problem nämlich sind, wie schon früher (§ 6.) erwähnt, auch die Durchmesser zu berücksichtigen, deren an entgegengesetzten Seiten gezogene Tangenten sich auf dem Durchmesser schneiden, welcher mit der positiven x-Axe den Winkel λ bildet. Für einen solchen Durchmesser sind die Coordinaten (§ 7, Gl. 4) der beiden Endpunkte mit entgegengesetzten Zeichen zu versehen. Setzen wir etwa:

$$x' = -\frac{ab\cos\varphi}{w}, \qquad x'' = a\cos\varphi,$$

und

$$y' = -\frac{ab\sin\varphi}{w}, \qquad x'' = a\sin\varphi,$$

so unterscheiden sich diese Werthe von den früheren (§ 7, Gl. 4) nur durch das Vorzeichen von w.

Demnach wird die Gleichung 5 in § 7 übergehen in:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-bw - a^2}{b\,(b+w)}\operatorname{ctg}\lambda. \qquad (13.)$$

Macht man nun diese Gleichung rational, so wird man natürlich zu derselben Gleichung (9) gelangen, die also auch diejenigen Lösungen in sich schließt, welche nur geometrische Bedeutung haben, während die Gleichung (5) nur die physikalischen, die Gleichung (13) nur geometrische Lösungen enthält.

Daraus folgt, daß blos die positiven Wurzeln der Gleichung (9) für das physikalische Problem zu nehmen sind, deren es jedoch nur für $\lambda \geqq \Lambda$ giebt.

§ 10. Das was wir eben durch Rechnung hergeleitet haben, findet seine Bestätigung in der geometrischen Anschauung. Die Durchschnitte sämmtlicher Tangentenpaare an den Endpunkten sämmtlicher gemeinschaftlichen Ellipsen- und Kreisdurchmesser liegen in einer Curve, deren Gleichung wir erhalten durch Elimination von φ und w aus den Gleichungen (4) des § 7:

$$x = ab\,\frac{b-w}{(b^2-a^2)\cos\varphi}; \quad y = a\,\frac{bw-a^2}{(b^2-a^2)\sin\varphi}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Quadriren wir die erste dieser Gleichungen und setzen für $\cos\varphi^2$ seinen Werth $\frac{b^2 - w^2}{b^2 - a^2}$, so ergiebt sich:

$$x^2\,(b^2 - a^2) = \frac{a^2 b^2\,(b - w)^2}{b^2 - w^2},$$

$$x^2\,(b^2 - a^2) = \frac{a^2 b^2 (b - w)}{b + w}.$$

Hieraus folgt:

$$(1.)\qquad w = b \cdot \frac{a^2 b^2 - x^2\,(b^2 - a^2)}{a^2 b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)}.$$

Durch Quadrirung der zweiten Gleichung und die Substitution von $\sin\varphi^2 = \frac{w^2 - a^2}{b^2 - a^2}$ ergiebt sich:

$$(2.)\qquad y^2\,(b^2 - a^2)\,(w^2 - a^2) = a^2\,(bw - a^2)^2.$$

Aus (1) folgt nun:

$$bw - a^2 = b^2 \cdot \frac{a^2b^2 - x^2\,(b^2 - a^2)}{a^2b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)} - a^2$$

$$= \frac{a^2b^4 - b^2x^2\,(b^2 - a^2) - a^4b^2 - a^2x^2\,(b^2 - a^2)}{a^2b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)}$$

$$= (b^2 - a^2)\,\frac{a^2b^2 - x^2\,(b^2 + a^2)}{a^2b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)}.$$

Ferner ist:

$$w^2 - a^2 = b^2 \left[\frac{a^2b^2 - x^2\,(b^2 - a^2)}{a^2b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)}\right]^2 - a^2$$

$$= \frac{[a^2b^3 - bx^2\,(b^2 - a^2)]^2 - [a^3b^2 + ax^2\,(b^2 - a^2)]^2}{[a^2b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)]^2}$$

$$= \frac{[a^2b^3 - bx^2\,(b^2 - a^2) + a^3b^2 + ax^2\,(b^2 - a^2)]\,[a^2b^3 - bx^2\,(b^2 - a^2) - a^3b^2 - ax^2\,(b^2 - a^2)]}{[a^2b^2 + x^2\,(b^2 + a^2)]^2}$$

$$= (b^2 - a^2) \cdot \frac{[a^2b^2 - x^2\,(b - a)^2]\,[a^2b^2 - x^2\,(b + a)^2]}{[a^2b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)]^2}.$$

Setzen wir die eben berechneten Werthe in Gleichung (2) ein, so wird die Gleichung der Curve:

$$y^2\,(b^2 - a^2)^2\,\frac{[a^2b^2 - x^2\,(b - a)^2]\,[a^2b^2 - x^2\,(b + a)^2]}{[a^2b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)]^2} = a^2\,(b^2 - a^2)^2\,\frac{[a^2b^2 - x^2\,(b^2 + a^2)]^2}{[a^2b^2 + x^2\,(b^2 - a^2)]^2},$$

oder:

$$y^2\,[a^2b^2 - x^2\,(b - a)^2]\,[a^2b^2 - x^2\,(b + a)^2] = a^2\,[a^2b^2 - x^2\,(b^2 + a^2)]^2,$$

oder:

$$(3.)\qquad x^4y^2(b^2 - a^2)^2 - x^4a^2(b^2 + a^2)^2 - 2x^2y^2a^2b^2(b^2 + a^2) + 2x^2a^4b^2(b^2 + a^2) + y^2a^4b^4 - a^6b^4 = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Curve ist mithin vom sechsten Grade. Daß dieselbe Asymptoten hat, kann man von vorne herein vermuthen, wenn man folgende Ueberlegung macht. Zieht man für $\varphi = 0^\circ$ an den Durchschnittspunkten der $+x$-Axe mit Kreis und Ellipse die Tangenten, so schneiden dieselben sich in unendlicher Entfernung. Der zugehörige Werth des λ ist 90°. Ferner ist für $\varphi = 90^\circ$ auch $\lambda = 90^\circ$, die beiden Tangenten am Scheitel der kleinen Axe schneiden sich in dem Scheitel. Die Durchschnittspunkte der Tangentenpaare im ersten Quadranten liegen demnach in einem Curvenzweige, der von dem Endpunkte der kleinen Axe in den ersten Quadranten sich erstreckt, aber nach der Seite der positiven x-Axe nicht die Tangente im Durchschnittspunkte des Kreises und der $+x$-Axe überschreitet. —

Um zunächst die Asymptoten zu finden, welche nicht der y-Axe parallel sind, nehmen wir als Gleichung derselben an:

$$y = lx + m. \qquad (4.)$$

Hieraus folgt
$$\frac{y}{x} = l + \frac{m}{x}.$$

Für $x = \infty$ ergiebt sich $\frac{y}{x} = l$.

Wir setzen also, um l zu bestimmen, in die Gleichung (3) ein: $y = lx$ und finden leicht $l = 0$ für $x = \pm\infty$. Setzen wir demnach in die Gleichung der Curve ein: $y = m$, so ergiebt sich, wenn wir blos die Glieder vierter Ordnung hinschreiben:

$$x^4 m^2 (b^2 - a^2)^2 - x^4 a^2 (b^2 + a^2)^2 \mp \cdots = 0.$$

Hieraus folgt für $x = \pm\infty$:

$$m^2 (b^2 - a^2)^2 - a^2 (b^2 + a^2)^2 = 0,$$

also:
$$m = \pm \frac{a(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2}.$$

Mithin erhalten wir durch Substitution der berechneten Werthe von l und m in Gl. (4) zwei Asymptoten parallel der x-Axe, deren Gleichungen sind:

$$y = \pm a \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}. \qquad (5.)$$

Um ferner die Asymptoten zu erhalten, die nicht der x-Axe parallel sind, setzen wir in der Gleichung (3.) $x = ly$ und erhalten $l = 0$ für $y = \pm\infty$.

Setzen wir jetzt ein $x = m$, so ergiebt sich für $y = \pm\infty$:

$$m^4 (b^2 - a^2)^2 - 2 m^2 a^2 b^2 (b^2 + a^2) + a^4 b^4 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$m^2 = \frac{a^2 b^2 (b^2 + a^2) \pm \sqrt{-a^4 b^4 (b^2 - a^2)^2 + a^4 b^4 (b^2 + a^2)^2}}{(b^2 - a^2)^2}$$

$$= \frac{a^2 b^2 (b^2 + a^2) \pm 2 a^3 b^3}{(b^2 - a^2)^2}$$

$$= a^2 b^2 \frac{(b \pm a)^2}{(b^2 - a^2)^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mithin

$$m = \pm \frac{ab}{b \pm a}.$$

Demnach giebt es vier zur y-Axe parallele Asymptoten, deren Gleichungen sind:

$$x = \pm \frac{ab}{b \pm a}. \qquad (6.)$$

Wir wollen noch die Durchschnitte der Curve mit den Coordinaten-Axen berechnen. Setzen wir $x = 0$, so erhalten wir aus der Gleichung (3):

$$y^2 a^4 b^4 - a^6 b^4 = 0, \text{ also } y = \pm a,$$

wie man auch ohne Rechnung hätte finden können. Die Curve berührt den Kreis und die Ellipse an den Enden der kleinen Axe.

Setzen wir $y = 0$, so ergiebt sich aus Gleichung (3):

$$x^4 \cdot a^2 (b^2 + a^2)^2 - 2x^2 \cdot a^4 b^2 (b^2 + a^2) + a^6 b^4 = 0, \text{ also}$$

$$x^2 (b^2 + a^2) - a^2 b^2 = 0, \text{ also}$$

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2}$$

$$= \frac{a^2}{1 + \frac{a^2}{b^2}}.$$

Dieser Werth ist aber offenbar kleiner als a^2, er giebt also einen Punkt der x-Axe innerhalb des Kreises. Dieser Punkt kann mithin keinem reellen Curvenzweige angehören, und wir schließen mithin, daß die x-Axe gar nicht von der Curve getroffen wird.

Die Curve ist dargestellt in der Fig. Sie besteht aus sechs unendlichen Zweigen. Die beiden inneren Zweige, welche Kreis und Ellipse im gemeinschaftlichen Scheitel berühren, sind der Ort der Durchschnitte der Tangenten an derselben Seite der gemeinschaftlichen Durchmesser, und zwar der Ast **I.** für den ersten Quadranten, der Ast **II.** für den zweiten Quadranten u. s. w. Die vier äußeren Zweige sind der Ort der Durchschnitte der Tangenten an entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Durchmesser, und zwar der Zweig (E_2, K_4) für die Durchschnitte der Ellipsentangenten des zweiten und der Kreistangenten des vierten Quadranten, und ähnlich für die übrigen Zweige, wie es in der Figur angedeutet ist.

Es läßt sich nun auch bestimmen, welchen Zweigen die durch die Gleichungen (5) und (6) ausgedrückten Asymptoten angehören.

Für die Coordinaten der inneren Curvenzweige haben wir im § 7, Gl. (4) gefunden:

$$x = ab \frac{b - w}{(b^2 - a^2) \cos \varphi}, \quad y = a \frac{bw - a^2}{(b^2 - a^2) \sin \varphi}.$$

Setzen wir hierin $\varphi = 0°$, so folgt, da $w = a$ wird:

$$x = ab \frac{b - a}{b^2 - a^2} = \frac{ab}{b + a}; \quad y = \infty.$$

Die Gleichung: $x = \pm \frac{ab}{b + a}$ giebt demnach die beiden der y-Axe parallelen Asymptoten der inneren Zweige.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus der Gl. (4) des § 7 ergiebt sich mit Rücksicht auf die am Ende des § 9 gemachte Bemerkung für die äußeren Zweige:

$$x = ab \frac{b + w}{(b^2 - a^2) \cos \varphi}, \quad y = - a \frac{bw + a^2}{(b^2 - a^2) \sin \varphi}.$$

Hieraus erhält man für $\varphi = 0°$, da $w = a$ wird,

$$x = ab \frac{b + a}{b^2 - a^2} = \frac{ab}{b - a}, \quad y = - \infty.$$

Die Gleichung: $x = \pm \frac{ab}{b - a}$ giebt also die beiden zur y-Axe parallelen Asymptoten der äußeren Zweige.

Setzt man $\varphi = 90°$, so wird $w = b$ und:

$$x = \infty, \quad y = - a \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}.$$

Mithin giebt die Gleichung: $y = \pm a \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}$ die beiden zur x-Axe parallelen Asymptoten der äußeren Zweige.

Da sich leicht zeigen läßt, daß $\frac{ab}{a + b} < a$, $\frac{ab}{b - a} > a$, $a \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} > a$ ist, so gehen die beiden der y-Axe parallelen Asymptoten der inneren Zweige durch einen Punkt der x-Axe innerhalb des Kreises. Die beiden der y-Axe parallelen Asymptoten der äußeren Zweige gehen durch einen Punkt der x-Axe außerhalb des Kreises, und die beiden der x-Axe parallelen Asymptoten der äußeren Zweige gehen durch einen Punkt der y-Axe außerhalb des Kreises und der Ellipse. Dies muß deshalb auffallen, da man ursprünglich hätte vermuthen können, daß die in den Scheiteln von Ellipse und Kreis gezogenen Tangenten selbst die Asymptoten sind.

Wir bemerken noch, daß es zunächst unbestimmt ist, ob die Punkte, in denen die zur y-Axe parallelen Asymptoten der äußeren Zweige die x-Axe treffen, außer- oder innerhalb der Ellipse liegen. Dies hängt offenbar davon ab, ob $\frac{ab}{b - a} \gtrless b$ ist. Die Durchschnittspunkte liegen demnach außerhalb der Ellipse, wenn $2a > b$ ist, sie liegen innerhalb der Ellipse, wenn $2a < b$ ist, sie sind die Scheitel der großen Axe selbst, wenn $2a = b$ ist. In der Figur ist $2a < b$.

Die Asymptoten sind in der Figur leicht aufzufinden und deßhalb nicht erst besonders bezeichnet.

§ 11. Vermittelst der Curve lassen sich durch Construction die Richtungen angeben, nach denen für einen gegebenen Neigungswinkel λ der Berechnungsebene gegen die x-Axe keine Zerlegung des gebrochenen Strahls stattfindet.

Wir denken uns einen Durchmesser, oder der Symmetrie halber blos einen Radius, etwa im ersten Quadranten, gezogen, welcher mit der x-Axe den Winkel λ bildet. Dieser kann drei wesentlich verschiedene Lagen annehmen.

Erstens nämlich kann der Radius den inneren Zweig **I.** gerade berühren und den äußeren Zweig (E_2, K_4) in einem Punke treffen. Dies ist offenbar der Fall, wenn λ den schon früher berechneten und mit Λ bezeichneten Grenzwerth hat. Die von dem Berührungs-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

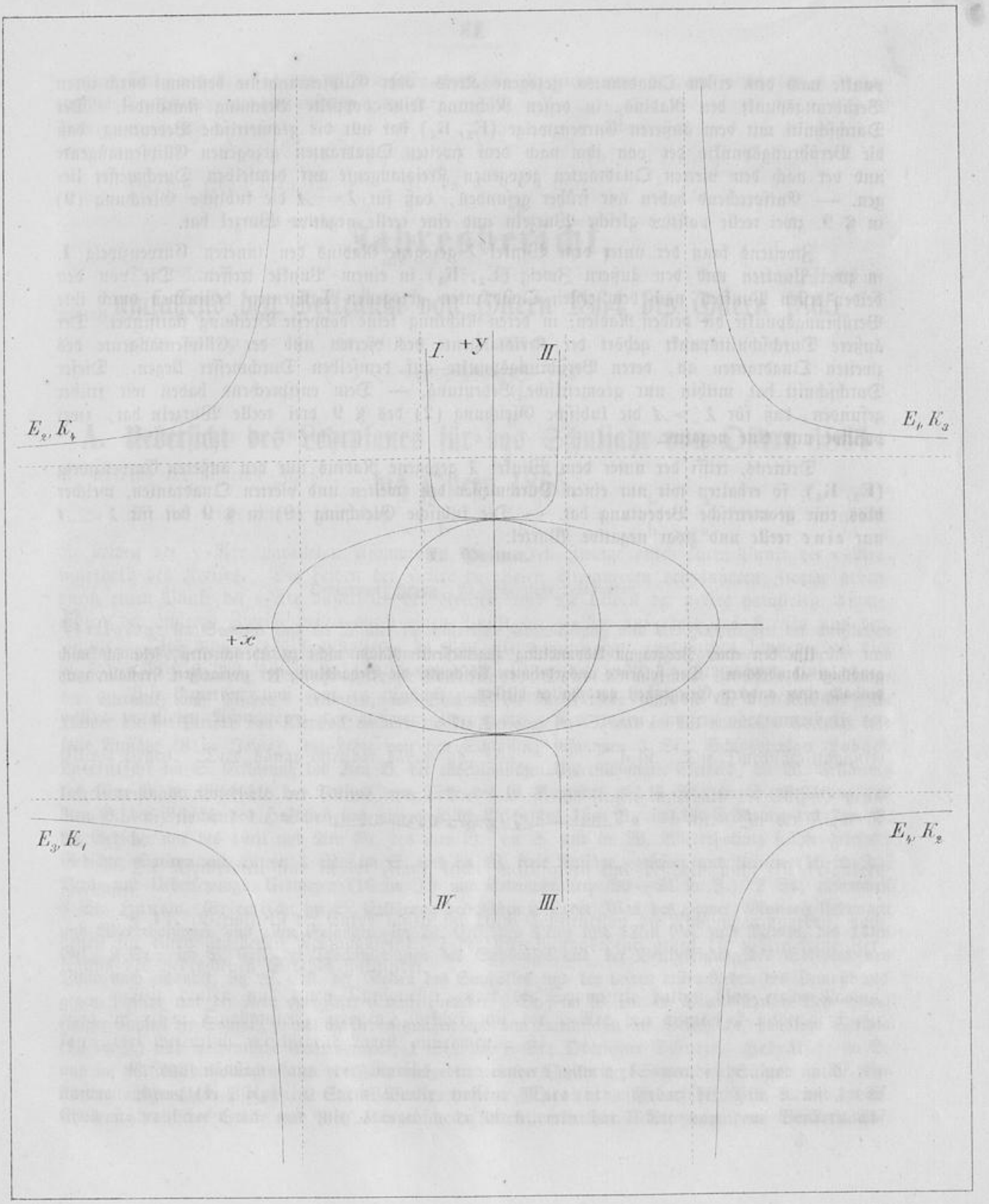
punkte nach dem ersten Quadranten gezogene Kreis- oder Ellipsentangente bestimmt durch ihren Berührungspunkt den Radius, in dessen Richtung keine doppelte Brechung stattfindet. Der Durchschnitt mit dem äußeren Curvenzweige (E_2, K_4) hat nur die geometrische Bedeutung, daß die Berührungspunkte der von ihm nach dem zweiten Quadranten gezogenen Ellipsentangente und der nach dem vierten Quadranten gezogenen Kreistangente auf demselben Durchmesser liegen. — Entsprechend haben wir früher gefunden, daß für $\lambda = \Lambda$ die kubische Gleichung (9) in § 9. zwei reelle positive gleiche Wurzeln und eine reelle negative Wurzel hat.

Zweitens kann der unter dem Winkel λ gezogene Radius den inneren Curvenzweig **I.** in zwei Punkten und den äußern Zweig (E_2, K_4) in einem Punkte treffen. Die von den beiden ersten Punkten nach dem ersten Quadranten gezogenen Tangenten bestimmen durch ihre Berührungspunkte die beiden Radien, in deren Richtung keine doppelte Brechung stattfindet. Der äußere Durchschnittspunkt gehört der Kreistangente des vierten und der Ellipsentangente des zweiten Quadranten an, deren Berührungspunkte auf demselben Durchmesser liegen. Dieser Durchschnitt hat mithin nur geometrische Bedeutung. — Dem entsprechend haben wir früher gefunden, daß für $\lambda > \Lambda$ die kubische Gleichung (2) des § 9 drei reelle Wurzeln hat, zwei positive und eine negative.

Drittens, trifft der unter dem Winkel λ gezogene Radius nur den äußeren Curvenzweig (E_2, K_4), so erhalten wir nur einen Durchmesser des zweiten und vierten Quadranten, welcher blos eine geometrische Bedeutung hat. — Die kubische Gleichung (9) in § 9 hat für $\lambda < \Lambda$ nur e i n e reelle und zwar negative Wurzel.

Um den einer Programm-Abhandlung zugemessenen Raum nicht zu überschreiten, sehe ich mich genöthigt abzubrechen. Der folgende ausgedehntere Abschnitt, die Behandlung der zweiarigen Krystalle, muß deshalb einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleiben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf