Die mathematischen Aufgaben bei der württembergischen Konkursprüfung im Lauf der letzten 50 Jahre.

In der sogenannten Conkursprüfung,* wie sie in Württemberg seit dem Jahr 1830 eingeführt ist, nimmt die Mathematik neben den gewöhnlichen Fächern des Abiturienten-Examens, zu denen für die künftigen Theologie-Studierenden noch Hebräisch und Religion kommt, erst seit neuerer Zeit ihre gebührende Stellung ein. Im Anfang des Zeitraums, über welchen vorliegende Blätter einen Ueberblick zu geben bestimmt sind, scheint dem Fach geringere Bedeutung beigelegt worden zu sein. Dies geht schon daraus hervor, dass bis zum Jahr 1859 für die Lösung der mathemat. Aufgaben nur eine Frist von 2 Stunden eingeräumt war, und zwar am ersten Tag des Examens von 10—12 Uhr, nachdem durch die Bearbeitung der zwei lateinischen Themata (Composition und Exposition) von 7—10 Uhr die geistige Kraft der Candidaten schon in genügendem Masse in Anspruch genommen worden war.

Seit dem Jahre 1860 ist die Prüfung in Mathematik auf die Morgenstunden (7—10) des zweiten oder dritten Examenstags verlegt und für die Ausarbeitung eine Zeit von drei Stunden (einschliesslich des Diktats) eingeräumt, womit allen billigen Anforderungen entsprochen sein dürfte. Hinsichtlich der Zahl der Aufgaben hat sich erst im Lauf der Zeit eine feststehende Praxis gebildet, sofern dieselbe im Anfang unseres Zeitraums schwankend war (5—10) und bisweilen etliche Aufgaben als obligat, andere als fakultativ bezeichnet wurden.** Die bei einer Conkursprüfung wünschenswerte Gleichheit des Massstabs zum Zweck der Beurteilung der Arbeiten hat es nun aber als notwendig erscheinen lassen, an sämmtliche Candidaten dieselben Anforderungen zu stellen, und so ist der Unterschied zwischen obligaten und fakultativen

* So lautet der amtliche Titel für die Abiturientenprüfung der Zöglinge der niederen evang. theologischen Seminarien in Württemberg, sofern bei dieser jährlich in Stuttgart abgehaltenen Prüfung dieselben „conkurriren“ mit den Hospitanten derselben Anstalten und mit den Schülern der Gymnasien, welche das Studium der Theologie beabsichtigen und Aufnahme in das höhere theolog. Seminar („Stift“) in Tübingen wünschen. Die Zahl der Bewerber schwankt zwischen 40—70, von denen in der Regel die dreissig Ersten in das Stift aufgenommen werden.

** 1852 war von 5 geometr. Aufgaben verlangt „wenigstens eine“, von 5 algebraischen „wenigstens „zwei“, 1857 waren von je 4 Aufgaben einer Serie 2 als obligatorisch, die 2 andern als fakultativ bezeichnet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgaben weggefallen, und es wird von sämtlichen Teilnehmern an der Prüfung die Lösung aller Aufgaben verlangt. Die Zahl derselben wurde seit 1870 allmählich auf acht fixirt, nämlich je vier aus Algebra und Geometrie; da nun aber seit ca. 20 Jahren Trigonometrie und Stereometrie obligate Fächer geworden sind, trat an die Stelle einer algebraischen Aufgabe eine trigonometrische und ebenso musste die vierte geometr. Aufgabe der stereometrischen weichen. Seit 1896 ist mit Rücksicht auf die allmählich gesteigerten Ansprüche bezüglich der Schwierigkeit der Aufgaben die dankenswerte Aenderung getroffen worden, dass nur noch sechs Aufgaben gestellt werden, nämlich je zwei aus dem Gebiet der Algebra (Arithmetik) und Geometrie, je eine aus Trigonometrie und Stereometrie.

Damit hat man sich in Württemberg mehr und mehr dem in Preussen üblichen Modus bei der Abiturienten-Prüfung genähert; dort werden nämlich (cfr. Martus, mathemat. Aufgaben, Vorrede) vier Aufgaben aus den verschiedenen in den Kreis des Schulunterrichts fallenden Teilen der Mathematik gestellt, zu deren Lösung und Reinschrift den Candidaten allerdings ein Zeitraum von 5 Stunden eingeräumt ist. Auch in Oesterreich scheint man sich mit vier Aufgaben zu begnügen, wie sich aus der Zusammenstellung von Aufgaben-Gruppen in der Sammlung „Maturitätsfragen“ von Dr. Wallentin (Wien 1879) ersehen lässt. An sich ist es ja für den Candidaten günstig, wenn ihm eine grössere Zahl von Aufgaben vorgelegt ist, vorausgesetzt, dass dieselben nicht sämtlich zu schwierig und zeitraubend sind; denn er hat dann eher Aussicht, wenigstens die eine oder andere Aufgabe zu lösen, und ist ihm dies einmal bei 1—2 Aufgaben geglückt, so hat häufig die dadurch geweckte Freudigkeit und das gehobene Selbstvertrauen auch auf die weitere Arbeit einen fördernden Einfluss. Schlimm ist es freilich andererseits, wenn der Schüler vor jeder Aufgabe wie vor einer verschlossenen Pforte steht, zu der er keinen Schlüssel finden kann, oder wenn er in hastigem, unsicherem Tasten bald an dieser, bald an jener Aufgabe herumprobiert, ohne zu einem befriedigenden Resultat zu gelangen. Ein ungenügendes Zeugnis in der Mathematik führt nicht selten einen Misserfolg des ganzen Examens herbei, obgleich eine Compensation durch günstige Zeugnisse in andern Fächern zulässig ist; freilich ist auch die umgekehrte Möglichkeit vorhanden, dass tüchtige Leistungen in der Mathematik ein in andern Fächern vorhandenes Deficit decken und einem Candidaten sogar noch zu einem Platz unter den in das Stift aufgenommenen Bewerbern verhelfen.

Was das Wert-Verhältnis der einzelnen Fächer für das Gesammt-Resultat der Prüfung betrifft, so hat die Mathematik an sich keine entscheidende Bedeutung, sofern die philologischen Fächer, wie es bei dem humanistischen Charakter unserer Anstalten begreiflich ist, das Uebergewicht haben. Da die Zeugnisse der schriftlichen Arbeiten (mit Ausnahme des Hebräischen) doppelt gerechnet werden, so zählt Latein 5fach, Griechisch 3fach, Hebräisch und Französisch je zweifach; diesen sprachlichen Fächern stehen gegenüber die realistischen, nämlich Religion und Geschichte je einfach, deutscher Aufsatz 2fach, Mathematik 2fach, da in Algebra und Geometrie je ein besonderes Zeugnis erteilt wird. Setzen wir also der Vergleichung halber durchaus gleichartige Leistungen in sämtlichen Examensfächern voraus, so verhält sich die Nummernzahl der philologischen Fächer zu der der realistischen wie 12 : 6, und auf die Mathematik fällt nur $^1/_9$ des in Zahlenwerten ausgedrückten Gesammtzeugnisses.

Allein erfahrungsgemäss ist die Mathematik dasjenige Fach, in welchem der Durchschnittsrahmen der übrigen Zeugnisse, die sich in den meisten Fällen in der mittleren Skala zwischen „ziemlich gut“ und „gut“ bewegen, am häufigsten überschritten wird, und zwar sowohl nach oben als nach unten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn bei durchaus ungenügenden Leistungen die niedersten Prädikate erteilt werden müssen, ja unter Umständen das Zeugnis „Null“, so wäre es andererseits eine Ungerechtigkeit, wollte man einem Candidaten, der eine Serie der Aufgaben durchaus richtig gelöst hat, das Zeugnis „gut bis recht gut“ versagen.* Ein solches Zeugnis zu erreichen ist aber in der Mathematik für den Schüler verhältnismässig weniger schwer als in den andern Fächern; hier wird leicht der absolute Massstab angelegt, und mag der Schüler auch in einer sprachlichen oder geschichtlichen Arbeit alles geleistet haben, was man von seinem Standpunkt aus erwarten konnte, so wird ein strenger Examinator bei Beurteilung der Arbeit doch noch immer Ausstellungen zu machen wissen, und im besten Fall das Zeugnis „gut“ erteilen. Bei den mathemat. Aufgaben dagegen handelt es sich um einen genau umgrenzten Stoff von verhältnismässig geringer Ausdehnung. Sind die Gleichungen richtig angesetzt und entwickelt, ist bei der Analysis einer geometrischen Aufgabe der Zusammenhang der gegebenen und gesuchten Stücke klar dargelegt, ist endlich das Ganze auch äusserlich in gefälliger, ansprechender Form dargestellt, so hat der Schüler alle Forderungen erfüllt, die an ihn gestellt werden können, und verdient jedenfalls eine höhere Zeugnisstufe als „gut“.

So sind denn die mathemat. Arbeiten häufiger als andere von entscheidender Bedeutung für das Endergebnis der Prüfung; denn es handelt sich ja bei derselben für manchen Candidaten nicht blos um das Zeugnis der Reife für die Universität, sondern um Erreichung einer möglichst hohen Nummernzahl beim Zeugnis zum Zweck der Erlangung eines wertvollen ökonomischen Vorteils, ohne den vielleicht das Studium in Frage gestellt ist. Bekommt er in der Mathematik ein höheres Zeugnis als ein anderer ihm sonst gleichstehender Mitbewerber, so erhält er einen besseren Lokus und möglicherweise wird ihm als 30tem das „Stifts-Beneficium“ zu teil, welches dem 31ten versagt bleibt. Aus diesem Grund wird denn auch das Studium der Mathematik von der Mehrzahl der Schüler bei der Vorbereitung auf das Examen eifrig gepflegt, und ebenso ist es für den Lehrer Gegenstand angelegentlicher Sorge, seine Schüler in diesem Fach zu fördern durch Repetition des früherVorgekommenen und Lösung zahlreicher Aufgaben.

Ueberblicken wir die Aufgaben der letzten 50 Jahre, wie sie uns in den früheren Jahrgängen des württemb. Correspondenzblattes in annähernder Vollständigkeit vorliegen, so wird sich bei einem Vergleich mit den Aufgaben der letzten Dezennien nicht leugnen lassen, dass die Anforderungen bedeutend gesteigert worden sind, ebenso wie bei der Abiturientenprüfung. Vor 40—50 Jahren wurden in der Algebra und Arithmetik bisweilen Aufgaben gestellt, wie man sie jetzt von einem Landexaminanden, jedenfalls aber von einem Sekundaner verlangt; ebenso blieben die Ansprüche in der Geometrie weit hinter den jetzigen zurück.** Der Grund hievon

* Die höchste Zeugnisstufe „recht gut“ mag für besonders hervorragende Leistungen vorbehalten bleiben.

** 1850. Die Transversalen eines Dreiecks teilen sich gegenseitig im Verhältnis 1 : 2.

18000 Stücke einer Waare kosten das Dutzend $24^1/_2$ fl., wie teuer muss das Dutzend verkauft werden, um 20% zu gewinnen.

A hat nach 7 Monaten 136 fl. zu fordern, wie gross ist der Abzug, den er sich bei alsbaldiger Zahlung gefallen lassen muss?

1856. Zu wie viel % steht ein Kapital von 2700 fl., das in 4 Jahren $5^1/_2$ mal so viel Zins trägt, als 1854 fl 40 kr. bei 4% in 9 J. $4^1/_2$ M.?

1857. Ein Dreieck zu konstruieren aus r, h und zugehörigem Winkel.

1859. Die Halbierungspunkte der Seiten eines Rechtecks werden verbunden; die Beschaffenheit des neu entstehenden Vierecks soll untersucht, sein Jnhalt und Umfang angegeben werden.

Eine Strecke von a=10 Zoll Länge soll nach dem goldenen Schnitt geteilt werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dürfte einerseits in dem Zug unserer Zeit zu suchen sein, bei dem auf allen Lebensgebieten sich verschärfenden Conkurrenzkampf auch hier die Ansprüche zu steigern. Auf der andern Seite wird aber auch, vor allem in Folge der wachsenden Ausdehnung und Bedeutung der Naturwissenschaften, der Mathematik jetzt mehr Beachtung geschenkt als in früheren Jahren, wo sie, obwohl die Stundenzahl annähernd dieselbe war wie jetzt, doch in Folge des einseitigen Uebergewichts der philolog. Fächer mehr nur als ein Nebenfach angesehen wurde. Auch die Methodik des Unterrichts hat Fortschritte gemacht und ist einfacher geworden, so dass den Schülern die Erfassung des Stoffs erleichtert ist; die dadurch gewonnene Zeit kommt der Ausdehnung und Vertiefung des Unterrichts zu statten. Wie sehr haben sich z. B. durch Einführung des Gesetzes der Symmetrie die Beweise in den geometrischen Lehrbüchern vereinfacht, ohne dass die Strenge der wissenschaftlichen Beweisführung zu Schaden käme; und doch dürfte noch mehr als bisher die von Treutlein-Henrici eingeschlagene Methode sich Bahn brechen und die euklidische Weitschweifigkeit verdrängen. (cfr. auch Bunkofer, Elementargeometrie in Dialogen. Bühl 1885.) Besonders in der Trigonometrie treten die Fortschritte der Methodik zu Tage: hier ist mit der veralteten Auffassung der trigonometrischen Funktionen als Linien, die noch dem Verfasser in seinen Schuljahren Nagels Lehrbuch schwer verständlich gemacht hat, endgiltig gebrochen, und werden dieselben als Verhältnisse oder abstrakte Zahlen definiert; ebenso ist der ermüdende Weg, die Sätze durch rein planimetrische Betrachtungen mit Hilfe von Figuren und Hilfslinien abzuleiten, verlassen und die rein analytische Beweisführung in die ihr gebührende Stelle eingesetzt worden. Und wie die Methodik des Unterrichts sich verbessert und vereinfacht hat, so sind auch die Aufgaben-Sammlungen zweckmässiger, vielseitiger und reichhaltiger geworden, und bieten sowohl dem Lehrer beim Unterricht, als dem Schüler beim Privatstudium den Uebungsstoff in wünschenswerter, ja überreicher Auswahl dar.

Die Auswahl der Prüfungsaufgaben ist für den damit beauftragten Referenten und Correferenten vor allem darum eine schwierige und verantwortungsvolle Sache, weil er die Examinanden nicht zu Schülern gehabt hat; es soll durch diese Anordnung die möglichste Unbefangenheit und Unparteilichkeit des Urteils erzielt werden. Stellt der bisherige Lehrer die Aufgaben, so kann er einerseits höhere Anforderungen machen, da er den durchschnittlichen Kenntnisstand seiner Schüler genau kennt; andererseits liegt aber auch beim besten Willen die Gefahr nahe, dass nur eine Reproduktion dessen verlangt wird, was in den letzten Wochen vorgekommen ist.

Der billig denkende Examinator wird sich an das Durchschnittsmass dessen halten, was bei Schülern von mittlerer Begabung vorausgesetzt werden kann, und in seinen Anforderungen eher etwas zu nieder als zu hoch greifen. Es ist nicht zu fürchten, dass bei leichten Aufgaben die Arbeiten allzu gleichmässig ausfallen, der Hauptwert liegt in der Darstellung;* „Der Schüler soll durch die Arbeit die Vollständigkeit seiner mathemat. Bildung beweisen, und das kann er an der leichten Aufgabe so gut wie an der schweren, an der nicht gelösten so gut wie an der gelösten.“ Jedenfalls sollten 2—3 von den 6 Aufgaben so beschaffen sein, dass auch schwächer begabte Schüler dieselben in Angriff nehmen können in der zuversichtlichen Hoffnung, dass ihnen die Lösung gelingen werde. Der einfachere oder umständlichere Weg, der hiebei eingeschlagen wird, die mehr oder weniger hervortretende Kürze und Präcision („Eleganz“) in der Entwicklung des Grundgedankens der Lösung, endlich die Diskussion des Endresultats (die

* cfr. Simon im Handbuch der Erziehungs- u. Unterrichtslehre von Baumeister, Bd. 4.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Determination bei geometrischen Aufgaben) geben Kriterien genug ab, um darnach die verschiedene mathematische Begabung der Candidaten beurteilen zu können.

Vor allem werden solche Aufgaben zu vermeiden sein, bei denen irgend ein ungewöhnlicher Kunstgriff angewendet werden muss, um die Lösung überhaupt oder wenigstens eine zweckmässige Lösung zu finden. Als Hausaufgaben für bessere Schüler mögen sie bisweilen geeignet sein, denn wenn, vielleicht nach längerem Suchen, der richtige Weg gefunden wird, so wirkt die dadurch geweckte Freude fördernd auf den Eifer des Schülers ein; gelingt es ihm nicht, so ist im schlimmsten Fall eine Stunde Zeit verloren, in einem Examen mit knapp zugemessener Zeit ist aber jede Minute kostbar. Aus demselben Grund sind auch Aufgaben, die weitläufige ermüdende Zahlenrechnungen mit oder ohne Logarithmen erfordern, zu vermeiden, denn ein einziger Fehler — und wie leicht kommt ein solcher in der nervösen Aufregung vor — kann die ganze Rechnung verderben: es handelt sich ja bei unserer Prüfung nicht um die für manche Berufsarten allerdings unerlässliche mechanische Fertigkeit in der Handhabung der vier Spezies, sondern um die Mathematik als Wissenschaft. Deshalb empfiehlt es sich, bei allen Aufgaben mit bestimmten Zahlenwerten auch eine Lösung mit Buchstaben zu verlangen, und die Candidaten zu veranlassen, dass sie den von ihnen gewählten Gang der Lösung im Voraus kurz skizzieren. Danach lässt sich beurteilen, ob sie die Aufgabe verstanden haben; ist das der Fall und kommt dann im weiteren Verlauf ein Rechenfehler vor, so darf derselbe, namentlich wenn er sich wiederholt, allerdings nicht ignoriert werden, aber die Aufgabe ist doch als teilweise gelöst anzusehen. Kann sie auf verschiedene Art in Angriff genommen und gelöst werden, sind die Wurzeln rational und die Resultate ganze oder abgerundete Zahlen, so ist sie zur Prüfungsaufgabe besonders geeignet, weil es, — wie Martus l. c. treffend sagt — dem unter dem Druck der Prüfung Arbeitenden bei solchem Eintreffen sehr wahrscheinlich wird, dass seine Auflösung richtig sei, und er dadurch die Sicherheit gewinnt, getrost weiterarbeiten zu können."

Wenn von manchen Seiten schon die Forderung erhoben worden ist, dass keine Aufgabe einem Candidaten bekannt sein dürfe, so scheint dies allerdings aus dem Grund wünschenswert, weil keiner vor dem andern irgend einen Vorteil voraus haben sollte. Allein es fragt sich sehr, ob diese Forderung in ihrer ganzen Strenge durchführbar ist, denn schon der Umstand, dass der die Fragen stellende Lehrer die Candidaten, die aus verschiedenen Anstalten kommen, früher nicht unterrichtet hat, steht dem im Wege. Ausserdem enthalten die verschiedenen Sammlungen eine solche Menge von Aufgaben, dass es schwer ist, immer wieder neue zu finden. Eine Fundgrube von zum Teil neuen interessanten Aufgaben enthalten die Programme, welche fast allgemein die den Abiturienten gestellten Themata veröffentlichen — in Württemberg ist das allerdings noch nicht der Fall — allein die Benutzung dieser Quelle steht jedem Mathematiklehrer frei, und niemand kann dafür garantieren, dass nicht die vom Examinator gestellte Aufgabe kurz vorher von einem andern Lehrer mit seinen Schülern besprochen worden ist. Daher ist es zu empfehlen, bei Aufgaben, die aus einer schon vorhandenen Quelle entlehnt werden, die Zahlenwerte zu ändern oder angewandten Aufgaben eine etwas andere Einkleidung zu geben. Jedenfalls ist dies besser, als wenn man Neues um jeden Preis bringen will und daher erkünstelte Aufgaben oder solche aus abgelegenen Gebieten stellt; für die besten „neuen" Aufgaben halte ich diejenigen, die sich unwillkürlich darbieten bei irgend einem Vorkommnis des praktischen Lebens, bei der Lektüre oder sonst aus irgend welchem Anlass. Vor allem dürfte der Abweg zu vermeiden sein, dass in eine und dieselbe Aufgabe allzu viele disparate

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Forderungen hineingepresst werden, nur damit die Candidaten möglichst vielseitige Kenntnisse an den Tag legen können.* Aufgaben von dieser Art sind künstliche Gebilde, nur zu dem Examenszweck ersonnen und ohne praktischen Wert; leicht lassen sich solche für sämtliche Gebiete der Mathematik construieren, aber welcher Gewinn soll dadurch erzielt werden? Sein Wissen und Können vermag der begabte Schüler und sichere Rechner auch an anderen natürlichen Aufgaben zu zeigen, im ungünstigen Fall aber bleibt er an einer solchen Aufgabe hängen, da ein einziger Rechenfehler die ganze sonst richtige Rechnung hinfällig macht, und die Zeit verstreicht unter vergeblichen Bemühungen, den Fehler zu entdecken; der minder begabte wird von vorn herein vor einer derartigen Aufgabe zurückschrecken. Die nähere Prüfung wird zeigen, dass auch ohne derartige Kunstprodukte das Gebiet noch umfassend und reich genug ist, aus welchem geeignete Aufgaben gestellt werden können.

Zunächst erhebt sich die Frage, ob Aufgaben aus dem Gebiet des gewöhnlichen bürgerlichen Rechnens ausgeschlossen bleiben und ausschliesslich algebraische Aufgaben gestellt werden sollen. In den mir vorliegenden Sammlungen von Abiturientenaufgaben begegnet man nur selten einer Aufgabe, die auf anderem einfacherem Wege als mittelst Gleichung gelöst werden kann. Nun bestimmt aber ein Erlass der Behörde vom 20. Januar 1866, „dass bei jeder Prüfung auch eine Aufgabe aus der gemeinen Arithmetik den Candidaten zur obligaten Lösung zu geben sei.“ So wurden denn in früheren Jahren wiederholt, wenn auch nicht regelmässig solche Aufgaben gestellt,** seit 20 Jahren scheint aber diese Sitte ziemlich in Abgang gekommen zu sein, und zumal bei der jetzt bestehenden Ordnung, wo nur noch zwei algebra-

---

* Es sei mir gestattet, aus einem Programm eine derartige Aufgabe anzuführen:

Wenn man die Zahl der Kugeln einer vierseitigen Pyramide von n Schichten verdoppelt und eine 6seitige Pyramide von gleich vielen Schichten aufbaut, so bleiben x Kugeln übrig. Wie gross ist x, wenn n die Gliederzahl einer folgendermassen bestimmten Progression erster Ordnung bedeutet: Das erste Glied a ist gleich dem Coefficienten von a^3b^6 in der Entwicklung $(2a - {}^1/_2b)^9$; die Differenz d ist gleich dem kleineren Anfangsglied einer geometr. Progression von vier Gliedern, wovon das erste und vierte zusammen 140, das zweite und dritte 60 ausmachen; die Summe s setzt sich zusammen aus der Zahl der Combinationen vierter Classe mit Wiederholungen aus 6 Elementen, aus dem Coefficienten von x^2 in der Entwicklung $(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4)(x - 5)(x + 6)$ und aus dem Nenner des 15. Glieds einer harmonischen Progression mit den Anfangsgliedern $2, {}^6/_5$.

** 1860. 5 Personen teilen 18 600 fl; B erhält $1^1/_2$ mal so viel als A, dieser die Hälfte von C, C $^5/_4$ mal so viel als A, D $^7/_6$ mal so viel als B. Wie viel erhält jeder?

1863. In einer Weberei wurden bisher durch 42 Arbeiter wöchentlich 840 Stücke Zeug gefertigt; durch Verbesserung der Maschinen und Anstellung von 15 weiteren Arbeitern ist die wöchentliche Fabrikation auf das Doppelte gestiegen. In welchem Verhältnis leisten die neuen Maschinen mehr als die alten?

1864. Ein Arzt berechnet einem Patienten für 15 Krankenbesuche 5 fl. 18 kr. Den Besuch bei Tag rechnet er à 18 kr., den bei Nacht à 30 kr. Wie viele Besuche hat er gemacht?

1865. Regel über die Teilbarkeit einer Zahl durch 11 (oder wenigstens 9) nebst Beweis.

1867. Welche gemeinen Brüche geben bei der Verwandlung in Decimalbrüche endliche, welche rein periodische resp. gemischt periodische? Wodurch ist die Zahl der Decimalen in den einzelnen Fällen bestimmt?

1868. Von einem Geschäft, das jährlich $12^1/_2$ % abwirft, beträgt für A nach zweijähriger Beteiligung Einlage und Gewinn zusammen 5000 fl. Die Einlage des B verhält sich zu der des A = 6 : 5, sein Gewinnanteil zu dem des A = 4 : 5. Wie viel hat jeder eingelegt, wie lang liess B sein Kapital stehen?

1871. Glocken- und Kanonenmetall sind Legierungen von Kupfer und Zinn, und zwar enthält ersteres 78%, letzteres 90% Kupfer. Wie viel muss daher beim Guss einer Glocke aus 2 Geschützröhren von 11 und 15 Ctr. Gewicht noch Zinn zugesetzt werden, und wie schwer wird die Glocke?

1874. Wenn die Bevölkerung einer Stadt von 7000 auf 9000 Seelen gestiegen ist und in derselben Zeit die Wohnräume sich um 17% vermehrt haben, um wie viel % des ursprünglichen Bestands hat sich der durchschnittliche Wohnraum für eine Person vermehrt oder vermindert?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ische Aufgaben (statt früher 4—5) gegeben werden, dürfte sie nicht streng durchführbar sein, wenn ich auch Aufgaben dieser Art, falls sie nicht zu verwickelt sind, nicht grundsätzlich ausgeschlossen sehen möchte. Denn man kann ja wohl von dem Schüler verlangen, dass er das in früheren Jahren Erlernte nicht vergessen hat, und dass er auch ohne x und y mit Hilfe des gesunden Menschenverstandes eine entsprechende Aufgabe zu lösen weiss. Andererseits ist in Betracht zu ziehen, dass für den Primaner manches, was er in Tertia und Sekunda gewusst hat, über der Masse des Neuen mehr oder weniger in den Hintergrund getreten ist; wählt er nun den ihm geläufigen Weg, eine Aufgabe mittelst Gleichung statt durch Raisonnement zu lösen, so darf es ihm nicht verwehrt sein, ist ja doch das die Hauptsache, dass er auf korrektem Wege zu einem richtigen Resultat gelangt. Zur planmässigen Uebung der Lösung von Aufgaben mittelst Raisonnement fehlt in unserem Lehrplan entschieden die Zeit, daher mag es der individuellen Neigung des Schülers überlassen bleiben, ob er diesen Weg wählen will; anregenden Stoff zur Uebung giebt die Anleitung von Kol. Pfaff und für schwierigere Aufgaben die von Prof. Fetscher herausgegebene Sammlung und Lösung von Aufgaben aus den Reallehrer-Prüfungen. Doch, wie gesagt, Schülern gegenüber scheint mir die grundsätzliche Ausschliessung der algebraischen Lösung unbillig zu sein: denn damit wird von vorn herein auf die Benützung des wirksamsten Werkzeugs verzichtet, und ausserdem dürfte es in diesem Falle für die meisten nicht schwer sein, die privatim auf algebraischem Weg gefundene Lösung so einzukleiden und umzuformen, dass sie als eine durch Raisonnement gefundene erscheint. Beide Methoden bilden ja keinen ausschliessenden Gegensatz, sondern ergänzen einander; namentlich bei angewandten Aufgaben, z. B. Bewegungsaufgaben, gehört oft zur Entwicklung der Bedingungsgleichungen ein gut Stück „Raisonnement", so dass mit Aufstellung derselben der schwierigere Teil der Arbeit gethan ist.

Gehen wir nun zu den algebraischen Aufgaben im engeren Sinn über, so zerfallen dieselben in zwei Classen, je nachdem die Gleichungen in Zeichen oder in Worten gegeben sind. Aufgaben der ersten Art sind bei den Abiturienten-Prüfungen in Norddeutschland besonders beliebt, vielleicht in Folge der weiten Verbreitung von Bardey's Lehrbuch, der ja Aufgaben dieser Art, namentlich Gleichungen zweiten Grads, in grosser Zahl und Mannigfaltigkeit darbietet. In Württemberg wurden angewandte Aufgaben, also Gleichungen in Worten, von jeher bevorzugt, vermutlich weil solche Aufgaben, meist dem Gebiet des praktischen Lebens entnommen, dem persönlichen Interesse des Schülers in der Regel näher stehen, als andere von lediglich theoretischem Charakter. Gleichungen in Zeichen waren zwar nicht ausgeschlossen, jedoch beschränkte man sich früher auf die einfachsten Fälle*; seit einigen Jahren sind auch bei diesen Aufgaben die Anforderungen etwas gestiegen, jedoch keineswegs über das billige Mass hinaus. Bei solchen Aufgaben weiss der Schüler von vorn herein klar, was von ihm verlangt

*1852. Rechteck aus $F = 3002$. Seitendifferenz $= 41$.
„ $xy = 54$. $xz = 36$. $yz = 24$.
1857. $xy = 120$. $x^2 + y^2 = 289$.
1860. $x + y = 15$. $x^2 + y^2 = 137$.
1864. $x^2 - y^2 = 429$. $xy = 350$.
1865. $x + y = a$. $x^3 + y^3 = b$.
1870. $x + y + z = 29$.
$x + 2y + 3z = 62$.
$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 10$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wird, und hat Gelegenheit die verschiedenen zur Lösung führenden Methoden anzuwenden. Denn Kenntnis der zweckmässigen Lösungsweisen bei den verschiedenen Grundtypen von Gleichungen, namentlich solchen zweiten Grads, darf von jedem Candidaten erwartet werden, sind es ja doch im Grunde einfache Operationen, die hiebei in Betracht kommen, z. B. Anwendung des Correspondenz-Satzes (von Bardey mit besonderer Vorliebe cultiviert), Einführung von Hilfsgrössen, um der Gleichung eine einfachere Form zu geben, ihren Grad zu erniedrigen oder sie rational zu machen, Benützung des Verhältnisses der Unbekannten und Ermittlung desselben durch Division der Gleichungen, wodurch in vielen Fällen die einfachste Lösung erzielt wird, namentlich Einführung der Hilfsgrösse $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = u$, eine Substitution, die bei den meisten Aufgaben dritter Stufe die Lösung ermöglicht. Wenn nun aber bei einer verwickelten Aufgabe erst die zweckmässige Methode der Lösung durch längeres Suchen gefunden werden muss, wenn es gilt die Unbekannten selbst mittelst der Hilfsgrössen in möglichst einfacher und eleganter Form auszudrücken, so ist hiezu ein Mass von Kenntnissen und ein geübter Blick erforderlich, den man nur bei hervorragend begabten Schülern voraussetzen darf. Viele der schwierigeren Aufgaben bei Abiturientenprüfungen sind entweder aus Bardey und anderen Sammlungen, namentlich Martus, entlehnt oder wenigstens nach dem Muster von dort befindlichen Aufgaben gebildet; sind solche Aufgaben nicht allzu lange Zeit vor der Prüfung im Unterricht behandelt worden, so kann ihre Lösung, da sie nur eine reproducierende Thätigkeit erfordert, von jedem Schüler mit Recht erwartet werden, der dem Unterricht mit Fleiss und Aufmerksamkeit gefolgt ist; trifft aber jene Voraussetzung nicht zu, ist die Aufgabe für die Candidaten absolut neu, so ist für die meisten die an sie gestellte Forderung zu schwer. Denn sämtliche Aufgaben des Uebungsbuchs durchzurechnen und zu repetieren, dazu reicht die zugemessene Zeit durchaus nicht, und wenn es je unter günstigen Umständen der Fall wäre, so würden in wenigen Wochen viele der angewandten Kunstgriffe dem Gedächtnis der Schüler wieder entschwunden sein, der Mathematik-Unterricht selbst aber wäre in Gefahr, zu einem geistlosen Mechanismus, zur Examens-Dressur herabzusinken. Meine Ansicht über diese Aufgaben geht also dahin: man zeige den Schülern in der Lektion an einer genügenden Anzahl von Beispielen auch schwierigerer Art, wie namentlich mit Benützung der meist symmetrischen Form der Bestimmungsgleichungen, die Lösung beschafft werden kann — gewecktere Schüler haben lebhaftes Interesse dafür — aber bei Examens-Aufgaben beschränke man sich auf Beispiele von mittlerer Schwierigkeit, schon manche Aufgaben der zweiten und namentlich die der dritten Stufe sind für diesen Zweck entschieden zu schwer.

Den Text-Aufgaben bringen die Schüler meistens ein lebhaftes Interesse entgegen, namentlich wenn sie aus ihrem Gesichtskreis gewählt sind; so enthalten z. B. die Aufgaben aus dem Jahr 1871 sämtlich einen Nachklang aus dem deutsch-französischen Kriege*, und es ist

---

* Nro. 1. conf. pag. 8**.

Nro. 2. Um eine zerstörte Eisenbahnbrücke wieder herzustellen, arbeiten 40 Mann von 5 Uhr abends bis zum Einbruch der Nacht, 60 Mann die Nacht hindurch und 80 Mann von Tagesanbruch bis morgens 8 Uhr. Um wie viel Uhr hat die Nachtarbeit begonnen, wenn die ganze Arbeit von 100 Mann in 8 Stunden bei Tag hätte vollendet werden können, und wenn ein Arbeiter in 4 Stunden Nachtarbeit so viel zu Stand bringt als in 3 Stunden Tagesarbeit?

Nro. 3. Nach einer Schlacht geben französische Berichte die Zahl ihrer Truppen um 90000 zu niedrig, die der Deutschen um 40000 zu hoch an, und drehen auf diese Art das wahre Verhältnis der beiderseitigen Heeresstärken gerade um. Wenn nun das 4fache des deutschen Heeres noch um 70000 Mann schwächer war als das 3fache des französichen, wie stark waren beide Heere?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

überhaupt hübsch, wenn Zeitereignisse in ungezwungener Weise bei den Aufgaben verwertet werden können. Aber auch abgesehen von solchen speziellen Beziehungen lassen sich aus dem Gebiet der Gesellschafts-, der Gewinn- und Verlustrechnung, der arithmetischen und geometrischen Reihen immer wieder relativ neue und interessante Probleme aufstellen; hat ein Schüler auch eine ähnliche Aufgabe schon gerechnet, so muss er doch aufs neue den Gang der Lösung auffinden und klar entwickeln. Namentlich sei hingewiesen auf das reiche Gebiet der Bewegungs-Aufgaben, deren Material neben den früher üblichen Boten und Postwagen nunmehr durch Eisenbahnen, Dampfboote und Radfahrer eine dankenswerte Bereicherung erfahren hat; bei solchen Aufgaben ist aber eine genaue jedes Missverständnis ausschliessende Formulierung besonders wichtig. Hier vor allem kann ein Schüler zeigen, ob er klar und richtig denkt, ob er die Grössen, die als Unbekannte einzuführen sind, aus der Umhüllung herauszufinden weiss, ob er die fundamentalen Beziehungen (z. B. $s = ct$; $d = ct \pm c^1t^1$ etc.) auf die vorliegende Aufgabe anzuwenden versteht. Ferner ist zu erinnern an das ebenso reiche und mannigfaltige Gebiet der Aufgaben aus der Zinseszins- und Rentenrechnung; einmal bieten diese Aufgaben den Schülern Gelegenheit, ihre Kenntnisse in der wichtigen Lehre von den geometrischen Reihen und in der Handhabung der Logarithmen zu zeigen, sodann sind sie von Interesse wegen ihrer praktischen Bedeutung. Das allmähliche Anwachsen von Ersparnissen und Schulden, die Amortisierung von Anlehen, die Erwerbung einer Rente durch Ansammlung eines Kapitals, die Verwandlung einer Rente in eine andere, der mittlere Zahlungstermin einer solchen — das sind lauter Fragen, über die ein Abiturient muss Auskunft geben können.* Nur hüte man sich auch hier vor allzu schwierigen und verwickelten Aufgaben, und bezeichne namentlich die Zahlungstermine mit grösster Deutlichkeit, womöglich mit einem bestimmten Datum; ebenso ist, wenn Bruchteile von Jahren bei Einzahlungen oder Renten vorkommen, deutlich anzugeben, ob als Zinsfaktor der in der Praxis übliche Ausdruck $1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{n}$ oder der theoretisch richtigere $\left(\frac{100 + p}{100}\right)^{\frac{1}{n}}$ anzunehmen ist; bei einer längeren Reihe von Jahren ist bekanntlich der Unterschied im Resultat nicht unbedeutend.

Zum Schluss sei noch eine beliebte Classe von Aufgaben angeführt, die wir Zahlenrätsel nennen können: es handelt sich dabei um die Ermittlung einer Zahl, für deren einzelne Ziffern nach Massgabe der gegebenen Bedingungen bestimmte Gleichungen aufzustellen sind. Bekanntlich kommt hiebei der Stellenwert der Ziffern in Betracht, manchmal ist ein ganzer Ziffern-Komplex (z. B. $100x + 10y + z$) mit einer einzigen Unbekannten zu bezeichnen, wenn die Zahl der Bedingungsgleichungen ausreichen soll, bisweilen kann auch mit Weglassung einer Gleichung die Aufgabe als diophantische gelöst werden. Auch diese Aufgaben sind ein Prüfstein für richtiges mathematisches Denken und somit zu Examens-Aufgaben geeignet.

Den bisher genannten Gebieten sind die meisten Aufgaben unseres Zeitraums entnommen; aus manchen Kapiteln der Algebra, z. B. dem der Exponential- und diophantischen Gleichungen, der Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung sind keine Aufgaben gestellt worden.

---

* Bei der Behandlung dieser Aufgaben in der Lehrstunde braucht man die Schüler nicht durch eine grosse Anzahl von Formeln zu verwirren, da sich ja die meisten üblichen Aufgaben durch Specialisierung der Formel: $K = aq^n + \frac{r(q^n - 1)\,100}{p}$ lösen lassen. Ebenso genügen bei der Lehre von den arithmetischen und geometrischen Reihen die zwei (resp. drei) Hauptformeln, aus denen sich alle andern entwickeln lassen, während Meyer-Hirsch noch eine Tabelle von je 20 verschiedenen Formeln aufstellt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Letzteres Pensum ist in dem neuen Lehrplan von 1891 durch die Kettenbrüche ersetzt worden, ohne dass dieselben bis jetzt Stoff zu Aufgaben geliefert hätten.

Wohl mancher Mathematik-Lehrer wird den Ausschluss der Combinationsrechnung und dessen, was damit zusammenhängt, aus dem neuen Lehrplan schon bedauert haben, und bei verfügbarer Zeit doch das Wichtigste daraus behandeln, was ihm wohl nicht verwehrt ist. Es wird ja mit dieser Lehre den Schülern, die mit Gleichungen sich zur Genüge beschäftigt haben, auch einmal etwas Neues geboten (ganz abgesehen davon, dass die Permutationsrechnung notwendige Voraussetzung für die Lehre von den Determinanten ist); namentlich den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die für die Schüler verständlichen Gebiete bringen sie ein lebhaftes Interesse entgegen. Der binomische Lehrsatz, dessen Beweis unter Voraussetzung positiver ganzzahliger Exponenten sich leicht aus der Combinationslehre ergiebt, bildet einen passenden Abschluss und eröffnet zugleich einen Ausblick auf ein neues Gebiet, wenn man unter der freilich problematischen Voraussetzung seiner allgemeinen Gültigkeit die Potenz $(a + b)^n$ für ein negatives oder gebrochenes n entwickelt. Bei den Kettenbrüchen dagegen sind die Beweise ziemlich umständlich, ebenso die Zahlenrechnungen und das Gebiet für elementare Anwendungen ist ein eng begrenztes, ihre Anwendnng auf Lösung diophantisher Gleichungen, Entwicklung von Wurzeln in Reihen, Lösung der Pell'schen Gleichung etc. geht über das Pensum des Gymnasial-Unterrichts hinaus.

Als das zweite mathematische Haupt-Fach kommt die Geometrie (Planimetrie) in Betracht. Dieselbe wird nach dem neuen Lehrplan in Classe V begonnen und in Classe VIII oder mit dem ersten Semester von Classe IX zum Abschluss gebracht; in den zwei letzten Jahren tritt Trigonometrie und Stereometrie an ihre Stelle, nur am Schluss des Gymnasial-Cursus wird mit Rücksicht auf die Prüfung ein repetitorischer Ueberblick über die Geometrie gegeben. Natürlich reicht die Zeit nicht aus, um den Schülern den Stoff seiner ganzen Ausdehnung nach mit all' den Kunstgriffen, die bei der Lösung der verschiedenen Kategorieen von Aufgaben in Betracht kommen, in Erinnerung zu rufen, und jeder Lehrer macht wohl die schmerzliche Erfahrung, dass vieles von dem, was sie früher gewusst haben, in der Erinnerung verblasst oder gar vollständig vergessen ist. Als eine zweckmässige Vorbereitung für die Prüfung betrachtet der Verfasser eine gründliche Repetition der Lehre von den geometrischen Oertern, weil diese das wichtigste Hilfsmittel bilden für die Lösung zahlreicher Aufgaben, ferner einen Ueberblick über die wichtigsten Data und metrischen Relationen, endlich eine systematische Darstellung der algebraischen und geometrischen Lösung jener stets wiederkehrenden Fundamental-Aufgaben, wo von zwei unbekannten Strecken zwei algebraische Verbindungen gegeben sind ($x \pm y$, $x^2 \pm y^2$, xy, $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$). Die meisten lassen sich auf bekannte Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck reducieren; die wichtigsten sind die Aufgaben: $x \pm y = a$, $xy = mn$, durch deren Construktion die geometrische Lösung sämtlicher Gleichungen zweiten Grads gegeben ist. Hinsichtlich der übrigen Lösungs-Methoden (Parallel-Verschiebung, Umlegung, Drehung, perspektivische Verschiebung) wie sie nach Petersens Vorgang namentlich von G. Hoffmann in seiner Anleitung weiter ausgeführt worden sind, wird sich der Lehrer bei der Repetition und der Examinator auf einfachere Fälle beschränken müssen, denn eine genaue Durcharbeitung des in reichster Fülle vorliegenden Stoffs würde zu viel Zeit erfordern.

Eine Vergleichung der Prüfungszeugnisse in Algebra und Geometrie, wozu als Material die Conkurs-Zeugnisse von 36 vershiedenen Jahren benützt wurden, ergiebt, dass die letzteren, von ganz wenigen Fällen abgesehen, im allgemeinen wesentlich niederer ausfallen, als die ersteren,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und zwar ist dies der Fall während des ganzen Zeitraums, nicht blos in den letzten 20 Jahren, wo die Geometrie in Folge der obligaten Einführung von Trigonometrie und Stereometrie etwas in den Hintergrund getreten ist. Das durchschnittliche Zeugnis in Algebra ist 4,8, das in Geometrie 4,3, also eine halbe Nummer weniger; für manche Jahre besteht sogar ein Unterschied von zwei Stufen der Zeugnis-Scala. Und doch wird man im allgemeinen nicht sagen können, dass auf die Geometrie von den Schülern weniger Zeit und Fleiss verwendet werde als auf die Algebra, nach meinen Erfahrungen ist eher das Gegenteil der Fall. Der Grund für den Unterschied der Leistungen dürfte, abgesehen davon, dass das eigentliche Studium der Geometrie schon $1^1/_2 - 2$ Jahre vor dem Examen abgeschlossen ist, vor allem in der wesentlich verschiedenen Methode bei der Lösung der Aufgaben zu suchen sein. In der Algebra gibt es ganz bestimmte Regeln, die durch Uebung erlernt und beinahe mechanisch — im guten Sinn des Worts — auf die vorliegenden Aufgaben angewandt werden können; sind letztere richtig gestellt, so ist es weitaus in den meisten Fällen die Schuld des Schülers, wenn er sie nicht herausbringt. Zur Lösung einer geometrischen Aufgabe dagegen wird weit mehr die Erfindungskraft des Schülers in Anspruch genommen, es gehört, wie auch Hoffmann l. c. sagt, besondere Begabung dazu. Das einemal gilt es, eine bestimmte Hilfslinie zu ziehen, ein andermal kommt es darauf an, dass der Schüler sich an einen einzelnen geometrischen Satz erinnert, einen bestimmten geometrischen Ort oder ein Datum anwendet. Fällt ihm nun gerade das nicht ein, worauf es ankommt, so sind alle seine Versuche vergeblich, der von ihm eingeschlagene Weg, dem ein richtiger Gedanke zu Grund liegen mag, führt eben nicht zum erwünschten Ziel. Es mag ein Schüler sich die Lösung zahlreicher schwieriger Aufgaben mit vollem Verständnis eingeprägt haben, so ist der Fall sehr wohl denkbar, dass er die Lösung einer leichteren Examens-Aufgabe nicht findet. Aus diesem in der Natur des Gegenstands liegenden Mangel einer allgemein giltigen Methode der construktiven Lösung erklärt sich denn auch die vielfach hervortretende Neigung, geometrische Aufgaben, wenn sie irgend welche Gelegenheit dazu bieten, auf algebraischem Wege zu lösen, mag auch die rein geometrische Lösung weit kürzer und einfacher sein. Die algebraische Methode bietet eben dem Schüler eine sichere Handhabe, die Aufgabe anzufassen, während die geometrische Lösung seine „Findigkeit“ in Anspruch nimmt, wobei manchmal ein glücklicher Zufall ihn das Richtige finden lässt. Mit Rücksicht hierauf wird es sich empfehlen, bei der Prüfung solche Aufgaben zu wählen, deren construktive Lösung auf verschiedenen Wegen möglich ist oder die zugleich auf algebraischem Wege gelöst werden können. Damit stimmt im wesentlichen auch die bei den Verhandlungen des württemberg. Gymnasial-Vereins am 1. Juni 1898 von Prof. Haag in Rottweil aufgestellte Thesis 8 überein; „bei der Abiturienten- und Conkursprüfung sollen nur solche Aufgaben gestellt werden, welche ausser der construktiven eine einfache algebraische und trigonometrische Behandlung zulassen.“ Nur möchte ich es als zweifelhaft bezeichnen, ob zu eingehender trigonometrischer Behandlung von geometrischen Aufgaben, wozu dann natürlich auch die Entwicklung der geometrischen Construktion aus der gefundenen Formel kommen muss, die uns zugemessene Zeit ausreichend ist.

Noch weiter ging der Vorschlag von Z.* in U. (Corresp.-Bl. 1852, Nro. 15) der die geometrischen Aufgaben bei der Prüfung überhaupt abgeschafft wissen wollte. „Denn die Aufgaben, sagt er, verlangen die verschiedensten Lösungen, es giebt keine Methode, die bei allen

* Vermutlich Dr. P. Zech, damals Repetent am Seminar Urach, später Professor am Polytechnikum in Stuttgart.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

„zum Ziel führt, weil die Beziehungen der Linien und Punkte nicht auf die Operationen des „Addierens etc. zurückgeführt werden, sondern durch Anschauung aufgefunden werden sollen, so „dass man zuletzt auf bekannte Sätze der Geometrie zu kommen sucht. Eine allgemeine Me„thode ist unmöglich, weil meistens ein Mittelglied gefunden werden soll, das unter vielen mög„lichen allein oder am schnellsten zum Ziel führt. Dieses zu finden ist Sache der Uebung oder „des Glücks, es kann dem besten Mathematiker passieren, dass er nicht darauf verfällt. Ein „glücklicher Einfall* thut das meiste, daher können die Aufgaben keinen Massstab der Beur„teilung abgeben, zumal wenn der grosse Vorteil dazukommt, dass einer eine Aufgabe schon „kennt. Nur bei den leichtesten Aufgaben sind diese glücklichen Einfälle nicht nötig, diese „lassen aber auch wenig Spielraum, geometrische Kenntnisse zu zeigen."

Ein anderer Fachgenosse, R. in H.** hat diesen Ausführungen z. T. zugestimmt, namentlich die Ungleichheit anerkannt, die entsteht, wenn eine Aufgabe einzelnen bekannt ist. „Und „doch, fährt R. fort, werden sich die üblichen Aufgaben nicht verdrängen lassen. Es ist von „zu grossem Wert zu erfahren, in welchem Masse die Schüler die Gabe geometrischer Anschau„ung und die Fähigkeit, die Grundlehren anzuwenden, besitzen, als dass man auf die Aufgaben „verzichten könnte. Zweierlei ist aber zu beobachten:

„1. man entlehne keine Aufgabe aus Lehrbüchern, sondern bilde selbst solche, um alle „Ungleichheiten abzuschneiden;

„2. man greife nicht zu hoch und berücksichtige namentlich die schmal zugemessene Zeit, „die ein ruhiges bequemes Ueberlegen den Schülern doch nicht gestattet." — Letztere Mahnung eines praktisch erfahrenen Schulmanns ist unter allen Umständen zu beachten; was die erste Forderung betrifft, so habe ich Bedenken, ob sie immer erfüllt werden kann, da die neueren Sammlungen, die wohl jeder Lehrer neben dem Schullehrbuch benützt, eine solche Menge von Aufgaben enthalten (Lieber u. Lühmann z. B. c. 4000, G. Hoffmann 1400), dass es schwer fällt neue passende Aufgaben zu ersinnen. Nur insoweit wird jene Forderung erfüllt werden können, dass man keine Aufgabe gerade in der Fassung stellt, wie sie in dem von den Schülern benützten Lehrbuch steht und dass allgemein bekannte Aufgaben ausgeschlossen sind. Häufig ist aber, wie ich schon wiederholt bei Classen-Arbeiten kurz vor der Prüfung bemerkt habe, auch die Lösung derartiger Aufgaben, wenigstens der Beweis, nicht allen Schülern im erwünschten Grade geläufig; ich habe dabei Aufgaben im Auge, wie z. B. Verwandlung eines Dreiecks in ein anderes von gegebener Form, Construktion des Fünf- oder Zehnecks, sowie andere mit dem goldenen Schnitt zusammenhängende Aufgaben, geometrische Construktion der Gleichung zweiten Grads u. s. w. Man sei also nicht zu ängstlich in der Wahl und meine nicht, es müsse durchaus eine den Schülern bis dahin unbekannte Aufgabe sein, die ihnen zur Lösung gegeben wird; auch

---

* Z. führt als Beleg für seine Ausführungen zwei Aufgaben an:

1. Construktion eines gleichschenkligen Dreiecks aus seinen Höhen. Die Lösung dieser Aufgabe wird man aber wohl heutzutage von jedem Abiturienten erwarten können: wer die zweckmässige Hilfslinie (Lot aus der Mitte der Basis auf den Schenkel) nicht findet, muss doch darauf kommen, aus dem bekannten Verhältnis $h_a : h_b = b : a$ ein ähnliches Dreieck zu construieren.

2. Construktion eines Quadrats, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen. Hier bemerkt Z. mit Recht, die Ermittlung der Richtung der Diagonale sei „ein glücklicher Einfall". Weit einfacher ist freilich die Construktion mit Benützung des weniger bekannten Satzes aus Heis Geometrie VIII. 17, ebenso Spieker IV, 24 a. Man verbindet zwei von den 4 Punkten, etwa A u. B, fällt vom 3ten C ein Lot auf AB, schneidet auf demselben $CC^1 = AB$ ab, so giebt C^1D die Richtung einer Seite des Quadrats.

** Vermutlich der damalige Rektor Rieckher in Heilbronn.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

an bekannten Aufgaben wird das verschiedene Mass der Kenntnisse zu Tage treten. Auch dem Bedenken, dass derjenige, welchem zufällig eine Aufgabe bekannt ist, in unbilliger Weise einen Vorteil vor anderen voraus habe, dürfte nicht allzuviel Gewicht beizulegen sein. Denn abgesehen davon, dass dieser Fall bei andern Examensfächern ebensogut eintreten kann, z. B. in Exposition und Geschichte — warum soll derjenige, der fleissiger gearbeitet und sich einen reicheren Schatz von Kenntnissen erworben hat, den Gewinn hievon nicht bei der Prüfung zu geniessen haben? Zudem ist ja die Wahrscheinlichkeit, dass dieser günstige Glücksfall bei mehreren Aufgaben eintritt, eine verschwindend kleine.

Schliesslich ist noch der von Z. in U. gemachte Vorschlag zu erwähnen, statt der geometr. Construktionsaufgaben lieber solche Fragen zu stellen, die dem Candidaten Gelegenheit geben, seine Einsicht in den systematischen Aufbau der Wissenschaft zu zeigen, namentlich empfiehlt er, die Begründung eines Satzes in der Art zu verlangen, dass seine Prämissen der Reihe nach rückwärts verfolgt werden. „Der Geprüfte soll zeigen, dass er das logische Verhältniss der Sätze, den allmählichen Aufbau der einen Wahrheit auf die andere zu begreifen angefangen hat“ Theoretisch betrachtet mag das ganz richtig sein, aber in der Ausführung stösst man auf bedeutende Schwierigkeiten.

Denn wählt man irgend einen Satz, der nicht gerade zu den fundamentalen Sätzen gehört, so beruht derselbe in der Regel, ähnlich wie die Spitze eines Bauwerks, nicht nur auf einer Voraussetzung, sondern auf mehreren, jede von diesen hat möglicherweise wieder verschiedene Prämissen, und so verzweigt sich die geforderte Beweisführung in ein Detail, dessen Entwicklung zu ermüdender Weitläufigkeit führt. Bei mündlicher Repetition mag dieses Verfahren manchmal wertvolle Dienste leisten, nicht aber bei einer schriftlichen Prüfung.

Verwandt damit ist der Versuch, solche Fragen zu stellen, die ein grösseres Gebiet umfassen und einen gewissen Ueberblick über dasselbe erfordern. Aufgaben dieser Art sind wiederholt gestellt worden*, jedoch ist man im Lauf der letzten 30 Jahre mehr und mehr da-

* 1853. Unter welchen Bedingungen ist es allein möglich, um ein Viereck einen Kreis zu beschreiben? wie muss daher ein Trapez beschaffen sein, damit ein Kreis umbeschrieben werden kann? und wie ist in diesem Fall die Aufgabe zu lösen?

1856. Durch welche Eigenschaften unterscheiden sich die gleichwinkligen Parallelogramme von den ungleichwinkligen, die gleichseitigen von den ungleichseitigen in Bezug auf a) Grösse und Lage der Diagonalen, b) Inkreis und Umkreis, c) Congruenz der Dreiecke, in welche das Parallelogramm durch die Diagonalen zerfällt?

1857. Wenn man alle vier Winkel eines Vierecks halbiert und die Halbierungslinien bis zum gegenseitigen Schnitt verlängert, so entsteht ein neues Viereck, dessen Eigenschaften untersucht werden sollen a) beim Rechteck, b) schiefwinkligen Parallelogramm, c) Trapez, d) gewöhnlichen Viereck.

1859. Den geom. Ort anzugeben aller Punkte a) die von einem gegebenen Punkt gleichweit entfernt sind, b) von 2 gegebenen Punkten, c) von einer Geraden, d) von 2 Parallelen, e) von zwei convergierenden Linien.

1860. Unter welchen Bedingungen sind zwei Dreiecke einander congruent, ähnlich, flächengleich?

1863. Die verschiedenen Eigenschaften der Vierecke anzugeben, in welchen parallele Gegenseiten sind, nebst Andeutung der Beweise.

1864. Wie viele Stücke sind zur Construktion der verschiedenen Arten von Dreiecken, Parallelogrammen, Trapezen, sowie der gewöhnlichen Vierecke nötig? nebst Andeutung des Beweises.

1865. Die verschiedenen Arten der Vierecke und ihre wichtigsten Eigenschaften.

1871. Die Lehrsätze, die sich auf den Flächeninhalt geradliniger Figuren beziehen, in systematischer Reihenfolge aufzuführen und dabei jedesmal die Hauptaufgabe über Berechnung, Verwandlung und Teilung der Figuren zu nennen, deren Lösung sich unmittelbar auf die Lehrsätze gründet. (Ohne Beweis).

1878. Es sollen diejenigen Lehrsätze und Fundamentalaufgaben gruppiert werden, vermittelst deren eine gegebene Figur in eine andere verwandelt werden kann.

1889. In einem Dreieck sind die Fusspunkte der 3 Höhen durch Gerade verbunden: welche Sätze lassen sich an dieser Figur beweisen?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von abgekommen. Denn einmal ist die Auswahl ziemlich beschränkt, so dass Wiederholungen unvermeidlich sind; sodann erscheinen nach den jetzigen Ansprüchen manche dieser Aufgaben doch wohl als etwas zu leicht, wenn man sich bei der Antwort mit dem nächstliegenden begnügen will, andere dagegen (cfr. in der Anmerkung die Aufgaben von 1857, 65, 71, 78, 89.) bieten bei tieferem Eindringen eine solche Fülle von Stoff, dass schon die Aufzählung des Bekannten geraume Zeit beansprucht, und wenn vollends der Schüler neue Sätze zu entwickeln sucht, so läuft er Gefahr, an einer solchen Frage allzulang hängen zu bleiben.

Die zwei letzten mathematischen Pensa, die je mit einer Aufgabe vertreten zu sein pflegen, sind Trigonometrie und Stereometrie. Erst seit ca. 20—25 Jahren sind diese Fächer für sämmtliche Schüler unserer Lehranstalten obligat, bis dahin waren sie z. T. nur fakultativ in einer Selekta behandelt worden. Diese Neuerung war in der That notwendig, wenn der mathematische Unterricht auf der Gymnasialstufe wenigstens einen relativen Abschluss erreichen soll: denn die Kenntnis der Grundbegriffe der Trigonometrie ist schon für das Verständnis der Physik durchaus notwendig — ganz abgesehen davon, dass dieses Fach das wesentliche Verbindungsglied zwischen Algebra und Geometrie bildet — und ebenso notwendig ist die Stereometrie für die richtige Auffassung von räumlichen Verhältnissen jeder Art, speciell für das Verständnis der mathematischen Geographie. Jedoch ist in den Lehrplänen die Zeit für diese Fächer ziemlich sparsam zugemessen, da jedes durchschnittlich in einem Semester mit zwei Wochenstunden erledigt werden muss, während das letzte kurze „Semester" vor dem Examen der Repetition in sämmtlichen Fächern vorbehalten bleibt. So muss sich denn der Unterricht auf das wesentliche und notwendige beschränken, namentlich fehlt es an Zeit, durch Berechnung einer grösseren Anzahl von Uebungsbeispielen, wie in Algebra und Geometrie, die Kenntnisse nach allen Seiten hin zu befestigen und zu vertiefen. Daher bewegt sich die Mehrzahl der Schüler, wenn sie an solche Aufgaben sich machen, auf einem noch etwas unsicheren Boden, da ihre Kenntnisse, ähnlich einem eben erst fertig gewordenen Bau, sich noch nicht gehörig consolidiert haben. Die schwächeren Mathematiker wagen sich aus diesem Grund bei der Prüfung häufig nicht an diese Aufgaben, mögen sie auch verhältnismässig leichter sein als die übrigen; so ist es denn allmählich zur Uebung geworden, der richtigen Lösung dieser Aufgaben bei der Bemessung des Gesammtzeugnisses einen etwas höheren Wert beizulegen — ob mit Recht oder Unrecht, mag dahingestellt bleiben.

Das Mass dessen, was in der Trigonometrie gefordert werden kann und bis jetzt verlangt worden ist, dürfte sich im wesentlichen auf folgendes beschränken: Kenntnis der goniometrischen Grundbezeichnungen zwischen den einzelnen Funktionen mit Ausschluss der complicierteren Formeln, Fertigkeit im Auflösen der Dreiecke sowohl in den 4 Hauptfällen als bei gegebenen Summen und Differenzen von Seiten (Mollweide'sche Formeln), Berechnung der regulären Polygone, Kenntnis des Verfahrens bei der Auflösung der gewöhnlichen goniometrischen Bestimmungsgleichungen, wenn z. B. neben $\varphi \pm \psi$ eine algebraische Relation ihrer Winkelfunktionen gegeben ist. Der befähigte Schüler merkt zwar bald, dass es immer wieder dieselben Operationen sind, die er vorzunehmen hat, nämlich Anwendung und Umkehrung der Formeln für $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$, Verwandlung von Summen und Differenzen in Produkte und umgekehrt, Benützung der Correspondenz-Satzes etc. Aber trotzdem braucht es geraume Zeit und wiederholte Repetition, bis alle auch nur annähernd eine gewisse Sicherheit und Fertigkeit in solchen Umformungen sich erworben haben: es ist eben ein durchaus neues Gebiet, das dem Schüler in der Trigonometrie eröffnet wird. Namentlich liegt die Gefahr nahe,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dass bei der Möglichkeit verschiedener Lösungsmethoden nicht der einfachste direkte Weg zum Ziel eingeschlagen und dass letzteres im günstigen Fall nur auf langen Umwegen erreicht wird, oder dass der Schüler sich in ein Gewirr von Formeln verliert, aus dem er keinen Ausgang findet. Darum können die Aufgaben nicht einfach genug gewählt werden, gibt es ja doch eine grosse Mannigfaltigkeit von Anwendungen der Trigonometrie, namentlich auf Entfernungs- und Höhenbestimmungen, zu deren Lösung die einfachsten Formeln genügen und die doch einiges Nachdenken erfordern.

Es würde wohl jedem Lehrer und strebsamen Schüler Freude machen, die Anwendung der Trigonometrie auf die Lösung geometrischer Aufgaben in weiterem Umfang zu behandeln und namentlich aus der oft überraschend einfachen Formel die geometrische Construktion abzuleiten (cfr. Lieber und Lühmann, geom. Constr.-Aufgaben § 141, 142), aber hiezu wird in den seltensten Fällen die Zeit ausreichen, und man wird sich begnügen müssen, die geometrische Bedeutung der einfachsten und gewöhnlichsten trigonometrischen Formeln einzuprägen. Die überaus einfache von Reidt u. a. empfohlene Methode, die gegebenen Bestimmungsstücke eines Dreiecks in r und Winkelfunktionen auszudrücken und dann die eine unbekannte Winkelfunktion (α—β, γ) oder beide aus der Verbindung der 2—3 Bedingungsgleichungen abzuleiten — eine Methode, die auch in Lieber und Lühmanns reichhaltiger Sammlung von trigonometrischen Aufgaben durchgeführt ist, kann wohl an einzelnen Beispielen gezeigt und den Schülern dadurch ein Ausblick auf ein neues Gebiet eröffnet werden, mit welchem einzelne Befähigtere sich vertraut machen mögen, aber von der gründlichen Einübung werden wir in Folge des leidigen Zeitmangels absehen müssen.* Werden Aufgaben mit bestimmten Zahlenwerten gegeben, so ist es in diesem Fach vor allem wünschenswert, dass eine Lösung in Buchstaben vorangeschickt oder dass wenigstens der beabsichtigte Gang der Rechnung kurz skizziert wird. Denn erfahrungsgemäss kommen nirgends so viele Rechenfehler vor, wie bei der Zahlenausrechnung von trigonometrischeu Aufgaben: Abschreiben falscher Ziffern aus den Tafeln, Verwechslung der Spalten bei den trigonometrischen Funktionen, namentlich der Funktion und ihrer Cofunktion, Addition der Proportionalteile statt Subtraktion, Nichtbeachtung des negativen Zeichens mancher Funktionen im zweiten Quadranten, Irrungen in Betreff der negativen Kennziffer beim potenzieren und radizieren — das sind Fehler, gegen welche der Lehrer einen beständigen Kampf zu führen hat, und die auch bei den Examensaufgaben nicht auszurotten sind. Wenn man bedenkt, dass auch der Fachmann nur durch längere Uebung sich die erforderliche mechanische Fertigkeit und Sicherheit in der Benützung der Tafeln erwirbt, so wird man nachsichtig gegen vereinzelte Fehler sein und es überhaupt als wünschenswert erkennen, dass bei einer Examensaufgabe die numerische Rechnung keinen zu ausgedehnten Raum einnimmt.

Auch die Stereometrie kann nur in ihren Grundzügen behandelt werden, wie denn der Lehrplan von 1891 für den Unterricht eine Auswahl aus den 3 Büchern des bei uns am meisten verbreiteten Lehrbuchs von Kommerell-Hauck vorschreibt. Da solche Aufgaben, welche auf Sätze der Sphärik zurückgehen oder behufs Herstellung der richtigen Zeichnung Bekanntschaft mit der darstellenden Geometrie erfordern, ausgeschlossen bleiben müssen, so ergeben sich von selbst die Berechnungsaufgaben als die hauptsächliche Anwendung der Stereometrie, wie sie denn auch in praktischer Hinsicht die wichtigsten sind. Darum sind sie in den

* Wenn ein Schluss aus den in den Programmen veröffentlichten Aufgaben erlaubt ist, so scheint in Norddeutschland diese Art von trigonometrischen Aufgaben mit besonderer Vorliebe behandelt zu werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bekannten Sammlungen von Hechel, Lieber, Martus u. a. fast ausschliesslich vertreten und zwar in reicher Auswahl. Es kann von den Schülern erwartet werden, dass sie eine klare Einsicht besitzen in die einfacheren räumlichen Beziehungen, die bei den verschiedenen Körpern bestehen, sowohl bei jedem einzeln als in ihrer Verbindung, dass sie die wichtigsten Formeln für Berechnung inne haben und dieselben richtig anzuwenden und zu combinieren verstehen. Bei solchen Aufgaben, welche die Zeichnung einer Figur erfordern, ist darauf zu achten, dass die räumlichen Beziehungen durch einen Achsenschnitt leicht dargestellt werden können; andererseits ist Vorsicht anzuwenden, dass nicht eine Aufgabe, je nachdem sie behandelt wird, auf eine cubische Gleichung führt, weil bei einer solchen unsere Schüler ratlos dastehen mit Ausnahme solcher, die in einer Selekta mit cubischen Gleichungen bekannt geworden sind.

Eine Classe von Aufgaben, die besonders lehrreich und interessant sind, ist bis jetzt aus der Reihe der Prüfungsaufgaben ausgeschlossen, vielleicht wird ihnen mit der Zeit auch noch eine Stelle vergönnt: es sind die Aufgaben über Maxima und Minima. Besonders in der Stereometrie wird man beinahe mit Notwendigkeit auf dieselben geführt, wenn man die successive Veränderung eines Körpers verfolgt, der einer gewissen Bedingung entspricht, z. B. eines Kegels, der einer gegebenen Kugel ein- oder umbeschrieben ist, oder einer regulären Pyramide, deren Seitenkanten bei veränderlichem Neigungswinkel eine constante Grösse haben. Auch die praktische Bedeutung dieser Aufgaben dürfte nicht gering anzuschlagen sein. Die Resultate sind häufig von überraschender Einfachheit, während die Aufgaben häufig auf Gleichungen höheren Grads führen, wenn an die Stelle der „ausgezeichneten Werte“ bestimmte Zahlenwerte treten. Nach der Ansicht des Verfassers würde es zur Belebung und zur Bereicherung des Unterrichts dienen, wenn man auch an Gymnasien diese Classe von Aufgaben berücksichtigen wollte, die in Realschulen und Realgymnasien schon längst Eingang gefunden haben. Die Methode von Schellbach und Martus ist so einfach und leicht verständlich, dass sie in kurzer Zeit von den Schülern erfasst und gern angewandt wird; nach meiner Erfahrung genügen 2—3 Stunden, um sie damit bekannt zu machen. Es ist ja schon ohnehin beim Unterricht in Algebra (Bardey XXVI) Gelegenheit gegeben, das Thema der Maxima und Minima zu behandeln; hat man den Schülern an dieser Stelle die Methode gezeigt und erklärt, so finden sie es ganz begreiflich, wenn dieselbe nun auch bei andern mathematischen Fächern zur Verwendung kommt.

Hiemit sind wir mit unserem Ueberblick zu Ende. Wir haben wohl den Eindruck empfangen, dass sowohl die Behörde mit ihren Anordnungen, als auch die bei der Prüfung beteiligten Lehrer jederzeit bestrebt waren, den wechselnden Ansprüchen der Zeit nach Möglichkeit Rechnung zu tragen. Der Verfasser möchte sich daher nicht herausnehmen, irgend welche Aenderungen vorzuschlagen, obgleich gewisse Mängel, welche mit dem bisherigen Modus der Prüfung verknüpft sind, sich nicht verkennen lassen. Dieselben bestehen vor allem darin, dass es bei der jetzt üblichen Art der Prüfung in Mathematik mehr auf Detailkenntnisse als auf systematisches Wissen ankommt und dass dem Zufall ein ziemlich grosser Spielraum verbleibt. Freilich wird in den meisten Fällen der Rückschluss von den bei der Lösung einzelner Aufgaben gezeigten Detailkenntnissen auf das systematische Wissen ein berechtigter sein, wiewohl nicht unter allen Umständen. Verhält es sich ja doch bei jedem andern Prüfungsfach ebenso; alles Examinieren ist ein Herumtasten, bei dem man je nach Umständen auf ein Vakuum oder auf einen reichen Schatz von Kenntnissen stossen kann. Die schriftliche Beantwortung von 1—2 Fragen, oft ziemlich detaillierten Inhalts, aus dem umfassenden Gebiet der neueren Geschichte

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

giebt den Maststab für das Zeugnis in diesem Fach; die Uebersetzung eines Abschnitts aus einem lateinischen oder griechischen Classiker oder aus dem Alten Testament ist entscheidend für das Zeugnis des Candidaten in diesen Fächern. Dass hiebei zufällige Faktoren zu seinen Gunsten oder Ungunsten mitwirken können, wird sich nicht in Abrede ziehen lassen, daher auch die Ueberraschungen, welche das Resultat der Conkursprüfung nicht selten sowohl für die Schüler als für die bisherigen Lehrer mit sich bringt, nicht zum wenigsten in der Mathematik. Bei der sonst üblichen Abiturientenprüfung, wie sie auch an den katholischen Convikten Württembergs besteht, ist ein Correktiv gegen dieses Spiel des Zufalls gegeben, sofern die Prüfung von den bisherigen Lehrern selbst unter Leitung eines Commissärs der Behörde, welcher die Aufgaben stellt oder auswählt, abgehalten wird. Dieser Modus der Prüfung hat fürs erste den Vorteil, dass die Schüler während der entscheidenden Tage in ihrer gewohnten Umgebung bleiben. Sodann können, wie es Recht und Billigkeit erfordern, im Zweifelsfall die Leistungen des Schülers, wie sie aus den bisherigen Zeugnissen bekannt sind, in Betracht gezogen werden, es ist ebensogut möglich, ein zu hohes Examenszeugnis zu erniedrigen, wie ein zu niedriges zu erhöhen und in dieser Weise einen Ausgleich zu treffen. Bei der Conkursprüfung dagegen sind sowohl die Personen der Candidaten, wie ihre bisherigen Fachzeugnisse der Prüfungs-Commission vollständig unbekannt, (obgleich es bisweilen sehr erwünscht wäre, das bisherige Zeugnis zu kennen, namentlich wenn die Ansichten des Referenten und Correferenten auseinandergehen), es müssen daher die Zeugnisse ausschliesslich auf Grund der vorliegenden Einzelleistung erteilt werden. So lang die Prüfung in der bisher üblichen Form besteht, wird daher unter allen Umständen der unberechenbaren Gunst und Ungunst des Zufalls ein grösserer Spielraum verbleiben als bei jeder anderen Prüfung.

Als Anhang sowie z. T. als Beleg für die bisherigen Ausführungen folgt nun eine übersichtliche Zusammenstellung der mathemat. Aufgaben der letzten 20 Jahre. Vielleicht ist sie manchem Collegen nicht unerwünscht, und zugleich möchte ich sie angesehen wissen als einen bescheidenen Beitrag zur Geschichte unseres vaterländischen Schulwesens in einem speziellen Fach.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Conkurs 1878.

1) $3\sqrt{50} - 5\sqrt{18} + \frac{5-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} - \frac{13}{7} = ?$ Auflösung $\frac{\sqrt{8}}{7} = 0.44406$.

2) Welche zweiziffrige Zahl hat die Eigenschaft, dass, wenn man sie mit dem Produkt ihrer Ziffern dividiert, der Quotient = 2 wird, und dass die Ziffern in umgekehrter Ordnung erscheinen, wenn man 27 zu der ursprünglichen Zahl addirt?

A.: 36. Auch diophantisch nur aus der ersten Gleichung.

3) Welches Kapital wächst in 32 Jahren bei $3^1/_4$% Zinseszins auf 41 742 ℳ. an?

A.: 15 000.

4) Wie gross ist die Oberfläche eines Würfels mit der Diagonale d = 9 m? welches ist der Neigungswinkel der Diagonale gegen eine Seitenfläche? $O = 2d^2 = 162$. $\operatorname{tg}\varphi = {}^1/_2\sqrt{2}$. $\varphi = 35^0\ 15'\ 52''$.

5) Eine Gerade so zu teilen, dass das Quadrat über dem einen Teil gleich dem $1^1/_2$fachen Quadrat über dem zweiten Teil wird. (Lösung algebraisch oder mit Benützung des Satzes, dass im rechtwinkligen Dreieck die Quadrate der Katheten sich verhalten wie ihre Projektionen).

6) Gegeben Winkel α und Punkt P ausserhalb desselben; durch P eine Gerade zu ziehen, dass das entstehende △ einen gegebenen Umfang hat. (Tangente an den äusseren Berührungskreis.)

7) Es sollen diejenigen Lehrsätze und Fundamental-Aufgaben gruppiert werden, vermittelst deren eine gegebene Figur in eine andere verwandelt werden kann.

8) Gegeben ein quadratisches, senkrechtes, oben offenes Prisma von 6 cm Lichtweite; in dasselbe wird eine die Seiten berührende Kugel eingelassen und so viel Wasser aufgeschüttet, dass der Wasserspiegel die Kugel gerade bedeckt. Wie hoch steht das Wasser im Prisma, wenn die Kugel herausgezogen wird? $x = 2r - {}^1/_3\, r\pi = 2{,}8584$ cm.

1879.

1) A und B haben das gleiche Einkommen, während aber A jährlich $^1/_6$ davon zurücklegt, hat B, der jährlich 800 ℳ. mehr braucht als A, nach 10 Jahren gerade so viel Schulden als Einkommen. Wie gross ist das Einkommen beider? 3000 ℳ.

2) Ein Bahnzug ist, nachdem er 480 km gefahren, einem andern, der 7 Stunden später abgegangen ist, aber stündlich 40 km mehr zurücklegt, um 80 km voraus; wie lang ist er gefahren und mit welcher Geschwindigkeit? 12 Stunden mit 40 km Geschwindigkeit.

3) Vier Personen teilen 16 250 ℳ. in der Art, dass ihre Anteile eine geometrische Reihe bilden, in welcher die Differenz der zwei äusseren Glieder zu der der mittleren sich verhält wie 19 : 6; wie gross sind die Teile? 2000, 3000, 4500, 6750 oder umgekehrt.

4) Zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich = 4 : 7, ihre Gegenwinkel = 1 : 2; wie gross sind die Winkel, und wie verhält sich die dritte Seite zu beiden andern? $\cos\varphi = \frac{7}{8}$. $\cos\psi = \cos 2\varphi = \frac{17}{32}$. $\sin\omega = \frac{33\sqrt{15}}{128}$; Verhältniss der Seiten = 16 : 28 : 33. $\angle\varphi = 28^0\ 57'\ 18''$. $\angle\psi = 57^0\ 54'\ 36''$. $\angle\omega = 93^0\ 8'\ 6''$.

5) Beschreibe in die zwei Dreiecke, in welche ein rechtw. △ durch die Höhe geteilt wird, Kreise und beweise, dass deren Umfänge sich wie die berührten Katheten und die Kreisflächen wie die Projektionen der Katheten verhalten. Beweis leicht, da die Dreiecke ähnlich sind und $b^2 : c^2 = p : q$.

6) Zwischen zwei sich schneidende Kreise ein Dreieck so zu legen, dass die gemeinschaftliche Sehne seitenhalbierende Transversale wird. (Bekannte Aufgabe, Lösung einfach.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

7) In einen Kreis ein Trapez zu construieren, dessen parallele Seiten sich verhalten wie zwei gegebene Quadrate ($= a^2 : b^2$) und dessen nicht parallele Seiten in einem Punkt P ausserhalb des Kreises sich schneiden. Zieht man aus dem Schnittpunkt P der AB und CD die Tangente PT, so ist $PB : PT = PT : PA = a : b$

8) In eine Kugel soll ein gleichseitiger Kegel construiert und aus dem Kugelradius r das Verhältnis der Körper nach Oberfläche und Volumen bestimmt werden. 9 : 16 resp. 9 : 32.

1880.

1) 10 Männer und 15 Knaben brauchen 6 Tage zu einer Arbeit; 7 Männer und 12 Knaben brauchen zu derselben 10 Tage unter Witterungsverhältnissen, welche sie um 25% erschwert haben; wie verhält sich die Arbeitskraft eines Knaben zu der eines Mannes? Wie 2 zu 3.

2) A und B gewinnen zusammen 100 ℳ.; A gab ein Kapital, dessen Hälfte um 100 ℳ. kleiner war als das Kapital des B, und vom Gewinn erhält A so viel als $\frac{3}{20}$ vom Kapital des B betragen; wie viel hat jeder eingelegt und gewonnen? Einlagen 600 und 400 ℳ. Gewinn 60 und 40 ℳ. oder Einlage $22^2/_9$ und $111^1/_9$ ℳ. Gewinn $16^2/_3$ und $83^1/_3$ ℳ.

3) Zwei Körper, 104 m von einander entfernt, bewegen sich gegen einander, der eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit von 1 m pro Sekunde, der andere mit einer Anfangs-Geschwindigkeit von 0,5 m, die sich in jeder Sekunde um 0,2 m steigert. Nach wie viel Sekunden begegnen sie einander? nach 26 Sekunden; Bedeutung des zweiten Wurzelwerts — 40?

4) A legt vom 1. Jan. 1880 inclus. an jährlich 500 ℳ. in eine Sparkasse bei $4^1/_2$% Zinseszins: wie viel wird B von demselben Termin an halbjährlich (also je am 1. Jan. und 1. Juli) einlegen müssen, wenn die Ersparnisse beider am 31. Dezbr. 1899 gleich sein sollen? Wird bei B der Verzinsungs-Faktor $q = 1{,}0225$ angenommen, so ist $x = 251{,}33$; nimmt man aber $q = \sqrt{1{,}045}$, so wird $x = 252{,}75$.

5) Ein rechtwinkliges Dreieck zu construieren aus den beiden Abschnitten, in welche die Hypotenuse durch die Mediane des rechten Winkels geteilt wird. Durch die Abschnitte ist die Form des Dreiecks bestimmt; noch kürzer durch Verbindung des betreffenden Punktes auf der Hypotenuse mit der Mitte des unteren Halbkreis-Bogens.

6) Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ein Viereck zu construieren, in welches und um welches sich ein Kreis beschreiben lässt. Die 3 gegebenen Stücke bestimmen den Umkreis, von den zwei übrigen Seiten ist die Differenz gegeben.

7) Winkel und Seiten eines Dreiecks zu berechnen aus $F = 360$. $h_a = 10$. $h_b = 16$.
$a = 72$. $b = 45$. $c = 29{,}85$. $c^1 = 116{,}305$.
$\angle \alpha = 147^0\ 35'\ 11''.5$. $\angle \beta = 19^0\ 34'\ 25''.5$. $\angle \gamma = 12^0\ 50'\ 23''$.
oder $\angle \alpha = 7^0\ 54'\ 25''.9$. $\angle \beta\ 4^0\ 55'\ 57''.1$. $\angle \gamma = 167^0\ 9'\ 37''$.

8. Gegeben sind zwei Kugeln mit den Radien R und r (4. 3.), welche einander berühren; um dieselben ist ein Kegelrumpf beschrieben, dessen Grundflächen von den Kugeln berührt werden; gesucht sein Inhalt und Mantel.

Beachte die ähnlichen Dreiecke im Achsenschnitt: $\text{Vol} = \frac{2}{3}\pi\,(R + r)\frac{R^4 + R^2 r^2 + r^4}{Rr}$

$= 587{,}66$. $\text{Mantel} = \frac{(R^2 + r^2)(R + r)^2 \cdot \pi}{Rr} = 320{,}71$.

1881.

1) Eine Stiftung, welche bisher $^2/_3$ ihres Kapitals zu 5%, den Rest zu $4^1/_2$% ausgeliehen hatte, muss in Folge der Reduktion des Zinsfusses auf 4% jedes der 6 gleichen Stipendien, welche sie jährlich auszubezahlen hatte, um 25 ℳ. vermindern. Gesucht Capital und Stipendien. 18000 ℳ. 145 ℳ. ursprünglich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Ein Kaufmann kauft von einer Waare ein gewisses Quantum für 180 ℳ. und verkauft sie mit einem Zuschlag von je 75 ₰ auf das Pfund; nachdem er davon für 180 ℳ. verkauft hat, bleiben ihm noch 12 Pfund übrig; wie viel Ware hat er eingekauft? 60 ℔ à 3 ℳ.

3) Jemand hat ein Vermögen von 240 000 ℳ. zu 5% angelegt; wenn er jährlich 18 000 Mark braucht, nach wie viel Jahren ist sein Vermögen aufgezehrt? 22,51.

4) Ein Dreieck zu berechnen aus $a - b = 2$. $a^2 - b^2 = 20$, $\alpha - \beta = 12^0\ 50'\ 2''$. $a = 6$. $b = 4$. $c = 8{,}7712$. $\angle\ \alpha = 35^0\ 46'\ 5''$. $\angle\ \beta = 22^0\ 56,\ 3''$. $\angle\ \gamma = 121^0\ 17'\ 52''$. $F = 10{,}254$.

5) Dreieck aus Transversale, Höhe und Mediane einer Seite. Bekannte Aufgabe.

6) Ein beliebiges Viereck mit Beibehaltung eines Winkels in ein gleichschenkliges Dreieck zu verwandeln. Zuerst Dreieck, dann mittlere Proport. zwischen den Seiten desselben, welche den beizubehaltenden Winkel einschliessen.

7) Aus P eine Sekante PAB an einen gegebenen Kreis zu ziehen, dass das Rechteck aus dem innern und äussern Abschnitt einem gegebenen Quadrat a^2 gleich wird. — Ist PT Tangente, so ist $PA^2 = PT^2 - a^2$.

8) Ein gerader Kegel steht mit einer Halbkugel auf gleicher Basis und schneidet dieselbe nach einem Kreis, dessen Durchmesser gleich dem Radius der Halbkugel ist. Beide Körper sind zu vergleichen nach Oberfläche und Volumen, der ausserhalb des Kegels liegende Teil der Halbkugel ist zu berechnen.

Der Kegel ist gleichseitig; Verhältnis der Vol. $= 2 : \sqrt{3}$. Die Oberflächen sind gleich. Differenz zwischen Kugelzone und Kegelrumpf $= \frac{1}{12}\ \pi\ r^3\ \sqrt{3}$

1882.

1) A giebt dem B von seinem (des A) Vermögen 4 mal so viel als dieser schon hat, ebenso B dem C und endlich C dem A; nun haben alle gleichviel. Wie verhalten sich ihre ursprünglichen Anteile zu einander? Wie 269 : 61 : 45. Allgemein: $x : y : z = (3n^3 + 4n^2 + 3n + 1) : (3n^2 + 3n + 1) : (2n^2 + 3n + 1)$; auch durch Raisonnement rückwärts zu lösen.

2) In einer Garnisonsstadt befinden sich neben der Infanterie 3000 Mann Kavallerie; durch den Abzug von 3000 Infanteristen erhöht sich der Prozentsatz der Kavallerie, wenn man sie mit der jetzigen Gesamtzahl der Garnison vergleicht, um 5. Wie viel Infanterie war es ursprünglich? 12000.

3) Ein Vater legt für seinen am 1. Oktbr. 1864 geborenen Sohn an diesem Tag 100 ℳ. in eine Sparkasse, die 4% Zinseszins zahlt, er wiederholt diese Einlage regelmässig bis 1. Oktbr. 1881 inclus. so dass er im Ganzen 18 mal bezahlt. Wenn nun der Sohn im Herbst 1882 die Universität bezieht, welchen Betrag wird ihm die Sparkasse je am 1. Oktbr. und 1. April auszahlen, wenn sämtliche Auszahlungen gleich sind und das Kapital mit der letzten Zahlung am 1. April 1886 erschöpft sein soll? (Die erste Zahlung am 1. Oktbr. 1882.) Antwort: 356,94 Mark, resp. 356,65.

4) Um einen Kreis ist ein reguläres nEck beschrieben, ebenso in den Kreis, die Differenz der beiden Polygone = d; wie gross ist der Radius des Kreises, die Flächen und Seiten der Polygone? Beispiel $n = 12$. $d = 1$. $r = \frac{1}{\sin \varphi} \sqrt{\frac{d \cot g\ \varphi}{n}} = 2{,}1547$.

$F = 13{,}928$. $F^1 = 14{,}928$. $s = 1{,}1154$. $s^1 = 1{,}1547$.

5) Ein Parallelogramm zu construieren aus beiden Seiten und dem Schnittwinkel der Diagonalen. Lösung leicht durck Verschiebung einer Diagonale.

6) Einen Kreis zu construieren, der durch zwei gegebene Punkte geht und von einer

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Geraden eine Strecke von gegebener Länge abschneidet. Es ist Differenz und Produkt zweier unbekannten Strecken gegeben.

7) Die Gerade a so zu teilen, dass das auf dem einen Stück errichtete Quadrat = dem gleichseitigen △ über dem andern wird. Verwandle ein beliebiges gleichseit. △ in ein Quadrat und teile in dem dadurch bestimmten Verhältnis; umständlicher ist es, das Verhältnis $x^2 : y^2 = \sqrt{3} : 4$ geometrisch zu construieren.

8) Um eine Kugel mit Radius r ist ein Berührungscylinder, in die Kugel ein gleichseitiger Kegel beschrieben: die drei Körper zu vergleichen nach Volumen, Mantel und Oberfläche.

a) 32 : 48 : 9. b) 8 : 8 : 3. c) 16 : 24 : 9.

1883.

1) Jemand hat 14400 ℳ. in 3 Posten, wovon der zweite um $^1/_3$ grösser als der erste, der dritte um $^1/_4$ grösser als der zweite ist, zu verschiedenen Prozenten ausstehen. Der 1te und 2te Posten tragen jährlich 426 ℳ. Zins, der 2te und 3te 492 ℳ. Der 3te u. 1te 534 ℳ. Wie hoch ist der Zinsfuss? $6^1/_2$. 4. 5%.

2) Von zwei Orten, 88 km entfernt, gehen A und B einander entgegen und begegnen einander nach $7^1/_2$ Stunden; welchen Weg macht jeder in einer Stunde, wenn A zu 8 km 15 Minuten weniger bräucht als B? A macht $6^2/_5$, B $5^1/_3$ km in der Stunde.

3) Jemand legt von seinem Einkommen jährlich 250 ℳ. zu $4^1/_2$% auf Zinseszinsen an; nach wie viel Jahren hat er 15250 ℳ. erspart? 30 J.

4) Die zwei Seiten eines Dreiecks, deren Summe = s ist, verhalten sich = m : n. Die Tangente des eingeschlossenen Winkels verhält sich zum Sinus des doppelten Winkels wie 7 : 3. Inhalt und dritte Seite zu bestimmen. $\cos\gamma = \pm\sqrt{\frac{3}{14}}$. $\sin\gamma = \sqrt{\frac{11}{14}}$.

$$F = \frac{m\,n\,s^2}{2\,(m+n)^2}\sqrt{\frac{11}{14}}.\quad c = \frac{s}{m+n}\sqrt{m^2 + n^2 \mp 2\,m\,n\sqrt{\frac{3}{14}}}.$$

5) Ein Kreis soll eine Seite eines gegebenen Dreiecks in einem gegebenen Punkt berühren, die zwei andern unter gleichen Sehnen schneiden. Für den Mittelpunkt sind zwei geometrische Orte gegeben.

6) Ein △ aus Umfang, Jnhalt und einem Winkel zu construieren. Da ρ Datum ist, so kann der Jnkreis und ein Ankreis construiert werden.

7) Ein Viereck in ein reguläres Fünfeck zu verwandeln. Verwandle das Fünfeck in ein Dreieck; der 5te Teil davon ist in ein anderes △ zu verwandeln, das gleichschenklig ist und an der Spitze einen Winkel von 72° hat.

8a.) Der abgewickelte Mantel eines Kegels mit der Seitenlinie s liefert einen Sektor mit dem Centriwinkel von 36°; gesucht dessen Volumen. $\frac{\pi\,s^3\,\sqrt{11}}{1000}$

b) Einer Kugel r ist eine reguläre vierseitige Pyramide einbeschrieben, die Höhe wird durch den Mittelpunkt der Kugel in stetiger Proportion geteilt; gesucht das Verhältnis der Volumina. $1 : 2\pi$.

1884.

1) Zwei Körper haben einzeln die specif. Gewichte s und s', der durch ihre Verbindung entstandene Körper hat das spec. G. s''; in welchem Verhältnis stehen die absoluten Gewichte der zwei ersten Körper? $\frac{s\,(s' - s'')}{s'\,(s'' - s)}$.

2) Zwei Städte haben zusammen 57000 Einwohner; die Bevölkerung der ersten ver-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

mehrt sich um 8%, die der zweiten um $33^1/_3$%, dadurch kehrt sich das Verhältnis der ursprünglichen Bevölkerungszahlen gerade um; wie viel Einwohner hatte jede Stadt ursprünglich? 30000 resp. 27000 E.

3) A hat K Mark, die zu p% auf Zinseszins ausstehen, am Schluss jedes Jahres braucht er die Summe r; B hat K^1 Mark auch zu p% auf Zinseszins ausgeliehen, und fügt am Schluss jedes Jahres ausser den Zinsen die Summe r^1 hinzu. Nach wie viel Jahren haben beide gleich viel und wie viel hat dann jeder? $p = 4\%$. $K = 100000$. $r = 5000$. $K^1 = 1000$. $r^1 = 725{,}2$.

$$n = \frac{\log (r + r^1) - \log \left((r + r^1) - \frac{p}{100} (K - K^1) \right)}{\log q}.$$ 30 Jahre; Endkapital 43916.

4) Die Basis BC eines Dreiecks ist in P so geteilt, dass PA = 5 m, PC = 9 m ist, $\angle$ PAB = 24 , $\angle$ PAC = 40°, gesucht die übrigen Stücke des Dreiecks.

$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{9 \sin 24}{5 . \sin 40} = \operatorname{tg} \varkappa$. $\beta + \gamma$ gegeben. b = 13,992. c = 12,285. $\angle \beta = 63^0\ 56'\ 12''$. $\angle \gamma = 52^0\ 3'\ 48''$.

5) Dreieck aus ρ, h_c, $\alpha - \beta$. W_c ist Datum, Mittelpunkt des Inkreises zu finden.

6) In einem Trapez mit gleichen nicht parallelen Seiten = a und der kleineren parallelen Seite b stehen die Diagonalen senkrecht auf den nicht parallelen Seiten. Das Trapez ist aus a und b zu construieren. Am kürzesten mit dem ptolemäischen Lehrsatz, oder rechtwinkliges Dreieck zu construieren aus Kathete a und Differenz der Projektionen = b.

7) Auf einer Geraden sind 4 Punkte A, B, C, D in ungleicher Entfernung von einander gegeben, es soll zwischen B und C ein Punkt X von der Eigenschaft gefunden werden, dass XA . XB = XC . XD ist. — Beliebiger Kreis durch A, B, ebenso durch C, D, so geht die gemeinschaftliche Sehne oder Potenzlinie durch X; auch algebraisch: AC ist im Verhältnis der ganzen Strecke AD zum Mittelstück BC zu teilen.

8) Auf sämtlichen Flächen eines Würfels von der Kante a sind nach aussen reguläre vierseitige Pyramiden errichtet, die sämtlich ihre Spitzen auf der Oberfläche der Umkugel haben. Wie gross ist der Inhalt des Gesamtkörpers und wie verhält er sich zu dem der Kugel?

Gesamtvolum = $a^3 \sqrt{3}$. Verhältnis = $2 : \pi$.

1885.

1) Ein Beamter kann von seiner Besoldung jährlich 200 ℳ. zurücklegen; er wird mit 200 ℳ. Mehrgehalt in eine andere Stadt versezt; da aber der Lebensunterhalt um $12^1/_2$% teurer ist, so braucht er jährlich von seinem eigenen Vermögen noch 104 ℳ. Wie gross ist sein ursprünglicher Gehalt? 4400 ℳ.

2) Zwei Arbeiter A und B vollenden eine Arbeit nach einander zusammen in 15 Tagen, A verrichtete $^3/_4$. B $^1/_4$ der Arbeit. Würde A die Arbeit allein vollenden, so brauchte er nur 4 Tage mehr, als wenn sie zusammenarbeiten. Wie viel Tage braucht jeder einzeln, wie viel beide zusammen? A 12 Tage, B 24, zusammen 8.

3) Es geht jemand mit 8000 ℳ. in eine Lebensversicherung, in den ersten 5 Jahren zahlt er 250 ℳ. Prämie pränum. von da ab jährlich nur noch 151 ℳ. 20 ₰. Wenn er nun bald nach der 25ten Zahlung stirbt, wie gross ist der Gewinn oder Verlust der Versicherungsgesellschaft, die Zinsen zu 4% gerechnet? Verlust 530,77.

4) In einem $\triangle$ ist a = 10. $\operatorname{tg} \beta = 2 \sin 2 \beta$. $2 \cos \gamma = \sin \gamma$; gesucht Winkel und Inhalt. $\angle \beta = 60^0$. $\angle \gamma = 63^0\ 26'\ 6''$. $\angle \alpha = 56^0\ 33'\ 54''$. F = 46,41.

5) Um einen Kreis ein gleichschenkliges Trapez mit einem gegebenen Winkel zu construieren und zu beweisen, dass bei jedem derartigen Trapez der Durchmesser des Kreises mittlere Proportionale zwischen den zwei parallelen Seiten ist. Construktion leicht; beachte die zwei Stücke, in welche die Nebenseite durch den Berührungspunkt geteilt wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6) Sehnenviereck aus r. a, c. $\angle (\beta + \gamma)$. — a und c schneiden sich in E, der $\angle$ an E $= 180 - (\beta + \gamma)$, resp. $= (\beta + \gamma) - 180^0$; Sehne = c in gegebener Richtung in den Kreis zu legen.

7) In einem $\triangle$ zu einer Seite eine Parallele zu ziehen, dass das abgeschnittene $\triangle$ das grössere Stück einer stetigen Proportion werde, bei der das ursprüngliche $\triangle$ das ganze, das Trapez das kleinere Stück abgiebt. Die Parallele zu a ist durch die Gleichung bestimmt: $a^2 : x^2 = x^2 : a^2 - x^2$; a ist nach dem goldenen Schnitt zu teilen, und die mittlere Proportionale zwischen dem grössern Stück und a zu suchen.

8) In eine Kugel mit dem Radius r = 25 ist eine gerade reguläre vierseitige Pyramide beschrieben mit der Grundfläche F = 800; wie gross ist ihr Volumen?

$$\text{Vol} = \frac{F}{3}\left\{ r \pm \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}F} \right\} = 10\,666^2/_3 \text{ oder } 2666^2/_3,$$ je nachdem die Pyramide in den grössern oder kleinern Kugelabschnitt beschrieben ist.

1886.

1) Zwei Metalle haben das specif. Gewicht 10 und 6, ihre Mischung hat das spec. G. 8. Setzt man der ersten Masse 40 gr., der 2ten 12 gr. zu, so wird das spec. Gew. der Mischung $8^1/_4$. Wie schwer sind ursprünglich die 2 Massen? 50 und 30 Gramm.

2) Ein Bahnzug geht von A nach B und trifft mittags 12 Uhr in der Zwischenstation C ein, die 22 Meilen von A, 12 Meilen von B entfernt ist. Gleichzeitig kommt ein Zug, der 1 Stunde später von B abgegangen ist, in C an, derselbe legt pro Stunde $1^1/_2$ Meilen weniger zurück als der erste. Wie viel Meilen macht jeder Zug pro Stunde? wie lang war jeder unterwegs? um wie viel Uhr fuhr jeder ab?

Entweder ging der erste Zug um 8 Uhr ab mit $5^1/_2$ Meilen Geschwindigkeit pro Stunde, oder 8 Uhr 20 M. mit 6 Meilen Geschwindigkeit.

3) Ein Kapital von K Mark steht zu 4% auf Zinseszins, nach einer gewissen Anzahl von Jahren gehen u Mark verloren; trotzdem ist das Kapital auf K^1 *M.* angewachsen, nachdem der Rest wieder ebensoviele Jahre ausgestanden war. Wie lang stand das Kapital im ganzen aus? K = 1000. u = 500. $K^1 = 5288{,}9..$ Antwort $q^n = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4\,K\,K^1}}{2\,K}$

Daraus n = 24 Jahre.

4) Von der Decke eines $5^1/_2$ m hohen Turnsaals sind zwei schiefe Seile nach dem Boden gespannt; das eine ist um die Hälfte länger als das andere und hat einen halb so grossen Neigungswinkel? $\cos \varphi = {}^3/_4$. Der kleinere $\angle = 41^0\ 24'\ 36''$. Länge der Seile 5,5435, 8,3152 m.

5) $\triangle$ aus a und b und der Bedingung, dass der Seite a ein doppelt so grosser Winkel als der b gegenüberliegt. Halbiere $\angle\ \alpha$, so ist das eine der Teildreiecke dem ganzen ähnlich; oder mittelst des Umkreises, in den Bogen über BC lässt sich b 2mal einlegen etc.; auch mittelst der Relation $a^2 - b^2 = bc$, trigonometrisck $\cos \beta = \frac{a}{2b}$.

6) Ein Quadrat und ein gleich grosses Rechteck zu construieren, wenn gegeben sind die Summe s und s^1 aus der Quadratseite und je einer Rechteckseite.

Geometrisch: Rechteck aus s und s^1, Satz vom Ergänzungsparallelogramm, oder: ein rechtw. $\triangle$ aus den Katheten s und s^1 bestimmt die Form desjenigen Dreiecks, in welchem die Quadratseite als Höhe, die Rechteckseiten als Projektionen erscheinen. Algebraisch: Quadratseite $= \frac{s\ s^1}{s + s^1}$.

7) Ein gleichschenkliges Trapez zu construieren, gegeben die grössere parallele Seite, die gleich der Diagonale ist und die Bedingung, dass die drei andern Seiten gleich sein sollen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lösung unmittelbar aus dem ptolemäischen Lehrsatz; Berechnung der Winkel ergiebt, dass der Winkel an der Basis 72^0; algebraisch: wird Lot DE gefällt, so ist $DE^2 = x^2 - \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{a+x}{2}\right)^2$. $a^2 - x^2 = ax$. Goldener Schnitt.

8) Einer Kugel vom Radius r soll ein Cylinder einbeschrieben werden, dessen Gesamtoberfläche $^3/_4$ der Kugeloberfläche beträgt; wie gross ist Grundkreis und Höhe desselben?

$$x = \frac{3\,r}{\sqrt{10}},\quad y = \frac{2r}{\sqrt{10}};\ x^1 = \frac{1}{2}\,r\sqrt{2}.\quad y^1 = r\sqrt{2}.$$

1887.

1) Von A fuhren mit der Eisenbahn nach B 320 Personen, und zwar in Classe III. mit Inbegriff von 20 Kindern, die nur die halbe Taxe bezahlten, dreimal mehr Personen als in Cl. I. und II. zusammen. Die Fahrtaxe I. Cl. beträgt 4 ℳ., II. Cl. 2 ℳ. 70 ₰, III. Cl. 1 ℳ. 70 ₰; für alle zusammen wurden 633 ℳ. bezahlt. Wie viel Personen fuhren in jeder Classe? 20, 60, 240.

2) Aus einem Fass mit 5 Hektolitern Weingeist wird ein gewisses Quantum abgelassen, das Fass mit Wasser aufgefüllt, dann noch einmal ein um 25 L. kleineres Quantum abgelassen und wieder mit Wasser aufgefüllt. Jetzt sind 40% Wasser in der Mischung; wie viel wurde das erstemal abgelassen? 125 L.

3) A hat am 1. Jan. 1860 8000 ℳ. in einer Rentenbank zu 4% angelegt und 20 Jahre hindurch je am Schluss des Jahres um 400 ℳ. vermehrt. Das angesammelte Kapital soll in eine 20jährige Rente umgewandelt werden, die zum 1ten mal 1 Jahr nach der letzten Einzahlung erhoben wird; wie gross wird sie sein? 2166,25.

4) Von einem △ ist Umfang = 2 s, ∠ α und ∠ β gegeben; die Werte für Seiten und Jnhalt zu entwickeln. Lösung bekannt.

5) Aus P an Kreis K eine Sekante zu ziehen, dass das Rechteck aus der ganzen Sekante und Sehne gleich dem Quadrat des Durchmessers werde. Ziehe Tangente PT, aus T den Durchmesser TA; so ist PA die Sekante; die algebr Behandlung führt auf dieselbe Construktion.

6) Ein Quadrat zu construieren, dessen Inhalt sich zu dem eines gegebenen Rechtecks verhalte, wie sein Umfang zum Umfang des Rechtecks. $x = \frac{2\,ab}{a+b}$ harmonisches Mittel zu a und b. Geometrisch: a und b Projektionen eines rechtw. △, Hypotenuse $AB = (a + b)$; Höhe OC, ziehe OM nach der Mitte von AB, Lot CD auf OM, $OD = x$.

7) In einen gegebenen Kreis ein △ zu construieren, von dem ein Winkel und seine Mediane gegeben sind. Umkreis von Mediane AD in E geschnitten, so ist EA . ED und EA — ED gegeben; also 2 Strecken aus Produkt und Differenz zu construieren.

8) Wie gross ist die Gesamtoberfläche eines geraden Cylinders, der das gleiche Volumen hat wie eine Kugel mit der Oberfläche O, wenn die Höhe des Cylinders gleich dem dreifachen Kugelradius ist? $\frac{11}{9}$ O.

1888.

1) Eine gewisse Anzahl Personen reicht mit einem Vorrat von Lebensmitteln 26 Tage, wenn die täglichen Rationen 3,3 kg betragen; ein um 169,2 kg kleineren Vorrat reicht 21 Tage für 30 Personen weniger, wenn die Rationen 0,9 kg mehr betragen. Wie viel Personen sind es? 1032.

2) Zwei verschiedene Waaren kosteten zusammen 200 Mark. Die erste wird um 135 Mark, die zweite um 70 ℳ. verkauft, wobei an der ersten ebensoviel % gewonnen als an der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zweiten verloren werden; was hat jede Waare gekostet? Zahl der % entweder 20 oder $12\frac{1}{2}$. Im ersten Fall sind die Preise $112\frac{1}{2}$ und $87\frac{1}{2}$ ℳ. Im zweiten 120 und 80 ℳ.

3) A hat sein Vermögen in einer Aktienunternehmung angelegt, die am Schluss jedes Jahres fälligen Zinsen legt er in eine Sparkasse, die p% Zinseszins bezahlt. B legt sein ganzes ebenso grosses Vermögen in die Sparkasse und lässt es mit p% Zinseszins anwachsen. Nach n Jahren geht das ganze Stammkapital des A verloren, nur der letzte Zins wird noch ausbezahlt; seine ersparten Zinsen nebst Anwachs sind aber gerade so gross, wie das angewachsene Kapital des B; zu wie viel % hat sich das Aktienunternehmen verzinst?

$$p = 4. \quad n = 12. \quad x = \frac{p\ q^n}{q^n - 1} = 10{,}0145\,\%.$$

4) Wie hoch schwebt eine Wolke über der Erde, wenn sie von einer Anhöhe h Meter hoch unter dem Elevationswinkel ε erscheint und ihr Spiegelbild in einem See unter dem Depressionswinkel δ? $h = 76{,}405$ m. $\varepsilon = 56^0$. $\delta = 58^0$.

$$x = h.\ \frac{\sin(\delta + \varepsilon)}{\sin(\delta - \varepsilon)} = 2000 \text{ m}.$$

5) Ein △ zu construieren, wenn gegeben sind die 3 Punkte, wo Transversale, Höhe und Mediane einer Seite den Umkreis schneiden. Umkreis ist gegeben, OM ∥ AH, dadurch eine Ecke bestimmt, das weitere leicht.

6) Ein Viereck in einen Rhombus zu verwandeln, dessen Winkel = dem Schnittwinkel der Diagonalen des Vierecks ist. Parallelen durch die Ecken mit den Diagonalen geben ein doppelt so grosses Viereck, halbiere dasselbe und suche die mittlere Proportionale zu den Seiten.

7) Gegeben drei gleiche Kreise mit Radius r, ihre Mittelpunkte A, B, C liegen in gleichen Entfernungen von einander auf einer Geraden; einen Kreis zu construieren, der alle drei Kreise berührt, den mittleren einschliessend, die zwei andern von aussen.

Radius BT senkrecht auf AC wird über T um TR = r verlängert, ziehe AR, so liegt X auf dem Mittellot von AR und auf der verlängerten BT.

Algebraisch; ist AB = BC = d, so wird $x = \frac{d^2}{4\ r}$.

8) Wird ein Kugeldurchmesser AB in C nach dem goldenen Schnitt geteilt und durch C eine senkrechte Ebene durch denselben gelegt, so ist der Mantel des kleineren Kugelsegments gleich dem Mantel des dem grössern einbeschriebenen senkrechten Kegels.

1889.

1) Eine gewisse Summe soll unter 4 Personen so verteilt werden, dass A $\frac{1}{3}$ weniger 1000 ℳ, B $\frac{1}{3}$ des Rests vermehrt um 2000 ℳ, C $\frac{3}{5}$ des neuen Rests weniger 1200 ℳ erhält, so dass für D noch 6000 ℳ übrig bleiben. Wie gross ist die Summe? 30 000 ℳ.

2) Um sein Ziel schneller zu erreichen, vermehrt ein Reisender, nachdem er 40 km zurückgelegt hat, seine Geschwindigkeit um 2 km pro Stunde. Wenn er den ganzen Weg mit der grösseren Geschwindigkeit zurückgelegt hätte, so wäre er 40 Minuten früher, wenn mit der anfänglichen, 20 Minuten später ans Ziel gekommen. Wie gross ist die Länge des Wegs? 60 km.

3) A hat eine Jahresrente von 600 ℳ zu geniessen, die 20 Jahre läuft; er will 5 Jahre auf den Genuss verzichten, um für die übrigen 15 Jahre eine entsprechend höhere Rente zu beziehen. Wie gross ist diese bei 4%? 892,28.

4) In und um den Kreis r sind zwei reguläre n Ecke beschrieben, deren Seiten paarweise parallel laufen; der Inhalt der zwischen den Umfängen liegenden Figur ist zu bestimmen. $r = 9{,}5$. $n = 25$. $F = nr^2 \operatorname{tg} \varphi \sin^2 \varphi = 4{,}477$.

5) In einem △ sind die drei Höhen gefällt und ihre Fusspunkte durch Gerade verbunden; welche Sätze lassen sich an dieser Figur beweisen?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6) $\triangle$ aus a, α, t_b. $\triangle$ ABC wird zum Parallelogramm ABCD ergänzt. $BD = DE = t_b$. $\angle DCE = \alpha$; also für C ein doppelter geometrischer Ort gegeben. Oder Kreisbogen mit α über BC, so ist für die Mitte D von CA ein geometrischer Ort construirbar.

7) In einem $\triangle$ zwischen 2 Seiten eine Transversale zu ziehen, dass durch sie vom $\triangle$ ein Sehnenviereck $= {}^2/_3$ des gegebenen Dreiecks abgeschnitten wird.

Wegen des Sehnenvierecks ist die Richtung der xy gegeben, also das Verhältnis $\frac{Ax}{Ay} = \frac{AC}{AB}$, andererseits ist $Ax \,.\, Ay = {}^1/_3\, AB \,.\, AC$, daher $Ay = \sqrt{AB \,.\, {}^1/_3\, AB}$.

8) In eine Kugel mit der Oberfläche $O = 28{,}274$ ist eine senkrechte Pyramide mit quadratischer Basis beschrieben, deren Höhe gleich dem Durchmesser des ihrer Grundfläche umschriebenen Kreises ist. Wie gross ist ihr Volumen und wie verhält es sich zu dem der Kugel? $Vol = \frac{32}{375}\left(\frac{O}{\pi}\right)^{3/2} = 2{,}304$. Verhältnis $= 64 : 125\pi$.

1890.

1) Ein Capital trägt in einer gewissen Zeit bei einem bestimmten Zinsfuss 720 ℳ. Zins; der Zinsfuss fällt um ${}^1/_2$%, der Besitzer muss daher, um nicht in derselben Zeit 72 ℳ. Zins einzubüssen, das Capital um 200 ℳ. vergrössern. Wie gross ist Capital, %, Zeit? 1800 ℳ. zu 5%, 8 Jahre.

2) Eine Arbeit kann von einer bestimmten Zahl Arbeitern in einer gewissen Zeit vollendet werden; beim Beginn fehlen 24, die vorhandenen müssten daher 15 Tage länger arbeiten, als ursprünglich angenommen war. Nachdem sie 20 Tage allein gearbeitet haben, werden 8 neue angeworben und diese verstärkte Zahl hat noch 36 Tage zu arbeiten. Wie viele Arbeiter sollten es ursprünglich sein und wie viel Zeit hätten sie gebraucht? 96 Mann, 45 Tage.

3) Zwei Capitalien, die sich wie 2 : 3 verhalten, wachsen bei Zinseszins in 22 Jahren zu gleichem Endbetrag an; zu wie viel Prozent stehen sie aus, wenn die Prozente sich wie 3 : 2 verhalten? Das erste zu 5,793 %, das zweite zu 3,862 %. $\frac{q}{q'} = \sqrt[22]{3/2}$.

4) Die Fläche eines Dreiecks beträgt 3240 □m. Das Verhältnis der Seiten = 25 : 29 : 36, gesucht Seiten und Winkel. Seiten 75 . 87 . 108. $\angle\alpha = 43^0\, 36'\, 9''$. $\angle\beta = 53^0\, 7'\, 48''$. $\angle\gamma = 83^0\, 16'\, 3''$.

5) Ein Trapez zu construiren aus der Differenz der parallelen, der Differenz der nicht parallelen Seiten, der Differenz der Basiswinkel und einer Diagonale. Trage CF = DA auf CB ab, ebenso AE = DC auf AB, so ist $\triangle$ EBF construirbar, da $\angle EFB = {}^1/_2\delta$, hieraus leicht das weitere.

6) Auf dem Schenkel eines Winkels P sind die Punkte A und B gegeben; auf dem andern Schenkel die Punkte x und y zu finden, dass xy = a ist und die 4 Punkte auf einem Kreis liegen. Es ist gegeben $Py - Px = a$. $Py \,.\, Px = PA \,.\, PB$.

7) In $\triangle$ ABC die xy so zu ziehen, dass sie das Dreieck halbirt und dass Ax = Cy ist. Setze $Ax = Cy = x$, so ist $x\,(b - x) : bc = 1 : 2$. Also $x : {}^1/_2 b = c : (b - x)$.

8) Wie weit muss ein leuchtender Punkt vom Mittelpunkt einer Kugel entfernt sein, damit $\frac{1}{n}$ (${}^1/_3$) der Oberfläche beleuchtet wird? $x = \frac{nr}{n - 2} = 3r$.

1891.

1) $\left(\frac{100 + x}{x - 5}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(\frac{x - 5}{100 + x}\right)^{\frac{1}{4}} = 1{,}5$. Hilfsgrösse! $x = 12$. $x' = 107$.

2) Früh morgens fährt ein beschleunigter Zug von A nach B, zu gleicher Zeit fährt ein Personenzug von B ab nach A. Um 10 U. 45 M. Vormittags kreuzen sich die Züge in der Station C, der erste Zug kommt 3 U. 45 Min. Nachmittags in B an, der zweite 5 U. 57 M. in A. Um wie viel Uhr fuhren beide von den Abgangsstationen ab? 4 Uhr 45 M. Morgens.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) A verkauft am Anfang eines Jahres an B ein Haus unter folgenden Bedingungen: B hat von diesem Jahr an 10mal je am Ende eines Jahrs $^1/_{10}$ des Kaufpreises zu entrichten, während der jeweils bleibende Schuldrest nicht zu verzinsen ist. Wenn nun B in Folge einer Erbschaft die ganze Summe auf einmal zahlen will, wann kann er das thun, ohne dass er oder A in Schaden kommt? Nach 5 Jahren 4 Monaten,

4) $\sin \alpha = 2 \sin \beta$. $\alpha + \beta = 36^0\ 14'\ 11''$. Gesucht α und β. $\alpha = 24^0\ 20'\ 34''$. $\beta = 11^0\ 53'\ 37''$.

5) Gegeben 3 Punkte und eine Strecke; einen Kreis zu zeichnen, dass die Abschnitte der von den 3 Punkten an ihn gezogenen Tangenten je = a werden. Der Mittelpunkt des Kreises ist durch den Schnitt zweier Mittellote bestimmt, das weitere leicht.

6) Ein $\triangle$ in ein anderes zu verwandeln, von dem 2 Winkel gegeben sind. Bekannte Aufgabe.

7) Gegeben ein Kreis, eine Gerade L und eine Strecke a; im Kreis eine Sehne parallel L zu zeichnen, dass die Summe der Sehne und ihres Abstandes vom Kreismittelpunkt = a werde. Fälle aus dem Mittelpunkt O des Kreises Lot OP auf L, mache darauf OS = a, senkrecht auf OS die OA = $^1/_2$a, so bestimmt SA, falls sie den Kreis schneidet, 2 Punkte x und x′ auf demselben, durch welche die Sehne gezogen werden kann. Die Constr. der algebr. Formel ist weniger einfach.

8) Um einen Kreis mit Radius r ist ein gleichschenkliges Trapez beschrieben, dessen Grundlinien sich wie 1 : 2 verhalten. Wenn nun diese Figur um den zur Basis senkrechten Durchmesser als Achse gedreht wird, so erzeugt das Trapez einen Kegelrumpf und der Kreis eine Kugel. Wie gross ist Oberfläche und Inhalt des Kegelrumpfs und wie verhalten sich dieselben zu den entsprechenden Stücken der Kugel? $O = {}^9/_2\, r^2\pi$, $Vol = {}^7/_3\, r^3\pi$. Verhältnis zur Kugel: $O : O' = 9 : 8$. $Vol. : Vol' = 7 : 4$.

1892.

1) Seit die Preise der Lebensbedürfnisse um 25% gestiegen sind, während der Zinsfuss von $4^1/_2$ auf $3^1/_2$% gesunken ist, kann ein Capitalist nicht mehr 340 ℳ. wie früher jährlich ersparen, sondern braucht alle Zinsen auf. Wie gross ist sein Vermögen? 20 000 ℳ.

2) Ein Unternehmer zahlt täglich eine bestimmte Summe für Taglöhne; als er die Zahl der Arbeiter auf vier mehr als das Doppelte erhöht und den Taglohn um $^1/_2$ ℳ. erniedrigt hatte, musste er täglich 128 ℳ. im Ganzen zahlen, bei gleichem Lohn wie ursprünglich hätte er 85 ℳ. mehr als anfangs zahlen müssen. Wie viel Arbeiter waren es ursprünglich und welcher Taglohn? 6 Arbeiter à $8^1/_2$ ℳ. oder 30 Arbeiter à $2^1/_2$ ℳ.

3) Ein Verbrecher entflieht und macht am ersten Tag 56 km, an jedem folgenden Tag 2 km weniger; 2 Tage nach seiner Flucht wird ihm ein Beamter nachgeschickt, der am ersten Tag 50 km, an jedem folgenden Tag 10 km mehr macht. Nach wie viel Tagen holt er ihn ein? Nach 5 Tagen.

4) Zwischen den Schenkeln eines Winkels von 70° liegt ein Punkt, von welchem Lote = 25 und 8 cm auf die Schenkel gefällt sind; wie weit ist der Punkt von der Spitze entfernt? 31,206.

5) $\triangle$ aus $a + b + c = 2s$. ρa, $h_b : h_c = m : n$. Zu s und ρa ist $\angle\alpha$ Datum, ferner ist das Verhältnis der Seiten $b : c = n : m$ gegeben.

6) Auf dem Radius eines Kreises zwei einander ähnliche gleichschenklige Dreiecke zu construiren, die ihre Spitzen auf der Peripherie haben. — Der Radius ist stetig proport. zu teilen.

7) In einem Rechteck mit den Seiten a und b soll die kleinere Seite um einen gewissen Betrag verlängert, die grössere um denselben Betrag verkürzt werden, dass das neue Rechteck einen doppelt so grossen Flächeninhalt als das ursprüngliche bekommt. Construire die Proportion: $x : a = b : (b - a - x)$.

8) Durch eine Kugel einen Schnitt zu legen, dass die in die Kugelabschnitte einbeschriebenen Berührungskugeln zusammen $^1/_3$ der gegebenen Kugel sind. Das Verhältnis der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Volumina und krummen Oberflächen beider Kugelteile zu bestimmen. Der Durchmesser ist im Verhältnis 1 : 2 zu teilen. Verhältnis der Oberflächen = 1 : 2, der Volumina = 7 : 20.

1893.

1) $\sqrt{x(1+x)} - \sqrt{x(1-x)} - \frac{2x^2}{\sqrt{1+2x}} = 0.$ $x = \pm\sqrt{0{,}5}.$ ausserdem $= 0.$

2) Zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen haben A und B zusammen 20 000 ℳ. gegeben. A lässt seine Einlage 11 Monate, B 9 Monate stehen; A erhält an Einlage und Gewinn 8968 ℳ., B 13 188 ℳ. zurück. Wie viel hat jeder eingelegt? A gab 8000 ℳ., B 12 000 ℳ.

3) A hat in Folge eines Vermächtnisses eine Rente von 100 ℳ., zahlbar je am ersten des Monats 20 Jahre lang zu beziehen; mit welcher Summe kann diese Rente bei $4^1/_2$% am ersten Zahlungstag abgelöst werden? Wenn $q = \sqrt[12]{1.045}$, so ist $s = 15\,982$, wird aber $q = 1{,}00375$ genommen, so ist $s = 15\,867$.

4) Auf der Hypotenuse eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks ABC schneidet man $BD = {}^1/_8$ BC und $CE = {}^7/_{24}$ BC ab; den Sinus von $\angle$ DAE ohne Tafeln zu bestimmen und sodann mittelst der Tafeln den Winkel zu finden. $\cos\varphi = \frac{33}{65}$, also $\sin\varphi = \frac{56}{65}$ $\angle\varphi = 59^0\ 29'\ 26''$.

5) In einen gegebenen Kreis ein Trapez zu construiren, von dem man einen Winkel kennt und weiss, dass eine Grundlinie das Doppelte der andern ist. Durch den Winkel sind die Diagonalen bestimmt und diese teilen einander gegenseitig im Verhältnis 1 : 2.

6) Auf der Peripherie eines Kreises sind 2 Punkte A und B gegeben, gesucht Punkt X auf der Peripherie, das $AX \,.\, BX = r^2$ ist. Das Lot aus X auf AB ist nach einem bekannten Datum $= {}^1/_2 r$.

7) Gegeben zwei concentrische Kreise, um den Mittelpunkt M einen dritten Kreis zu beschreiben, der den von den zwei ersten Kreisen gebildeten Ring halbirt. Construktion leicht nach der Formel $x^2 = {}^1/_2\,(R^2 + r^2)$.

8) In eine Kugel vom Radius R ist ein Cylinder beschrieben, gesucht Radius und Höhe desselben, wenn die gesammte Cylinderoberfläche zur Kugeloberfläche wie 4 : 5 sich verhält. Entweder ist $r = h = \frac{2\,R}{\sqrt{5}}$ oder $r = \frac{4}{5}R.$ $h = \frac{6}{5}R.$

1894.

1) Von zwei Orten A und B, welche 6,9 km von einander entfernt sind, gehen zwei Boten gleichzeitig ab, und zwar beide in der Richtung von A über B hinaus. Der von A ausgehende Bote braucht zu einem Kilometer 1 Minute 32 Sek. weniger als der von B ausgehende und jener holt diesen in 11 St. 33 Min. ein. Wie lang braucht jeder zu einem Kilometer? A braucht 13,2 Minuten, B $11^2/_3$ Minuten.

2) A will sein Haus verkaufen; B bietet 47 000 ℳ. bar, C 53 000 ℳ. zahlbar in 3 Jahren, D 50 000 ℳ. in 5 jährlichen Zielern à 10 000 ℳ., die erste Rate sogleich. Welches Angebot wird A annehmen bei 4% Zinseszins? Um wie viel übertrifft der Barwert des höchsten Angebots den des niedersten? Angebot des C Barwert = 47 117 ℳ., des D 46 299. Differenz 818 ℳ.

3) $x + y = 3.$ $z + w = 7.$ $x^2 + z^2 = 10.$ $y^2 + w^2 = 20.$ $x = 1.$ $y = 2.$ $z = 3.$ $w = 4.$ $x^1 = \frac{43}{29}.$ $y^1 = \frac{44}{29}.$ $z^1 = \frac{81}{29}.$ $w^1 = \frac{122}{29}.$

4) $\cos\varphi + \cos\psi = -\,{}^1/_3.$ $\varphi + \psi = 200^0.$ $\angle\varphi = 116^0\ 18^1.$ $\angle\psi = 83^0\ 42^1$ oder umgekehrt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5) Gegeben ein Kreis und 2 Punkte A, B; auf der Peripherie sollen die Punkte x und y gefunden werden, dass xA und yB sich gegenseitig halbiren. xy = AB und parallel AB, also leicht zu construiren.

6) Ein Fünfeck zu construiren, wenn gegeben sind die Mitten seiner 5 Seiten. Drei auf einander folgende Seiten-Mittelpunkte bilden ein Parallelogramm mit der Mitte einer Diagonale, daraus das weitere leicht.

7) Gegeben ein Winkel mit der Spitze A, innerhalb des Winkelraums Punkt P. Durch P soll eine die Schenkel des Winkels in x und y schneidende Gerade gezogen werden, dass $Px \,.\, Py = AP^2$ wird. — $PA \,.\, PB = Px \,.\, Py$, alse ABxy Sehnenviereck. $\angle PxB = \angle PAy$ gegeben, also kann über PB = PA der Kreisbogen construirt werden. — Oder: Verlängere AP um PB = PA, fälle aus P auf einen Schenkel des Winkels ein Lot, welches (in seiner Verlängerung über P) von dem auf AB in B errichteten Lot im Punkt C getroffen wird; der Kreis über PC als Durchmesser schneidet den andern Schenkel in x und x^1.

8) Von einem Punkt P, der von der Oberfläche einer Kugel vom Radius r den Abstand e hat, ist an die Kugel der Berührungskegel gelegt; wie gross ist der zwischen Kegelmantel und Kugeloberfläche befindliche Raum? $\frac{\pi}{3} \cdot \frac{e^2 r^2}{e + r}$.

1895.

1) $\frac{xy}{x + y} = \frac{a + b}{ab}$; $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. $x = a$. $y = b$. $x^1 = b$. $y^1 = a$.

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\,(a + b)} \left\{ -(a^2 + b^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2)\,(a^2 + 4\,ab + b^2)} \right\}$$

2) Ein Weinhändler beauftragt seinen Küfer, aus 2 Sorten Wein, von welchen das Liter der besseren Sorte 70 ₰ kostet, einen Wein zu mischen à 60 ₰ das Liter; der Küfer verwechselt die Verhältnis-Zahlen der Mischung, so dass das Liter nur auf 55 ₰ zu stehen kommt. Wie viel kostet das Liter der geringeren Sorte? 45 ₰

3) Ein Beamter hat 25mal je am Anfang eines Jahres 2% seines Gehaltes von 3750 ℳ in eine Witwenkasse einbezahlt. Seine Witwe erhielt hierauf 11mal je am Ende eines Jahres (angefangen mit dem auf das Sterbejahr folgenden Jahr) eine Pension von 375 ℳ. Wie viel beträgt schliesslich Gewinn oder Verlust der Kasse bei 4%? 56,7 ℳ. Verlust.

4) Wie gross ist der Radius eines Kreises, in welchem das zu einem Sektor vom Centriwinkel 100^0 gehörige Segment = 1 □cm ist? r = 1,6216.

5) Auf Seite AC eines gegebenen Dreiecks ABC einen Punkt X zu finden, dass die Summe der von X auf AB und BC gefällten Lote = s werde. — Der geom. Ort für X ist die Basis des gleichschenkligen Dreiecks mit $\angle$ B an der Spitze, bei welchem s die zum Schenkel gehörige Höhe ist.

6) Einen Kreis K zu construiren, der den Kreis K' in P berührt und K'' rechtwinklig schneidet. — K liegt 1) auf dem verlängerten Radius KP'. 2) auf dem über K''P construirbaren geometr. Ort für constante Quadraten-Differenz = r^2.

7) Gegeben zwei Kreise K und K'; über ihrer Centrale als Durchmesser ist ein dritter Kreis K'' gezeichnet; auf demselben Punkt X zu finden, dass die Tangentenpaare an K und K' gleiche Winkel einschliessen. — X liegt auf dem apollonischen Kreis, der die Centrale im Verhältnis der Radien teilt; die Teilpunkte sind die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise mit der Centrale.

8) Einer Kugel ist ein Kegel einbeschrieben; wie verhalten sich die krummen Oberflächen der Kugelabschnitte, in welche die Grundkreis-Ebene des Kegels die Kugel teilt, wenn der Kegel seinem Inhalt nach der 9. Teil desjenigen der beiden Kugelabschnitte ist, in welchem er nicht liegt? — Höhe des Kegels = $^1/_2$r; Verhältnis der Oberflächen = 1 : 3, Verhältnis der Inhalte = 5 : 27.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1896.

1) $x^3 + y^3 = \frac{35}{36} x^2 y^2$. $x + y = 5$. $x = 2$. $y = 3$ und umgekehrt.

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{5}{2}\left\{1 \pm \sqrt{\frac{31}{7}}\right\} = \begin{matrix} +7.761 \\ -2.761 \end{matrix}$$

2) Ein Körper A bewegt sich vom Punkt C nach D mit 7,5 m Geschwindigkeit; nachdem er 36 m zurückgelegt hat, läuft ein zweiter Körper B von D nach C und macht in jeder Sekunde den 20. Teil des ganzen Wegs. Nachdem B so viele Sekunden, als seine Geschwindigkeit Meter beträgt, gelaufen ist, trifft er mit A zusammen. Wie viele Meter ist C von D entfernt? 160 oder 90 m.

3) Einen Rhombus zu berechnen aus $\angle \alpha = 63^0\ 15'\ 4''$ und der Diagonalensumme $s = 26{,}4$ cm. $a = 9{,}5938$. $d = 10{,}061$. $d' = 16{,}338$ $F = 82{,}19$.

4) Im Trapez ABCD, worin AD parallel BC, soll EF parallel BC so gezogen werden, dass es mittlere Proport. zwischen AD und BC ist; hierauf ist zu beweisen, dass Trapez EBCF $= \triangle$ DBC ist. — Schneiden sich AB und CD in S, so ist SB : SE = SE : SA = SF : SD, also BF parallel ED, folglich $\triangle$ BFE $= \triangle$ BFD etc.

5) An zwei ungleich grosse Kreise ist eine innere gemeinsame Tangente gezogen; man soll auf ihr ausserhalb der von den Berührungspunkten begrenzten Strecke einen Punkt bestimmen, dass von ihm aus die beiden Kreise gleich gross erscheinen. cfr. 1895, Nr 7.

6) Eine Kugel vom Radius r ist in der Entfernung $\frac{r}{2}$ vom Mittelpunkt durch eine Ebene geschnitten und dem entstandenen Schnittkreis ein Quadrat einbeschrieben; über demselben ist im grösseren Kugelabschnitt eine gerade vierseitige Pyramide errichtet, deren Spitze auf der Kugeloberfläche liegt. Wie gross ist Oberfläche und Volumen derselben? $\text{Vol} = {}^3/_4\, r^3$. $O = {}^3/_2\, r^2 (1 + \sqrt{7}) = 5{,}4686\, r^2$.

1897.

1) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{\frac{1}{x} + 1} = \sqrt{2x}$. $x = \pm 1$. $x = 2 \pm \sqrt{5}$.

2) Ein Schienenstrang läuft einem Fluss parallel. Um 8 Uhr geht vom Ort A ein Zug nach dem 114 km abwärts gelegenen Ort B, der pro Stunde 38 km zurücklegt; ebenfalls um 8 Uhr Morgens fahren von B zwei Dampfer in entgegengesetzter Richtung. Der abwärts fahrende hat die doppelte Geschwindigkeit des aufwärts fahrenden. Der Zug begegnet dem aufwärts fahrenden Schiff 3 Stunden 36 Minuten früher als er das abwärts fahrende einholt. Wie gross ist die Geschwindigkeit der Schiffe, wann findet die Begegnung und Einholung statt? Geschwindigkeit $9^1/_2$ und 19 km. Begegnung 10 U. 24 M. Einholung 2 Uhr Nachm.

3) In einem Dreieck ist $c = 347{,}52$, $b = 219{,}18$, $\angle \alpha = 77^0\ 42'\ 12''$. In welche zwei Teile wird er durch ta geteilt? $\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{c - b}{c + b} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. $\angle \varphi = 49^0\ 11,\ 27''$. $\angle \varphi = 28^0\ 30'\ 45''$.

4) Welche Beziehungen bestehen zwischen Seite und Diagonale eines regulären Fünfecks? Wie wird das letztere über einer gegebenen Seite construirt? — Die Seite nach dem goldenen Schnitt geteilt und um das grössere Stück verlängert gibt die Diagonale.

5) Gegeben Kreis K, Gerade L und darauf Punkt P; gesucht Punkt X auf L, dass PX = der Tangente aus X an K wird. Beliebiger Kreis, der L in P berührt und K in S,S' schneidet, SS' bestimmt auf L den Punkt X. Oder: X liegt auf dem über KP construirbaren geometr. Ort für constante Differenz der Quadrate $= r^2$.

6) Auf der Basis eines Kegels (r, h) steht ein Würfel, dessen obere Ecken auf dem Mantel des Würfels liegen; wie gross ist seine Kante? $x = \frac{2\, r\, h}{h \sqrt{2} + r}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf