Physikalische

Aufgaben aus der Optik

nebst Auflösungen

für die Prima höherer Lehranstalten

von

Stanislaus Rychlicki.

Wongrowitz.
Druck von Paul Schwarz.
1895.

9wo 8 (1895)

171 b

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

HT000787520

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 1. Die geradlinige Verbreitung des Lichtes.

Erklärung. Jeder leuchtende Körper sendet Lichtstrahlen aus, die sich in demselben Mittel in geraden Linien fortpflanzen. Treffen die Lichtstrahlen einen undurchsichtigen Körper, so entsteht hinter demselben ein dunkler Raum, der durch die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Körper begrenzt wird. (Kernschatten, Halbschatten.)

a. Konstruktionsaufgaben.

1. Vor einer r cm grossen Spaltöffnung befindet sich in der Entfernung a cm, symmetrisch zur Öffnung, ein h cm hoher Pfeil, während hinter der Öffnung in der Entfernung b cm ein Schirm aufgestellt ist. Zeichne das auf dem Schirme entstehende Bild des Pfeiles.

2. Vor einer r cm grossen Spaltöffnung ist symmetrisch zu derselben ein h cm hoher Pfeil in der Entfernung a cm aufgestellt. Zeichne die Entfernung des auf der anderen Seite aufgestellten Schirmes, wenn das entstehende Bild h′ cm ist.

3. Auf einem Schirme, der von einer r cm grossen Spaltöffnung b cm entfernt ist, erblickt man symmetrisch zur Öffnung ein h′ cm hohes Bild eines Pfeiles. Zeichne die Entfernung des Pfeiles von der Öffnung, wenn der Pfeil h cm hoch ist.

4. Die Mittelpunkte zweier Kugeln mit den Halbmessern R und r, von denen die grössere leuchtet, haben von einander die Entfernung a. Zeichne im Durchschnitt 1) den Kernschatten und 2) den Halbschatten der kleineren Kugel.

5. Bei einer Sonnenfinsternis schneidet die Erde die Spitze des Mondschattenkegels ab. Zeichne diejenigen Orte der Erde, die gleichzeitig 1) die totale und 2) die partielle Sonnenfinsternis haben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anm. Der Durchmesser der Erde muss bei dieser Zeichnung der Klarheit wegen verhältnismässig sehr gross genommen werden.

6. Zeichne die gegenseitige Lage von Sonne, Mond und Erde bei einer ringförmigen Finsternis und zugleich diejenigen Orte der Erde, die gleichzeitig eine partielle Sonnenfinsternis haben.

Anm. ad 5.

b. Aufgaben.

1. Ein $h = 10$ m hoher Baum steht in der Entfernung $a = 40$ m vor einer Öffnung von $d = 0{,}006$ m Durchmesser. Wie gross ist das auf einer $b = 5$ m entfernten Wand entstandene Bild des Baumes?

Aufl. Ist die Entfernung des Schnittpunktes der Strahlen von der Öffnung durch Verhältnisse gefunden, so ergiebt sich auf ähnliche Weise die Grösse des Bildchens:

$$h' = \frac{hb + d\,(a + b)}{a} = 1{,}25675 \text{ m}$$

2. Von einem $h = 20$ m hohen Gebäude, welches von einer Öffnung mit $d = 0{,}005$ m Durchmesser $a = 60$ m entfernt ist, entsteht auf einem Schirm ein $h' = 0{,}5$ m hohes Bild. Wie weit muss der Schirm von der Öffnung entfernt sein?

Aufl. ähnlich wie ad 1. Für die gesuchte Entfernung ergiebt sich:

$$b = \frac{a\,(h' - d)}{h + d} = 1{,}4846 \text{ m.}$$

3. An einem Seeufer liegt ein $h = 3$ m langer Kahn. Durch eine Öffnung von $d = 0{,}008$ m Durchmesser erscheint sein Bild auf einer $b = 5$ m entfernten Wand in der Länge von $h' = 0{,}108$ m. Wie weit ist der See vom Beobachtungsorte entfernt?

Aufl. ähnlich wie ad 1. Es ergiebt sich:

$$a = \frac{b\,(h + d)}{h' - d} = 150{,}4 \text{ m.}$$

4. Welche Grösse hat das durch eine Öffnung von $d = 0{,}7$ cm Durchmesser auf einer $b = 4{,}8$ m entfernten Wand erscheinende Sonnenbild, wenn die scheinbare Sonnengrösse $\alpha = 31'\ 16''$ beträgt?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufl. ähnlich wie ad 1. Die beiden inneren Tangenten bilden den gegebenen Winkel α. Es ergiebt sich:

$$h' = d + 200\ b\ \mathrm{tg}\ \frac{\alpha}{2} = 5{,}0657\ \mathrm{cm}.$$

5. Welche scheinbare Grösse hat die Sonne, wenn das durch eine Öffnung von $d = 0{,}008$ m Durchmesser entstehende Sonnenbild auf einer $b = 5$ m entfernten Wand die Grösse von $h' = 0{,}05454$ m besitzt?

Aufl. wie ad 4. Der Winkel α ergiebt sich aus:

$$\mathrm{tg}\ \frac{\alpha}{2} = \frac{h' - d}{2\,b};\ \alpha = 32'.$$

6. Wie lang ist der Kernschatten des Mondes, wenn der Sonnenradius $m = 112$ Erdradien, der des Mondes $n = 0{,}27234$, die Entfernung der Erde von der Sonne $p = 24000$, und die des Mondes von der Erde $q = 60$ Erdradien angenommen wird?

Aufl. einfach durch Verhältnisse. Es ergiebt sich:

$$x = \frac{n\ (p - q)}{m - n} = 58{,}35\ \text{Erdradien}.$$

7. Wie lang ist nach denselben Angaben der Kernschatten der Erde?

Aufl. wie ad 6:

$$x = \frac{p}{m - 1} = 216{,}215\ \text{Erdradien}.$$

8. Wo liegt die Spitze des Halbschattens für den Mond nach den Angaben von No. 6?

Aufl. ähnlich wie ad 6:

$$x = \frac{n\ (p - q)}{m + n} = 58{,}07\ \text{Erdradien}.$$

9. Wie weit muss bei den übrigen Angaben von No. 6 der Mond von der Erde entfernt sein, dass seine Schattenkegelspitze gerade die Erde berührt?

Aufl. wie ad 6:

$$q = \frac{n\ p}{m} = 58{,}36\ \text{Erdradien}.$$

10. Ein Nachtlicht ist mit einem kuppelartigen Milchglase bedeckt, welches oben eine $d = 4$ cm grosse Öffnung besitzt. Das Licht hat von derselben die Entfernung $a = 10$ cm und von der Zimmerdecke $h = 150$ cm. Da dasselbe nur $b = 5$ cm von der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

senkrechten Wand absteht, so erzeugt es auf der Decke einen grösseren hellen Kreisabschnitt und auf der senkrechten Wand einen hyperbelartigen hellen Streifen. Wie breit ist der Kreisabschnitt und wie lang der Streifen?

Aufl. Das Licht ist als ein leuchtender Punkt anzusehen, daher ergiebt sich durch Verhältnisse für die Breite des Kreisabschnittes:

$$x = \frac{h\,d}{2\,a} + b = 35 \text{ cm}$$

und für die Länge des Streifens:

$$y = \frac{h\,d - 2\,a\,b}{d} = 125 \text{ cm.}$$

§ 2. Die Lichtintensität.

Erklärung. Die Lichtintensität oder Lichtstärke ist die Lichtmenge, die von der Einheit der Oberfläche eines leuchtenden Körpers ausgeht. Die durch dieselbe bedingte Beleuchtungsstärke eines dunklen Körpers nimmt ab im Quadrate seiner Entfernung von dem leuchtenden Körper.

1. Bei einem Rumford'schen Photometer erzeugen eine Normalkerze in der Entfernung $a = 0{,}4$ m und eine Gasflamme in der Entfernung $b = 1{,}549$ m einen gleich starken Schatten. Wie viel mal ist die Leuchtkraft der Gasflamme stärker als die der Kerze?

Aufl. Nach dem Gesetze von der Lichtstärke ergiebt sich:

$$x = \frac{b^2}{a^2} = \text{fast 15 mal so gross.}$$

2. Eine Normalkerze giebt in der Entfernung $a = 0{,}4$ m mit einer Gasflamme in der Entfernung $b = 1{,}5$ m einen gleich starken Schatten. Wie verhalten sich die Preise beider Leuchtkörper zu einander, wenn die Normalkerze für die Stunde $m = 0{,}02$ M und die Gasflamme $n = 0{,}15$ M kostet?

Aufl. Bei der Berechnung ist die Lichtstärke der Gasflamme zu berücksichtigen, daher:

$$\frac{N}{G} = \frac{m\,.\,b^2}{n\,.\,a^2} = \frac{15}{8}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Zwei leuchtende Punkte, A und B, haben die Entfernung $a = 10$ m; ihre Strahlen fallen senkrecht auf eine auf der Verbindungslinie beider Punkte senkrecht aufgestellte Platte P. Wie weit muss die Platte von A entfernt sein, wenn die Intensität von B $m = \frac{1}{4}$ mal so gross ist, als die von A und die Platte gleich stark beleuchtet werden soll?

Aufl. wie ad 1. Es ergeben sich 2 Punkte:

$$x = \frac{a}{1 \pm \sqrt{m}} = \begin{cases} 6\frac{2}{3} \text{ m} \\ 20 \text{ m.} \end{cases}$$

Wie liegen diese Punkte in Bezug auf die Strecke AB?

4. Dieselbe Aufgabe, wenn die Intensität von A $m = 4$ und die von B $n = 9$ ist?

Aufl. ähnlich wie 3. Es giebt wieder 2 Punkte:

$$x = \frac{a}{1 \pm \sqrt{\frac{n}{m}}} = \begin{cases} 4 \text{ m} \\ -20 \text{ m.} \end{cases}$$

Erkläre das negative Zeichen!

5. Von einem leuchtenden Punkte fallen die Strahlen senkrecht auf eine kleine Platte, die in der Entfernung $a = 10{,}5$ m aufgestellt ist. In welcher Entfernung muss eine zweite kongruente Platte aufgestellt werden, wenn die Strahlen auf dieselbe unter dem Winkel $\varphi = 35^0$ fallen und beide Platten gleich stark beleuchtet werden sollen?

Aufl. Wegen der schief auffallenden Strahlen muss die zweite Platte in eine auf der Richtung senkrecht stehende verwandelt werden. Daher ergiebt sich:

$$b = a \sin^{3/2} \varphi = 4{,}561 \text{ m.}$$

6. Von einem leuchtenden Punkte mit der Intensität m hat eine kleine Platte, auf die die Strahlen unter dem Winkel $\alpha = 40^0$ fallen, die Entfernung $a = 11{,}5$ m. Vor einem anderen leuchtenden Punkte mit der Intensität n steht in der Entfernung $b = 20{,}5$ m eine zweite Platte. Beide Platten sind ähnlich und verhalten sich wie n : m. Unter welchem Winkel fallen die Strahlen bei gleich starker Beleuchtung auf die zweite Platte?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufl. wie ad 5. Der Winkel ergiebt sich aus:

$$\sin \beta = \sin \alpha \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}, \ \beta = 70^0\ 54'\ 40''.$$

7. Wie gross ist aber der betreffende Winkel, wenn bei den Angaben der vorigen Aufgabe die zweite Platte k = 3 mal stärker beleuchtet werden soll?

Aufl. ähnlich. Der Winkel folgt aus:

$$\sin \beta = k \,.\, \sin \alpha \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}, \ \beta = 57^0\ 33'\ 26''.$$

§ 3. Die Zurückwerfung des Lichtes.

Erklärung. Fällt ein Lichtstrahl auf eine gut polierte Fläche, einen Spiegel, so wird er unter demselben Winkel zurückgeworfen, reflektiert, unter dem er aufgefallen ist. Ebene Spiegel, sphärische Spiegel.

Fallen Lichtstrahlen von einem Punkte auf einen ebenen Spiegel, so werden sie divergierend so zurückgeworfen, dass sie sich hinter dem Spiegel mit ihren Verlängerungen in einem Punkte, dem Spiegelbilde, treffen. Bild und Objekt sind vom Spiegel gleich weit entfernt.

Ähnlich entsteht das Bild bei einem Hohlspiegel; die Strahlen werden je nach Lage des Objektes teils divergierend, teils konvergierend zurückgeworfen: geometrische und physische Bilder.

Bei einem Hohlspiegel mit dem Krümmungsradius r besteht zwischen den Objekt- und Bildweiten die Gleichung:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}, \text{ wo } p = \frac{r}{2} \text{ die Brennweite ist.}$$

Die Grössen von Bild und Objekt verhalten sich wie ihre Weiten.

1. Der ebene Spiegel.

a. Konstruktionsaufgaben.

1. Vor einem senkrecht stehenden Planspiegel befinden sich mehrere Pfeile in verschiedenen Lagen. Zeichne ihre Bilder.

2. Vor einem unter 45° geneigten ebenen Spiegel befinden sich 2 Pfeile, in senkrechter und wagerechter Richtung. Ihre Bilder sind zu zeichnen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Vor einem ebenen Spiegel befindet sich ein leuchtender Punkt, dessen vom Spiegel zurückgeworfene Strahlen ein Auge treffen. Die Lage des Punktes und des Auges sind gegeben. Zeichne den Strahl, der die Axe des in's Auge fallenden Lichtkegels bildet.

4. Ein Dreieck steht so vor einem Planspiegel, dass seine Fläche senkrecht zur Spiegelfläche ist. Es sollen die von den Ecken gerade in's Auge fallenden Strahlen gezeichnet werden.

5. Zwei ebene Spiegel stehen senkrecht auf einander; zwischen denselben befindet sich ein Pfeil. Es sind die entstehenden Spiegelbilder zu zeichnen.

6. Zwei ebene Spiegel stehen auf einander senkrecht und zwischen ihnen befindet sich ein leuchtender Punkt und ein Auge der Lage nach bestimmt. Zeichne den Weg der von den Bildern in's Auge fallenden Lichtstrahlen.

7. Dieselben Konstruktionen für zwei Planspiegel, die unter 120^0 geneigt sind.

8. Zwischen zwei parallelen ebenen Spiegeln befindet sich ein Pfeil. Zeichne die ersten drei Bilder desselben.

9. Zwischen zwei parallelen Planspiegeln sind ein leuchtender Punkt und ein Auge ihrer Lage nach gegeben. Es soll der Weg der von den ersten 3 Bildern in's Auge fallenden Lichtstrahlen gezeichnet werden.

b. Aufgaben.

1. Zwei ebene Spiegel bilden einen Winkel α; zwischen ihnen befindet sich ein Objekt, welches gegen den einen Spiegel den Winkelabstand β besitzt. Wie gross sind die Winkelabstände der ersten 5 Bilder vom Objekt nach der Seite des zuletzt erwähnten Spiegels? Spezieller Fall: $\alpha = 60^0$, $\beta = 20^0$.

Aufl. leicht nach den Spiegelgesetzen. Es ergiebt sich:

$$1)\ 2\beta = 40^0,\quad 2)\ 360 - 2\ (\alpha - \beta) = 280^0,\quad 3)\ 360 - 2\alpha = 240^0$$
$$4)\ 2\alpha = 120^0,\quad 5)\ 2\ (\alpha + \beta) = 160^0.$$

2. Zwei ebene Spiegel bilden mit einander einen Winkel α, auf dessen Halbierungslinie sich ein Objekt befindet. Wie gross sind die Winkelabstände der ersteu 5 Bilder vom Objekte nach der Seite eines Spiegels? Spezieller Fall $\alpha = 120^0$.

Aufl. ähnlich wie ad 1. Die Winkelabstände sind:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) $\alpha = 120^0$, 2) $360 - \alpha = 240^0$, 3) $360 - 2\alpha = 120^0$, 4) $2\alpha = 240^0$, 5) $3\alpha = 360^0$. Also giebt es für den speziellen Fall nur zwei Bilder.

3. Vor einem senkrecht aufgestellten Spiegel befindet sich in einer beliebigen Entfernung eine aufrechtstehende Person von der Höhe a und der Breite b. Wie hoch und wie breit muss mindestens der Spiegel sein, damit der Beobachter sich in seiner ganzen Ausdehnung im Spiegel erblicke?

Aufl. Der Hauptstrahl und der nach den Füssen gezogene Strahl geben die Länge des Spiegels; ähnlich für die Breite. Es ergiebt sich:

$$l = \frac{a}{2}, \quad d = \frac{b}{2}.$$

4. Wie hoch muss mindestens ein unter $\alpha = 30^0$ geneigter Planspiegel sein, dass sich ein $a = 1{,}80$ m hoher Beobachter, dessen Auge vom Spiegel die Entfernung $d = 5$ m hat, gerade in seiner ganzen Höhe erblicke?

Aufl. ähnlich wie ad 3. Ist die zweite Grundlinie des entstandenen Trapezes gefunden, so erhält man durch Verhältnisse:

$$h = \frac{a\,d \sin\alpha}{2\,d + a\cos\alpha} = 0{,}3893 \text{ m}.$$

5. An einem Seeufer erhebt sich ein Kirchturm. Von einer $h = 10{,}5$ m hohen Anhöhe erscheint die Spitze desselben unter dem Elevationswinkel $\varphi = 34^0\,50'$, während der Depressionswinkel des im Wasser sichtbaren Spiegelbildes derselben $\psi = 54^0\,20'$ beträgt. Wie hoch ist der Turm?

Aufl. Durch Elimination der Entfernung des Beobachters vom Kirchturm ergiebt sich:

$$x = \frac{h \sin(\psi + \varphi)}{\sin(\psi - \varphi)} = 31{,}45 \text{ m}.$$

2. Der Hohlspiegel.

a. Konstruktionsaufgaben.

1. Auf der Axe eines Hohlspiegels befindet sich ein leuchtender Punkt ausserhalb der Brennweite. Den Gang des in's Auge fallenden Strahles zu zeichnen.

2. Dieselbe Aufgabe, wenn der leuchtende Punkt innerhalb der Brennweite liegt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Über der Axe eines Hohlspiegels befindet sich ein leuchtender Punkt ausserhalb der Brennweite. Zeichne den Gang des in's Auge fallenden Strahles.

4. Dieselbe Aufgabe, wenn der leuchtende Punkt innerhalb der Brennweite liegt.

5. Vor einem Hohlspiegel befindet sich ausserhalb der Brennweite ein Dreieck, dessen Ebene mit der Axe zusammenfällt. Zeichne das Bild.

6. Vor einem Hohlspiegel befindet sich innerhalb der Brennweite ein Viereck, dessen Ebene mit der Axe zusammenfällt. Das Bild ist zu zeichnen.

7. Auf der Axe eines Spiegels steht in der Entfernung a vom Spiegel ein senkrechter Pfeil, der sich zu seinem umgekehrten Bilde wie n : 1 verhält. Zeichne das Bild und den Spiegel.

8. Auf der Axe eines Spiegels steht in der Entfernung α vom Spiegel das senkrechte und umgekehrte Bild eines Pfeiles; dasselbe verhält sich zum Objekte wie 1 : n. Es ist das Objekt und der Spiegel zu zeichnen.

9. Auf einer Axe steht ein senkrechter Pfeil; sein Bild soll aufrecht und n mal so gross sein. Zeichne Bild und Spiegel.

10. Vor einer Axe steht aufrecht ein senkrechtes Bild eines Pfeiles; das Objekt soll n mal so klein sein. Zeichne Bild und Spiegel.

11. Auf einer Linie stehen ein senkrechter Pfeil und sein umgekehrtes Bild. Zeichne den Spiegel, dessen Axe die Linie ist.

12. Dieselbe Aufgabe, wenn Objekt und Bild aufrechtstehen.

13. Ausserhalb der Brennweite steht vor einem Hohlspiegel ein leuchtender Punkt und nahe vor dem Brennpunkt ein unter 45^0 geneigter Planspiegel. Zeichne das Bild des Punktes.

14. Zeichne unter denselben Bedingungen den Strahl, der gerade das Auge trifft.

15. Im (Kugel-)Mittelpunkte eines Hohlspiegels steht ihm zugekehrt ein zweiter Hohlspiegel von halber Brennweite, so dass die beiden Axen zusammenfallen. Es soll das Bild eines leuchtenden Punktes gezeichnet werden, der nahe am zweiten Spiegel steht.

16. Dieselbe Aufgabe für den Fall, dass der Punkt weit vom zweiten Spiegel entfernt ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b. Aufgaben.

1. Vor einem Hohlspiegel befindet sich in der Entfernung $a = 3$ m ein leuchtender Punkt, der von der Axe des Spiegels $b = 0{,}4$ m entfernt ist. Wie weit ist das Bild vom Spiegel und von der Axe entfernt, wenn der Krümmungshalbmesser $r = 1$ m ist?

Aufl. Nach der Formel vom Hohlspiegel und aus der Ähnlichkeit zweier Dreiecke ergiebt sich:

$$\alpha = \frac{ar}{2a - r} = 0{,}6 \text{ m}, \quad \beta = \frac{br}{2a - r} = 0{,}08 \text{ m}.$$

2. Vor einem Hohlspiegel mit der Brennweite $p = 0{,}75$ m sieht man in der Entfernung $\alpha = 0{,}85$ m vom Spiegel ein $h = 0{,}20$ m hohes Bild. Wie weit ist das Objekt vom Spiegel entfernt und wie gross ist dasselbe?

Aufl. wie ad 1. Es ergiebt sich:

$$a = \frac{\alpha p}{\alpha - p} = 6{,}375 \text{ m}, \quad H = \frac{h p}{\alpha - p} = 1{,}5 \text{ m}.$$

3. Wie gross ist die Brennweite eines Spiegels, wenn sich das Bild eines $a = 4{,}5$ m weiten Gegenstandes $\alpha = 0{,}5$ m weit vor demselben befindet?

Aufl. ähnlich:

$$p = \frac{a\alpha}{a + \alpha} = 0{,}45 \text{ m}.$$

4. Wie gross ist die Brennweite eines Spiegels, wenn sich das Bild eines $a = 0{,}4$ m weiten Gegenstandes $\alpha = 2$ m weit hinter dem Spiegel befindet? Wie gross ist zugleich das Bild, wenn das Objekt $H = 0{,}5$ m hoch ist?

Aufl. wie ad 1. Wegen der entgegengesetzten Lage von α ist diese Grösse negativ zu nehmen. Es folgt für:

$$p = \frac{a\alpha}{\alpha - a} = 0{,}5 \text{ m}, \quad h = \frac{H\alpha}{a} = 2{,}5 \text{ m}.$$

5. Nähert sich ein Gegenstand einem Hohlspiegel mit der Brennweite $p = \frac{1}{2}$ m um $d = 1$ m, so entfernt sich sein Bild um $\delta = \frac{1}{15}$ m. Wo befanden sich Gegenstand und Bild vor der Verschiebung?

Aufl. wie ad 1. Aus zwei Gleichungen ergeben sich die beiden Unbekannten:

$$a = \frac{d}{2} + p \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + p^2 \frac{d}{\delta}} = \begin{cases} 3 \text{ m} \\ -1 \text{ m} \end{cases}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\alpha = p - \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + p^2 \frac{\delta}{d}} = \begin{cases} 0{,}6 \text{ m} \\ {}^1/_3 \text{ m.} \end{cases}$$

Das negative Vorzeichen lässt sich auch erklären.

6. Vor einem Hohlspiegel mit dem Krümmungshalbmesser $r = 2$ m befindet sich ein leuchtender Punkt, der vom Spiegel $a = 100$ m und von der Axe $b = 0{,}63$ m entfernt ist. In der Entfernung $c = 0{,}8851$ m befindet sich ein kleiner die Axe schneidender Planspiegel mit einer Neigung von 45°. Wie weit ist das Bild des Punktes von der Axe entfernt, 1) durch den Hohlspiegel allein und 2) durch beide Spiegel zusammen hervorgerufen?

Aufl. einfach durch Anwendung der bezüglichen Gesetze; es ergiebt sich nach Berechnung von α:

$$1)\ \beta = \frac{b\,r}{2\,a - r} = 0{,}006336 \text{ m und}$$

$$2)\ x = \frac{a\,r}{2\,a - r} - c = 0{,}125 \text{ m.}$$

7. Im (Kugel-)Mittelpunkte eines Hohlspiegels mit der Brennweite $p = 2$ m steht ihm zugekehrt ein zweiter kleinerer Hohlspiegel mit der Brennweite $p' = {}^1/_4$ m, so dass ihre Axen zusammenfallen. In der Entfernung $a = 4^2/_{15}$ m vom grösseren Spiegel befindet sich ein $h = 0{,}008$ m hoher Gegenstand. Wie gross ist das von dem kleineren Spiegel hervorgerufene Bild desselben?

Aufl. Sind die Entfernungen des Bildchens von beiden Spiegeln gefunden, so ergiebt sich für die Grösse desselben:

$$x = \frac{p\,p'\,h}{p\,(a - 2p) - p'\,(a - p)} = -\ 0{,}015 \text{ m d. h.?}$$

§ 4. Die Brechung des Lichtes.

Erklärung. Wenn Lichtstrahlen aus einem Mittel in ein anderes übergehen, so werden sie, wenn sie auf die Trennungsfläche beider Mittel schief auffallen, von ihrer Richtung abgelenkt, zugebrochen und abgebrochen. Dabei ist das Verhältnis der Sinusfunktionen des Einfalls- und des Brechungswinkels konstant und heisst der Brechungsexponent.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch Linsen werden die Strahlen teils konvergierend, teils divergierend gebrochen: physische und geometrische Bilder. Sind r und ϱ die Krümmungsradien einer Linse mit dem Brechungsexponenten n, so besteht zwischen den Objekt- und Bildweiten die Gleichung:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{\varrho},$$

wo die Radien je nach Gattung der Linsen positiv, negativ und unendlich zu nehmen sind. Die rechte Seite heisst der reciproke Wert der Brennweite. Im speziellen Falle, wo die Radien gleich sind und $n = {}^3/_2$ ist, geht die Gleichung über in

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r}.$$

Die Grössen von Bild und Objekt verhalten sich auch wie ihre Weiten.

a. Konstruktionsaufgaben.

1. Der Einfallswinkel eines auf eine Glasplatte fallenden Strahles ist α, der Brechungsexponent (für Luft und Glas) ${}^3/_2$. Zeichne den gebrochenen Strahl und den Grenzwinkel.

2. Aus einem dichteren Mittel fällt ein Lichtstrahl unter einem sehr spitzen Einfallswinkel α auf ein dünneres; der Brechungsexponent beider Mittel ist ${}^5/_4$. Zeichne den abgebrochenen Strahl.

3. Auf eine d cm dicke Glasplatte fällt ein Lichtstrahl unter dem Einfallswinkel α; der Brechungsexponent ist ${}^3/_2$. Zeichne den austretenden Strahl.

4. Vor einer d cm dicken Glasplatte befindet sich ein Lichtpunkt; der Brechungsexponent ist ${}^3/_2$. Zeichne das näher gerückte Lichtbild.

5. Auf dem Boden eines Gefässes, in dem sich h cm hoch Wasser befindet, sieht ein Auge eine Münze liegen. Wo liegt die Münze und wo sieht sie das Auge, wenn der vom Auge einfallende Lichtstrahl den Winkel α bildet und der Brechungsexponent ${}^4/_3$ ist.

6. Ein Strahl trifft unter dem Einfallswinkel α auf ein dreiseitiges Prisma mit dem brechenden Winkel φ. Zeichne den austretenden Strahl, wenn der Brechungsexponent ${}^3/_2$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

7. Zeichne den einfallenden Strahl, welcher aus einem dreiseitigen Prisma mit dem brechenden Winkel φ senkrecht auf der zweiten Trennungsfläche austritt, wenn der Brechungsexponent $^3/_2$ ist.

8. Auf ein gleichschenkliges Prisma mit einem brechenden Winkel von 80^0 fällt ein Lichtstrahl unter einem sehr spitzen Winkel $\alpha < 15^0$, der Brechungsexponent ist $^3/_2$. Zeichne den Gang des Strahles.

9. Auf eine biconvexe Linse mit demselben Krümmungshalbmesser r fällt ein Lichtstrahl parallel der Axe auf. Zeichne den Gang des Strahles, wenn der Brechungsexponent $n = {}^3/_2$ ist.

b. Aufgaben.

1. Der Brechungsexponent für Luft und Wasser ist $^4/_3$, für Luft und Glas $^3/_2$. Wie gross ist der Brechungsexponent für Wasser und Glas?

Aufl. Sind α, β und α, γ die betreffenden Winkel, so ergiebt sich durch Elimination von α der gesuchte Brechungsexponent:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{9}{8}.$$

2. Wie gross ist der Grenzwinkel für einen Lichtstrahl, der aus Glas in Luft übergeht? Der Brechungsexponent ist $^3/_2$.

Aufl. Der austretende Strahl bildet einen Rechten, daher:

$$\sin \alpha = {}^2/_3 \text{ und } \alpha = 41^0\ 48'\ 40''.$$

3. Der Einfallswinkel eines Lichtstrahls im dünneren Mittel ist $\alpha = 60^0\ 20'$, während der gebrochene Strahl im dichteren Mittel den Winkel $\beta = 40^0\ 34'$ bildet. Wie gross ist der Brechungsexponent für beide Mittel?

Aufl. Aus dem Brechungsgesetz ergiebt sich:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 1{,}336.$$

4. Auf eine $d = 10$ cm dicke Glasplatte fällt ein Lichtstrahl unter dem Einfallswinkel $\alpha = 40^0\ 50'$. Wie gross ist der senkrechte Abstand zwischen dem einfallenden und dem austretenden Strahl, wenn der Brechungsexponent $n = {}^3/_2$ ist?

Aufl. Ist β der zugehörige Brechungswinkel, so ist der gesuchte Abstand:

$$x = d \operatorname{tg} \beta = 4{,}8437 \text{ cm}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. Auf dem Boden eines Gefässes, welches $h = 25$ cm hoch mit Wasser gefüllt ist, sieht ein Auge eine Münze unter dem Depressionswinkel $\alpha = 70^0\ 25'$ liegen. Wie gross ist der senkrechte Abstand der Münze von dem einfallenden Lichtstrahl und um wie viel scheint dieselbe über den Boden gehoben zu sein, wenn der Brechungsexponent für Luft und Wasser $^4/_3$ ist?

Aufl. wie ad 4.

$x = h \operatorname{tg} \beta = 6{,}493$ cm, $y = h\,(1 - \operatorname{tg} \beta \,.\, \operatorname{tg} \alpha) = 6{,}748$ cm.

6. Dicht vor einer $d = 6$ cm dicken Glasplatte befindet sich ein leuchtender Punkt. Um wie viel erscheint er einem senkrecht blickenden Auge genähert, wenn der Brechungsexponent $n = {}^3/_2$ ist?

Aufl. Da das Auge auf den Punkt senkrecht schaut, so sind die Winkel α und β sehr klein, daher kann man statt des Verhältnisses der Tangenten das der Sinus setzen und man erhält:

$$x = \frac{d\,(n-1)}{n} = 2 \text{ cm.}$$

7. Der brechende Winkel eines dreiseitigen Prisma's ist $\varphi = 60^0$. In der Ebene eines auf der brechenden Kante senkrechten Schnittes fällt auf dasselbe ein einfarbiger Lichtstrahl mit dem Einfallswinkel $\alpha = 50^0\ 30'$. Unter welchem Winkel wird dieser Strahl aus dem Prisma treten, und wie gross ist die Gesamtablenkung, wenn der Brechungsexponent $n = {}^3/_2$ gesetzt wird?

Aufl. Ist β der zum Winkel α gehörende Brechungswinkel, so ergiebt sich der gesuchte Winkel γ aus:

$$\sin \gamma = n \sin (\varphi - \beta), \text{ also } \gamma = 46^0\ 44'$$

und die Gesamtablenkung $\psi = \alpha + \gamma - \varphi = 37^0\ 14'$.

8. Ein einfarbiger Lichtstrahl tritt aus einem Prisma mit dem brechenden Winkel $\varphi = 63^0\ 50'$ gerade unter einem Rechten aus. Wie gross ist der Einfallswinkel, wenn der Brechungsexponent $n = {}^3/_2$ ist?

Aufl. wie ad 7. Ist β aus $\sin (\varphi - \beta) = \frac{1}{n}$ gefunden, so ergiebt sich der Einfallswinkel α aus:

$$\sin \alpha = n \sin \beta, \quad \alpha = 34^0\ 13'\ 30''.$$

9. Auf der Axe einer gleichseitigen biconvexen Linse mit dem Krümmungsradius $r = 5$ cm befindet sich in der Entfernung $a = 30$ cm ein leuchtender Punkt. Wo befindet sich das Bild desselben, wenn der Brechungsexponent $n = {}^3/_2$ gesetzt wird?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufl. nach der bezüglichen Formel. Es ergiebt sich:

$$\alpha = \frac{a\,r}{2\,a\,(n-1) - r} = 6 \text{ cm.}$$

10. Eine biconvexe Linse mit den Krümmungsradien $r = 36$ cm und $\varrho = 30$ cm liefert in der Entfernung $\alpha = 40$ cm ein $h = 2$ cm hohes Bild. Wie weit ist das Objekt von der Linse entfernt und wie gross ist dasselbe, wenn der Brechungsexponent $n = {}^3/_2$ ist?

Aufl. ähnlich. Es ergiebt sich:

$$a = \frac{r\,\varrho\,\alpha}{(n-1)\,\alpha\,(r+\varrho) - r\,\varrho} = 180 \text{ cm und } H = \frac{h\,a}{\alpha} = 9 \text{ cm.}$$

11. Eine biconvexe Linse hat die Brennweite $p = \frac{20}{11}$ cm und giebt für die Entfernung $a = 20$ cm eines Objektes ein deutliches Bild desselben. Welche Brennweite muss eine zweite Linse besitzen, wenn sie für dasselbe Objekt in der Entfernung $b = 30$ cm ein gleich grosses deutliches Bild liefert?

Aufl. Ist α die Entfernung des Bildes bei der ersten Linse und bedenkt man, dass beide Bilder dieselbe Grösse haben sollen, so ergiebt sich für die Brennweite der zweiten Linse:

$$p' = \frac{b}{1 + \frac{a}{\alpha}} = \frac{30}{11} \text{ cm.}$$

§ 5. Optische Instrumente.

Erklärung. Die Vergrösserung einer Linse ist das Verhältnis der Grösse des Bildes zu der des Gegenstandes. Diese verhalten sich aber wie die entsprechenden Weiten, daher ergiebt sich für die Vergrösserung der allgemeine Ausdruck:

$$v = (n-1)\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{\varrho}\right) \pm 1.$$

Sind die Radien gleich und ist $n = {}^3/_2$, so geht der Ausdruck über in:

$$v = \frac{\alpha}{r} \pm 1,$$

wo das positive Vorzeichen für geometrische, das negative für physische Bilder gilt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Eine Lupe hat den Krümmungshalbmesser $r = 2{,}5$ cm. Wie gross ist ihre lineare Vergrösserung, wenn die deutliche Sehweite $d = 25$ cm beträgt?

Aufl. Die deutliche Sehweite ist hier zugleich die Bildweite, daher die Vergrösserung:

$$x = \frac{d}{r} + 1 = 11.$$

2. Eine Lupe hat die Krümmungshalbmesser $r = 4$ cm und $\varrho = 5$ cm. Wie gross ist ihre lineare Vergrösserung für die deutliche Sehweite von $d = 40$ cm, wenn der Brechungsexponent $n = {}^3/_2$ ist?

Aufl. ähnlich wie ad 1.

$$x = \frac{d}{2\,r} + \frac{d}{2\,\varrho} + 1 = 10.$$

3. Bei einem Sonnenmikroskop hat die Objektivlinse den Krümmungsradius $r = 1{,}5$ cm und das Objekt den Abstand $a = 1{,}507$ cm von derselben. Wie weit ist der Schirm aufzustellen und wie gross ist das Bild, wenn das Objekt $q = 1$ qmm ist?

Aufl. einfach. Der Schirm ist aufzustellen in der Entfernung:

$$\alpha = \frac{a\,r}{a - r} = 323{,}72 \text{ cm}$$

und die Bildgrösse ist:

$$x = q\left(\frac{\alpha}{r} + 1\right)^2 = 47002{,}24 \text{ qmm}.$$

4. Welche Entfernung müssen zwei biconvexe Linsen mit den Brennweiten $p_1 = 3$ cm und $p_2 = 2{,}5$ cm von einander haben, wenn das physische Bild eines von der ersten um $a = 3{,}5$ cm entfernten Pfeiles die $n = 5$fache Länge hat?

Aufl. Ist die Grösse des durch die erste Linse erzeugten Bildes gefunden, so erhält man, wenn man aus der für die zweite Linse aufgestellten Gleichung die neue Bildweite durch die bekannte Beziehung zwischen Weiten und Grössen des Gegenstandes und des Bildes eliminiert, für die gesuchte Entfernung:

$$x = p_2 + \frac{p_1}{a - p_1}\left(a + \frac{p_2}{n}\right) = 26{,}5 \text{ cm}.$$

5. Dieselbe Aufgabe für den Fall, dass das Bild geometrisch sein soll.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufl. ähnlich wie ad 4 mit der Bemerkung, dass in der zweiten Gleichung wegen des geometrischen Bildes die neue Bildweite negativ zu nehmen ist. Daher ergiebt sich für die gesuchte Entfernung:

$$x = p_2 + \frac{p_1}{a - p_1}\left(a - \frac{p_2}{n}\right) = 20{,}5 \text{ cm}.$$

6. Bei einem zusammengesetzten Mikroskop hat die Objektivlinse den Krümmungsradius $r = 0{,}7$ cm und das Okular $\varrho = 1{,}4$ cm; das Objekt befindet sich $a = 0{,}74$ cm vom Objektiv entfernt. Welche Entfernung haben für die deutliche Sehweite von $d = 38{,}6$ cm die beiden Linsen und wie gross die lineare Vergrösserung?

Aufl. wie ad 5, die neue Bildweite ist hier gegeben und die Vergrösserung setzt sich aus der der beiden Linsen zusammen. Es ergiebt sich für die Entfernung:

$$x = \frac{a\,r}{a - r} + \frac{\varrho\,d}{\varrho + d} = 14{,}301 \text{ cm}$$

und die Vergrösserung:

$$v = \frac{r}{a - r} \cdot \frac{\varrho + d}{\varrho} = 500.$$

7. Bei einem Keplerschen Fernrohr hat das Objektiv den Krümmungsradius $r = 1{,}5$ m, das Okular $\varrho = 3$ cm. Ein $h \doteq 5$ m hoher Baum wird in der Entfernung $a = 501{,}5$ m von einem Auge mit der deutlichen Sehweite $d = 27$ cm genau gesehen. Wie lang ist das Fernrohr und wie gross das gesehene Bild?

Aufl. analog wie ad 6. Die Länge des Fernrohrs ist:

$$x = \frac{a\,r}{a - r} + \frac{d\,\varrho}{d + \varrho} = 153{,}15 \text{ cm}$$

und die Grösse des Bildes:

$$v = \frac{r\,(\varrho + d)\,h}{(a - r)\,\varrho} = 15 \text{ cm}.$$

8. Bei einem Galileischen Fernrohr hat das Objektiv den Krümmungsradius $r = 25$ cm, das Okular*) $\varrho = 5$ cm. Das Objekt hat die Entfernung $a = 1525$ cm. Welche Entfernung müssen die beiden Gläser für ein Auge mit der deutlichen Sehweite von $d = 25$ cm haben?

---

*) Das Okularglas ist hier eine Zerstreuungslinse.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufl. ähnlich wie ad 7. Da das Okular eine Zerstreuungslinse ist, so muss ϱ negativ genommen werden. Daher die gesuchte Entfernung:

$$x = \frac{a\,r}{a - r} - \frac{d\,\varrho}{d - \varrho} = 18{,}75 \text{ cm.}$$

9. In einem Newton'schen Spiegelteleskop ist die Brennweite des Hohlspiegels $p = 1{,}5$ cm; in der Entfernung $e = 1{,}3$ m von demselben befindet sich auf der Axe ein kleiner Planspiegel, der die Axe unter 45° schneidet, diesem gegenüber in dem Rohr eine Lupe mit dem Krümmungsradius $r = 6$ cm. In der Entfernung $a = 101{,}5$ m steht auf der Axe senkrecht ein $h = 0{,}5$ m hoher Gegenstand. 1) Wo erscheint das vom Hohlspiegel allein erzeugte Bild? 2) wie gross ist dasselbe? 3) wo liegt das vom Planspiegel hervorgerufene Bild? 4) wie gross ist dasselbe durch die Lupe betrachtet, wenn die deutliche Sehweite $d = 24$ cm ist?

Aufl. einfach.

1) auf der Axe in der Entfernung

$$\alpha = \frac{a\,p}{a - p} = 1{,}5225 \text{ m},$$

2) $H = \dfrac{h\,p}{a - p} = 0{,}75$ cm,

3) seitwärts von der Axe in der Entfernung:

$$b = \frac{a\,p}{a - p} - e = 0{,}2225 \text{ m und}$$

4) $v = \left(\dfrac{d}{r} + 1\right) H = 3{,}75$ cm.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufl. äh … e Zerstreuungs-
linse ist, so … her die gesuchte
Entfernung:

9. In e … die Brennweite
des Hohlspie … = 1,3 m von
demselben b … er Planspiegel,
der die Axe … r in dem Rohr
eine Lupe m … In der Entfer-
nung a = 1 … ein h = 0,5 m
hoher Gegens … hlspiegel allein
erzeugte Bild … liegt das vom
Planspiegel h … dasselbe durch
die Lupe bet … d = 24 cm ist?

Aufl. e

1) a

2) H

3) s … ng:

4) v

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN® Gray Scale
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
R G B W G K C Y M

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf