KÖNIGLICHES GYMNASIUM ZU WONGROWITZ.

ABHANDLUNG ZUM XII. JAHRESBERICHT.

SCHULJAHR 1883—1884.

DAS FOLIUM VON DESCARTES.

VON

STANISLAUS RYCHLICKI.

REALGYMNASIUM BIBLIOTHEK

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1884. Progr.-No. 150. 1884.

9wo 8 (1884)

1306, 12

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 1.

Die singulären Punkte der Kurve. Allgemeine Eigenschaften derselben.

Da man aus der Form der Kurvengleichung einen Aufschlufs über die Natur der vielfachen Punkte und Tangenten der Kurve erhalten kann, so wird es zweckmäfsig sein, die Untersuchung der Kurve mit der Feststellung ihrer vielfachen Punkte zu beginnen.

Zu diesem Zwecke schreibe man die vorgelegte Kurvengleichung:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \tag{1}$$

in den Polarkoordinaten, indem man $x = \varrho \cos \vartheta$ und $y = \varrho \sin \vartheta$ substituiert. Die Gleichung (1) geht dann über in:

$$\varrho^3(\sin^3 \vartheta + \cos^3 \vartheta) - 3a\varrho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0\,. \tag{2}$$

Da nun die Gleichung (2) durch ϱ^2 teilbar ist, also in $\varrho^2 = 0$ zwei Wurzeln der Gleichung enthalten sind, so folgt, dafs nicht nur der Koordinatenanfang ein Punkt der Kurve ist, sondern auch jede durch ihn gehende Gerade mit der Kurve zwei zusammenfallende Punkte gemeinsam hat, also in gewissem Sinne als Tangente der Kurve zu betrachten ist. Der Koordinatenanfang ist daher ein Doppelpunkt der Kurve.

Obwohl nun jede durch den Koordinatenanfang gehende Gerade die Kurve in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet, so besitzt doch die Kurve aufserdem zwei gerade Linien, die mit ihr drei zusammenfallende Punkte gemein haben, die sogenannten Tangenten im Doppelpunkte. Die beiden Geraden entsprechen denjenigen Werten von ϑ, für welche in (2) der Koefficient von ϱ^2 Null wird. Besteht nämlich die Bedingung $3a \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$, so ist die Gleichung (2) durch ϱ^3 teilbar, d. h. es giebt gerade Linien, die bestimmten Werten von ϑ entsprechen und die Kurve in drei zusammenfallenden Punkten schneiden. Da nun weiter die Bedingungsgleichung für ϑ vom 2ten Grade ist, so heifst das, die Kurve besitzt im Doppelpunkte zwei solche Tangenten. Aus obiger Bedingungsgleichung folgt der Reihe nach:

$$\sin \vartheta = 0 \text{ oder } \vartheta = 0^0 \text{ und } \cos \vartheta = 0 \text{ oder } \vartheta = 90^0,$$

d. h. die beiden Koordinatenachsen $x = 0$ und $y = 0$ sind jene speciellen Tangenten, die mit der Kurve im Koordinatenanfang eine innigere Berührung, als jede andere durch ihn gehende Gerade haben. Da ferner beide Tangenten reell und verschieden sind, so ist der Doppelpunkt ein Knotenpunkt, in dem sich zwei Äste der Kurve schneiden. Eine Kurve 3ten Grades wird aber von einer Geraden im allgemeinen in drei Punkten geschnitten, daher werden die Achsen, da sie schon im Koordinatenanfang drei Punkte mit der Kurve gemein haben, die beiden Zweige nicht mehr treffen können, die Zweige also in entgegengesetzten Quadranten (I und III oder II und IV) zu liegen kommen.

Nun kann eine Kurve dritter Ordnung nicht mehr als einen Doppelpunkt besitzen; die vorliegende Kurve ist also nach Cayley vom Defekt Null oder eine sog. Unicursal-Kurve. In

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

diesem Falle aber lassen sich die Koordinaten irgend eines ihrer Punkte als rationale algebraische Funktionen eines variabeln Parameters ausdrücken. Setzt man daher $y = xt$ und substituiert diesen Wert von y in (1), so erhält man:

$$x^3 + x^3t^3 - 3ax^2t = 0, \text{ und daraus:}$$

$$(3) \qquad x = \frac{3at}{1+t^3} \text{ und } y = \frac{3at^2}{1+t^3},$$

also zwei Gleichungen, in denen die Koordinaten irgend eines Punktes der Kurve als rationale Funktionen des Parameters t ausgedrückt erscheinen.

§ 2.

Fortsetzung. Transformation der Kurvengleichung.

Nach § 1 besteht die Kurve aus zwei Ästen, die eine zu einander entgegengesetzte Lage haben müssen.

Um dies näher zu untersuchen, betrachte man das durch die obige Substitution $y = xt$ ausgedrückte und durch den Koordinatenanfang gehende Strahlenbüschel; die unter (3) erwähnten Gleichungen sind die Werte der Koordinaten für die Schnittpunkte dieses Büschels mit der gegebenen Kurve. Die Abscissen $x = \frac{3at}{1+t^3}$ steigen für $t = 0$ von 0 an bis zu einem Maximalwert bei $t = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$, um für noch gröfsere Werte von t abzunehmen und bei $t = +\infty$ zu verschwinden. Die im I. Quadranten liegenden Strahlen des Büschels schneiden also die Kurve in kontinuierlicher Reihenfolge vom Koordinatenanfang bis zu demselben zurück; die Kurve bildet demnach in diesem Quadranten eine geschlossene Figur, die man das Blatt derselben zu nennen pflegt. — Für die negativen Werthe von t, die zwischen $-\infty$ und -1 liegen, nimmt die Funktion x positiv zu, erreicht für $t = -1$ den Wert $+\infty$, springt aber sofort in $-\infty$ über und nimmt für Werte von t, die zwischen -1 und 0 liegen, negativ ab, um bei $t = 0$ wieder zu verschwinden[1]). Die Kurve besitzt also in der That zwei Äste, die sich in's Unendliche erstrecken und im II. resp. IV. Quadranten liegen.

Bedenkt man weiter, dafs in der vorgelegten Kurvengleichung (1) die Variabeln ohne weiteres mit einander vertauscht werden können, dafs es also, geometrisch gesprochen, Paare von zwei Punkten giebt, von denen der eine dieselbe Entfernung von der X-Achse hat, wie der andere von der Y-Achse und umgekehrt, so folgt hieraus offenbar, dafs die Kurve in Bezug auf die Halbierungslinie des rechten Achsenwinkels, den die positiven Halbachsen einschliefsen, symmetrisch ist. Will man nun die Kurvengleichung mit Beibehaltung des Koordinatenanfangs auf diese Halbierungslinie und die zu ihr Senkrechte als neue Achsen transformieren, so gelten dafür folgende Transformationsformeln:

$$x = (\xi - \eta)\sin 45^0 = (\xi - \eta)\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ und}$$

$$y = (\xi + \eta)\sin 45^0 = (\xi + \eta)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

---

1) Dividiert man nämlich in $x = \frac{3at}{1+t^3}$ Zähler und Nenner durch t und setzt dann $t = -1$, so wird $x = +\infty$; setzt man aber in $x = \frac{3at}{1+t^3}$ ohne weiteres $t = -1$ ein, so wird $x = -\infty$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wo ξ und η die neuen laufenden Koordinaten bedeuten. Durch Substitution dieser Werte in die Kurvengleichung (1) erhält man:

$$2\xi^3 + 6\xi\eta^2 - 3a\sqrt{2}\,(\xi^2 - \eta^2) = 0\,.$$

Ersetzt man darin die laufenden Koordinaten wieder durch x und y, so hat die transformierte Gleichung die Form:

$$2x^3 + 6xy^2 - 3a\sqrt{2}\,(x^2 - y^2) = 0\,, \tag{4}$$

in welcher y nur im Quadrat erscheint. Die Kurve ist also, wie oben erwähnt, in Bezug auf die neue X-Achse symmetrisch; die beiden Tangenten im Knotenpunkte sind repräsentiert durch die Gleichung $x^2 - y^2 = 0$, sie sind also die Halbierungslinien der Achsenwinkel, d. h. die früheren Achsen.

§ 3.

Die Differentialquotienten der Kurve.

Da bei den folgenden Untersuchungen häufig der erste und zweite Differentialquotient der in vorigen Paragraphen erwähnten Kurvengleichungen angewendet werden, so wird es zweckmäfsig sein, dieselben zunächst zu entwickeln.

1) Bezeichnet man die Kurvengleichung (1) kurz mit f, so dafs

$$f \equiv x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

ist, dann gelten nach der Lehre der Differentialrechnung, wenn man die partiellen Differentialquotienten in üblicher Weise mit ∂ bezeichnet, folgende Relationen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 - ay)\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 - ax)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3a \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y\,;$$

dann ist bekanntlich:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}\,.$$

Setzt man darin die für die partiellen Differentialquotienten gefundenen Werte ein, so erhält man als ersten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3(x^2 - ay)}{3(y^2 - ax)} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}\,. \tag{5}$$

Ferner ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

und durch Substitution obiger Werte:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{(ax - y^2)^3}\cdot\{x^4y + xy^4 - 3ax^2y^2 + a^3xy\}\,.$$

Klammert man nun im Zähler den Faktor xy aus und berücksichtigt, dafs $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ist, so erhält man als zweiten Differentialquotienten:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^3xy}{(ax - y^2)^3}\,. \tag{6}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Für die im § 1 durch den variabeln Parameter t ausgedrückte Kurvengleichung erhält man, da

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \text{ und } y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

gefunden sind, folgende Relationen:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{3a(1+t^3) - 9at^3}{(1+t^3)^2} = \frac{3a}{(1+t^3)^2}\{1-2t^3\} \text{ und}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{6at(1+t^3) - 9at^4}{(1+t^3)^2} = \frac{3at}{(1+t^3)^2}(2-t^3); \text{ daher ist:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial t} : \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}. \tag{7}$$

Analog ist:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{18at^2}{(1+t^3)^3}\{t^3-2\} \text{ und}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{6a}{(1+t^3)^3}\{1-7t^3+t^6\};$$

daher ist nach einigen Umformungen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) : \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3 = \frac{2(1+t^3)^4}{3a(1-2t^3)^3}. \tag{8}$$

Dieselben Werte konnten auch direkt ermittelt werden, nämlich durch Substitution der Ausdrücke für x und y in die resp. Gleichungen dieses Paragraphen.

3) Aus der in § 2 ermittelten transformierten Kurvengleichung folgt zunächst:

$$y^2 = \frac{3a\sqrt{2}x^2 - 2x^3}{6x + 3a\sqrt{2}};$$

setzt man der Einfachheit wegen $3a\sqrt{2} = 2b$, so dafs

$$y^2 = \frac{bx^2 - x^3}{3x+b} \text{ wird, so ist:}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{2x(b^2-3x^2)}{(3x+b)^2}, \text{ mithin:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(b^2-3x^2)}{y(3x+b)^2} \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2-3x^2}{(3x+b)\sqrt{(b-x)(3x+b)}}. \tag{9}$$

§ 4.

Die höchsten und die tiefsten Punkte der Kurve.

Nach den Lehre der Differentialrechnung erreicht die Ordinate der Kurve $y = f(x)$ für einen aus der Gleichung $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 0$ bestimmten Wert $x = \alpha$ einen gröfsten resp. kleinsten Wert, je nachdem die erste von den folgenden Ableitungen, welche für $x = \alpha$ nicht verschwindet, von gerader Ordnung und negativ resp. positiv ist. Setzt man also im vorliegenden Falle die Gleichung (5) des § 3 $\frac{dy}{dx} = 0$, so erhält man

$$x^2 - ay = 0,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

eine Gleichung, in der aufser der Variabeln x auch noch y vorkommt. Um nun die Wurzeln x_i zu ermitteln, die dieser Gleichung genügen, müfste man aus der Kurvengleichung (1) und der letzten Gleichung y eliminieren. Einfacher aber gelangt man zum Ziele, wenn man die Gleichung (7) gleich Null setzt, man erhält dann:

$$t(2 - t^3) = 0, \text{ d. h. es mufs } 1)\ t = 0 \text{ und } 2)\ 2 - t^3 = 0 \text{ sein.}$$

Aus $t = 0$ folgt $x = y = 0$, ein Wertepaar von keiner Bedeutung, weil für diese Werte auch $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ werden.

Aus $2 - t^3 = 0$ folgt ohne weiteres $t = \sqrt[3]{2} \,.\, \varepsilon_i$, daher auch $x_i = a \,.\, \sqrt[3]{2} \,.\, \varepsilon_i$ und $y_i = a \sqrt[3]{4} \,.\, \varepsilon_i^2$, wo ε_i die drei Wurzeln der binomischen Gleichung $x^3 - 1 = 0$ bedeuten. Substituiert man diese Werte in die Gleichung (8) des § 3, indem man berücksichtigt, dafs $\varepsilon_i^3 = 1$ ist, so erhält man:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \frac{2(1+2)^4}{3a(1-4)^3} = -\frac{2}{a},$$

einen Wert, der bei positivem a stets negativ bleibt. Die Punkte also, deren Koordinaten x_i und y_i sind, sind die höchsten Punkte der Kurve. Von diesen drei Punkten ist einer für $\varepsilon_1 = 1$ reell, die beiden anderen dagegen sind imaginär.

Dieser reelle höchste Punkt ist in Fig. 1 mit P bezeichnet; seine Koordinaten haben die Werte:

$$\alpha = a \sqrt[3]{2} = 1{,}26a \text{ und } \beta = a \sqrt[3]{4} = 1{,}59a.$$

Beachtet man ferner, dafs diese Koordinaten Wurzeln der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ sind und dafs $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$ die trigonometrische Tangente des Winkels φ bedeutet, den die geometrische Tangente der Kurve in diesem Punkte mit der X-Achse einschliefst, dafs endlich für $\frac{dy}{dx} = 0$ auch $\varphi = 0^0$ wird, so folgt hieraus, dafs die im Punkte P an die Kurve gezogene Tangente mit der X-Achse einen Winkel von 0^0 bildet, d. h. der X-Achse parallel ist. Der begrenzte Teil der Kurve liegt daher zunächst zwischen der positiven Halbaxe der Abscissen und der im Abstande $\beta = a \sqrt[3]{4}$ zu derselben gezogenen Parallelen. — In derselben Weise kann man auch die gröfsten Werte ermitteln, die die Abscissen der Kurve erreichen werden. Für diese Punkte nämlich werden die Tangenten mit der X-Achse Winkel von 90^0 einschliefsen, d. h. der Y-Achse parallel laufen. In diesem Falle mufs also

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \infty, \text{ d. h. } \frac{dx}{dy} = 0 \text{ sein,}$$

was die Bedingungsgleichung: $1 - 2t^3 = 0$ liefert, woraus $t = \frac{1}{2} \sqrt[3]{4}\, \varepsilon_i$, daher auch $x = a \sqrt[3]{4}\, \varepsilon_i$ und $y = a \sqrt[3]{2}\, \varepsilon_i^2$ gefunden werden. Bezeichnet man den reellen dieser drei Punkte mit Q, so dafs seine Koordinaten die Werte $x = \beta$ und $y = \alpha$ annehmen, so wird die durch ihn an die Kurve gezogene Tangente der Y-Achse parallel laufen. Aus beiden Betrachtungen folgt nun, dafs der begrenzte Teil der Kurve in dem quadratischen Flächenstück liegt, dessen Begrenzungslinien durch die vier Gleichungen $x = 0$, $x = \beta$, $y = \beta$ und $y = 0$ repräsentiert werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 5.

Die Konvexität oder Konkavität der Kurve und ihre Inflexionspunkte.

Nach der Lehre der Differentialrechnung wendet die Kurve die konvexe oder die konkave Seite der X-Achse zu, jenachdem $\frac{d^2y}{dx^2} \gtrless 0$ ist. Für $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ erhält man die Inflexionspunkte, in welchen die Kurve ihre Krümmung wechselt. Für Zweige dagegen, die unterhalb der X-Achse liegen, gilt die Bedingung $\frac{d^2y}{dx^2} \lessgtr 0$.

Für die vorliegende Untersuchung wenden wir die in § 3 unter (8) angeführte Relation an:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(1+t^3)^4}{3a(1-2t^3)^3},$$

die einen Bruch darstellt, dessen Vorzeichen nur vom Nenner abhängen kann. Für $t = -1$ ($x = -\infty$, $y = \infty$) wird der Zähler des Bruches, also auch der ganze Bruch Null, die Kurve besitzt demnach im Unendlichen einen reellen Inflexionspunkt. Die Gleichung $1 + t^3 = 0$ hat aber noch zwei imaginäre Wurzeln, für die also der Bruch auch Null wird, d. h. die Kurve enthält noch aufserdem zwei imaginäre Wendepunkte, die aber nicht weiter in Betracht kommen. Die Werte von t, die zwischen -1 und 0 liegen, denen also negative Abscissen und positive Ordinaten entsprechen, gehören dem Kurvenzweige im II. Quadranten; für diese Werte ist $-t^3 > 0$, der Nenner daher und mit ihm der ganze Bruch positiv oder die Kurve ist konvex gegen die X-Achse gekrümmt. Für den Anfangspunkt in diesem Zweige, also für $t = 0$, ist der Bruch auch positiv, d. h. die Kurve ändert beim Durchgange durch diesen Punkt ihre Krümmung nicht. Für die weiteren Werte von t, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ liegen, ist $2t^3 < 1$, der Nenner also positiv, und die Kurve wendet auch im I. Quadranten ihre konvexe Seite der X-Achse zu. Erst für $t = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$, also in dem in § 4 erwähnten Punkte Q, tritt für $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein Zeichenwechsel ein; für die weiteren Werte von t nämlich, bis für $t = \infty$ ($x = 0$, $y = 0$), wird der Bruch negativ, die Kurve kehrt also von Q ab ihre konkave Seite der Abscissenachse zu. Da aber beim Durchgange durch Q, also für $t = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$ wird, so tritt jene Erscheinung ein, ohne einen Inflexionspunkt zu erzeugen. Im Coordinatenanfang, also für $t = \infty$, tritt zwar wieder ein Zeichenwechsel ein, denn für Werte von t, die zwischen ∞ und -1 liegen, wird der Nenner und mit ihm der Bruch positiv, ohne jedoch die Krümmung der Kurve zu verändern, da beim Durchgange durch den Coordinatenanfang $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$ wird.

Dieser Zweig also, der sich im IV. Quadranten unterhalb der X-Achse befindet, ist ebenfalls konkav gegen dieselbe gekrümmt und kehrt endlich für $t = -1$ zum Inflexionspunkte zurück, um sich dort im Unendlichen mit dem ersten Kurvenzweige zu vereinigen. Das Bild der Kurve ist hiernach folgendes: Die Kurve fällt vom reellen Inflexionspunkte im Unendlichen anfangend, indem sie ihre konvexe Seite der Abscissenachse zuwendet, erreicht im Koordinatenanfang ihren relativen unteren Kulminationspunkt, steigt dann mit Beibehaltung der Krümmungsrichtung bis zum Punkte Q, in dem sie sich von der Y-Achse am weitesten entfernt. Von da

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

an kehrt die Kurve in ihrem weiteren Verlaufe die konkave Seite der X-Achse zu, steigt aber noch weiter, bis sie in P ihren oberen Kulminationspunkt erreicht, um von da an zu fallen und durch den Koordinatenanfang wieder in den Inflexionspunkt zurückzukehren.

§ 6.

Konstruktion der Kurve.

Um die durch die Gleichung $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ausgedrückte Kurve bildlich darzustellen, kann man in sehr bequemer Weise eine Tabelle der korrespondierenden Werte der Koordinaten herstellen, indem man für verschiedene Werte von t die zugehörigen Werte von x und y berechnet. Eine solche Zusammenstellung der zugehörigen Werte giebt z. B. folgende Tabelle an:

t	x	y
-1	$-\infty$	∞
$-\frac{2}{3}$	$-\frac{54}{19}a$	$\frac{36}{19}a$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{12}{7}a$	$\frac{6}{7}a$
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{27}{26}a$	$\frac{9}{26}a$
0	0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{27}{28}a$	$\frac{9}{28}a$
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}a$	$\frac{2}{3}a$
$\frac{2}{3}$	$\frac{54}{35}a$	$\frac{36}{35}a$

t	x	y
$\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{4}\,.\,a$	$\sqrt[3]{2}\,.\,a$
1	$\frac{3}{2}a$	$\frac{3a}{2}$
$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}a$	$\sqrt[3]{4}a$
2	$\frac{2}{3}a$	$\frac{4}{3}a$
3	$\frac{9}{28}a$	$\frac{27}{28}a$
∞	0	0
-3	$\frac{9}{26}a$	$-\frac{27}{26}a$
-2	$\frac{6}{7}a$	$-\frac{12}{7}a$
-1	∞	$-\infty$

Man trägt dann für einen Wert von x als Abscisse den zugehörigen Wert y als Ordinate ab; auf solche Weise lassen sich viele Punkte der Kurve konstruieren. Durch Verbindung derselben, mit Beziehung auf die bisherigen Resultate über die Konvexität und Konkavität der Kurve, ist auch die mit Fig. 1 bezeichnete Kurve konstruiert, wobei $a = OA$ angenommen ist.

Unabhängig von der Rechnung, also rein geometrisch, ist die Kurve konstruierbar, wenn man ihre Gleichung in der transformierten Form benutzt. Dieselbe lautet nach § 2 mit der Substitution: $3a\sqrt{2} = 2b$

$$y^2 = \frac{bx^2 - x^3}{3x + b} = \frac{x^2(b - x)}{b + 3x}, \text{ d. h. es ist:}$$

$$\frac{y^2}{b - x} = \frac{x^2}{b + 3x}.$$

Ist nun Fig. 2 $OB = b$ und $OC = x$, so findet man das zugehörige y auf folgende Weise:

Man schneide auf OX' von O aus ein Stück $OD = 3OC$, errichte in B auf OX ein Lot $BE = OC$ und auf der Verbindungslinie DE in E eine Senkrechte, die OX in F trifft. Man schlage darauf über CF als Durchmesser einen Kreis, der BE in K und K' trifft. Zieht man nun durch K und K' Parallele zu OX, die die in C auf OX errichtete Senkrechte in P und P' schneiden, so sind P und P' zwei Punkte der Kurve, die zu OX symmetrisch liegen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und dem Blatt der Kurve angehören. — Für Punkte, die den Zweigen entsprechen, erhält man eine ähnliche Kontruktion, indem man nur $-x$ statt x in die vorstehende Formel substituiert.

Als eine neue Konstruktion derselben Kurve könnte vielleicht folgende gelten.

In Fig. 3 sei O der Koordinatenanfang, $OB = b$, $OB' = \frac{b}{3}$ und $BLB'L'$ eine Ellipse, ausgedrückt durch die Gleichung:

$$3x^2 + 9y^2 - 2bx - b^2 = 0.$$

Errichtet man nun in einem Punkte P der grofsen Achse auf derselben ein Lot, das die Ellipse in R und R' schneidet, zieht dann zu den Verbindungslinien $B'R$ und $B'R'$ durch O Parallele, die jene Senkrechte in K und K' treffen, so sind K und K' zwei symmetrische Punkte der vorliegenden Kurve.

Denn sind α und β die Koordinaten von R, so ist die Gleichung der Geraden $B'R$: $\frac{x + \frac{b}{3}}{y} = \frac{\alpha + \frac{b}{3}}{\beta}$, folglich die Gleichung der Parallelen OK:

1) $\frac{x}{y} = \frac{\alpha + \frac{b}{3}}{\beta}$, während die Senkrechte PR durch die Gleichung:

2) $x = \alpha$ repräsentiert wird. Durch Elimination von α und β, die der Gleichung:

3) $3\alpha^2 + 9\beta^2 - 2b\alpha - b^2 = 0$ zu genügen haben, aus den drei letzten Gleichungen 1), 2) und 3) erhält man den gesuchten geometrischen Ort der Punkte K. Zu diesem Zwecke setzt man in 1) $\alpha = x$ und erhält: $\frac{x}{y} = \frac{x + \frac{b}{3}}{\beta}$, woraus $\beta = \frac{y}{x}\left(x + \frac{b}{3}\right)$ wird. Substituiert man diese Werte von α und β in die Gleichung 3), so erhält man:

$$3x^2 + 9\,\frac{y^2}{x^2}\left(x + \frac{b}{3}\right)^2 - 2bx - b^2 = 0 \text{ oder:}$$

$$3x^4 + 9y^2x^2 + 6bxy^2 + b^2y^2 - 2bx^3 - b^2x^2 = 0$$

als Gleichung des gesuchten Ortes von K. Diese Gleichung vom IV. Grade läfst sich aber zerlegen in:

$$3x(x^3 + 3xy^2 - bx^2 + by^2) + b(x^3 + 3xy^2 - bx^2 + by^2) = 0 \text{ oder in:}$$

$$(3x + b)\{x^3 + 3xy^2 - bx^2 + by^2\} = 0.$$

Der geometrische Ort besteht also aus der durch B' zu der Y-Achse gezogenen Parallelen $B'H$ und der Kurve $x^3 + 3xy^2 - bx^2 + by^2 = 0$, welche mit der in § 2 transformierten Kurvengleichung von $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ identisch ist, wenn $3a\sqrt{2} = 2b$ gesetzt wird. Mit Hilfe der erwähnten Ellipse ist auch die mit Fig. 3 bezeichnete Kurve konstruiert.

§ 7.

Tangente, Normale, Subtangente, Subnormale.

Zieht man in Fig. 1 in einem beliebigen Punkte, z. B. Q', der Kurve an dieselbe eine Tangente, welche die X-Achse in B trifft, macht $Q'C \perp OX$ und $Q'D \perp BQ'$, so werden bekanntlich die Strecken $Q'B$, BC, $Q'D$ und CD resp. Tangente, Subtangente, Normale und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Subnormale genannt. Führt man für diese Bezeichnungen die Symbole: T, N, S_t, S_n ein, so ist nach der Lehre der Differentialrechnung:

$$T = Q'B = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{y}{\sin\varphi},$$

$$N = Q'D = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{y}{\cos\varphi},$$

$$S_t = BC = y \cdot \frac{dx}{dy} = y \,.\, \operatorname{ctg}\varphi,$$

$$S_n = CD = y \cdot \frac{dy}{dx} = y \,.\, \operatorname{tg}\varphi,$$

wo φ den Winkel $Q'BX$ bezeichnet, den die Tangente mit der X-Achse einschliefst.

Nun war $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$, also $\frac{dx}{dy} = \frac{ax - y^2}{x^2 - ay}$, und substituiert man diese Werte in obige Ausdrücke, so erhält man:

$$T = \frac{y}{x^2 - ay}\sqrt{(x^2 - ay)^2 + (ax - y^2)^2},$$

$$N = \frac{y}{ax - y^2}\sqrt{(x^2 - ay)^2 + (ax - y^2)^2},$$

$$S_t = y \cdot \frac{ax - y^2}{x^2 - ay} \text{ und}$$

$$S_n = y \cdot \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}; \text{ endlich ist } \operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}.$$

Für $x = 0$, $y = 0$ erhält man $\operatorname{tg}\varphi = \frac{0}{0}$; um den wahren Wert dieser unbestimmten Form zu ermitteln, schreibe man $\frac{dy}{dx}$ in der zweiten Form, so dafs also $\operatorname{tg}\varphi = \frac{t(2 - t^3)}{1 - 2t^3}$ wird. Dem Wertepaare $x = y = 0$ entsprechen nun die beiden Werte $t = 0$ und $t = \infty$; für $t = 0$ ist auch $\operatorname{tg}\varphi = 0$, d. h. $\varphi = 0$, oder die X-Achse ist Tangente der Kurve. Um den Wert von $\operatorname{tg}\varphi$ für $t = \infty$ bestimmen, dividiere man Zähler und Nenner durch t^4, wodurch man $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{2}{t^3} - 1}{\frac{1}{t^4} - \frac{2}{t}}$ erhält. Für $t = \infty$ wird dann $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, d. h. $\varphi = 1\,\mathrm{R}$ oder die Y-Achse ist ebenfalls Tangente der Kurve im Koordinatenanfang, eine Bestätigung des Ergebnisses von § 1.

Für $x = y = \frac{3a}{2}$, also für den Punkt S, den Scheitel des Blattes der Kurve, wird $T = N$ und $S_t = S_n$; substituiert man noch diese Werte in $\frac{dy}{dx}$, so wird $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x^2 - ax}{ax - x^2} = -1$, d. h. $\varphi = \frac{3}{2}\,\mathrm{R}$, während die Normale in diesem Punkte den Winkel $\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{R}$ mit der X-Achse bildet. Die Gleichung der Tangente im Scheitelpunkte ist:

$$y - \frac{3a}{2} = -\left(x - \frac{3a}{2}\right) \text{ oder:}$$

$x + y = 3a$; die Tangente schneidet also auf den positiven Halbachsen gleiche Stücke $= 3a$ ab; die Gleichung der zugehörigen Normale dagegen ist: $y - \frac{3a}{2} = x - \frac{3a}{2}$ oder $y = x$, sie geht demnach durch den Koordinatenanfang.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um weiter die Asymptoten, d. h. diejenigen Tangenten der Kurve zu bestimmen, die im Endlichen liegen und die Kurve im unendlich fernen Punkte berühren, schreibt man die vorgelegte Kurvengleichung in der Form: $u^3 - u^2 = 0$, wo in u^i alle Glieder der i^{ten} Ordnung zusammengefafst sind; die Gleichung der Tangente in einem beliebigen Kurvenpunkte lautet dann:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta - u^2 = 0, \text{ also in diesem Falle:}$$

$$\xi(x^2 - ay) + \eta(y^2 - ax) - axy = 0.$$

Hierauf bestimmt man die drei Werte von $\frac{y}{x}$, welche die Gleichung $\frac{u^3}{x^3} = 0$ befriedigen; man erhält also aus $\frac{x^3 + y^3}{x^3} = \left(\frac{y}{x}\right)^3 + 1 = 0$ die drei Wurzeln $\frac{y}{x} = \begin{cases} -1 = \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{cases}$, wo ε_2 und ε_3 die beiden imaginären Wurzeln bedeuten, die auch der Gleichung genügen. Man behalte nun die Glieder der 2ten Ordnung in der Tangentengleichung, also $\xi x^2 + \eta y^2 - axy = 0$, substituiere darin für $\frac{y}{x}$ die gefundenen Werte, so erhält man: $\xi + \eta\varepsilon_i^2 - a\varepsilon_i = 0$ als Gleichung der drei Asymptoten.

Für $\varepsilon_1 = -1$ erhält man, indem man zugleich x und y statt ξ und η setzt: $y = -x - a$ als Gleichung der reellen Asymptote; die beiden anderen, die zu den imaginären Inflexionspunkten gehören, sind ebenfalls imaginär. Diese reelle Asymptote steht senkrecht zur Normale im Scheitel des Blattes und schneidet auf den negativen Halbachsen gleiche Stücke $= a$ ab. Transformiert man diese Gleichung der Asymptote auf dieselben Achsen, wie sie im § 2 erwähnt sind, so findet man die neue Gleichung derselben in der Form:

$$x + \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0, \text{ oder } 3a\sqrt{2} = 2b \text{ gesetzt:}$$

$$3x + b = 0.$$

Die also in § 6 hervorgehobene Gerade $B'H$ (cfr. Fig. 3) ist die reelle Asymptote der Kurve.

Zur Lösung der Aufgabe, in einem beliebigen Punkte der Kurve die Tangente zu konstruieren, kann man sich einer der vier oben aufgestellten Beziehungen bedienen. Doch erscheint die Konstruktion dieser Ausdrücke nicht besonders einfach. Bequemer eignet sich hierzu die Formel für den Abschnitt OB (cfr. Fig. 1), welchen die Tangente auf der X-Achse abschneidet.

Es ist nämlich:

$$OB = OC - BC = x - S_t = x - y\frac{ax - y^2}{x^2 - ay} = \frac{x^3 + y^3 - 2axy}{x^2 - ay}.$$

Da man nun der Kurvengleichung zufolge für $x^3 + y^3 - 2axy$ den Wert axy setzen kann, so wird

$$OB = \frac{axy}{x^2 - ay} \text{ oder: } OB = \frac{ax}{x \cdot \frac{x}{y} - a}.$$

Ist nun Fig. 4 $OA = a$, P ein Punkt der Kurve, also $OC = x$, $PC = y$ und setzt man $\frac{x}{y} = \operatorname{tg}\alpha$, so kann die Tangente in P auf folgende Weise konstruiert werden. Man verbinde O mit P, ziehe $CD \perp OP$, deren Verlängerung OY in E trifft; mache $EF = OG = a$, verbinde F mit C und ziehe $GB \parallel FC$. Dann ist BP die verlangte Tangente. Ist die Tangente konstruiert, so sind auch dadurch die übrigen drei Stücke leicht zu konstruieren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 8.

Krümmungsradius, Krümmungsmittelpunkt, Evolute.

Bezeichnet man den Krümmungsradius, also den Radius des Kreises, dessen Krümmung sich der der Kurve am meisten anschliefst, mit ϱ, so ist bekanntlich:

$$\varrho = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2}$$

und die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden dann ausgedrückt durch:

$$X = x - \frac{dy}{dx}\,\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad Y = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Substituiert man für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ die in § 3 unter 7 und 8 angeführten Werte, so wird

$$\varrho = \frac{3a}{2(1+t^3)^4}\left\{(1-2t^3)^2 + t^2(2-t^3)^2\right\}^{\frac{3}{2}}.$$

Verfolgt man die verschiedenen Werte, die der Krümmungsradius im Verlauf der Kurve der Reihe nach annehmen kann, so sieht man zunächst, dafs für den Inflexionspunkt, also für $t = -1$, $\varrho = \infty$ wird. Von da ab nimmt er ab, erreicht für $t = 0$, also im Koordinatenanfang, den Wert $\frac{3a}{2}$, nimmt in seinem weiteren Verlaufe noch mehr ab, um bei Q für $t = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ den Wert $\frac{a}{2}$ und bei S für $t = 1$ sein Minimum $\frac{3a\sqrt{2}}{16}$ zu erreichen. Von da nimmt er, absolut genommen, zu, erreicht bei P für $t = \sqrt[3]{2}$ denselben Wert $\frac{a}{2}$, wie bei dem korrespondierenden Punkte Q, um im Koordinatenanfang beim zweiten Zweige für $t = \infty$ denselben Wert $\frac{3a}{2}$ anzunehmen; im vierten Quadranten nimmt er immer mehr zu und wird für $t = -1$ unendlich.

Dafs der Krümmungsradius in den korrespondierenden Punkten dieselben Werte annimmt, läfst sich sehr einfach beweisen. Diese Punkte nämlich entsprechen immer den Werten von t und $\frac{1}{t}$. Dividiert man aber Zähler und Nenner des Ausdruckes für ϱ durch t^2, so geht ϱ über in:

$$\varrho = \frac{3a}{2\left(\frac{1}{t^3}+1\right)^4}\left\{\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t^3}-2\right)^2 + \left(\frac{2}{t^3}-1\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}},$$

d. h. der Wert von ϱ wird nicht verändert, wenn für t der reciproke Wert $\frac{1}{t}$ substituiert wird, oder in korrespondierenden Punkten behält der Krümmungsradius dieselbe Gröfse.

Die Konstruktion des Krümmungshalbmessers ist, wenn auch leicht, doch zu schwerfällig. Am einfachsten könnte wohl die Aufgabe gelöst werden, wenn man bereits nach § 7 die Tangente konstruiert hat. Drückt man zunächst ϱ in x und y aus, so dafs

$$\varrho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{x^2 - ay}{ax - y^2}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} \cdot (ax - y^2)^3}{2a^3xy} \text{ wird,}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und erweitert den Zähler des Bruches mit $(x^2 - ay)^3$, so erhält man:

$$\varrho = \frac{\left\{\left(\frac{ax - y^2}{x^2 - ay}\right)^2 + 1\right\}^{\frac{3}{2}} \cdot (x^2 - ay)^3}{2a^3xy};$$

setzt man nun $\frac{ax - y^2}{x^2 - ay} = \operatorname{ctg} \varphi$, so geht die Formel über in:

$$\varrho = \frac{(\operatorname{ctg}^2 \varphi + 1)^{\frac{3}{2}} \cdot (x^2 - ay)^3}{2a^3xy} = \frac{(x^2 - ay)^3}{2a^3xy \cdot \sin^3 \varphi} = \frac{y^2\left(x\frac{x}{y} - a\right)^3}{2x \cdot a^3 \cdot \sin^3 \varphi} = \frac{y\left(x\frac{x}{y} - a\right)^3}{2\frac{x}{y}a^3 \cdot \sin^3 \varphi}.$$

Bedenkt man ferner, dafs $x\frac{x}{y} - a$ das in Fig. 4 gefundene Stück OF bedeutet, so erhält man, wenn $\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \alpha$ gesetzt wird,

$$2\varrho = \frac{y \cdot \overline{OF}^3}{\operatorname{tg} \alpha\, (a \sin \varphi)^3}.$$

Ist nun Fig. 5 P derselbe Kurvenpunkt, wie in Fig. 4, PB die Tangente, PN Normale derselben, $OC = x$, $PC = y$ und $OA = a$, dann ist, wenn $PL \perp PO$ steht, $CL = \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha}$. Um weiter $a \sin \varphi$ zu konstruieren, trage man auf PC von P aus $PD = a$ ab und ziehe $PE \perp PB$, dann ist $PE = a \sin \varphi$ und es wird jetzt:

$$2\varrho = \frac{CL \cdot \overline{OF}^3}{\overline{PE}^3}.$$

Um nun diesen Ausdruck zu konstruieren, verlängere man PN über P hinaus und schneide darauf $PK = OF$ ab; man mache darauf $EH = CL$, ziehe durch H eine Parallele zu PK, welche die Verbindungslinie KE in G trifft, errichte in G auf KE eine Senkrechte, die PE in R schneidet und ziehe durch R eine Parallele zu PK, welche EK in S' trifft. Schlägt man nun über $S'G$ als Durchmesser einen Kreis, der $S'R$ in S trifft, zieht $S'P' \parallel SP$ und halbiert $P'P$ in M, dann ist MP der verlangte Krümmungsradius.

Denn nach der Konstruktion ist: $\frac{S'S}{EH} = \frac{\overline{S'R}^3}{\overline{ER}^3}$; nun ist $\triangle S'RE \sim KPE$, daher auch $\frac{S'S}{EH} = \frac{\overline{KP}^3}{\overline{EP}^3}$. Nach Konstr. ist aber $KP = OF$, $EH = CL$ und $S'S = 2MP$, daher

$$2MP = \frac{CL \cdot \overline{OF}^3}{\overline{PE}^3} = 2\varrho; \text{ q. e. d.}$$

Drückt man die Formeln für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes durch den Parameter t aus, so erhält man:

$$X = \frac{3at^3}{2(1 + t^3)^4}\{t^9 + 6t^7 - 6t^6 - 6t^4 + 12t^3 + 15t - 8\} \text{ und}$$

$$Y = \frac{3a}{2(1 + t^3)^4}\{1 + 6t^2 - 6t^3 - 6t^5 + 12t^6 + 15t^8 - 8t^9\}.$$

Dies ist zugleich die Gleichung der Evolute der untersuchten Kurve, ausgedrückt durch einen variabeln Parameter; durch Elimination desselben aus beiden Gleichungen erhält man die Gleichung der Evolute in Cartesischen Koordinaten.

Über die Natur der Evolute kann man noch folgendes sagen. Die Evolute wird eben-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

falls symmetrisch zur Halbierungslinie des Achsenwinkels im ersten Quadranten liegen; sie wird vollständig nur im ersten Quadranten enthalten sein, denn für alle Werte von t werden X und Y stets positiv bleiben. Die Achsen werden dieselbe berühren und zwar in der Entfernung von $\frac{3a}{2}$ vom Koordinatenanfang. Sie wird aus zwei symmetrischen bis in's Unendliche sich erstreckenden Ästen bestehen, die sich in dem dem Punkte S der Kurve entsprechenden Punkte begegnen; da ferner dieser Punkt auf der Normale von S, also auf OS liegen mufs, diese Gerade aber zugleich Tangente der Evolute ist, so müssen die beiden Äste in diesem Punkte eine Spitze bilden und OS mufs eine Doppeltangente der Evolute sein.

§ 9.

Quadratur der Kurve.

Den nächstfolgenden Untersuchungen werden wir im allgemeinen der Einheitlichkeit wegen die auf die Halbierungslinien der Achsenwinkel transformierte Kurvengleichung:

$$y^2 = \frac{bx^2 - x^3}{3x + b} \text{ zu Grunde legen, wo } b = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \text{ gesetzt ist.}$$

Um die (Fig. 6) zwischen einer Abscisse OC, der zugehörigen Ordinate PC und dem Kurvenbogen OP gelegene Fläche zu bestimmen, hat man bekanntlich das Integral

$$F = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx \text{ zu berechnen.}$$

Substituiert man darin für y den aus obiger Gleichung sich ergebenden Wert ein, so wird

$$F = \int_{x_0}^{x_1} x\sqrt{\frac{b-x}{3x+b}} \cdot dx.$$

Multipliciert man Zähler und Nenner mit $\sqrt{b-x}$, so geht F über in:

$$F = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x(b-x)\,dx}{\sqrt{b^2 + 2bx - 3x^2}} = b\int_{x_0}^{x_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{b^2 + 2bx - 3x^2}} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{b^2 + 2bx - 3x^2}} = bJ_1 - J_2.$$

Bezeichnet man $\sqrt{\alpha + \beta x - \gamma x^2}$ mit $\sqrt{P}$, so gilt bekanntlich die Reduktionsformel:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{P}} = -\frac{x^{m-1}.\sqrt{P}}{m\gamma} + \frac{(2m-1)\beta}{2m\gamma}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{P}} + \frac{(m-1)\alpha}{m\gamma}\int \frac{x^{m-2}.\,dx}{\sqrt{P}},$$

wo $$\int \frac{dx}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ arc sin } \frac{2\gamma x - \beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}} + \text{Konst. ist.}$$

Das erste Integral erhält man demnach für $m = 1$:

$$bJ_1 = b\left\{-\frac{\sqrt{P}}{\gamma} + \frac{\beta}{2\gamma}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ arc sin } \frac{2\gamma x - \beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}\right\},$$

das zweite dagegen für $m = 2$, also:

$$J_2 = -\frac{x\sqrt{P}}{2\gamma} + \frac{3\beta}{4\gamma}J_1 + \frac{\alpha}{2\gamma}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ arc sin } \frac{2\gamma x - \beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daher ist:

$$F = \left[J_1 \left(b - \frac{3\beta}{4\gamma} \right) + \frac{x\sqrt{P}}{2\gamma} - \frac{\alpha}{2\gamma\sqrt{\gamma}} \text{ arc sin } \frac{2\gamma x - \beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}} \right]_{x_0}^{x_1}$$

oder für α, β, γ die resp. Werte eingesetzt:

$$= \left[J_1 \cdot \frac{b}{2} + \frac{x\sqrt{P}}{6} - \frac{b^2}{6\sqrt{3}} \text{ arc sin } \frac{6x - 2b}{4b} \right]_{x_0}^{x_1}$$

$$= \left[\frac{b}{2} \left\{ - \frac{\sqrt{P}}{3} + \frac{b}{3\sqrt{3}} \text{ arc sin } \frac{6x - 2b}{4b} \right\} + \frac{x\sqrt{P}}{6} - \frac{b^2}{6\sqrt{3}} \text{ arc sin } \frac{6x - 2b}{4b} \right]_{x_0}^{x_1}$$

$$= \left[- \frac{b\sqrt{P}}{6} + \frac{x\sqrt{P}}{12} \right]_{x^0}^{x_1} = \left[\frac{\sqrt{P}}{12} (x - 2b) \right]_{x_0}^{x_1}.$$

Für $x_0 = 0$ und $x_1 = x$ erhält man daher als Inhalt der Fläche:

$$F = \frac{\sqrt{b^2 + 2bx - 3x^2}}{12} (x - 2b) + \frac{b^2}{6}.$$

Ist nun $x = OS = b$, so ist der Inhalt des halbkreisförmigen Stückes $OPS = \frac{b^2}{6}$. Ebenso grofs, absolut genommen, ist der Inhalt der Fläche $OP'S$, daher ist der Inhalt des ganzen Blattes der Kurve

$$OPSP'O = \frac{b^2}{3} = \frac{3a^2}{2}.$$

Setzt man dagegen $x = -\frac{b}{3}$, so erhält man den Inhalt des einem $\triangle$ ähnlichen Flächenstückes im II. Quadranten, begrenzt durch die X-Achse, die in der Entfernung $OT = -\frac{b}{3}$ gezogene Asymptote und den zugehörigen Kurvenzweig, also:

$$OT\infty = \frac{b^2}{6}.$$

Da auch der zweite Zweig der Kurve im III. Quadranten ein ebenso grofses Flächenstück mit der Asymptote einschliefst, so wird die ganze von der Kurve und ihrer Asymptote eingeschlossene Fläche, die den endlichen Inhalt $\frac{2b^2}{3} = 3a^2$ hat, im Koordinatenanfang halbiert.

Bemerkenswert erscheint noch, dafs der in's Unendliche reichende Teil der Fläche durch die beiden Tangenten im Doppelpunkte triseciert wird, so dafs

$$KO\infty = KOK' = K'O\infty = \frac{b^2}{9} = \frac{a^2}{2} \text{ ist.}$$

Da nämlich die Tangenten die Achsenwinkel halbieren, so ist:

$$KT = K'T = TO = \frac{b}{3}, \text{ folglich } \triangle KTO = \frac{b^2}{18} \text{ und daher:}$$

$$KO\infty = OT\infty - KTO = \frac{b^2}{6} - \frac{b^2}{18} = \frac{b^2}{9}, \text{ folglich:}$$

$$KO\infty = KOK' = K'O\infty = \frac{b^2}{9}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bedenkt man ferner, dafs $\frac{b^2}{3} = \frac{4b^2}{9} - \frac{b^2}{9}$ ist, so ersieht man daraus, dafs der Inhalt des Blattes gleich ist dem Quadrate über einer Kathete des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse $\frac{2b}{3}$ und dessen andere Kathete $\frac{b}{3}$ ist.

§ 10.

Bestimmung des Schwerpunktes der Fläche.

Soll der Schwerpunkt der im vorigen Paragraphen behandelten Fläche bestimmt werden, so ist nach der Differentialrechnung, wenn man die Koordinaten des Schwerpunktes mit ξ und η bezeichnet:

$$F \,.\, \xi = \int_{x_0}^{x_1} yx\,dx \text{ und } F \,.\, \eta = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$$

zu setzen, wo F den Inhalt der zugehörigen Fläche bedeutet. Substituiert man für y den Wert in x, so wird:

$$F \,.\, \xi = \int_{x_0}^{x_1} x^2 \sqrt{\frac{b-x}{3x+b}}\,dx \text{ und } F \,.\, \eta = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{bx^2 - x^3}{3x+b}\,dx\,.$$

Verfährt man mit dem ersten Integral wie in § 9, so wird:

$$F \,.\, \xi = \int \frac{x^2(b-x)\,dx}{\sqrt{P}} = b\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{P}} - \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{P}} = b \,.\, J_2 - J_3\,.$$

Nach dem Resultat des vorigen Paragraphen ist nun für $m = 3$:

$$J_3 = -\frac{x^2\sqrt{P}}{3\gamma} + \frac{5\beta}{6\gamma}J_2 + \frac{2\alpha}{3\gamma}J_1\,.$$

Demnach wird

$$\begin{aligned} F \,.\, \xi &= bJ_2 + \frac{x^2}{3\gamma}\sqrt{P} - \frac{5\beta}{6\gamma}J_2 - \frac{2\alpha}{3\gamma}J_1 \\ &= J_2\left(b - \frac{5\beta}{6\gamma}\right) - \frac{2\alpha}{3\gamma}J_1 + \frac{x^2}{3\gamma}\sqrt{P} \\ &= \left(b - \frac{5\beta}{6\gamma}\right)\left(-\frac{x}{2\gamma}\sqrt{P} + \frac{\alpha}{2\gamma\sqrt{\gamma}} \text{ arc sin } \frac{2\gamma x - \beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}\right) \\ &\quad + \left(-\frac{\sqrt{P}}{\gamma} + \frac{\beta}{2\gamma\sqrt{\gamma}} \text{ arc sin } \frac{2\gamma x - \beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}\right) \cdot \left\{\frac{3\beta}{4\gamma}\left(b - \frac{5\beta}{6\gamma}\right) - \frac{2\alpha}{3\gamma}\right\} + \frac{x^2}{3\gamma}\sqrt{P}. \end{aligned}$$

Substituiert man für α, β und γ die bekannten Werte, so ist:

$$\begin{aligned} F \,.\, \xi &= \frac{4}{9}b\left\{-\frac{x}{6}\sqrt{P} + \frac{b^2}{6\sqrt{3}} \text{ arc sin } \frac{6x - 2b}{4b}\right\} + \frac{x^2}{9}\sqrt{P} \\ &= \left[\sqrt{P}\left\{\frac{x^2}{9} - \frac{2xb}{27}\right\} + \frac{2b^3}{27\sqrt{3}} \text{ arc sin } \frac{3x - b}{2b}\right]_{x_0}^{x_1} = U_1 - U_0\,. \end{aligned}$$

Daher

$$\xi = \frac{U_1 - U_0}{F}\,.$$

Das zweite Integral dagegen läfst sich zerlegen in:

$$F\eta = \frac{b}{2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{x^2 dx}{3x+b} - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{x^3 dx}{3x+b}\,.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das erste hat bekanntlich den Wert:

$$\frac{x^2}{6} - \frac{bx}{9} + \frac{b^2}{27} l(3x+b), \text{ während das zweite:}$$

$$\frac{x^3}{9} - \frac{b}{3}\left\{\frac{x^2}{6} - \frac{bx}{9} + \frac{b^2}{27} l(3x+b)\right\} \text{ ist.}$$

Daher ist:

$$F\eta = \left\{\frac{x^2}{6} - \frac{bx}{9} + \frac{b^2}{27} l(3x+b)\right\} \cdot \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{6}\right) - \frac{x^3}{18}$$

$$= \left[\frac{2}{9} b\left\{\frac{x^2}{2} - \frac{bx}{3} + \frac{b^2}{9} l(3x+b)\right\} - \frac{x^3}{18}\right]_{x_0}^{x_1} = V_1 - V_0, \text{ daher:}$$

$$\eta = \frac{V_1 - V_0}{F}.$$

Für $x_0 = 0$, $x_1 = x$ wird

$$U_0 = \frac{2b^3}{27\sqrt{3}} \text{ arc sin} - \frac{1}{2} = -\frac{2b^3\pi}{27\sqrt{3}\,.\,6} = -\frac{\pi b^3}{81\sqrt{3}}, \text{ daher:}$$

$$\xi = \frac{1}{F}\left\{x\sqrt{b^2 + 2bx - 3x^2}\left(\frac{x}{9} - \frac{2b}{27}\right) + \frac{2b^3}{27\sqrt{3}} \text{ arc sin } \frac{3x-b}{2b} + \frac{\pi b^3}{81\sqrt{3}}\right\}.$$

Analog ist:

$$V_0 = \frac{2b^3}{81} lb, \text{ daher:}$$

$$\eta = \frac{1}{F}\left\{\frac{2}{9} b\left[\frac{x^2}{2} - \frac{bx}{3} + \frac{b^2}{9} l\frac{3x+b}{b}\right] - \frac{x^3}{18}\right\}.$$

Für $x = b$ wird

$$\xi = \frac{1}{F}\left\{\frac{2b^3}{27\sqrt{3}} \text{ arc sin } 1 + \frac{\pi b^3}{81\sqrt{3}}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{F}\left\{\frac{2b^3}{27\sqrt{3}\,.\,2} + \frac{b^3}{81\sqrt{3}}\right\} = \frac{4\,.\,\pi b^3}{81\sqrt{3}\,.\,F} = \frac{24b\pi}{81\sqrt{3}} = \frac{8\pi b}{27\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}\,\pi a}{9\sqrt{3}} = 1{,}14\ldots a \text{ und}$$

$$\eta = \frac{1}{F}\left\{\frac{2}{9} b^3\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} l4\right) - \frac{b^3}{18}\right\} = \frac{b^3(4l4 - 3)}{162F} = \frac{b\,.\,6(4l4-3)}{162} = \frac{a\sqrt{2}(4l4-3)}{18} = 0{,}199\,a.$$

Eben dieselben Werte ergeben sich für die Koordinaten des Schwerpunktes der Fläche $OP'S$, nur ist dabei η negativ zu nehmen.

Der Schwerpunkt des ganzen Blattes wird also auf der X-Achse und zwar in der Entfernung $1{,}14\ldots a$ vom Koordinatenanfang liegen.

Setzt man dagegen $x = -\frac{b}{3}$, so wird

$$\xi = -\frac{2\pi b^3}{81\sqrt{3}\,.\,F} = -\frac{4\pi b}{27\sqrt{3}} = -\frac{2\pi a\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} = -0{,}57\ldots a.$$

Der Schwerpunkt also der durch die Zweige und die Asymptote begrenzten Fläche ist vom Koordinatenanfang um $-0{,}57\ldots a$ entfernt.

§ 11.

Eine andere Flächenbestimmung.

Um das von dem Kurvenbogen (Fig. 7) OP, der X-Achse und der zugehörigen Ordinate begrenzte Flächenstück zu bestimmen, ist das Integral $F = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx$ aufzulösen, wo y aus $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ zu berechnen ist. In einfacherer Weise setze man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$y = \frac{3at^2}{1+t^3} \text{ und } dx = \frac{3a}{(1+t^3)^2}(1-2t^3)dt.$$

Durch diese bekannte Substitution geht das Integral über in:

$$F = \int_{t_0}^{t_1} \frac{9a^2t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}dt,$$

wo t_i aus $x_i = \frac{3at_i}{1+t_i^3}$ zu bestimmen ist. Substituiert man endlich darin $t^3 = z$, wodurch $3t^2dt = dz$ wird, so wird

$$F = \int \frac{3a^2(1-2z)}{(1+z)^3}dz = \frac{3a^2}{(1+z)^2}\left(2z+\frac{1}{2}\right) = \frac{3a^2}{(1+t^3)^2}\left(2t^3+\frac{1}{2}\right).$$

Für $t_0 = 0$, $t_1 = t$ wird

$$F = \frac{3a^2}{(1+t^3)^2}\left(2t^3+\frac{1}{2}\right) - \frac{3a^2}{2}.$$

Ist nun P der Punkt der Kurve, in welchem die Tangente der Y-Achse parallel läuft, so ist $t = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ zu setzen und in diesem Falle hat das Flächenstück OPA den Inhalt $\frac{a^2}{2}$. Ebenso grofs ist der Inhalt von $OP'A'$. Da nun die vom Blatte der Kurve eingeschlossene Fläche den Inhalt $\frac{3a^2}{2}$ hat und $OAS'A'O$ ein Quadrat ist, dessen Seite $\sqrt[3]{4}\,a$ ist, so ist der Inhalt des einem $\triangle$ ähnlichen Flächenstücks $PS'P' = (\sqrt[3]{16} - 1 - \frac{3}{2})a^2 = (2\sqrt[3]{2} - 2{,}5)a^2 = (2{,}5198 - 2{,}5)a^2 = 0{,}0198\ldots a^2$.

Bemerkenswert erscheint noch folgende Erscheinung. Zieht man nämlich die beiden Sehnen OP und OP', so wird die ganze Fläche $OAPSP'A'O$ durch diese und die zugehörigen Kurvenbogen in fünf gleiche Teile geteilt. Denn es ist $\triangle OAP = \frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{4}\,.\sqrt[3]{2}\,a^2 = a^2$; dieses Dreieck ist durch den Kurvenbogen OP halbiert, weil der eine Teil davon $\frac{a^2}{2}$ ist, folglich mufs der Kurvenabschnitt $\widehat{OP}$ auch $\frac{a^2}{2}$ sein. Nun beträgt der Inhalt des ganzen Blattes $\frac{3a^2}{2}$ und da die beiden Segmente je $\frac{a^2}{2}$ sind, so mufs auch der Sektor $POP'S = \frac{a^2}{2}$, d. h. die oben erwähnte Figur ist in der That in fünf gleiche Teile geteilt, deren jeder $= \frac{a^2}{2}$ ist.

§ 12.

Kubatur der Kurve.

Wenn die in § 9 behandelte Fläche um die X-Achse rotiert, so entsteht ein Körper, dessen Inhalt nach der Formel $V = \pi\int_{x_0}^{x_1} y^2dx$ berechnet werden kann.

Nach § 10 ist

$$\int y^2dx = \left\{\frac{x^2}{6} - \frac{bx}{9} + \frac{b^2}{27}l(3x+b)\right\}\cdot\left(b+\frac{b}{3}\right) - \frac{x^3}{9}, \text{ daher ist}$$

$$V = \pi\left[\frac{4b}{9}\left\{\frac{x^2}{2} - \frac{bx}{3} + \frac{b^2}{9}l(3x+b)\right\} - \frac{x^3}{9}\right]_{x_0}^{x_1}.$$

Für $x_0 = 0$ und $x_1 = x$ erhält man demnach:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$V = \frac{4b\pi}{9}\left\{\frac{x^2}{2} - \frac{bx}{3} + \frac{b^2}{9} l \frac{3x+b}{b}\right\} - \frac{\pi x^3}{9}.$$

Für $x = b$ erhält man das Volumen des durch die Rotation des Blattes der Kurve entstandenen Körpers, welches daher den Wert hat:

$$V = \frac{4\pi b^3}{9}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} l4\right\} - \frac{\pi b^3}{9} = \frac{\pi b^3}{27}\left\{\frac{4}{3} l4 - 1\right\} = \frac{a^3 \pi \sqrt{2}}{4}\left\{\frac{4}{3} l4 - 1\right\} = 0{,}942 \ldots a^3.$$

Analog erhält man für die Werte von x, die zwischen 0 und $-\frac{b}{3}$ liegen, das Volumen des durch die Rotation des Zweiges entstandenen Konoids.

§ 13.

Bestimmung des Schwerpunktes des Rotationskörpers.

Wenn V das Volumen des durch die Fläche entstandenen Rotationskörpers ist, so besteht, um die Entfernung des Schwerpunktes desselben vom Koordinatenanfang zu berechnen, die Beziehung:

$$V\xi = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 x\, dx.$$

Substituiert man darin für y^2 den durch die Kurvengleichung gegebenen Wert, so erhält man:

$$V\xi = \pi \int_{x_0}^{x_1} \frac{bx^3 - x^4}{b+3x} dx = \pi \int_{x_0}^{x_1} \frac{(b+3x)x^3}{b+3x} dx - 4\pi \int_{x_0}^{x_1} \frac{x^4}{b+3x} dx = \pi \int_{x_0}^{x_1} x^3 dx - 4\pi \int_{x_0}^{x_1} \frac{x^4 dx}{b+3x}.$$

Das erste Integral hat nun den Wert $\frac{x^4}{4}$; das zweite dagegen ist nach den vorigen Paragraphen:

$$\frac{x^4}{12} - \frac{b}{3}\left\{\frac{x^3}{9} - \frac{b}{3}\left[\frac{x^2}{6} - \frac{bx}{9} + \frac{b^2}{27} l(3x+b)\right]\right\}.$$

Daher wird:

$$V\xi = \pi\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{3} + \frac{4bx^3}{27} - \frac{4b^2x^2}{9\,.\,6} + \frac{4b^3x}{9\,.\,9} - \frac{4b^4}{9\,.\,27} l(3x+b)\right\}_{x_0}^{x_1}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left\{-\frac{x^4}{16} + \frac{bx^3}{9} - \frac{b^2x^2}{18} + \frac{b^3x}{27} - \frac{b^4}{81} l(3x+b)\right\}_{x_0}^{x_1}.$$

Für $x_0 = 0$, $x_1 = x$ wird

$$\xi = \frac{4\pi}{3V}\left\{-\frac{x^4}{16} + \frac{bx^3}{9} - \frac{x^2b^2}{81} + \frac{b^3x}{27} + \frac{b^4}{81} l \frac{b}{3x+b}\right\}.$$

Für $x = b$ erhält man

$$\xi = \frac{\pi b^4}{12\,.\,81\,V}(39 - 16l4) = \frac{0{,}0543\, b^4}{V} = \frac{0{,}0543\,.\,81\,.\,a^4}{4V}.$$

Da nun in diesem Falle $V = 0{,}942 a^3$ ist, so ist

$$\xi = \frac{0{,}0543\,.\,81}{4\,.\,0{,}942} a = 1{,}168\,.\,a.$$

Der Schwerpunkt also des durch das Kurvenblatt entstandenen Rotationskörpers ist um $1{,}168a$ vom Koordinatenanfang entfernt.

In gleicher Weise erhält man die Abscisse des Schwerpunktes von dem durch die Zweige der Kurve gebildeten Konoid.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$V = \ldots x^3 \ldots$

Für $x = b$ erhält man das Vol… es der Kurve entstandenen Körpers, welches daher den W…

$V = \frac{4\pi b^3}{9}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} l4\right\} - \ldots \frac{4}{3} l4 - 1\Big\} = 0{,}942 \ldots a^3.$

Analog erhält man für die We… liegen, das Volumen des durch die Rotation des Zweige…

Bestimmun… örpers.

Wenn V das Volume… Rotationskörpers ist, so besteht, um die Entfernung de… inatenanfang zu berechnen, die Beziehung:

Substituiert man darin für y^2 … enen Wert, so erhält man:

$V\xi = \pi \int_{x_0}^{x_1} \frac{bx^3 - x^4}{b + 3x} dx = \pi \int_{x_0}^{x_1} \ldots \int^{x_1} x^3 dx - 4\pi \int_{x_0}^{x_1} \frac{x^4 dx}{b + 3x}.$

Das erste Integral hat nun de… h den vorigen Paragraphen:

$\frac{x^4}{12} - \frac{b}{3} \ldots b)\Big]\Big\}.$

Daher wird:

$V\xi = \pi \left\{\frac{x^4}{4} - \ldots l(3x + b)\right\}_{x_0}^{x_1}$

$= \frac{4\pi}{3}\left\{ - \frac{x^4}{16} \ldots b)\right\}_{x_0}^{x_1}.$

Für $x_0 = 0$, $x_1 = x$ wird

$\xi = \frac{4\pi}{3V} \left\{ \ldots \frac{b}{3x + b}\right\}.$

Für $x = b$ erhält man

$\xi = \frac{\pi b^4}{12 \cdot 8} \ldots 81 \cdot a^4.$

Da nun in diesem Falle $V = \ldots$

Der Schwerpunkt also des du… tationskörpers ist um $1{,}168a$ vom Koordinatenanfang entfe…

In gleicher Weise e… punktes von dem durch die Zweige der Kurve gebildeten …

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 1.

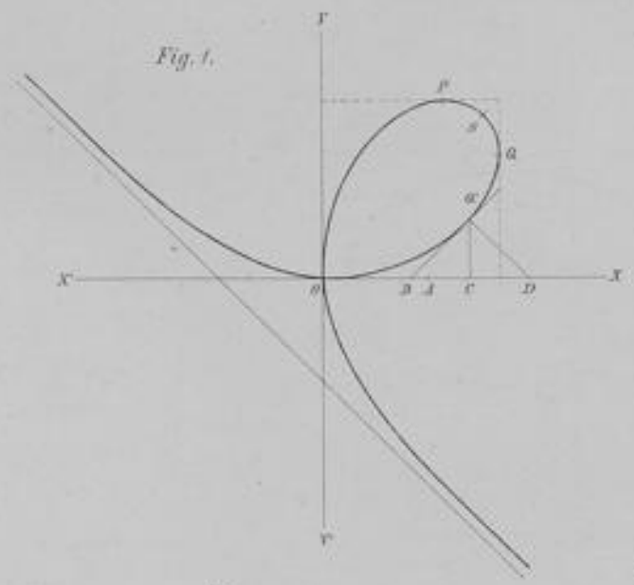


Fig. 2.

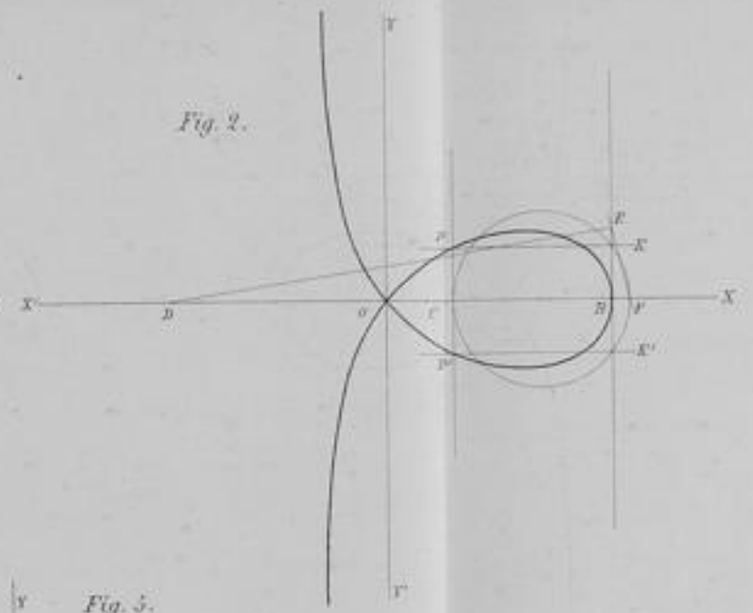


Fig. 3.

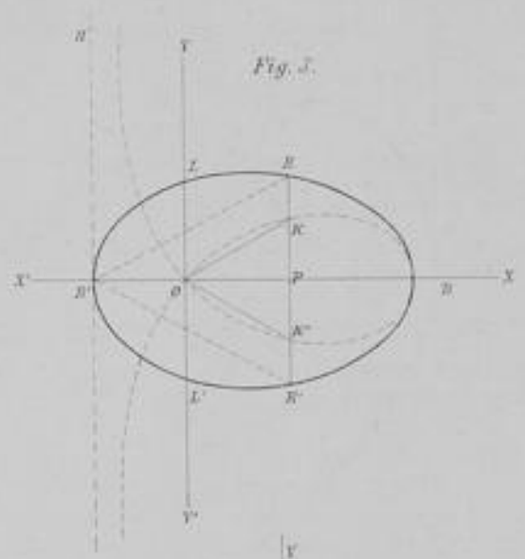


Fig. 4.

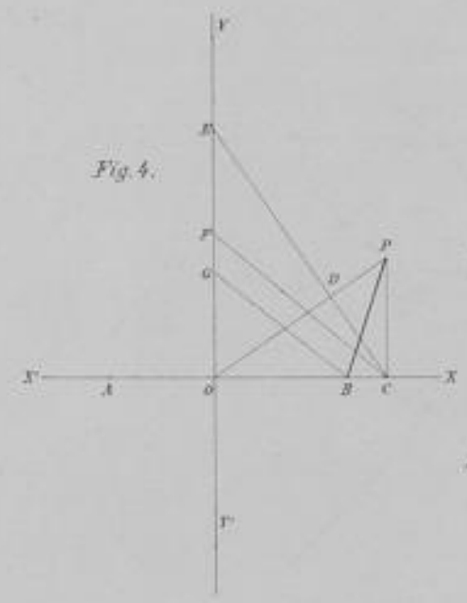


Fig. 5.

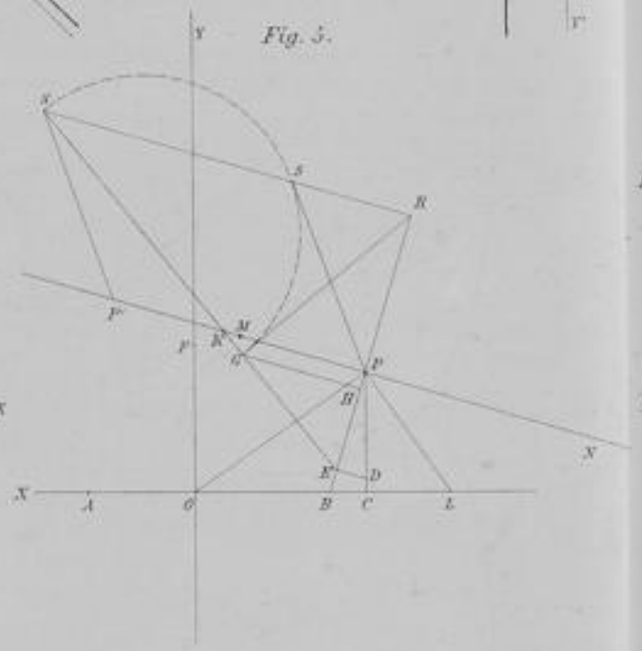


Fig. 6.

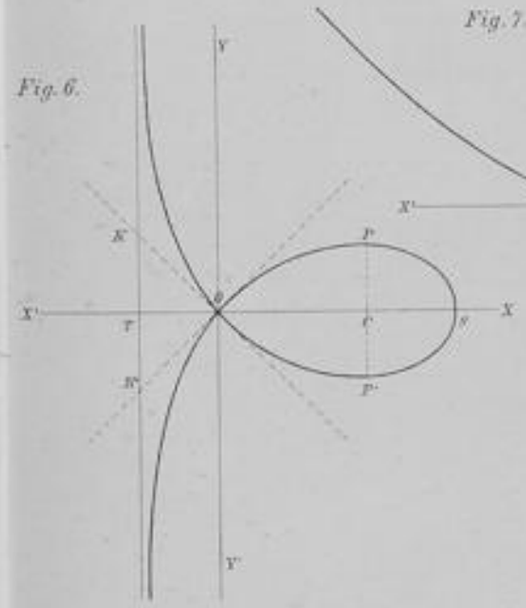
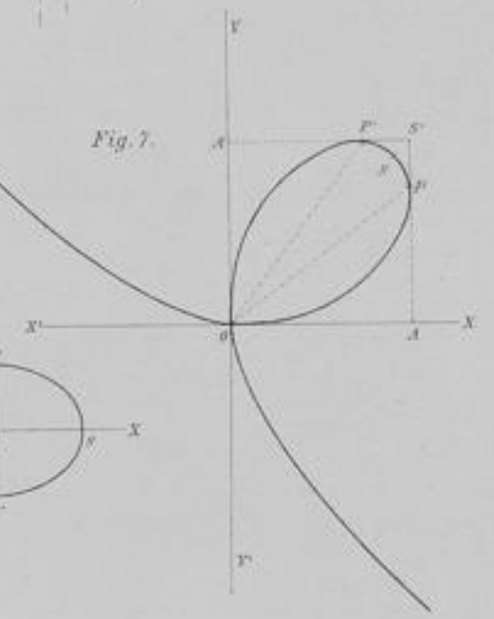


Fig. 7.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf