I. Einige trigonometrische Elementaraufgaben für Schüler.

Die folgenden Notizen sollen auf einige leicht zu behandelnde Aufgaben aufmerksam machen, die ich in den mir zu Gebote stehenden Sammlungen nicht gefunden.

1. $\operatorname{tg} \xi = \dfrac{a \sin \alpha}{1 + a \cos \alpha}$ logarithmisch zu machen.

   A. Man erhält $\sin \xi = a \sin (\alpha - \xi)$, daraus $(1 + a) \sin \xi =$ $2\, a \sin \dfrac{\alpha}{2} \cos \left(\dfrac{\alpha}{2} - \xi\right)$ u. s. w. und endlich $\operatorname{tg} \left(\dfrac{\alpha}{2} - \xi\right) = \dfrac{1 - a}{1 + a} \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$.

2. $\cot. \xi = \dfrac{a \cos \xi}{1 + a \sin \alpha}$. Es ergibt sich $\operatorname{tg} (\xi - \alpha) = \dfrac{a + 1}{a - 1} \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$.

3. $a \sin \xi = b \cos (\alpha \pm \xi)$. Man erhält $\cot \xi = \dfrac{a \pm b \sin \alpha}{b \cos \alpha}$.

4. $a \cos \xi = b \sin (\alpha \pm \xi)$. Die Endgleichung ist $\operatorname{tg} \xi = \dfrac{a - b \sin \alpha}{\pm b \cos \alpha}$.

5. $a \sin (\alpha \pm \xi) + b \sin (\beta \pm \xi) = c \sin \xi$.

   A. $\operatorname{tg} \xi = \dfrac{a \sin \alpha + b \sin \beta}{\pm a \cos \alpha \pm b \cos \beta + c}$.

6. $a \sin (\alpha \pm \xi) - b \sin (\beta \pm \xi) = c \sin \xi$.

   A. $\operatorname{tg} \xi = \dfrac{a \sin \alpha - b \sin \beta}{\pm a \cos \alpha \mp b \cos \beta - c}$.

7. Ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen aus c und h.

   A. $c = 125$, $h = 41{,}184$, $\cos (\alpha - \beta) = \sin 2\, \beta = \dfrac{2\, h}{c}$.

   $d = 69^\circ\, 23'\, 25''01$, $a = 117$, $b = 44$, $F = 2574$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

8. Ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen aus der Höhe und der Differenz der Höhenabschnitte der Hypotenuse. Beisp. $h = 6{,}72$, $d = 21{,}08$.

A. Man erhält $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \cot 2\beta = \frac{d}{2h}$, $\alpha = 73^0\ 44'\ 23''258$, $a = 24$, $b = 7$, $c = 35$.

9. Ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen aus dem Umfange $2s$ und der Höhe h. Beisp. $2s = 340$, $h = 45$.

A. Man erhält $c = \frac{2h}{\cos(\alpha - \beta)}$, ebenso

$$\frac{2h}{\cos(\alpha - \beta)} : 2s = {}^1/_2 \sqrt{2} : {}^1/_2 \sqrt{2} + \cos {}^1/_2 (\alpha - \beta).$$

Indem man nun $(\alpha - \beta)$ in $2\frac{\alpha - \beta}{2}$ auflöst, erhält man durch eine quadratische Gleichung: $\cos {}^1/_2 (\alpha - \beta) = \frac{s + h}{s\sqrt{2}}$

$a = 142,441$, $b = 47,429$, $c = 150,130$, $F = 3377,921$.

10. Ein gleichschenkliges Dreieck aus dem Basiswinkel β und der Summe der 2 Höhen s zu berechnen.

A. $a = \frac{s \cos\beta}{\sin {}^3/_2 \beta \cos {}^1/_2 \beta}$, $b = \frac{s}{2 \sin {}^3/_2 \beta \cos {}^1/_2 \beta}$, $h = \frac{s \sin\beta}{2 \sin {}^3/_2 \beta \cos {}^1/_2 \beta}$,

$h_1 = \frac{s \sin 2\beta}{2 \sin {}^3/_2 \beta \cos {}^1/_2 \beta}$, $J = \frac{s^2 \sin 2\beta}{2 \sin^2 {}^3/_2 \beta \cos^2 {}^1/_2 \beta}$

11. Ein Dreieck aus einem Winkel α, der Differenz der einschliessenden Seiten $(b - c = d)$ und der Summe der dazu gehörigen Höhen $m = h_1 + h_2$ aufzulösen. $\alpha = 64^0\ 19'\ 22''$, $d = 37{,}2$ $m = 56{,}7$.

A. $\operatorname{tg} {}^1/_2 (\beta - \gamma) = \frac{2 d \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{m}$, $a = 45{,}969837$, $b = 50{,}056337$.

$c = 12{,}856337$, $\beta = 101^0\ 4'\ 41''8$, $h_1 = 11{,}586764$, $h_2 = 45{,}113231$.

Ist $\alpha = 27^0\ 13'\ 24''$, $d = 10$, $m = 21$, so wird $a = 14{,}531886$, $b = 27{,}952821$, $\beta = 118^0\ 21'\ 50''\ 23$, $h_1 = 8{,}2127$, $h_2 = 12{,}7873$, $J = 114{,}78404$.

12. Ein Dreieck aufzulösen aus einer Seite a, dem Gegenwinkel α und der Summe der zu den andern Seiten gehörigen Höhen $h_1 + h_2 = m$. $a = 124$, $\alpha = 63^0\ 13'\ 22''$, $m = 200$.

A. $\cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{m}{2 a \cos \frac{\alpha}{2}}$, $b = 135{,}40684$, $c = 88{,}616265$, $h_1 = 120{,}88654$,

$h_2 = 79{,}11348$, $J = 5356{,}26568$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

13. Ein Dreieck aufzulösen aus einer Seite a, der zugehörigen Höhe h und dem Verhältniss der andern Seiten $b : c = m : n$. $a = 8$, $h = 7$, $m : n = 3 : 2$.

A. Es ergeben sich leicht die Gleichungen: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a\, m \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{(m + n)\, b}$,

$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a\, m \sin \frac{\beta - \gamma}{2}}{(m - n)\, b}$, und daraus mittelst $a\, h = b\, c \sin \alpha$:

$$\sin (\beta - \gamma) = \frac{(m^2 - n^2)\, h}{m\, n\, a},\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{m - n}{m + n} \cot \frac{\beta - \gamma}{2}$$

$\beta - \gamma = 46^\circ\ 48'\ 59''\ 63$, $\beta' - \gamma^1 = 113^\circ\ 11'\ 0''\ 37$, $b = 10{,}503083$, $c = 7{,}002055$, $b' = 22{,}107137$, $c' = 14{,}738092$.

14. Ein Dreieck aufzulösen aus einem Winkel α, der Differenz der Höhenabschnitte auf der Gegenseite $a_2 - a_1 = d$ und der Summe der beiden andern Seiten $b + c = s$. $\alpha = 41^\circ\ 18'\ 51''$, $s = 20$, $d = 1$.

A. $\sin \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{d \cos \frac{\alpha}{2}}{s}$, $a = \frac{s \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}$, $\beta = 72^\circ\ 1'\ 28''\ 21$, $a =$ $7{,}0632145$, $b = 10{,}1765804$, $c = 9{,}8234196$.

15. Ein Dreieck aufzulösen aus der Grundlinie a, der Höhe h und der Differenz der Basiswinkel $\beta - \gamma = \delta$. $a = 6$, $h = 5$, $\delta = 15^\circ\ 18'\ 12''$.

A. Berechnet man φ aus der Gleichung $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{2\, h}$, so wird die Endgleichung: $\sin (\beta + \gamma + \varphi) = \sin \varphi \cos \delta$

$\varphi = 30^\circ\ 57'\ 49'', 54$, $b = 6{,}34623$, $c = 5{,}42032$.

16. Ein Dreieck aufzulösen aus der Höhe h, der Differenz der Höhenabschnitte auf der Grundlinie d und der Differenz δ der Basiswinkel. $h = 24$, $d = 7$, $\delta = 14^\circ\ 3'$.

A. Mittelst $\operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{2\, h}$ findet man: $\cos (\beta + \gamma) = \frac{\sin (\varphi - \delta)}{\sin \varphi}$,

$\varphi = 8^\circ\ 17'\ 49''72$, $a_1 = 13{,}8713$, $a_2 = 6{,}8713$ etc.

17. Ein Dreieck aufzulösen aus dem Winkel an der Spitze α und den Höhenabschnitten der Grundlinie. $\alpha = 42^\circ\ 13'\ 18''$, $a_1 = 43$, $a_2 = 27$.

A. $\sin (\beta - \gamma) = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \sin \alpha$, $\beta - \gamma = 8^\circ\ 50'\ 8''23$, $(\beta' - \gamma')$ hier unmöglich, $J = 3151, 243$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

18. Ein gleichschenkliges Dreieck aufzulösen aus der zum Schenkel gehörigen Höhe und Mittellinie. $h_1 = 12$, $t_1 = 15$.

A. $\cos\alpha = \frac{h_1^{\,2} \pm \sqrt{(t_1 + h_1)(t_1 - h_1)(2t_1 + h_1)(2t_1 - h_1)}}{2t_1^{\,2}}$, $\alpha =$ 29° 33′ 6″ 89 etc.

19. Ein Dreieck aufzulösen aus einer Seite, der Summe der beiden andern und dem Radius des eingeschriehenen Kreises. $\alpha = 40$, $b + c = s = 128$, $\varrho = 11$.

A. $\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{s-a}{2\varrho}$, $\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{s}{a}\sin\frac{\alpha}{2}$, $\alpha = 28^\circ\ 4'\ 22''96$.

20. Ein Dreieck aufzulösen aus der Grundlinie, Höhe und Summe der andern Seiten. $a = 8$, $h = 7$, $b + c = 18$.

A. Mittelst $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ gelangt man zu $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2ah}{(s+a)(s-a)}$ und endlich zu $\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{s}{a}\sin\frac{\alpha}{2}$. $\alpha = 46^\circ\ 36'\ 35'',26$, $b =$ 10,984552, $c = 7{,}015441$.

Aehnliche Gleichungen erhält man, wenn $b \pm c$, α, h gegeben sind.

21. Auf einer Seite einer geraden Linie L sind 2 Punkte A und B durch die Lothe auf L $AA^1 = p$, $BB^1 = q$ und durch $AB = a$ bestimmt, auf L den Punkt X zu suchen, so dass AX und BX mit L einen gleichen Winkel φ bilden. $p = 12,3$, $q =$ 5, 7, $a = 21$.

A. Bildet AB mit L den Winkel α, so ist $\sin\alpha = \frac{p-q}{a}$ oder $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p-q}{\sqrt{(a+p-q)(a-p+q)}}$ und $\operatorname{tg}\varphi = \frac{p+q}{p-q}\operatorname{tg}\alpha$. $\alpha = 71^\circ\ 40'\ 56''\ 29$. $\varphi = 83^\circ\ 4'\ 43''\ 62$.

22. Wenn alles bleibt wie in voriger Aufgabe, und nur die beiden Winkel statt gleich zu sein gegebener Differenz δ sein sollen, so sei der eine λ, der andere $\lambda + \delta$. Man gelangt dann zu der Gleichung: $\sin(2\lambda - \delta) + \frac{a\cos\alpha}{p+p}\cos(2\lambda - \delta) = \frac{p-q}{p+q}\sin\delta + \frac{e\cos\alpha}{p+q}\cos\delta$. Bestimmt man nun den Hülfswinkel φ durch die Gleichung $\operatorname{tg}\varphi = \frac{e\cos\alpha}{p+q}$, so findet man endlich $\sin(2\lambda - \delta + \varphi) = \frac{p-q}{p+q}\sin\delta\cos\varphi + \sin\varphi.\ \cos\delta = \sin(\delta + \varphi) - \frac{{}^2q}{p+q}\sin\delta\cos\varphi$. Als Controlle: $\sin(\lambda + \varphi)\cos(\lambda - \delta) = -\frac{q}{p+q}\sin\delta\cos\varphi$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beispiel. $p = 12$, $q = 7$, $\delta = 20^0$, $\alpha = 26^0\ 18^1$. Es ergiebt sich $a = 10{,}738$, $\lambda = 71^0\ 24'$.

23. Durch die Spitze C eines Dreiecks ABC geht eine Gerade, welche mit AC und BC resp. die Winkel δ und ε bildet; dieselbe convergirt gegen AB unter dem $< \xi$. Ausserdem kennt man $AB = c$; man soll das Dreieck auflösen. $c = 124$, $\delta = 47^0\ 12'\ 4''$, $\varepsilon = 69^0\ 18'\ 23''$, $\xi = 23^0\ 48'\ 3''$.

A. Durch einfache Elimination findet man $AC = \frac{c \sin(\varepsilon + \xi)}{\sin(\delta + \varepsilon)}$,

$BC = \frac{c \sin(\delta - \xi)}{\sin(\delta + \varepsilon)}$, $AC = 138{,}36293$, $BC = 55{,}03209$ etc.

24. Ein Dreieck aufzulösen aus dem Umfange $2s$, dem Inhalte f und einem Winkel α.

A. $\varrho = \frac{f}{s}$, daraus:

$$\cos\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{(s + \varrho \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}) \sin\frac{\alpha}{2}}{s - \varrho \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{(s^2 + f \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}) \sin\frac{\alpha}{2}}{s^2 - f \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

25. Ein Dreieck aufzulösen aus einer Seite c, der Differenz der andern ($d = a - b$) und der Summe der darauf gefällten Höhen ($s = h + h_1$).

A. Man erhält $\sin(\alpha - \beta) = \frac{d\,s}{c^2}$, $\sin\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{s}{2\,c \cos\frac{\alpha - \beta}{2}}$.

26. Zu einem Dreiecke ABC ist der Inhalt f gegeben, und es sind die beiden Lothe, welche man von einem gewissen Punkte der Seite a auf b und c fällt, p und q; man soll daraus das Dreieck auflösen.

A. Man findet $\cot\gamma = \frac{f \sin\alpha - p^2 \cos\alpha\,(\pm)\,p\,q \pm \sqrt{f \sin\alpha\,(f \sin\alpha\,(\pm)\,2\,p\,q)}}{p^2 \sin\alpha}$

wo die obern Zeichen gelten, wenn die Perpendikel von einem Punkte der Verlängerung von a ausgehen.

27. Ein Viereck aus den Seiten und einem Winkel aufzulösen.

A. Setzt man $a + b + c + d = 2s$, also $a + b + c - d = 2s - 2d$, u. s. w., so ergibt sich:

$$J = \frac{1}{2}\,a\,b \sin\alpha + \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)\,s - d) - a\,b\,(s - a)(s - b)\cos^2\frac{\alpha}{2} - a\,b\,(s - c)(s - d)\sin^2\frac{\alpha}{2} + a^2\,d^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wird nun $\sin^2 \varphi = \frac{a\,b}{(s-a)\,(s-b)} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, $\sin^2 \psi = \frac{a\,b}{(s-c)\,(s-d)} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ gesetzt, so erhält man zuletzt: $J = \cos(\varphi - \psi) \sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}$.

II. Beitrag zur Reciprocität.

Bekanntlich dreht sich die Polare eines Punktes, der auf einer Geraden sich bewegt, um einen Punkt, den Pol jener Geraden. Wie hängt die Grösse dieser Drehung von der geradlinigen Bewegung des Poles ab? Diese Frage wollen wir analytisch beantworten.

Das erste ebene System sei das der xy; in demselben nehme man auf einer Geraden L die Punkte P_1, P_2, P_3, so dass $P_1 P_2 : P_1 P_3 = m : n$, so ist zunächst:

1. $y_3 = \frac{(m-n)\,y_1 + n\,y_2}{m}$, $x_3 = \frac{(m-n)\,x_1 + n\,x_2}{m}$.

Sind nun im andern ebenen Systeme der t u die Gleichungen der zugehörigen Polaren:

2. $L_1\,u + M_1\,t + N_1 = o$, $L_2\,u + M_2\,t + N_2 = o$ etc.,
3. $(a y_1 + b x_1 + c)\,u + (a' y_1 + b' x_1 + c')\,t + (a'' y_1 + b'' x_1 + c'') = o$,

u. s. w., so ist nach 1 die Gleichung der Polare von P_3:

4. $\{(m-n)\,(a y_1 + b x_1 + c) + n\,(a y_2 + b x_2 + c)\}\,u$
$+ \{(m-n)\,(a' y_1 + b' y_1 + c') + n\,(a' y_2 + b' x_2 + c')\}\,t$
$+ \{(m-n)\,(a'' y_1 + b'' y_1 + c'') + n\,(a'' y_2 + b'' x_2 + c'')\} = o.$

Es folgt ebenso, dass:

5. $L_3 = (m-n)\,L_1 + n\,L_2$, u. s. w.

Legen wir nun ein rechtwinkliges System zu Grunde und stellen die Gleichungen der Polaren unter der Form $u = A_1\,t + B_1$, $u = A_2\,t + B_2$, $u = A_3\,t + B_3$ dar, so dass:

6. $A_1 = -\frac{M_1}{L_1}$, $B_1 = -\frac{N_1}{L_1}$, also auch:

$M_1 = -A_1\,L_1$, $N_1 = -B_1\,L_1$,

und nennen die Polaren R_1, R_2, R_3, so ergeben sich die Formeln:

$$\sin(R_1, R_2)^2 = \frac{(A_1 - A_2)^2}{(1 + A_1^2)\,(1 + A_2^2)}, \quad \sin(R_1, R_3)^2 = \frac{(A_1 - A_3)^2}{(1 + A_1^2)\,(1 + A_3^2)}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nun ist $A_3 = -\frac{(m-n)\ M_1 + n\,M_2}{(m-n)\ L_1 + n\,L_2}$ etc.

Daraus ergibt sich bald:

7. $A_1 - A_3 = \frac{n\,L_2\ (A_1 - A_2)}{\{(m-n)\ L + n\,L_2\}}$, und ebenso:

$$1 + A_3{}^2 = \frac{(m-n)^2 L_1{}^2 (1 + A_1{}^2) + n^2 L_2{}^2 (1 + A_2{}^2) + 2\,(m-n)\,n\,L_1\,L_2\,(1 + A_1\,A_2)}{\{(m-n)\ L_1 + n\,L_2\}^2}.$$

Hieraus:

8. $\sin^2 (R_1, R_3) =$

$$\frac{n^2\,L_2{}^2\,(A_1 - A_2)^2}{(1 + A_1{}^2)\,\{(m-n)^2 L_1{}^2 (1 + A_1{}^2) + n^2 L_2{}^2 (1 + A_2{}^2) + 2\,(m-n)\,L_1\,L_2\,(1 + A_1\,A_2)\}}.$$

Ebenso erhält man:

$$A_2 - A_3 = -\frac{(m-n)\ L_1\ (A_1 - A_2)}{(m-n)\ L_1 + n\ L_2}, \text{ und daraus:}$$

$\sin^2 (R_2, R_3) =$

$$\frac{(m-n)^2\,L_1{}^2\,(A_1 - A_2)^2}{(1 + A_2{}^2)\,\{(m-n)^2 L_1{}^2 (1 + A_1{}^2) + n^2 L_2{}^2 (1 + A_2{}^2) + 2\,(m-n)\,n\,L_1\,L_2\,(1 + A_1\,A_2)\}}.$$

Hierdurch findet man:

$$\sin^2 (R_1, R_3)^2 : \sin^2 (R_2, R_3) = \frac{n^2\,L_2{}^2}{1 + A_1{}^2} : \frac{(m-n)^2\ L_1{}^2}{1 + A_2{}^2}.$$

Führt man für A_1 und A_2 die ursprünglichen Ausdrücke wieder ein, so findet sich:

9. $\sin (R_1, R_3)^2 : \sin R_2, R_3)^2 = \frac{n^2}{L_1{}^2 + L\,M_1{}^2} : \frac{(m-n)^2}{L_2{}^2 + M_2{}^2}$,

oder wenn man die ursprünglichen Constanten der Reciprocität einführt und zugleich radicirt:

10. $\sin (R_1, R_3) : \sin (R_2, R_3) =$

$$\frac{n}{\sqrt{(a y_1 + b x_1 + c)^2 + (a' y_1 + b' x_1 + c')^2}} : \frac{-(m-n)}{\sqrt{(a y_2 + b x_2 + c)^2 + (a' y_2 + b' y_2 + c')^2}}$$

Nimmt man nun auf der Geraden einen 4ten Punkt P_4, so dass $P_1\ P_2 : P_1\ P_4 = p : q$, so wird wieder:

$\sin (R_1, R_4) : \sin (R_2, R_4) =$

$$\frac{q}{\sqrt{(a y_1 + b y_1 + c)^2 + (a' y_1 + b' x_1 + c')^2}} : \frac{-(p-q)}{\sqrt{(a y_2 + b x_2 + c)^2 + (a' y_2 + b' x_2 + c')^2}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{\sin(R_1, R_3)}{\sin(R_2, R_3)} = \frac{n}{-(m-n)},$$

$$\frac{\sin(R_1, R_4)}{\sin(R_2, R_4)} = \frac{q}{-(p-q)}.$$

Daraus entsteht:

$$\frac{\sin(R_1, R_3)}{\sin(R_2, R_3)} : \frac{\sin(R_1, R_4)}{\sin(R_2, R_4)} = \frac{n}{q} : \frac{m-n}{p-q}.$$

Hält man damit zusammen, dass

$$\frac{P_1\ P_3}{P_2\ P_3} = \frac{n}{-(m-n)}, \quad \frac{P_1\ P_4}{P_2\ P_4} = \frac{q}{-(p-q)}, \text{ also}$$

$$\frac{P_1\ P_3}{P_2\ P_3} : \frac{P_1\ P_4}{P_2\ P_4} = \frac{n}{q} : \frac{m-n}{p-q},$$

so ergibt sich die Gleichung der Doppelverhältnisse:

$$\frac{\sin(R_1, R_3)}{\sin(R_2, R_3)} : \frac{\sin(R_1, R_4)}{\sin(R_2, R_4)} = \frac{P_1\ P_3}{P_2\ P_3} : \frac{P_1\ P_4}{P_2\ P_4},$$

welche sich so aussprechen lässt:

Nimmt man in dem einen 2er reciproken Systeme auf einer Geraden 4 Punkte an, so ist das Doppelverhältniss aus 4 dadurch bestimmten Entfernungen, in welchen aber nur je 2 gleichen Endpunkt haben dürfen, im andern Systeme gleich demjenigen aus den Sinussen der von den bezüglichen Polaren eingeschlossenen Winkel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf