Diesem gegenüber weist die vorliegende Abhandlung eine Definition der gemeinen Logarithmen auf, aus welcher sich durch Anwendung von rein elementaren Mitteln zunächst als „goldene“ Lösung der oben erwähnten Aufgabe die Logarithmen selbst, sodann deren Eigenschaften, wodurch sie brauchbar werden, und endlich auch die Hauptregeln für den Gebrauch der Logarithmentafel ableiten lassen.

§ 1. **Definition.**

I. Die gemeinen Logarithmen sind mit Ausnahme desjenigen von 1, welcher gleich Null ist, abgekürzte Dezimalbrüche von der Eigenschaft, dafs

$$\frac{z \cdot 0{,}86\ \ldots.}{2 \cdot (a+z) - z} < \Lambda \underline{a+z} - \Lambda \underline{a} < \frac{z \cdot 0{,}86\ \ldots.}{2 \cdot (a+z) - z} + \frac{0{,}036\ \ldots.}{(a:z)^3}$$

ist, wofern a und z positive Zahlen sind und z kleiner als a ist.

Bemerkungen: 1) 0,86 .... bedeutet den endlosen unperiodischen Dezimalbruch

0,86 858 89638 06503 65530 22578 37833 21016 45887 94011 60733 31322 .....

2) 0,036 .... soll gleich $\frac{1}{24} \cdot 0{,}86\ \ldots.$ sein.

(Vergleiche: Breuer, Das Notwendigste über die natürlichen Logarithmen. Leipzig, 1895.)

II. Ein Beispiel der Berechnung eines Logarithmus nach Nr. I.

Ersetzt man a durch 1 und z durch 0,024, so wird

$$\frac{z \cdot 0{,}86\ \ldots.}{2 \cdot (a+z) - z} = \frac{0{,}024 \cdot 0{,}86\ \ldots.}{2{,}024} = \frac{3 \cdot 0{,}86\ \ldots.}{253} = 0{,}01\,029\,9473\ \ldots.,$$

$$\frac{0{,}036\ \ldots.}{(a:z)^3} = \frac{0{,}036\ \ldots.}{(1000:24)^3} = 0{,}00\,000\,05;$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und daher

$$0{,}01\,029\,9473 < \Lambda\underline{1{,}024} - \Lambda\underline{1} < 0{,}\,01\,029\,997\ \ldots.$$

Folglich ist $\Lambda\underline{1{,}024} = 0{,}01\,030$ zu setzen, da $\Lambda\underline{1} = 0$ ist.

III. Wahrer Wert und Näherungswerte.

1) Durch die bei I. gegebene Formel ist der wahre Wert von „$\Lambda\underline{a+z} - \Lambda\underline{a}$“ zwischen zwei (einen kleinern und einen gröfsern) Näherungswerte gestellt, mit denen er, soweit diese in Dezimalbruchform sich decken, übereinstimmen mufs. Er kann daher unter Umständen bis auf 5 und mehr Bruchstellen genau erkannt werden. Denn die beiden Näherungswerte, deren Unterschied nur $0{,}036\ldots : \left(\frac{a}{z}\right)^3$ beträgt, werden um so weniger verschieden sein und daher um so weiter sich decken, je kleiner z gegen a ist.

2) In manchen Fällen ist der wahre Wert auch dann noch hinreichend genau zu erkennen, wenn man statt des kleinern Näherungswertes einen noch kleinern oder statt des gröfsern einen noch gröfsern einführt. (cf. § 2, I a und § 10, A.)

3) Liegen zwei Zahlenausdrücke zwischen denselben beiden Näherungswerten, die einen wahren Wert hinreichend genau erkennen lassen, so sind sie als gleichwertig zu betrachten. (cf. § 4, III.)

§ 2. Nächste Folgerungen aus § 1, I.

A. Vorarbeit: (Aufgabe für O. III.)

Was entsteht 1) aus $\frac{z \cdot 0{,}86\ \ldots.}{2 \cdot (a+z) - z}$, 2) aus $a + z$ und 3) aus $\frac{0{,}036\ \ldots}{(a:z)^3}$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

α) wenn man z durch $\frac{1}{100}$ und a durch $\frac{100}{100}$,

β) „ „ „ „ $\frac{1}{100}$ „ „ „ $\frac{101}{100}$,

γ) „ „ „ „ $\frac{1}{100}$ „ „ „ $\frac{100+g-1}{100}$,

δ) „ „ „ „ $\frac{1}{1000}$ „ „ „ $\frac{1000+g-1}{1000}$,

ε) „ „ „ „ $\frac{b}{1000}$ „ „ „ $b \cdot \frac{1000+g-1}{1000}$,

ζ) „ „ „ „ $\frac{b}{10^{\alpha}}$ „ „ „ $b \cdot \frac{10^{\alpha}+g-1}{10^{\alpha}}$

ersetzt?

B. Folgerungen:

Sind g und α positive ganze Zahlen und ist $b > o$, so sind sämtliche in der vorstehenden Aufgabe erwähnte Substitutionen solche, dafs die für z und a gewählten Werte positiv sind und jedesmal derjenige des a gröfser als der des z ist. Alle diese Substitutionen sind alsdann bei der in § 1 bei No. I. gegebenen Formel zulässig.

Demnach ergeben sich unter andern folgende neue Formeln:

I. Für jeden ganzzahligen positiven Wert des g ist $\bigwedge\frac{100+g}{100} - \bigwedge\frac{100+g-1}{100}$ zwar gröfser als $\frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(100+g)-1}$, aber kleiner als $\frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(100+g)-1} + \frac{0{,}036\ldots.}{(100+g-1)^3}$, und daher

Ia. auch kleiner als $\frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(100+g)-1} + \frac{0{,}036\ldots.}{100^3}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Für jedes ganzzahlige positive g und für alle positive Werte des b, mögen diese gebrochen sein oder nicht, ist sowohl

$$\bigwedge\frac{1000+g}{1000} - \bigwedge\frac{1000+g-1}{1000} \quad \text{als auch} \quad \bigwedge b\cdot\frac{1000+g}{1000} - \bigwedge b\cdot\frac{1000+g-1}{1000}$$

zwar gröfser als $\frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(1000+g)-1}$, aber kleiner als $\frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(1000+g)-1} + \frac{0{,}036\ldots}{(1000+g-1)^3}$, und daher auch kleiner als $\frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(1000+g)-1} + \frac{0{,}036\ldots}{1000^3}$.

III. Für alle ganzzahlige positive Werte von g und α und für jedes positive b ist

$$\frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(10^\alpha+g)-1} < \bigwedge b\cdot\frac{10^\alpha+g}{10^\alpha} - \bigwedge b\cdot\frac{10^\alpha+g-1}{10^\alpha} < \frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(10^\alpha+g)-1} + \frac{0{,}036\ldots}{10^{3\alpha}}.$$

C. Weitere Folgerungen aus § 1, I.

Wenn $0{,}(\omega)$ einen positiven echten Dezimalbruch bedeutet, während b und G beliebige positive Zahlen sind, so darf in der Formel § 1, I. auch z durch $b\cdot\frac{0{,}(\omega)}{1000}$ und a durch $b\cdot\left(1+\frac{G}{1000}\right)$ ersetzt werden. Durch diese Substitutionen ergiebt sich aber, dafs

$$\bigwedge b\cdot\left(1+\frac{G}{1000}\right)+b\cdot\frac{0{,}(\omega)}{1000} - \bigwedge b\cdot\left(1+\frac{G}{1000}\right)$$

zwar gröfser als $\dfrac{b\cdot\frac{0{,}(\omega)}{1000}\cdot 0{,}86\ldots.}{2\cdot\left[b\cdot\left(1+\frac{G}{1000}\right)+b\cdot\frac{0{,}(\omega)}{1000}\right]-b\cdot\frac{0{,}(\omega)}{1000}}$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

aber kleiner als $\frac{0,(\omega)\cdot 0,86\ldots.}{2\cdot[1000+G+0,(\omega)]-0,(\omega)}+\frac{0,036\ldots}{\left(\left[b\cdot\left(1+\frac{G}{1000}\right)\right]:\left[b\cdot\frac{0,(\omega)}{1000}\right]\right)^3}$,

und demnach auch kleiner als

$$\frac{0,(\omega)\cdot 0,86\ldots.}{2\cdot[1000+G+0,(\omega)]-0,(\omega)}+\frac{0,036\ldots}{1000^3},$$

und darum bis auf mindestens neun Dezimalbruchstellen gleich $\frac{0,(\omega)\cdot 0,86\ldots.}{2\cdot[1000+G+0,(\omega)]-0,(\omega)}$ ist. Da alles dieses auch dann gilt, wenn $b=1$ gesetzt wird, so ergiebt sich der folgende Satz:

IV. Wenn $o,(\omega)$ einen positiven echten Dezimalbruch bedeutet, während b und G beliebige positive Zahlen sind, so ist bis auf mindestens neun Dezimalbruchstellen

$$\bigwedge\underline{b\cdot\left(1+\frac{G}{1000}+\frac{o,(\omega)}{1000}\right)}-\bigwedge\underline{b\cdot\left(1+\frac{G}{1000}\right)}=\bigwedge\underline{1+\frac{G}{1000}+\frac{o,(\omega)}{1000}}-\bigwedge\underline{1+\frac{G}{1000}}.$$

D. Sowohl $\bigwedge\underline{b+b\cdot\frac{o,(\omega)}{1000}}-\Lambda b$ als auch $\bigwedge\underline{1+\frac{o,(\omega)}{1000}}-\Lambda 1$ ist zwar gröfser als $\frac{o,(\omega)\cdot 0,86\ldots.}{2\cdot(1000+o,(\omega))-o,(\omega)}$, aber kleiner als $\frac{o,(\omega)\cdot 0,86\ldots.}{2\cdot(1000+o,(\omega))-o,(\omega)}+\frac{0,036\ldots.}{[1000:o,(\omega)]^3}$, und darum bis auf mindestens neun Dezimalbruchstellen eben so grofs wie $\frac{o,(\omega)\cdot 0,86\ldots.}{2\cdot(1000+o,(\omega))-o,(\omega)}$. Hieraus folgt, dafs unter den vorher bei Nr. IV. angegebenen Bedingungen auch

V. $\bigwedge\underline{b\cdot\left(1+\frac{o,(\omega)}{1000}\right)}=\Lambda b+\bigwedge\underline{1+\frac{o,(\omega)}{1000}}$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

E. Bedeutet v eine vierzifferige positive ganze Zahl, so liegt $\Lambda \underline{v+1} - \Lambda v$ zwischen zwei Näherungswerten, deren Unterschied nur $0{,}036\ldots : v^3$, also weniger als $0{,}04 : 1000^3$ beträgt. Daher ergiebt sich:

VI. Wenn v eine positive vierzifferige ganze Zahl bedeutet, ist $\Lambda \underline{v+1} - \Lambda v$ bis auf wenigstens neun Dezimalbruchstellen gleich dem kleinern Näherungswerte $\frac{0{,}86\ldots}{2\cdot(v+1)-1}$.

§ 3. Folgerungen aus § 2, Nr. I.

Ersetzt man g durch 1, durch 2, durch 3 u. s. w. und endlich durch die positive ganze Zahl G, so erhält man:

$$1)\quad \frac{0{,}86\ldots}{201} < \Lambda \underline{\tfrac{101}{100}} - \Lambda \underline{1} < \frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}036\ldots}{100^3},$$

$$2)\quad \frac{0{,}86\ldots}{203} < \Lambda \underline{\tfrac{102}{100}} - \Lambda \underline{\tfrac{101}{100}} < \frac{0{,}86\ldots}{203} + \frac{0{,}036\ldots}{101^3},$$

$$3)\quad \frac{0{,}86\ldots}{205} < \Lambda \underline{\tfrac{103}{100}} - \Lambda \underline{\tfrac{102}{100}} < \frac{0{,}86\ldots}{205} + \frac{0{,}036\ldots}{102^3},$$

u. s. w. und endlich

$$G)\quad \frac{0{,}86\ldots}{2\cdot(100+G)-1} < \Lambda \underline{\frac{100+G}{100}} - \Lambda \underline{\frac{100+G-1}{100}} < \frac{0{,}86\ldots}{2\cdot(100+G)-1} + \frac{0{,}036\ldots}{(100+G-1)^3}.$$

Weil nun $\Lambda \underline{1} = o$ ist, ergiebt sich hieraus zunächst:

I. $\frac{0{,}86\ldots}{201} < \Lambda \underline{1{,}01} < \frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}036\ldots}{100^3}$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sodann weiter durch Addition:

II. (aus Nr. 1 und 2)

$$\frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}86\ldots}{203} < \Lambda\underline{1{,}02} < \frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}86\ldots}{203} + \frac{0{,}036\ldots}{100^2} + \frac{0{,}036\ldots}{101^2};$$

III. (aus Nr. 1, 2 und 3)

$$\frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}86\ldots}{203} + \frac{0{,}86\ldots}{205} < \Lambda\underline{1{,}03} < \frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}86\ldots}{203} + \frac{0{,}86\ldots}{205} + \frac{0{,}036\ldots}{100^2} + \frac{0{,}036\ldots}{101^2} + \frac{0{,}036\ldots}{102^2};$$

u. s. w. und endlich allgemein:

G_1) Für jeden ganzzahligen positiven Wert des G ist

$$\frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}86\ldots}{203} + \frac{0{,}86\ldots}{205} + \frac{0{,}86\ldots}{207} + \cdots\cdots + \frac{0{,}86\ldots}{2(100+G)-1}$$

$$< \Lambda\underline{1 + \frac{G}{100}} <$$

$$\frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}86\ldots}{203} + \frac{0{,}86\ldots}{205} + \frac{0{,}86\ldots}{207} + \cdots\cdots + \frac{0{,}86\ldots}{2\cdot(100+G)-1} +$$

$$+ \frac{0{,}036\ldots}{100^2} + \frac{0{,}036\ldots}{101^2} + \frac{0{,}036\ldots}{102^2} + \cdots\cdots + \frac{0{,}036\ldots}{(100+G-1)^3}.$$

Bemerkung: Dafs $\Lambda 1{,}25 = 0{,}09\,691$ wird, ist auch dann noch zu erkennen, wenn man den gröfsern Näherungswert von $\Lambda\underline{1 + \frac{G}{100}}$ dadurch noch vergröfsert, dafs man die Summe „$\frac{0{,}036\ldots}{100^2} + \frac{0{,}036\ldots}{101^2} + \cdots\cdots + \frac{0{,}036\ldots}{(100+G-1)^3}$“ durch „$G \cdot \frac{0{,}036\ldots}{100^2}$“ ersetzt. — Die bei G_1) gegebene Formel ermöglicht die Berechnung der vierstelligen Logarithmen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zu allen dreizifferigen Zahlen von 1,01 bis 10,0. — Die Summe „$\frac{0,86\ldots}{201} + \frac{0,86\ldots}{203} + \frac{0,86\ldots}{205} + \cdots$ u. s. w. bis $+ \frac{0,86\ldots}{249}$“ ist in Quarta zu berechnen. (Der Schüler lerne auch seine eigenen Arbeiten schätzen und aufbewahren.)

§ 4. Folgerungen aus § 2, II.

A. Wendet man das in § 3 beschriebene Verfahren auf die unter § 2 bei Nr. II. angegebene Formel an, so findet man, dafs für jeden positiven Wert von b und für jeden positiven ganzzahligen Wert des G

$$S < \underline{\bigwedge b \cdot \left(1 + \frac{G}{1000}\right)} - \underline{\bigwedge b} < S + G \cdot \frac{0,036\ldots}{1000^2}$$

ist, wofern

$$S = \frac{0,86\ldots}{2001} + \frac{0,86\ldots}{2003} + \frac{0,86\ldots}{2005} + \cdots\cdots + \frac{0,86\ldots}{2 \cdot (1000 + G) - 1}$$

gesetzt wird.

Ist nun G nicht gröfser als 9000, so ist der Unterschied der beiden Näherungswerte kleiner als $\frac{0,33}{1000^2}$.

Hiernach ergiebt sich folgendes:

B. Wenn b irgend eine positive Zahl und G eine von den 9000 ersten positiven ganzen Zahlen bedeutet, so ist bis auf wenigstens fünf Dezimalbruchstellen genau sowohl

I. $\underline{\bigwedge b \cdot \left(1 + \frac{G}{1000}\right)} - \underline{\bigwedge b}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

als auch (da $b = 1$ sein kann)

$$\text{II.}\quad \Lambda\underline{1 + \frac{G}{1000}} - \Lambda\underline{1}, \quad \text{d. i.} \quad \Lambda\underline{1 + \frac{G}{1000}},$$

gleich der (G-gliederigen) Summe

$$„\frac{0{,}86\ldots}{2001} + \frac{0{,}86\ldots}{2003} + \frac{0{,}86\ldots}{2005} + \cdots\cdots\cdots + \frac{0{,}86\ldots}{2\cdot(1000+G)-1}“$$

und daher auch

$$\text{III.}\quad \Lambda\underline{b\cdot\left(1 + \frac{G}{1000}\right)} = \Lambda\underline{b} + \Lambda\underline{1 + \frac{G}{1000}}.$$

§ 5. Bemerkungen zu § 4 und Folgerungen aus § 4, III.

1) Wird in der unter § 4 bei A angegebenen Formel b durch 1 und G durch 24 ersetzt, so ergiebt sich:

$$0{,}0102999558\ldots < \Lambda\underline{1{,}024} < 0{,}0102999567\ldots,$$

so dafs also $\Lambda\underline{1{,}024} = 0{,}01029996$ oder $= 0{,}0103000$ zu setzen ist. (Vergleiche § 1, II.)

2) Ersetzt man in § 4, III. zunächst G durch 9000 und darnach b zuerst durch irgend eine positive Zahl β, dann durch $\beta \cdot 10$, dann durch $\beta \cdot 10^2$, dann durch $\beta \cdot 10^3$ u. s. w. und endlich durch $\beta \cdot 10^g$, so findet man, dafs

$$\Lambda\underline{\beta \cdot 10} = \Lambda\beta + \Lambda 10,$$
$$\Lambda\underline{\beta \cdot 10^2} = \Lambda\underline{\beta \cdot 10} + \Lambda 10 = \beta + 2 \cdot \Lambda 10,$$
$$\Lambda\underline{\beta \cdot 10^3} = \Lambda\underline{\beta \cdot 10^2} + \Lambda 10 = \Lambda\beta + 3 \cdot \Lambda 10, \text{ u. s. w.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und endlich

I. $\Lambda\underline{\beta \cdot 10^g} = \Lambda\underline{\beta \cdot 10^{g-1}} + \Lambda 10 = \Lambda\beta + g \cdot \Lambda 10$ ist.

Hieraus ergiebt sich weiter, da auch $\beta = 1$ sein kann, dafs

II. $\Lambda 10^g = g \cdot \Lambda 10$ ist.

3) Durch § 4, II. können die fünfstelligen Logarithmen aller vierzifferigen Hauptzahlen von 1,000 bis zu 10,00 berechnet werden. Die dabei erforderliche Rechenarbeit setzt nur Quartaner-Kenntnisse voraus.

4) Ersetzt man in § 4, III. das b durch 1000, so ergiebt sich, dafs

$$\Lambda\underline{1000 + G} = 3 \cdot \Lambda 10 + \Lambda\underline{1 + \frac{G}{1000}}$$

ist. Diese Formel führt bei Beachtung von § 5, 3 zu den fünfstelligen Logarithmen aller vierzifferigen ganzen Zahlen, sobald $\Lambda 10$ hinreichend bekannt ist. Es ist daher erwünscht, den Wert für $\Lambda 10$ auf möglichst kurzem Wege zu gewinnen. (Vergleiche § 8.)

5) Nach § 4, III. gilt in 9000 mal sehr vielen Fällen das Gesetz:

$$„\Lambda\underline{b \cdot c} = \Lambda b + \Lambda c."$$

§ 6. Beweis für die allgemeine Gültigkeit des Gesetzes:

$$„\Lambda\underline{b \cdot c} = \Lambda b + \Lambda c".$$

A. Aus § 2, IV. und § 4, III. ergiebt sich der Satz:

Wenn $0,(\omega)$ einen echten Dezimalbruch, b eine beliebige positive Zahl und G irgend eine von den zwischen 0 und 9000 liegenden ganzen Zahlen bedeutet, ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\Lambda \underline{b \cdot \left(1 + \frac{G + 0,(\omega)}{1000}\right)} = \Lambda b + \Lambda \underline{1 + \frac{G + 0,(\omega)}{1000}}$$

bis auf wenigstens fünf Dezimalbruchstellen.

Derselbe Satz gilt nach § 2, V. auch dann, wenn $G = 0$ ist. Kann aber G sowohl 0 als auch jede zwischen 0 und 9000 liegende ganze Zahl sein, so bedeutet $1 + \frac{G + 0,(\omega)}{1000}$ jeden unechten Dezimalbruch mit einzifferigem Kopf (d. i. 1,000 . . . . bis zu 9,99999 . . . . .). Hieraus folgt:

I. Bedeutet $k,(\varphi)$ einen positiven Dezimalbruch mit einzifferigem Kopf und b eine beliebige positive Zahl, so ist

$$\Lambda \underline{b \cdot k,(\varphi)} = \Lambda b + \Lambda \underline{k,(\varphi)}$$

B. 1) Ersetzt man in Nr. I. das b durch 10^g, so ergiebt sich durch § 5, 2, dafs

$$g \cdot \Lambda 10 + \Lambda \underline{k,(\varphi)} = \Lambda \underline{10^g \cdot k,(\varphi)} \quad \text{ist.}$$

2) Ersetzt man in Nr. I. das b durch $\beta \cdot 10^g$, wobei auch β jeden positiven Wert haben kann, so findet man bei Berücksichtigung von § 5, 2, dafs

$$\begin{aligned} \Lambda \underline{\beta \,.\, (10^g \cdot k,(\varphi))} &= \Lambda \underline{(\beta \cdot 10^g) \cdot k,(\varphi)} \\ &= \Lambda \beta + g \,.\, \Lambda 10 + \Lambda \underline{k,(\varphi)} \\ &= \Lambda \beta + \Lambda \underline{10^g \cdot k,(\varphi)} \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

$10^g \cdot k,(\varphi)$ bedeutet aber sowohl jeden unechten Dezimalbruch als auch jede ganze Zahl, also überhaupt jede Zahl, die gröfser als 1 ist. Hieraus folgt,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. dafs das an der Spitze von § 6 bezüglich des Logarithmus eines Produkts erwähnte Gesetz gültig ist, wofern wenigstens ein Faktor gröfser als 1 ist.

C. Ist keiner der Faktoren gröfser als 1, sind vielmehr beide echte Dezimalbrüche, der eine etwa $0,(\varphi)$ mit dem Nenner η, der andere $0,(\omega)$ mit dem Nenner ϑ, so sind 1.) η, 2.) ϑ, 3.) $\eta \cdot \vartheta$, 4.) $\eta \cdot 0,(\varphi)$ und 5.) $\vartheta \cdot 0,(\omega)$ gröfser als 1. Daher ist

$$\Lambda \underline{0,(\varphi) \cdot 0,(\omega)} + \Lambda \eta + \Lambda \vartheta = \Lambda \underline{0,(\varphi) \cdot 0,(\omega)} + \Lambda \underline{\eta \cdot \vartheta}$$

$$= \Lambda \underline{0,(\varphi) \cdot 0,(\omega) \cdot \eta \cdot \vartheta} = \Lambda \underline{[0,(\varphi) \cdot \eta] \cdot [0,(\omega) \cdot \vartheta]} = [\Lambda \underline{0,(\varphi)} + \Lambda \eta] + [\Lambda \underline{0,(\omega)} + \Lambda \vartheta],$$

und folglich auch

$$\Lambda \underline{0,(\varphi) \cdot 0,(\omega)} = \Lambda 0,(\varphi) + \Lambda \underline{0,(\omega)}.$$

Aus der Zusammenstellung dieses Ergebnisses mit Nr. II. ergiebt sich schliefslich der Satz:

III. Für alle positive Werte von b und c ist

$$\Lambda \underline{b \cdot c} = \Lambda b + \Lambda c.$$

§ 7.

Aus § 6, III. ergeben sich leicht die übrigen die Logarithmen betreffenden Gesetze, nämlich:

I. $\Lambda \underline{b : c} = \Lambda b - \Lambda c,$

II. $\Lambda \underline{b^n} = n \cdot \Lambda b,$

III. $\Lambda \underline{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{n} \cdot \Lambda b,$

sowie auch

IV. $\Lambda \underline{\sqrt[n]{10^z}} = \frac{z}{n}.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 8. $\Lambda \underline{10.}$

Wenn etwa $\Lambda 10 = x$ ist, so ist (vergl. § 1, II. und § 3)

1) $\Lambda 1000 = 3x$	2) $\Lambda 100 = 2x$
$\Lambda 1024 = 3x + 0{,}01\,030$	$\Lambda 125 = 2x + 0{,}09\,691$
$\Lambda 2 = \frac{3}{10}x + 0{,}00\,103$	$\Lambda 5 = \frac{2}{3}x + 0{,}03\,230\,33\ldots$

und daher

$$3)\ x = \Lambda 10 = \Lambda 2 + \Lambda 5 = \tfrac{3}{10}x + 0{,}00103 + \tfrac{2}{3}x + 0{,}03\,230\,33\ldots,$$

d. i. $\frac{1}{30}x = 0{,}03\,333\,33\ldots$, d. i. $x = 0{,}99\,999\,9\ldots = 1$.

Folglich ist $\Lambda 10 = 1$ und $\Lambda \underline{10^g} = g$, wenn g ganz ist.

§ 9. Wozu dienen die Logarithmen?

A. Wenn man erklärt, unter 10^α auch in den Fällen, wo α nicht positiv und ungebrochen ist, diejenige Zahl verstehen zu wollen, deren Logarithmus gleich α ist, — so hat man allgemein

1) $a = 10^{\Lambda \underline{a}}$ und $b = 10^{\Lambda \underline{b}}$, sowie nach § 7, IV.

2) $10^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{10^z}$ zu setzen.

B. Wenn man hierzu ferner noch erklärt, auch die unechten Potenzen von 10 nach den für echte Potenzen geltenden Gesetzen behandeln zu wollen — so ist man nicht nur berechtigt, sondern sogar genötigt, auch folgende Formeln aufzustellen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) $ab = 10^{\Lambda\underline{a} + \Lambda\underline{b}}$; (vergleiche § 6, III.)

4) $a : b = 10^{\Lambda\underline{a} - \Lambda\underline{b}}$; (vergl. § 7, I.)

5) $a^n = 10^{n \cdot \Lambda\underline{a}}$; (vergl. § 7, II.)

6) $\sqrt[n]{a} = 10^{\frac{1}{n} \cdot \Lambda\underline{a}}$. (vergl. § 7, III.)

Diese scheinbar neuen Formeln (Nr. 3 bis 6) sind aber zweifellos richtig; denn sie bedeuten genau dasselbe, wie diejenigen, die bei § 6, III. und bei § 7, I. bis III. angegeben sind. (So kann z. B. sowohl § 9, 3 als auch § 6, III. in folgender Weise übersetzt werden: „Der Wert eines Produkts ist diejenige Zahl, deren Logarithmus gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren ist.“ — Ähnlich verhält es sich mit § 9, 4 und § 7, I, ferner mit § 9, 5 und § 7, II, sowie mit § 9, 6 und § 7, III.)

Wenn man daher bei der Berechnung von Produkten, Quotienten, Potenzen oder Wurzeln nach den unter § 9 neben A und B gegebenen Erklärungen verfährt, so ist jede Gefahr des Irrtums ausgeschlossen.

C. In diesem Sinne kann und mufs man sagen:

I. Die Logarithmen dienen dazu, bestimmte positive Zahlen, Produkte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln in zuverlässig brauchbare Potenzen von 10 zu verwandeln. — Als zuverlässig brauchbar gilt eine Potenz aber dann, wenn sie, nach den für echte Potenzen geltenden Gesetzen behandelt, nicht zu Fehlern führt.

II. Soll einer der genannten Zahlenausdrücke in eine Potenz von 10 verwandelt werden, so kann der Exponent dieser Potenz nur der Logarithmus jenes Zahlenausdrucks sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

D. Durch Nr. I. ist auch der Gang der logarithmischen Berechnung der dort genannten Zahlenausdrücke genau angegeben. Er kann nur folgender sein:

α) der Zahlenausdruck wird in eine brauchbare Potenz von 10 verwandelt,

β) der Wert dieser Potenz von 10 wird bestimmt unter Berücksichtigung der bei A gegebenen Erklärung.

γ) Anm. Beiden Zwecken dient die Logarithmentafel. Sie ist Lexikon und Nokixel zugleich.

§ 10. **Hauptregeln für den Gebrauch der Logarithmentafel.**

A. v soll eine vierzifferige und g eine beliebige ganze Zahl bedeuten. Alsdann ist jede positive Zahl entweder ein v oder $v \cdot 10^g$ oder $v : 10^g$ oder $v + 0,(\omega)$ oder $[v + 0,(\omega)] \cdot 10^g$ oder $[v + 0,(\omega)] : 10^g$. Es fragt sich also: „wie ist $\Lambda \underline{v + 0,(\omega)}$ leicht zu finden?“ Zur Beantwortung dient folgendes.

Weil $\frac{0,86\ldots}{2v} = \frac{0,86\ldots}{2v+1} + \frac{0,86\ldots}{4 \cdot v^2 + 2v} < \frac{0,86\ldots}{2v+1} + \frac{0,86\ldots}{4 \cdot 1000^2} < \frac{0,86\ldots}{2v+1} + 0,00\,000\,022$

und $\frac{0,86\ldots}{2v+1} < \frac{0,86\ldots}{2v + 0,(\omega)} < \frac{0,86\ldots}{2v}$ ist, so ist auch

$$0,(\omega) \cdot \frac{0,86\ldots}{2v+1} < 0,(\omega) \cdot \frac{0,86\ldots}{2v + 0,(\omega)} < 0,(\omega) \cdot \frac{0,86\ldots}{2v+1} + 0,00\,000\,022.$$

Weil ferner nach § 1, I

$$0,(\omega) \cdot \frac{0,86\ldots}{2v + 0,(\omega)} < \Lambda \underline{v + 0,(\omega)} - \Lambda \underline{v} < 0,(\omega) \cdot \frac{0,86\ldots}{2v + 0,(\omega)} + 0,00\,000\,000\,004$$

ist, so mufs auch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$0,(\omega)\,\frac{0,86\ldots}{2v+1} < \Lambda\underline{v+0,(\omega)} - \Lambda\underline{v} < 0,(\omega)\cdot\frac{0,86\ldots}{2v+1} + 0,00\,000\,022004$$

und daher bis auf mindestens 5 Bruchstellen $\Lambda\underline{v+0,(\omega)} - \Lambda\underline{v} = 0,(\omega)\cdot\frac{0,86\ldots}{2v+1}$ sein. Weil endlich nach § 2, VII. $\frac{0,86\ldots}{2v+1} = \Lambda\underline{v+1} - \Lambda\underline{v}$ ist, so ergiebt sich die sehr einfache Regel:

I. $\Lambda\underline{v+0,(\omega)} = \Lambda\underline{v} + 0,(\omega)\cdot[\Lambda\underline{v+1} - \Lambda\underline{v}]$, wofern v eine vierzifferige ganze Zahl und $0,(\omega)$ ein echter Bruch ist.

Bemerkung: Die „P. P." der Logarithmentafel sind überflüssig.

B. Wird ein Zahlenausdruck nach § 9 in eine Potenz von 10 verwandelt, so wird diese Potenz entweder 10^3 oder 10^{3+g} oder $10^{3-g} = 10^3 : 10^g$ oder $10^{3,(s)}$ oder $10^{3,(s)+g} = 10^{3,(s)}\cdot 10^g$ oder $10^{3,(s)-g} = 10^{3,(s)} : 10^g$.

Für die Bestimmung des Wertes von $10^{3,(s)}$ ergiebt sich aber, falls er nicht unmittelbar aus der Logarithmentafel abgelesen werden kann, aus § 1, I. und § 10, I. folgende Regel:

II. „Nachdem durch Vergleichung des Exponenten „$3,(s)$" mit den in der Logarithmentafel angegebenen Logarithmen der vierzifferigen ganzen Zahlen festgestellt worden ist, dafs $\Lambda\underline{v} < 3,(s) < \Lambda\underline{v+1}$ ist, mufs $10^{3,(s)} = v + \frac{3,(s) - \Lambda\underline{v}}{\Lambda\underline{v+1} - \Lambda\underline{v}}$ gesetzt werden."

(Vergleiche: Breuer, Die gemeinen Logarithmen. 2. Auflage. Leipzig 1894.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf