PROGYMNASIUM ZU WIPPERFÜRTH.
BEILAGE ZUM JAHRESBERICHT ÜBER DAS SCHULJAHR 1897—1898.

VÖLLIGER ABSCHLUSS
DER
LEHRE ÜBER DIE GEMEINEN LOGARITHMEN
IM DIESSEITS DER GYMNASIAL-MATHEMATIK

VON

PETER JOSEPH BREUER,
DIREKTOR.

Bibliothek des Städt. Gymnasiums Düsseldorf

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1898.

1898. Progr. Nr. 495.

QWi
31 (1898)

495

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK
DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tafel zu § 3.

Vorbemerkung: Die in der 2. bis 5. Spalte angegebenen Zahlen sind durch 10^{10} zu dividieren.

1.	2.	3.	4.	5.	6. und 7. Spalte.	
			Summe der Brüche	Summe der Brüche	Logarithmentafel:	
n	$\frac{0{,}86\,858\,89638\ldots}{2n+1}$	$\frac{0{,}03619\ldots}{n^3}$	„$\frac{0{,}86\,858\,89638\ldots}{2x+1}$“ von „$x = 100$“ bis „$x = n$“.	„$\frac{0{,}03\,619\ldots}{x^3}$“ von „$x = 100$“ bis „$x = n$“.	$\frac{n+1}{100}$	$\bigwedge \frac{n+1}{100}$
100	432 13381	362	00 432 13381	0362	1,01	0,00 432 1
101	427 87633	352	00 860 01014	0714	1,02	860 0
2	423 70193	342	01 283 71207	1056	3	0,01 283 7
3	419 60819	332	703 32026	1388	4	703 3
4	415 59280	322	02 118 91306	1710	5	0,02 118 9
5	411 65353	313	530 56659	2023	6	530 6
6	407 78824	304	938 35483	2327	7	938 4
7	403 99486	296	03 342 34969	2623	8	0,03 342 *
8	400 27141	288	742 62110	2911	9	742 6
9	396 61596	280	04 139 23706	3191	1,10	0,04 139 *

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7. Spalte.
110	393 02668	272	04 532 26374	3463	1,11	0,04 532 3
111	389 50177	265	921 76551	3728	1,12	0,04 921 8
2	386 03953	258	05 307 80504	3986	3	0,05 307 8
3	382 63831	251	690 44335	4237	4	690 *
4	379 29649	245	06 069 73984	4482	5	0,06 069 *
5	376 01253	238	445 75237	4720	6	445 8
6	372 78496	232	818 53733	4952	7	818 *
7	369 61232	226	07 188 14965	5178	8	0,07 188 *
8	366 49323	221	554 64288	5399	9	555 *
9	363 42634	215	918 06922	5614	1,20	918 1
120	360 41035	210	08 278 47957	5824	1,21	0,08 278 5
121	357 44401	205	635 92358	6029	1,22	636 *
2	354 52610	200	990 44968	6229	3	990 *
3	351 65545	195	09 342 10513	6424	4	0,09 342 *
4	348 83090	190	690 93603	6614	5	691 0
5	346 05138	186	10 036 98741	6800	6	0,10 037 0
6	343 31579	181	380 30320	6981	7	380 *
7	340 62312	177	720 92632	7158	8	721 0
8	337 97235	173	11 058 89867	7331	9	0,11 059 *
9	335 36253	169	11 394 26120	7500	1,30	0,11 394 3

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7. Spalte.
130	332 79270	165	11 727 05390	7665	1,31	0,11 727
131	330 26196	161	12 057 31586	7826	2	0,12 057
2	327 76942	158	385 08528	7984	3	385
3	325 31421	154	710 39949	8138	4	710
4	322 89552	151	13 033 29501	8289	5	0,13 033
5	320 51253	148	353 80754	8437	6	354
6	318 16445	144	671 97199	8581	7	672
7	315 85053	141	987 82252	8722	8	988
8	313 57002	138	14 301 39254	8860	9	0,14 301
9	311 32220	135	612 71474	8995	1,40	613
140	309 10639	132	14 921 82113	9127	1,41	0,14 922
141	6 92189	130	15 228 74302	9257	2	0,15 229
2	4 76805	127	533 51107	9384	3	533
3	2 64423	124	836 15530	9508	4	836
4	0 54981	122	16 136 70511	9630	5	0,16 137
5	298 48418	119	435 18929	9749	6	435
6	6 44674	117	731 63603	9866	7	732
7	4 43693	114	17 026 07296	9980	8	0,17 026
8	2 45419	112	318 52715	10092	9	319
9	0 49798	110	609 02513	10202	1,50	609

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7. Spalte.
150	288 56776	108	17 897 59289	10310	1,51	0,17 898
151	6 66302	106	18 184 25591	10416	2	0,18 184
2	4 78326	104	469 03917	10520	3	469
3	2 92800	102	751 96717	10622	4	752
4	1 09675	100	19 033 06392	10722	5	0,19 033
5	279 28905	98	312 35297	10820	6	312
6	7 50446	96	589 85743	10916	7	590
7	5 74252	94	865 59995	11010	8	866
8	4 00282	92	20 139 60277	11102	9	0,20 140
9	2 28494	91	411 88771	11193	1,60	412
160	270 58846	89	20 682 47617	11282	1,61	0,20 682 5
161	268 91299	87	951 38916	11369	2	951 4
2	7 25814	86	21 218 64730	11455	3	0,21 219
3	5 62353	84	484 27083	11539	4	484
4	4 00880	83	748 27963	11622	5	748
5	2 41358	81	22 010 69321	11703	6	0,22 011
6	0 83752	80	271 53073	11783	7	272
7	259 28028	78	530 81101	11861	8	531
8	7 74153	77	788 55254	11938	9	789
9	6 22093	75	23 044 77347	12013	1,70	0,23 045

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7. Spalte.
170	254 71817	74	23 299 49164	12087	1,71	0,23 299 5
171	3 23293	73	552 72457	12160	2	0,23 553
2	1 76491	72	804 48948	12232	3	804 5
3	0 31382	70	24 054 80330	12302	4	0,24 055
4	248 87935	69	303 68265	12371	5	304
5	7 46124	68	551 14389	12439	6	551
6	6 05919	67	797 20308	12506	7	797
7	4 67294	66	25 041 87602	12572	8	0,25 042
8	3 30223	65	285 17825	12637	9	285
9	1 94678	64	527 12503	12701	1,80	527
180	240 60636	63	25 767 73139	12764	1,81	0,25 768
181	239 28070	62	26 007 01209	12826	2	0,26 007
2	7 96957	61	244 98166	12887	3	245
3	6 67274	60	481 65440	12947	4	482
4	5 38996	59	717 04436	13006	5	717
5	4 12101	58	951 16537	13064	6	951
6	2 86567	57	27 184 03104	13121	7	0,27 184
7	1 62372	56	415 65476	13177	8	416
8	0 39495	55	646 04971	13232	9	646
9	229 17914	54	875 22885	13286	1,90	875

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7. Spalte.
190	227 97610	53	28 103 20495	13339	1,91	0,28 103
191	6 78563	52	329 99058	13391	2	330
2	5 60752	52	555 59810	13443	3	556
3	4 44159	51	780 03969	13494	4	780
4	3 28765	50	29 003 32734	13544	5	0,29 003
5	2 14551	49	225 47285	13593	6	225 5
6	1 01500	49	446 48785	13642	7	446 5
7	219 89619	48	666 38404	13690	8	666 4
8	8 78815	47	885 17219	13737	9	885
9	7 69146	46	30 102 86365	13783	2,00	0,30 103
200	216 60572	45	30 319 46937	13828	2,01	0,30 319 5

Bemerkung: Auf Grund von § 4 ergiebt sich, dass in der vorstehenden Tafel bei $\Lambda 1{,}60$ und in allen folgenden Zeilen die Zahlen der 4. Spalte um 11050 vergrössert und gleichzeitig die der 5. um 11050 vermindert werden können. Hierdurch findet man die Logarithmen (7. Spalte) bis auf 6 und 7 Bruchstellen genau.

Tafel zu § 1.

x	$x \cdot 0{,}86 \ldots$	y	$y \cdot 0{,}86 \ldots$
2	1,73 717 79276 13007 31060	6	5,21 153 37828 39021 93180
3	2,60 576 68914 19510 96590	7	6,08 012 27466 45525 58710
4	3,47 435 58552 26014 62120	8	6,94 871 17104 52029 24240
5	4,34 294 48190 32518 27650	9	7,81 730 06742 58532 89770

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vorwort.

(Auch Einführung in die Lehre von den Logarithmen.)

Tafel I.

Hauptzahlen	Nebenzahlen
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
u. s. w.	u. s. w.

Wenn man die echten Potenzen (etwa) von 2 als „Hauptzahlen" und die entsprechenden Exponenten als „Nebenzahlen" bezeichnet, so findet man unter andern folgendes Gesetz: **„Die Nebenzahl des Produkts zweier Hauptzahlen ist gleich der Summe der Nebenzahlen der Faktoren."** Aus der hier nebenan stehenden Tafel, die in 15 Minuten bequem bis zu 2^{30} zu erweitern ist, kann daher das Produkt zweier Hauptzahlen (auch der Quotient und anderes) fast ohne weiteres abgelesen werden. Die in die O. III. gehörenden Übungen dieser Art (cf. Programm-Abhandlung des Progymnasiums zu Wipperfürth von 1890, S. 1) wecken den Wunsch, in einem geordneten Zahlenverzeichnisse alle Zahlen, die uns beim Rechnen begegnen, als Hauptzahlen aufgeführt und bei allen auch Nebenzahlen von der oben bezeichneten Eigenschaft angegeben zu sehen. Hierdurch sind wir vor die folgende Aufgabe gestellt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tafel II.

Hauptzahlen	Nebenzahlen
1,01	u
1,02	v
1,03	w
u. s. w.	

Tafel III.

Hauptzahlen	Nebenzahlen
1,001	x
1,002	y
1,003	z
u. s. w.	

„Zu einer Reihe von gleichmäfsig dicht auf einander folgenden Zahlen, die als Hauptzahlen betrachtet werden (s. z. B. Tafel II oder Tafel III), **sollen Nebenzahlen von der Eigenschaft angegeben werden, dafs allgemein die Nebenzahl des Produkts zweier Hauptzahlen gleich der Summe der Nebenzahlen der Faktoren wird.**

Diese Aufgabe hat seit dem Beginn des 17. Jahrhunderts verschiedene Lösungen erfahren, darunter eine (und zwar die erste) von dem ehrsamen deutschen Uhrmacher Justus Bürg, sodann auch eine von dem Oxforder Professor Henry Briggs, wobei sich die Nebenzahl von 10 gleich dem periodischen Dezimalbruch 0,999 . . ., also gleich 1 ergab. Letztere ist die brauchbarste. Die Briggs'schen Nebenzahlen könnte man daher mit Recht „goldene“ nennen. Briggs selbst hat sie „Logarithmi“ genannt; heute heifsen sie „gemeine Logarithmen“. Die Ausdrücke: 1) „die goldene Nebenzahl zur Hauptzahl a“, 2) „die goldene Nebenzahl von a“, 3) „der gemeine Logarithmus von a“ sind in der vorliegenden Abhandlung kurz wiedergegeben durch „Λa“ und „$\underline{\Lambda a}$“.

Aus dem Umstande, dafs $\Lambda 10 = 1$ ist, hat sich weiter ergeben, dafs allgemein $a = 10^{\underline{\Lambda a}}$ sein mufs. Hierauf sich stützend, hat man eine Definition der gemeinen Logarithmen aufgestellt, die zwar recht einfach ist, aber das Wesen der Einrichtung der Logarithmentafel nicht erklärt. (Die Logarithmentafel soll nämlich zur Berechnung der Logarithmen gewisser Summen dienen. Das deutet aber darauf hin, dafs auch ihre Logarithmen zunächst als Logarithmen von Summen zu betrachten sind.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diesem gegenüber weist die vorliegende Abhandlung eine Definition der gemeinen Logarithmen auf, aus welcher sich durch Anwendung von rein elementaren Mitteln zunächst als „goldene“ Lösung der oben erwähnten Aufgabe die Logarithmen selbst, sodann deren Eigenschaften, wodurch sie brauchbar werden, und endlich auch die Hauptregeln für den Gebrauch der Logarithmentafel ableiten lassen.

§ 1. **Definition.**

I. Die gemeinen Logarithmen sind mit Ausnahme desjenigen von 1, welcher gleich Null ist, abgekürzte Dezimalbrüche von der Eigenschaft, dafs

$$\frac{z \cdot 0{,}86\ \ldots.}{2 \cdot (a+z) - z} < \Lambda \underline{a+z} - \Lambda \underline{a} < \frac{z \cdot 0{,}86\ \ldots.}{2 \cdot (a+z) - z} + \frac{0{,}036\ \ldots.}{(a:z)^3}$$

ist, wofern a und z positive Zahlen sind und z kleiner als a ist.

Bemerkungen: 1) 0,86 .... bedeutet den endlosen unperiodischen Dezimalbruch

0,86 858 89638 06503 65530 22578 37833 21016 45887 94011 60733 31322 .....

2) 0,036 .... soll gleich $\frac{1}{24} \cdot 0{,}86\ \ldots.$ sein.

(Vergleiche: Breuer, Das Notwendigste über die natürlichen Logarithmen. Leipzig, 1895.)

II. Ein Beispiel der Berechnung eines Logarithmus nach Nr. I.

Ersetzt man a durch 1 und z durch 0,024, so wird

$$\frac{z \cdot 0{,}86\ \ldots.}{2 \cdot (a+z) - z} = \frac{0{,}024 \cdot 0{,}86\ \ldots.}{2{,}024} = \frac{3 \cdot 0{,}86\ \ldots.}{253} = 0{,}01\,029\,9473\ \ldots.,$$

$$\frac{0{,}036\ \ldots.}{(a:z)^3} = \frac{0{,}036\ \ldots.}{(1000:24)^3} = 0{,}00\,000\,05;$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und daher

$$0{,}01\,029\,9473 < \Lambda\underline{1{,}024} - \Lambda\underline{1} < 0{,}\,01\,029\,997\ \ldots.$$

Folglich ist $\Lambda\underline{1{,}024} = 0{,}01\,030$ zu setzen, da $\Lambda\underline{1} = 0$ ist.

III. Wahrer Wert und Näherungswerte.

1) Durch die bei I. gegebene Formel ist der wahre Wert von „$\Lambda\underline{a+z} - \Lambda\underline{a}$“ zwischen zwei (einen kleinern und einen gröfsern) Näherungswerte gestellt, mit denen er, soweit diese in Dezimalbruchform sich decken, übereinstimmen mufs. Er kann daher unter Umständen bis auf 5 und mehr Bruchstellen genau erkannt werden. Denn die beiden Näherungswerte, deren Unterschied nur $0{,}036\ldots : \left(\frac{a}{z}\right)^3$ beträgt, werden um so weniger verschieden sein und daher um so weiter sich decken, je kleiner z gegen a ist.

2) In manchen Fällen ist der wahre Wert auch dann noch hinreichend genau zu erkennen, wenn man statt des kleinern Näherungswertes einen noch kleinern oder statt des gröfsern einen noch gröfsern einführt. (cf. § 2, I a und § 10, A.)

3) Liegen zwei Zahlenausdrücke zwischen denselben beiden Näherungswerten, die einen wahren Wert hinreichend genau erkennen lassen, so sind sie als gleichwertig zu betrachten. (cf. § 4, III.)

§ 2. Nächste Folgerungen aus § 1, I.

A. Vorarbeit: (Aufgabe für O. III.)

Was entsteht 1) aus $\frac{z \cdot 0{,}86\ \ldots.}{2 \cdot (a+z) - z}$, 2) aus $a + z$ und 3) aus $\frac{0{,}036\ \ldots}{(a:z)^3}$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

α) wenn man z durch $\frac{1}{100}$ und a durch $\frac{100}{100}$,

β) „ „ „ „ $\frac{1}{100}$ „ „ „ $\frac{101}{100}$,

γ) „ „ „ „ $\frac{1}{100}$ „ „ „ $\frac{100+g-1}{100}$,

δ) „ „ „ „ $\frac{1}{1000}$ „ „ „ $\frac{1000+g-1}{1000}$,

ε) „ „ „ „ $\frac{b}{1000}$ „ „ „ $b \cdot \frac{1000+g-1}{1000}$,

ζ) „ „ „ „ $\frac{b}{10^{\alpha}}$ „ „ „ $b \cdot \frac{10^{\alpha}+g-1}{10^{\alpha}}$

ersetzt?

B. Folgerungen:

Sind g und α positive ganze Zahlen und ist $b > o$, so sind sämtliche in der vorstehenden Aufgabe erwähnte Substitutionen solche, dafs die für z und a gewählten Werte positiv sind und jedesmal derjenige des a gröfser als der des z ist. Alle diese Substitutionen sind alsdann bei der in § 1 bei No. I. gegebenen Formel zulässig.

Demnach ergeben sich unter andern folgende neue Formeln:

I. Für jeden ganzzahligen positiven Wert des g ist $\bigwedge\frac{100+g}{100} - \bigwedge\frac{100+g-1}{100}$ zwar gröfser als $\frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(100+g)-1}$, aber kleiner als $\frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(100+g)-1} + \frac{0{,}036\ldots.}{(100+g-1)^3}$, und daher

Ia. auch kleiner als $\frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(100+g)-1} + \frac{0{,}036\ldots.}{100^3}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Für jedes ganzzahlige positive g und für alle positive Werte des b, mögen diese gebrochen sein oder nicht, ist sowohl

$$\bigwedge\frac{1000+g}{1000} - \bigwedge\frac{1000+g-1}{1000} \quad \text{als auch} \quad \bigwedge b\cdot\frac{1000+g}{1000} - \bigwedge b\cdot\frac{1000+g-1}{1000}$$

zwar gröfser als $\frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(1000+g)-1}$, aber kleiner als $\frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(1000+g)-1} + \frac{0{,}036\ldots}{(1000+g-1)^3}$, und daher auch kleiner als $\frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(1000+g)-1} + \frac{0{,}036\ldots}{1000^3}$.

III. Für alle ganzzahlige positive Werte von g und α und für jedes positive b ist

$$\frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(10^\alpha+g)-1} < \bigwedge b\cdot\frac{10^\alpha+g}{10^\alpha} - \bigwedge b\cdot\frac{10^\alpha+g-1}{10^\alpha} < \frac{0{,}86\ldots.}{2\cdot(10^\alpha+g)-1} + \frac{0{,}036\ldots}{10^{3\alpha}}.$$

C. Weitere Folgerungen aus § 1, I.

Wenn $0{,}(\omega)$ einen positiven echten Dezimalbruch bedeutet, während b und G beliebige positive Zahlen sind, so darf in der Formel § 1, I. auch z durch $b\cdot\frac{0{,}(\omega)}{1000}$ und a durch $b\cdot\left(1+\frac{G}{1000}\right)$ ersetzt werden. Durch diese Substitutionen ergiebt sich aber, dafs

$$\bigwedge b\cdot\left(1+\frac{G}{1000}\right)+b\cdot\frac{0{,}(\omega)}{1000} - \bigwedge b\cdot\left(1+\frac{G}{1000}\right)$$

zwar gröfser als $\dfrac{b\cdot\frac{0{,}(\omega)}{1000}\cdot 0{,}86\ldots.}{2\cdot\left[b\cdot\left(1+\frac{G}{1000}\right)+b\cdot\frac{0{,}(\omega)}{1000}\right]-b\cdot\frac{0{,}(\omega)}{1000}}$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

aber kleiner als $\frac{0,(\omega)\cdot 0,86\ldots.}{2\cdot[1000+G+0,(\omega)]-0,(\omega)}+\frac{0,036\ldots}{\left(\left[b\cdot\left(1+\frac{G}{1000}\right)\right]:\left[b\cdot\frac{0,(\omega)}{1000}\right]\right)^3}$,

und demnach auch kleiner als

$$\frac{0,(\omega)\cdot 0,86\ldots.}{2\cdot[1000+G+0,(\omega)]-0,(\omega)}+\frac{0,036\ldots}{1000^3},$$

und darum bis auf mindestens neun Dezimalbruchstellen gleich $\frac{0,(\omega)\cdot 0,86\ldots.}{2\cdot[1000+G+0,(\omega)]-0,(\omega)}$ ist. Da alles dieses auch dann gilt, wenn $b=1$ gesetzt wird, so ergiebt sich der folgende Satz:

IV. Wenn $o,(\omega)$ einen positiven echten Dezimalbruch bedeutet, während b und G beliebige positive Zahlen sind, so ist bis auf mindestens neun Dezimalbruchstellen

$$\bigwedge\underline{b\cdot\left(1+\frac{G}{1000}+\frac{o,(\omega)}{1000}\right)}-\bigwedge\underline{b\cdot\left(1+\frac{G}{1000}\right)}=\bigwedge\underline{1+\frac{G}{1000}+\frac{o,(\omega)}{1000}}-\bigwedge\underline{1+\frac{G}{1000}}.$$

D. Sowohl $\bigwedge\underline{b+b\cdot\frac{o,(\omega)}{1000}}-\Lambda b$ als auch $\bigwedge\underline{1+\frac{o,(\omega)}{1000}}-\Lambda 1$ ist zwar gröfser als $\frac{o,(\omega)\cdot 0,86\ldots.}{2\cdot(1000+o,(\omega))-o,(\omega)}$, aber kleiner als $\frac{o,(\omega)\cdot 0,86\ldots.}{2\cdot(1000+o,(\omega))-o,(\omega)}+\frac{0,036\ldots.}{[1000:o,(\omega)]^3}$, und darum bis auf mindestens neun Dezimalbruchstellen eben so grofs wie $\frac{o,(\omega)\cdot 0,86\ldots.}{2\cdot(1000+o,(\omega))-o,(\omega)}$. Hieraus folgt, dafs unter den vorher bei Nr. IV. angegebenen Bedingungen auch

V. $\bigwedge\underline{b\cdot\left(1+\frac{o,(\omega)}{1000}\right)}=\Lambda b+\bigwedge\underline{1+\frac{o,(\omega)}{1000}}$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

E. Bedeutet v eine vierzifferige positive ganze Zahl, so liegt $\Lambda \underline{v+1} - \Lambda v$ zwischen zwei Näherungswerten, deren Unterschied nur $0{,}036\ldots : v^3$, also weniger als $0{,}04 : 1000^3$ beträgt. Daher ergiebt sich:

VI. Wenn v eine positive vierzifferige ganze Zahl bedeutet, ist $\Lambda \underline{v+1} - \Lambda v$ bis auf wenigstens neun Dezimalbruchstellen gleich dem kleinern Näherungswerte $\frac{0{,}86\ldots}{2\cdot(v+1)-1}$.

§ 3. Folgerungen aus § 2, Nr. I.

Ersetzt man g durch 1, durch 2, durch 3 u. s. w. und endlich durch die positive ganze Zahl G, so erhält man:

$$1)\quad \frac{0{,}86\ldots}{201} < \Lambda \underline{\tfrac{101}{100}} - \Lambda \underline{1} < \frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}036\ldots}{100^3},$$

$$2)\quad \frac{0{,}86\ldots}{203} < \Lambda \underline{\tfrac{102}{100}} - \Lambda \underline{\tfrac{101}{100}} < \frac{0{,}86\ldots}{203} + \frac{0{,}036\ldots}{101^3},$$

$$3)\quad \frac{0{,}86\ldots}{205} < \Lambda \underline{\tfrac{103}{100}} - \Lambda \underline{\tfrac{102}{100}} < \frac{0{,}86\ldots}{205} + \frac{0{,}036\ldots}{102^3},$$

u. s. w. und endlich

$$G)\quad \frac{0{,}86\ldots}{2\cdot(100+G)-1} < \Lambda \underline{\frac{100+G}{100}} - \Lambda \underline{\frac{100+G-1}{100}} < \frac{0{,}86\ldots}{2\cdot(100+G)-1} + \frac{0{,}036\ldots}{(100+G-1)^3}.$$

Weil nun $\Lambda \underline{1} = o$ ist, ergiebt sich hieraus zunächst:

I. $\frac{0{,}86\ldots}{201} < \Lambda \underline{1{,}01} < \frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}036\ldots}{100^3}$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sodann weiter durch Addition:

II. (aus Nr. 1 und 2)

$$\frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}86\ldots}{203} < \Lambda\underline{1{,}02} < \frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}86\ldots}{203} + \frac{0{,}036\ldots}{100^2} + \frac{0{,}036\ldots}{101^2};$$

III. (aus Nr. 1, 2 und 3)

$$\frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}86\ldots}{203} + \frac{0{,}86\ldots}{205} < \Lambda\underline{1{,}03} < \frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}86\ldots}{203} + \frac{0{,}86\ldots}{205} + \frac{0{,}036\ldots}{100^2} + \frac{0{,}036\ldots}{101^2} + \frac{0{,}036\ldots}{102^2};$$

u. s. w. und endlich allgemein:

G_1) Für jeden ganzzahligen positiven Wert des G ist

$$\frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}86\ldots}{203} + \frac{0{,}86\ldots}{205} + \frac{0{,}86\ldots}{207} + \cdots\cdots + \frac{0{,}86\ldots}{2(100+G)-1}$$

$$< \Lambda\underline{1 + \frac{G}{100}} <$$

$$\frac{0{,}86\ldots}{201} + \frac{0{,}86\ldots}{203} + \frac{0{,}86\ldots}{205} + \frac{0{,}86\ldots}{207} + \cdots\cdots + \frac{0{,}86\ldots}{2\cdot(100+G)-1} +$$

$$+ \frac{0{,}036\ldots}{100^2} + \frac{0{,}036\ldots}{101^2} + \frac{0{,}036\ldots}{102^2} + \cdots\cdots + \frac{0{,}036\ldots}{(100+G-1)^3}.$$

Bemerkung: Dafs $\Lambda 1{,}25 = 0{,}09\,691$ wird, ist auch dann noch zu erkennen, wenn man den gröfsern Näherungswert von $\Lambda\underline{1 + \frac{G}{100}}$ dadurch noch vergröfsert, dafs man die Summe „$\frac{0{,}036\ldots}{100^2} + \frac{0{,}036\ldots}{101^2} + \cdots\cdots + \frac{0{,}036\ldots}{(100+G-1)^3}$“ durch „$G \cdot \frac{0{,}036\ldots}{100^2}$“ ersetzt. — Die bei G_1) gegebene Formel ermöglicht die Berechnung der vierstelligen Logarithmen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zu allen dreizifferigen Zahlen von 1,01 bis 10,0. — Die Summe „$\frac{0,86\ldots}{201} + \frac{0,86\ldots}{203} + \frac{0,86\ldots}{205} + \cdots$ u. s. w. bis $+ \frac{0,86\ldots}{249}$“ ist in Quarta zu berechnen. (Der Schüler lerne auch seine eigenen Arbeiten schätzen und aufbewahren.)

§ 4. Folgerungen aus § 2, II.

A. Wendet man das in § 3 beschriebene Verfahren auf die unter § 2 bei Nr. II. angegebene Formel an, so findet man, dafs für jeden positiven Wert von b und für jeden positiven ganzzahligen Wert des G

$$S < \underline{\bigwedge b \cdot \left(1 + \frac{G}{1000}\right)} - \underline{\bigwedge b} < S + G \cdot \frac{0,036\ldots}{1000^2}$$

ist, wofern

$$S = \frac{0,86\ldots}{2001} + \frac{0,86\ldots}{2003} + \frac{0,86\ldots}{2005} + \cdots\cdots + \frac{0,86\ldots}{2 \cdot (1000 + G) - 1}$$

gesetzt wird.

Ist nun G nicht gröfser als 9000, so ist der Unterschied der beiden Näherungswerte kleiner als $\frac{0,33}{1000^2}$.

Hiernach ergiebt sich folgendes:

B. Wenn b irgend eine positive Zahl und G eine von den 9000 ersten positiven ganzen Zahlen bedeutet, so ist bis auf wenigstens fünf Dezimalbruchstellen genau sowohl

I. $\underline{\bigwedge b \cdot \left(1 + \frac{G}{1000}\right)} - \underline{\bigwedge b}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

als auch (da $b = 1$ sein kann)

$$\text{II.}\quad \Lambda\underline{1 + \frac{G}{1000}} - \Lambda\underline{1}, \quad \text{d. i.} \quad \Lambda\underline{1 + \frac{G}{1000}},$$

gleich der (G-gliederigen) Summe

$$„\frac{0{,}86\ldots}{2001} + \frac{0{,}86\ldots}{2003} + \frac{0{,}86\ldots}{2005} + \cdots\cdots\cdots + \frac{0{,}86\ldots}{2\cdot(1000+G)-1}“$$

und daher auch

$$\text{III.}\quad \Lambda\underline{b\cdot\left(1 + \frac{G}{1000}\right)} = \Lambda\underline{b} + \Lambda\underline{1 + \frac{G}{1000}}.$$

§ 5. Bemerkungen zu § 4 und Folgerungen aus § 4, III.

1) Wird in der unter § 4 bei A angegebenen Formel b durch 1 und G durch 24 ersetzt, so ergiebt sich:

$$0{,}0102999558\ldots < \Lambda\underline{1{,}024} < 0{,}0102999567\ldots,$$

so dafs also $\Lambda\underline{1{,}024} = 0{,}01029996$ oder $= 0{,}0103000$ zu setzen ist. (Vergleiche § 1, II.)

2) Ersetzt man in § 4, III. zunächst G durch 9000 und darnach b zuerst durch irgend eine positive Zahl β, dann durch $\beta \cdot 10$, dann durch $\beta \cdot 10^2$, dann durch $\beta \cdot 10^3$ u. s. w. und endlich durch $\beta \cdot 10^g$, so findet man, dafs

$$\Lambda\underline{\beta \cdot 10} = \Lambda\beta + \Lambda 10,$$
$$\Lambda\underline{\beta \cdot 10^2} = \Lambda\underline{\beta \cdot 10} + \Lambda 10 = \beta + 2 \cdot \Lambda 10,$$
$$\Lambda\underline{\beta \cdot 10^3} = \Lambda\underline{\beta \cdot 10^2} + \Lambda 10 = \Lambda\beta + 3 \cdot \Lambda 10, \text{ u. s. w.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und endlich

I. $\Lambda\underline{\beta \cdot 10^g} = \Lambda\underline{\beta \cdot 10^{g-1}} + \Lambda 10 = \Lambda\beta + g \cdot \Lambda 10$ ist.

Hieraus ergiebt sich weiter, da auch $\beta = 1$ sein kann, dafs

II. $\Lambda 10^g = g \cdot \Lambda 10$ ist.

3) Durch § 4, II. können die fünfstelligen Logarithmen aller vierzifferigen Hauptzahlen von 1,000 bis zu 10,00 berechnet werden. Die dabei erforderliche Rechenarbeit setzt nur Quartaner-Kenntnisse voraus.

4) Ersetzt man in § 4, III. das b durch 1000, so ergiebt sich, dafs

$$\Lambda\underline{1000 + G} = 3 \cdot \Lambda 10 + \Lambda\underline{1 + \frac{G}{1000}}$$

ist. Diese Formel führt bei Beachtung von § 5, 3 zu den fünfstelligen Logarithmen aller vierzifferigen ganzen Zahlen, sobald $\Lambda 10$ hinreichend bekannt ist. Es ist daher erwünscht, den Wert für $\Lambda 10$ auf möglichst kurzem Wege zu gewinnen. (Vergleiche § 8.)

5) Nach § 4, III. gilt in 9000 mal sehr vielen Fällen das Gesetz:

$$„\Lambda\underline{b \cdot c} = \Lambda b + \Lambda c."$$

§ 6. Beweis für die allgemeine Gültigkeit des Gesetzes:

$$„\Lambda\underline{b \cdot c} = \Lambda b + \Lambda c".$$

A. Aus § 2, IV. und § 4, III. ergiebt sich der Satz:

Wenn $0,(\omega)$ einen echten Dezimalbruch, b eine beliebige positive Zahl und G irgend eine von den zwischen 0 und 9000 liegenden ganzen Zahlen bedeutet, ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\Lambda \underline{b \cdot \left(1 + \frac{G + 0,(\omega)}{1000}\right)} = \Lambda b + \Lambda \underline{1 + \frac{G + 0,(\omega)}{1000}}$$

bis auf wenigstens fünf Dezimalbruchstellen.

Derselbe Satz gilt nach § 2, V. auch dann, wenn $G = 0$ ist. Kann aber G sowohl 0 als auch jede zwischen 0 und 9000 liegende ganze Zahl sein, so bedeutet $1 + \frac{G + 0,(\omega)}{1000}$ jeden unechten Dezimalbruch mit einzifferigem Kopf (d. i. 1,000 . . . . bis zu 9,99999 . . . . .). Hieraus folgt:

I. Bedeutet $k,(\varphi)$ einen positiven Dezimalbruch mit einzifferigem Kopf und b eine beliebige positive Zahl, so ist

$$\Lambda \underline{b \cdot k,(\varphi)} = \Lambda b + \Lambda \underline{k,(\varphi)}$$

B. 1) Ersetzt man in Nr. I. das b durch 10^g, so ergiebt sich durch § 5, 2, dafs

$$g \cdot \Lambda 10 + \Lambda \underline{k,(\varphi)} = \Lambda \underline{10^g \cdot k,(\varphi)} \quad \text{ist.}$$

2) Ersetzt man in Nr. I. das b durch $\beta \cdot 10^g$, wobei auch β jeden positiven Wert haben kann, so findet man bei Berücksichtigung von § 5, 2, dafs

$$\begin{aligned} \Lambda \underline{\beta \,.\, (10^g \cdot k,(\varphi))} &= \Lambda \underline{(\beta \cdot 10^g) \cdot k,(\varphi)} \\ &= \Lambda \beta + g \,.\, \Lambda 10 + \Lambda \underline{k,(\varphi)} \\ &= \Lambda \beta + \Lambda \underline{10^g \cdot k,(\varphi)} \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

$10^g \cdot k,(\varphi)$ bedeutet aber sowohl jeden unechten Dezimalbruch als auch jede ganze Zahl, also überhaupt jede Zahl, die gröfser als 1 ist. Hieraus folgt,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. dafs das an der Spitze von § 6 bezüglich des Logarithmus eines Produkts erwähnte Gesetz gültig ist, wofern wenigstens ein Faktor gröfser als 1 ist.

C. Ist keiner der Faktoren gröfser als 1, sind vielmehr beide echte Dezimalbrüche, der eine etwa $0,(\varphi)$ mit dem Nenner η, der andere $0,(\omega)$ mit dem Nenner ϑ, so sind 1.) η, 2.) ϑ, 3.) $\eta \cdot \vartheta$, 4.) $\eta \cdot 0,(\varphi)$ und 5.) $\vartheta \cdot 0,(\omega)$ gröfser als 1. Daher ist

$$\Lambda \underline{0,(\varphi) \cdot 0,(\omega)} + \Lambda \eta + \Lambda \vartheta = \Lambda \underline{0,(\varphi) \cdot 0,(\omega)} + \Lambda \underline{\eta \cdot \vartheta}$$

$$= \Lambda \underline{0,(\varphi) \cdot 0,(\omega) \cdot \eta \cdot \vartheta} = \Lambda \underline{[0,(\varphi) \cdot \eta] \cdot [0,(\omega) \cdot \vartheta]} = [\Lambda \underline{0,(\varphi)} + \Lambda \eta] + [\Lambda \underline{0,(\omega)} + \Lambda \vartheta],$$

und folglich auch

$$\Lambda \underline{0,(\varphi) \cdot 0,(\omega)} = \Lambda 0,(\varphi) + \Lambda \underline{0,(\omega)}.$$

Aus der Zusammenstellung dieses Ergebnisses mit Nr. II. ergiebt sich schliefslich der Satz:

III. Für alle positive Werte von b und c ist

$$\Lambda \underline{b \cdot c} = \Lambda b + \Lambda c.$$

§ 7.

Aus § 6, III. ergeben sich leicht die übrigen die Logarithmen betreffenden Gesetze, nämlich:

I. $\Lambda \underline{b : c} = \Lambda b - \Lambda c,$

II. $\Lambda \underline{b^n} = n \cdot \Lambda b,$

III. $\Lambda \underline{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{n} \cdot \Lambda b,$

sowie auch

IV. $\Lambda \underline{\sqrt[n]{10^z}} = \frac{z}{n}.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 8. $\Lambda \underline{10.}$

Wenn etwa $\Lambda 10 = x$ ist, so ist (vergl. § 1, II. und § 3)

1) $\Lambda 1000 = 3x$	2) $\Lambda 100 = 2x$
$\Lambda 1024 = 3x + 0{,}01\,030$	$\Lambda 125 = 2x + 0{,}09\,691$
$\Lambda 2 = \frac{3}{10}x + 0{,}00\,103$	$\Lambda 5 = \frac{2}{3}x + 0{,}03\,230\,33\ldots$

und daher

$$3)\ x = \Lambda 10 = \Lambda 2 + \Lambda 5 = \tfrac{3}{10}x + 0{,}00103 + \tfrac{2}{3}x + 0{,}03\,230\,33\ldots,$$

d. i. $\frac{1}{30}x = 0{,}03\,333\,33\ldots$, d. i. $x = 0{,}99\,999\,9\ldots = 1$.

Folglich ist $\Lambda 10 = 1$ und $\Lambda \underline{10^g} = g$, wenn g ganz ist.

§ 9. Wozu dienen die Logarithmen?

A. Wenn man erklärt, unter 10^α auch in den Fällen, wo α nicht positiv und ungebrochen ist, diejenige Zahl verstehen zu wollen, deren Logarithmus gleich α ist, — so hat man allgemein

1) $a = 10^{\Lambda \underline{a}}$ und $b = 10^{\Lambda \underline{b}}$, sowie nach § 7, IV.

2) $10^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{10^z}$ zu setzen.

B. Wenn man hierzu ferner noch erklärt, auch die unechten Potenzen von 10 nach den für echte Potenzen geltenden Gesetzen behandeln zu wollen — so ist man nicht nur berechtigt, sondern sogar genötigt, auch folgende Formeln aufzustellen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) $ab = 10^{\Lambda\underline{a} + \Lambda\underline{b}}$; (vergleiche § 6, III.)

4) $a : b = 10^{\Lambda\underline{a} - \Lambda\underline{b}}$; (vergl. § 7, I.)

5) $a^n = 10^{n \cdot \Lambda\underline{a}}$; (vergl. § 7, II.)

6) $\sqrt[n]{a} = 10^{\frac{1}{n} \cdot \Lambda\underline{a}}$. (vergl. § 7, III.)

Diese scheinbar neuen Formeln (Nr. 3 bis 6) sind aber zweifellos richtig; denn sie bedeuten genau dasselbe, wie diejenigen, die bei § 6, III. und bei § 7, I. bis III. angegeben sind. (So kann z. B. sowohl § 9, 3 als auch § 6, III. in folgender Weise übersetzt werden: „Der Wert eines Produkts ist diejenige Zahl, deren Logarithmus gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren ist.“ — Ähnlich verhält es sich mit § 9, 4 und § 7, I, ferner mit § 9, 5 und § 7, II, sowie mit § 9, 6 und § 7, III.)

Wenn man daher bei der Berechnung von Produkten, Quotienten, Potenzen oder Wurzeln nach den unter § 9 neben A und B gegebenen Erklärungen verfährt, so ist jede Gefahr des Irrtums ausgeschlossen.

C. In diesem Sinne kann und mufs man sagen:

I. Die Logarithmen dienen dazu, bestimmte positive Zahlen, Produkte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln in zuverlässig brauchbare Potenzen von 10 zu verwandeln. — Als zuverlässig brauchbar gilt eine Potenz aber dann, wenn sie, nach den für echte Potenzen geltenden Gesetzen behandelt, nicht zu Fehlern führt.

II. Soll einer der genannten Zahlenausdrücke in eine Potenz von 10 verwandelt werden, so kann der Exponent dieser Potenz nur der Logarithmus jenes Zahlenausdrucks sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

D. Durch Nr. I. ist auch der Gang der logarithmischen Berechnung der dort genannten Zahlenausdrücke genau angegeben. Er kann nur folgender sein:

α) der Zahlenausdruck wird in eine brauchbare Potenz von 10 verwandelt,

β) der Wert dieser Potenz von 10 wird bestimmt unter Berücksichtigung der bei A gegebenen Erklärung.

γ) Anm. Beiden Zwecken dient die Logarithmentafel. Sie ist Lexikon und Nokixel zugleich.

§ 10. **Hauptregeln für den Gebrauch der Logarithmentafel.**

A. v soll eine vierzifferige und g eine beliebige ganze Zahl bedeuten. Alsdann ist jede positive Zahl entweder ein v oder $v \cdot 10^g$ oder $v : 10^g$ oder $v + 0,(\omega)$ oder $[v + 0,(\omega)] \cdot 10^g$ oder $[v + 0,(\omega)] : 10^g$. Es fragt sich also: „wie ist $\Lambda \underline{v + 0,(\omega)}$ leicht zu finden?“ Zur Beantwortung dient folgendes.

Weil $\frac{0,86\ldots}{2v} = \frac{0,86\ldots}{2v+1} + \frac{0,86\ldots}{4 \cdot v^2 + 2v} < \frac{0,86\ldots}{2v+1} + \frac{0,86\ldots}{4 \cdot 1000^2} < \frac{0,86\ldots}{2v+1} + 0,00\,000\,022$

und $\frac{0,86\ldots}{2v+1} < \frac{0,86\ldots}{2v + 0,(\omega)} < \frac{0,86\ldots}{2v}$ ist, so ist auch

$$0,(\omega) \cdot \frac{0,86\ldots}{2v+1} < 0,(\omega) \cdot \frac{0,86\ldots}{2v + 0,(\omega)} < 0,(\omega) \cdot \frac{0,86\ldots}{2v+1} + 0,00\,000\,022.$$

Weil ferner nach § 1, I

$$0,(\omega) \cdot \frac{0,86\ldots}{2v + 0,(\omega)} < \Lambda \underline{v + 0,(\omega)} - \Lambda \underline{v} < 0,(\omega) \cdot \frac{0,86\ldots}{2v + 0,(\omega)} + 0,00\,000\,000\,004$$

ist, so mufs auch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$0,(\omega)\,\frac{0,86\ldots}{2v+1} < \Lambda\underline{v+0,(\omega)} - \Lambda\underline{v} < 0,(\omega)\cdot\frac{0,86\ldots}{2v+1} + 0,00\,000\,022004$$

und daher bis auf mindestens 5 Bruchstellen $\Lambda\underline{v+0,(\omega)} - \Lambda\underline{v} = 0,(\omega)\cdot\frac{0,86\ldots}{2v+1}$ sein. Weil endlich nach § 2, VII. $\frac{0,86\ldots}{2v+1} = \Lambda\underline{v+1} - \Lambda\underline{v}$ ist, so ergiebt sich die sehr einfache Regel:

I. $\Lambda\underline{v+0,(\omega)} = \Lambda\underline{v} + 0,(\omega)\cdot[\Lambda\underline{v+1} - \Lambda\underline{v}]$, wofern v eine vierzifferige ganze Zahl und $0,(\omega)$ ein echter Bruch ist.

Bemerkung: Die „P. P." der Logarithmentafel sind überflüssig.

B. Wird ein Zahlenausdruck nach § 9 in eine Potenz von 10 verwandelt, so wird diese Potenz entweder 10^3 oder 10^{3+g} oder $10^{3-g} = 10^3 : 10^g$ oder $10^{3,(s)}$ oder $10^{3,(s)+g} = 10^{3,(s)}\cdot 10^g$ oder $10^{3,(s)-g} = 10^{3,(s)} : 10^g$.

Für die Bestimmung des Wertes von $10^{3,(s)}$ ergiebt sich aber, falls er nicht unmittelbar aus der Logarithmentafel abgelesen werden kann, aus § 1, I. und § 10, I. folgende Regel:

II. „Nachdem durch Vergleichung des Exponenten „$3,(s)$" mit den in der Logarithmentafel angegebenen Logarithmen der vierzifferigen ganzen Zahlen festgestellt worden ist, dafs $\Lambda\underline{v} < 3,(s) < \Lambda\underline{v+1}$ ist, mufs $10^{3,(s)} = v + \frac{3,(s) - \Lambda\underline{v}}{\Lambda\underline{v+1} - \Lambda\underline{v}}$ gesetzt werden."

(Vergleiche: Breuer, Die gemeinen Logarithmen. 2. Auflage. Leipzig 1894.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nachwort.

(Auch Inhaltsverzeichnis.)

Durch Anwendung von rein elementaren Mitteln, die jedem ordentlichen Gymnasial-Sekundaner zu Gebote stehen müssen, hat sich folgendes ergeben:

I. Die unter § 1 gegebene Definition führt zu dem allereinfachsten und darum „empfehlenswertesten" Verfahren für die Berechnung der gem. Logarithmen. (cf. § 3 und § 5, 3 u. 4.) (Sollte jemals Einer etwa eine 40-stellige Logarithmentafel zu schaffen beabsichtigen, so möge er § 1, I. und § 2, III. als die rechten Wegweiser ansehen.)

II. Die auf Grund von § 1, I. und der daraus abgeleiteten Formeln berechneten Logarithmen haben die Eigenschaft, dafs

1) $\Lambda a + \Lambda b = \Lambda \underline{a \cdot b}$ (cf. § 4, III und § 6),

2) $\Lambda a - \Lambda b = \Lambda \underline{a : b}$ (cf. § 7),

3) $n \cdot \Lambda a = \Lambda \underline{a^n}$ (cf. § 7),

4) $\frac{1}{n} \cdot \Lambda a = \Lambda \underline{\sqrt[n]{a}}$ (cf. § 7),

5) $\Lambda 10 = 0{,}999 \ldots = 1$ (cf. § 8)

wird; und dafs

6) (cf. § 9) ohne Gefahr für die Richtigkeit und Zuverlässigkeit der darauf aufgebauten Berechnungen allgemein „$a = 10^{\Lambda \underline{a}}$" gesetzt werden kann.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(Die Frage nach der Bedeutung der unechten Potenzen in der allgemeinen Arithmetik kümmert uns hier gemäfs § 9 gar nichts. Dennoch ist sie zum Teil schon in § 9, 2 beantwortet.)

III. In § 1, 1 finden auch die beim Gebrauch der Logarithmentafeln zu beachtenden Regeln, die in den den Tafeln beigefügten Gebrauchsanweisungen für den handwerksmäfsigen Gebrauch nur durch einige Beispiele illustriert zu sein pflegen, ihre Begründung. (cf. § 10.)

IV. „Last, not least“: Die in dem Titel der Abhandlung liegende Behauptung ist bewiesen.

Wenn man nun noch berücksichtigt, dafs an preufsischen Gymnasien ein Teil der Logarithmenlehre „schon in O. III. behandelt werden“, ein Teil auch in U. I. bei den für diese Stufe vorgesehenen vertiefenden Wiederholungen besprochen werden darf und dafs die notwendigen numerischen Berechnungen (cf. § 3) bereits in IV. oder U. III. fertig zu stellen sind, so kann man kaum mehr zurückhalten mit der weitern Behauptung: „Der preufsische Lehrplan von 1891 ermöglicht es, die Schüler des Gymnasiums dahin zu führen, dafs sie bezüglich der Lehre von den gemeinen Logarithmen in Wahrheit sagen können: „„Nichts geht uns drüber.““

Wipperfürth, im Mai 1898.

Der Verfasser.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wipperfürth, im Mai 1898.

Der Verfasser.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf