PROGYMNASIUM ZU WIPPERFÜRTH.

BEILAGE ZU DEM JAHRESBERICHT ÜBER DAS SCHULJAHR 1889—1890.

DIE LEHRE VON DEN LOGARITHMEN,

NACH

VORWIEGEND SUCHENDEM LEHRVERFAHREN BEHANDELT

VON

PETER JOSEPH BREUER,

REKTOR.

REALGYMNASIUM DÜSSELDORF BIBLIOTHEK

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1890.

1890. Progr. Nr. 459.

QW1
31 (1890)

1293,10,6

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK
DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vorwort.

I. Veranlassung der Abhandlung.

Mehrere Freunde der mathematischen Wissenschaft, die nur als Gymnasiasten Gelegenheit gehabt hatten, sich mit derselben zu beschäftigen, hat Verfasser dieser Abhandlung klagen hören, es sei ihnen in der Lehre von den Logarithmen trotz redlichsten Bemühens mehr als ein Punkt völlig unklar geblieben. Diese Klage wurde in der Regel durch Bemerkungen wie folgende erläutert: 1) „Ich habe mich zwar als Gymnasiast" (so hiefs es ungefähr wörtlich) „durch manche schwierige Aufgabe „„durchgebissen"", aber nie habe ich recht erkennen können, aus welchem vernünftigen Grunde man Logarithmen von einer gewissen Grundzahl, die man nicht einmal genau angeben kann, natürliche Logarithmen nennt. Mir will es sogar scheinen, als ob die Zehnlogarithmen die sog. natürlichen an Natürlichkeit weit überträfen." — 2) „Über die Herstellung der Logarithmentafeln ist mir sowohl im Unterrichte als auch vom Lehrbuche nur mitgeteilt worden, dieselben würden mit Hilfe der 'höhern' Mathematik berechnet. Dies hat mich durchaus nicht befriedigt. Ich bin der Ansicht, dafs, wenn es nicht einen Weg giebt, auf dem auch der 'elementare Mathematiker' im vollen Bewufstsein richtigen Verfahrens sich seine Tafel berechnen kann, die Logarithmentafeln aus der Bibliothek des Gymnasiasten zu entfernen sind." — 3) „Bei der Anleitung zum Gebrauche der Logarithmentafel wurde die Regel aufgestellt: 'Es verhalten sich die Differenzen der Logarithmen wie die Differenzen ihrer Logarithmanden, wofern letztere Differenzen im Vergleich mit den Logarithmanden sehr klein sind', oder 'Bei im Vergleich mit dem Numerus kleinen Zunahmen im Numerus sind (annähernd) die Zunahmen in den Logarithmen denen der zugehörigen Numeri proportional.' Ein Beweis für die Zuverlässigkeit dieser an sich sogar unwahrscheinlichen Regel wurde nicht geliefert. Statt dessen hiefs es einfach, wie auch der Wortlaut derselben schon vermuten liefs: 'Die höhere Analysis lehrt's.' Die unausbleibliche traurige Folge hiervon war aber die, dafs das Rechnen mit Hilfe der Logarithmentafel in gewisser Hinsicht nur als eine rein mechanische Arbeit erscheinen konnte, die eigentlich als eine des Schülers unwürdige gesetzlich hätte verboten werden müssen." —

Wieviel von diesen und ähnlichen Klagen der objektiven Wahrheit entspricht, wieviel davon als Übertreibung aufzufassen ist, wollen wir hier nicht entscheiden. Etwas Wahres liegt ihnen immerhin zu Grunde, und zwar genug, um allen Lehrern der elementaren Mathematik und besonders den Verfassern von Lehrbüchern bezüglich der Logarithmenlehre eine gründliche Gewissenserforschung zur Pflicht zu machen. Denn dem Schüler irgend etwas zu bieten, was er nicht einmal soll begreifen können, — oder ihm etwas vorzubehalten, wonach zu fragen der wifsbegierige jugendliche Geist sich gedrungen fühlt, — oder ihn nach einer nicht bewiesenen Regel sogar ohne Aussicht auf einen später nachzuholenden Beweis arbeiten zu lassen, — das

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wäre vor allen für einen Mathematiker eine Sünde, durch die er seine Wissenschaft in Mifsachtung bringen würde. Solche Sünden aber sind selbst in ganz neuen Lehrbüchern (vom Jahre 1887 und 1890) nicht vermieden.

Diese Erfahrungen haben sowohl die Entstehung der vorliegenden Abhandlung als auch die Aufstellung folgender Grundsätze veranlafst.

II. Grundsätze.

1. Höhere Mathematik ist im gymnasialen Unterrichte durchaus unerwähnt zu lassen.

2. Jeder im mathematischen Unterrichte (auch in der Lehre von den Logarithmen) verwendete Satz, jede Regel, nach welcher gearbeitet werden soll, mufs in elementarer Weise begründet werden. Ist dieses nicht möglich, so ist der Gegenstand, der die Berufung auf einen solchen Satz oder die Anwendung einer solchen Regel notwendig macht, aus der Schulmathematik zu entfernen.

3. Die Lehre von den Logarithmen ist und bleibt mit Recht ein Teil der mathematischen Lehraufgabe des Gymnasiums. (Die unter Nr. 2 gestellten Forderungen können hier voll und ganz erfüllt werden. Vergleiche besonders § 7a, § 13a, § 29 und § 30 der Abhandlung.)

4. Die Logarithmentafel mufs geistiges Eigentum der Schüler werden. — a) Zu diesem Zwecke mufs der Gymnasiast dazu angeleitet werden, im vollen Bewufstsein richtigen Verfahrens ein Stück der Tafel selbst zu berechnen. — b) Nachdem die Zuverlässigkeit der anzuwendenden Regel bewiesen ist (s. § 13a, § 13c und § 14 der Abhandlung), kann ein solcher Teil der Logarithmentafel in einigen mäfsig grofsen häuslichen Aufgaben hergestellt werden.

5. Von einer Besprechung der natürlichen Logarithmen kann nicht Abstand genommen werden.

6. Das Lehrbuch darf bezüglich der Logarithmenlehre nicht allzu knapp gehalten sein; es soll weit mehr bieten, als man von dem Schüler notwendig verlangen mufs.

7. Im Unterrichte biete man zur Klarstellung des einzelnen möglichst viel und jedes möglichst vielseitig, verlange aber nicht, dafs der Schüler jeden besprochenen Beweis, jede angestellte Berechnung völlig selbständig wiedergebe, begnüge sich vielmehr bei einigen besonders schwierigen Punkten mit dem Bewufstsein, dafs die Schüler von der Richtigkeit des Endergebnisses der in der Klasse angestellten Untersuchung hinreichende Überzeugung gewonnen haben. Solche Punkte aber, bei denen letzteres ratsam erscheint, mufs der Gymnasiast in seinem Lehrbuche in ausführlicher Behandlung schwarz auf weifs besitzen.

8. Einen Beweis, der etwa für Sekundaner zu schwierig erscheinen sollte, auf die Prima zu verschieben, ist in einzelnen Fällen zulässig, wofern ihn das Lehrbuch an der rechten Stelle ausführlich mitteilt.

9. Im mathematischen Unterrichte ist im allgemeinen das suchende Lehrverfahren jedem andern vorzuziehen.

10. Soll das Logarithmieren mit seiner Umkehrung (dem sog. Numerieren) einerseits über den „handwerksmäfsigen“ Betrieb emporgehoben, andererseits aus seiner „Transcendenz“ in das Diesseits des elementaren Unterrichts herübergeholt werden, so ist es durchaus notwendig, dafs für beides einfache eigentliche Rechnungszeichen eingeführt werden, die ohne „Voltigierübungen“ ein Lesen der Formeln sowohl von rechts nach links als auch von links nach rechts ermöglichen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III. Bemerkungen.

Zur Abhandlung selbst sei noch folgendes vorausbemerkt:

1. Die geschichtlich ursprüngliche Bedeutung des Logarithmus („Zahl der Verhältnisse") ist aus dem Grunde unterdrückt worden, weil sie für den Unterricht wertlos erschien.

2. Der Ausdruck „Charakteristik" und das barbarische Wort „Mantisse" (am treffendsten wohl durch das in der Fleischersprache gebräuchliche Wort „Beihau" übersetzt) sind absichtlich vermieden, letzteres auch deshalb, weil mit den in den Tafeln (unter der Überschrift „Log") neben den Logarithmanden angegebenen ganzen Zahlen doch nur wie mit ganzen Zahlen gerechnet wird, während die sog. Mantisse ein echter Dezimalbruch sein soll.

3. Die verwendeten Zeichen des Logarithmierens und Numerierens sind nicht ganz neu. Sie sind bereits im Jahre 1877 in der um die Schulmathematik hochverdienten „Zeitschrift von J. C. V. Hoffmann" einmal besprochen worden. In Lehrbüchern findet man für das Logarithmieren die denkbar verschiedensten Bezeichnungen, z. B. ${}^{n}\log a$, $\overset{n}{\log} a$, $\log_n a$, $\underset{n}{\log} a$, $\underset{(n)}{\log} a$, $\log a_{(n)}$, $\log a_n$. Zu den gewöhnlichen Bezeichnungen des Numerierens sei hier nur bemerkt, dafs in „num log a" und „$\bigwedge$ log a" jeder Unbefangene ein grofses Stück Inkorrektheit finden mufs; denn einerseits ist es durchaus selbstverständlich, dafs diejenige Zahl, zu welcher man den Numerus sucht, als ein Logarithmus zu betrachten ist, und andererseits würde es der Bedeutung von „log a" nur entsprechen, wenn man „num log $a = a$" und „$\bigwedge$ log $b = b$" setzte. Es wäre daher wohl an der Zeit, dafs endlich einmal einfache Bezeichnungen allgemein angenommen würden.

4. Die Behandlung des Numerierens als einer besondern Rechnungsart hält der Verfasser für wohl berechtigt. Wenigstens ist das Numerieren von jeder andern Rechnungsart weit mehr verschieden als das Potenzieren mit einer ganzen Zahl vom Multiplizieren.

5. Die eingangs der Vorrede erwähnten Kläger mögen besonders aufmerksam gemacht werden a) bezüglich des ersten Punktes der Klage: auf § 7, § 14 und § 26, — b) bezüglich des zweiten Klagepunktes: auf § 8, § 13a, § 13b, § 13c, § 14 und § 26, — c) bezüglich des dritten Punktes: auf § 29, § 30 und § 36. Hoffentlich werden sie sich „durchbeifsen". Zugleich sei ihnen für ihre freimütige Meinungsäufserung auch an dieser Stelle herzlichst gedankt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
Vorwort.	I. Veranlassung der Abhandlung	III
	II. Thesen	IV
	III. Bemerkungen	V
§ 1.	Begriff des Logarithmierens; Grundsätze	1
§ 2.	Form der wirklichen Logarithmen	3
§ 3.	Gröfse der wirklichen Logarithmen in Bezug auf 0 und 1	4
§ 4.	Die Zehnlogarithmen und das Zehnerziffernsystem	6
§ 5.	Berechnung der Logarithmen aus ihrem Begriffe	8
§ 6.	Logarithmentafeln	11
§ 7.	Die natürlichen Logarithmen	12
§ 7a.	Prüfung der Sätze des § 7; Beweis zu § 7, A	13
§ 8.	Abgekürzte Formeln für die Berechnung der natürlichen Logarithmen auf n Dezimalbruchstellen	18
§ 9.	Folgerungen aus § 7, B	19
§ 10.	Natürliche Logarithmen von Produkten und Potenzen	20
§ 11.	Natürliche Logarithmen von Quotienten und Wurzeln	21
§ 12.	Der natürliche Logarithmus einer Differenz	22
§ 13.	$\underset{e}{\Lambda}\underline{1 \pm \omega : 10^n} = \pm \omega : 10^n$	22
§ 13a.	Beweis für die Zuverlässigkeit des in § 8 bei B ausgesprochenen Satzes	24
§ 13b.	Prüfung der in § 7 berechneten Logarithmen von 2, 8, 9, 10, 5 und 3	26
§ 13c.	Berechnung der Tafel der fünfstelligen natürlichen Logarithmen	28
§ 14.	Die künstlichen Logarithmen überhaupt; ihre Berechnung aus den natürlichen	28
§ 15.	Der Quotient und das Produkt zweier Logarithmen	29
§ 16.	Die Summe und die Differenz zweier Logarithmen	30
§ 17.	Produkt und Quotient aus einem Logarithmus und einer wirklichen Zahl	31
§ 18.	Umkehrung der in § 16 und 17 aufgestellten Sätze	32
§ 19.	Andere Herleitungen der in § 18 ausgesprochenen Sätze	32
§ 20.	Direkte Beweise der Sätze des § 18	35
§ 21.	Logarithmen von Summen und Differenzen	35
§ 22.	Wodurch kann man logarithmieren? (Durch Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten, Potenzen, Wurzeln?)	35
§ 23.	Die Zehnlogarithmen oder gemeine Logarithmen	37
§ 24.	Rationalität und Irrationalität der gemeinen Logarithmen	38
§ 25.	Gemeine Logarithmen mit durchaus gleichen Schwänzen	38
§ 26.	Einfache Berechnung der gemeinen Logarithmen	39
§ 27.	Verkürzung der Formeln des § 26 für die Berechnung bis auf n Bruchstellen	39
§ 28.	Gleichheit abgekürzter Logarithmen von verschiedenen Logarithmanden	40
§ 29 und 30.	Berechnung von $\Lambda\underline{a+z}$ auf n Bruchstellen aus $\Lambda\underline{a}$ und $\Lambda\underline{a+1}$	42
§ 31 und 32.	Bestimmung der gemeinen Logarithmen mit Hilfe der siebenstelligen resp. der fünfstelligen Logarithmentafeln	43
§ 33.	Umkehrung des Logarithmierens, das Numerieren	46
§ 34.	Numerieren durch e, durch a, durch 10	47
§ 35.	Numerieren einer Summe, einer Differenz und einer negativen Zahl	47
§ 36.	Numerieren durch 10 mit Hilfe der gemeinen Logarithmentafel	47
§ 37.	Numerieren durch eine beliebige positive Zahl m mit Hilfe der gemeinen Logarithmentafel	50
§ 38.	Logarithmische Berechnung gegebener Zahlenausdrücke	50

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 1. Begriff des Logarithmus; Erklärung des Logarithmierens.

n	L
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1 024	10
2 048	11
4 096	12
8 192	13
16 384	14
32 768	15
65 536	16
131 072	17
262 144	18
524 288	19
1 048 576	20
2 097 152	21
4 194 304	22
8 388 608	23
16 777 216	24
33 554 432	25

Die nebenan stehende Tafel enthält unter der Überschrift n die 25 ersten echten Potenzen von 2 und unter L die entsprechenden Potenzexponenten.

Mit Hilfe derselben kann man die Ergebnisse gewisser Berechnungen, die mit den angegebenen Potenzen von 2 angestellt werden sollen, in sehr bequemer Weise bestimmen oder vielmehr ablesen. Es ist z. B.

$$2048 \cdot 4096 = 2^{11} \cdot 2^{12}$$
$$2^{11} \cdot 2^{12} = 2^{23}$$

$2^{23} = 8\,388\,608$, und folglich $2048 \cdot 4096 = 8\,388\,608$.

Von diesen vier Gleichungen sind die erste und die dritte aus der Tafel abzulesen; nur die zweite ist durch Rechnen und zwar durch Addition der Potenzexponenten gebildet.

Ebenso ist

$$16\,777\,216 : 65\,536 = 2^{24} : 2^{16}$$
$$2^{24} : 2^{16} = 2^{8}$$

$2^8 = 256$, und mithin u. s. w.

Ferner ist

$$128^3 = (2^7)^3 = 2^{21} = 2\,097\,152, \text{ sowie } \sqrt[5]{33\,554\,432} = \sqrt[5]{2^{25}} = 2^5 = 32.$$

I. Weil nun in solchen Fällen nur mit den Potenzexponenten gerechnet wird, während alles Übrige aus der Tafel abgelesen werden kann, so nennen wir die Potenzexponenten auch „Logarithmen“, λόγου ἀριθμοί, d. i. Zahlen, auf welche sich beim Rechnen das Nachdenken (der Verstand) zu richten hat, d. i. Rechnungszahlen.

Diesem entsprechend wird das Bestimmen eines unbekannten Potenzexponenten (eines Logarithmus) aus der bekannten Grundzahl und dem wirklichen Werte der Potenz „Logarithmieren“ genannt, und letzteres in folgender Weise erklärt:

II. Durch eine Zahl (logarithmische „Grundzahl“ oder Grundzahl des Logarithmus) eine andere („Zahl“, Numerus oder Logarithmand) logarithmieren heifst: diejenige neue Zahl (Logarithmus) bestimmen, mit welcher man jene erste Zahl (Grundzahl) potenzieren mufs, um die andere Zahl (den Logarithmanden) als wirkliche Potenz zu erhalten.

Anmerkung. Hieraus ergiebt sich folgendes:

a) a^n logarithmiert durch a, giebt n;
9 logarithmiert durch 3, giebt 2, weil $3^2 = 9$ ist;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

256 logarithmiert durch 4, giebt nicht 3, weil 4^3 nicht gleich 256 ist;
78 125 logarithmiert durch 5, giebt mehr als 6, jedoch weniger als 8, weil 5^6 weniger und 5^8 mehr als 78 125 ist.

b) Das Logarithmieren ist höchst leicht, sobald es gelungen ist, den Logarithmanden als eine formelle Potenz der logarithmischen Grundzahl darzustellen. So giebt z. B. „$a^2 + c^2 + 2ac$, logarithmiert durch $a + c$“, dasselbe wie „$(a + c)^2$, logarithmiert durch $a + c$“; und dieses giebt 2.

III. Um anzudeuten, daſs n durch a logarithmiert werden soll, schreiben wir: $\underset{a}{\Lambda}\underline{n}$ und lesen: „n logarithmiert durch a“ oder „a Logarithmus von n“. Der „formelle Logarithmus“, $\underset{a}{\Lambda}\underline{n}$, bedeutet also diejenige Zahl, mit welcher man a potenzieren muſs, um n zu erhalten; und die Frage: „Was giebt $\underset{a}{\Lambda}\underline{n}$“ ist demnach gleichbedeutend mit der Frage: „Womit muſs man a potenzieren, um n zu erhalten?“

Anmerkung. Wie das Wurzelzeichen aus dem lateinischen Buchstaben r, so ist das Zeichen des Logarithmierens aus dem griechischen Λ entstanden.

IV. Aus der Erklärung des Logarithmierens ergeben sich folgende Grundsätze:

1) Wenn $a^\alpha = n$ ist, so ist $\alpha = \underset{a}{\Lambda}\underline{n}$. — Durch Logarithmieren wird der unbekannte Exponent einer formellen Potenz aus der wirklichen Potenz und der bekannten Grundzahl berechnet.

2) $\underset{a}{\Lambda}\underline{n}$ ist dann und nur dann gleich α, wenn $a^\alpha = n$ ist. — Den unbekannten Logarithmanden eines formellen Logarithmus findet man dadurch, daſs man die bekannte logarithmische Grundzahl mit dem wirklichen Logarithmus potenziert.

3) $\underset{a}{\Lambda}\underline{1} = 0$; 4) $\underset{a}{\Lambda}\underline{a} = 1$; 5) $\underset{a}{\Lambda}\underline{a^c} = c$; 6) $a^{\underset{a}{\Lambda}\underline{n}} = n$.

7) Der Wert von $\underset{1}{\Lambda}\underline{1}$ ist unbestimmt; er kann jede wirkliche Zahl sein.

8) Für $\underset{1}{\Lambda}\underline{a}$ kann, wenn a von 1 verschieden ist, kein wirklicher Wert angegeben werden.

9) Gleiches durch Gleiches logarithmiert giebt Gleiches.

10) Wenn man zwei verschiedene Logarithmanden durch eine und dieselbe Grundzahl, die gröſser als 1 ist, logarithmiert, so wird der wirkliche Logarithmus um so gröſser, je gröſser der Logarithmand ist.

Ist $n > r$, $\underset{a}{\Lambda}\underline{n} = b$, $\underset{a}{\Lambda}\underline{r} = c$ und $a < 1$, so muſs $a^b = n$, $a^c = r$, $a^b > a^c$ und folglich $\left(\frac{1}{a}\right)^b < \left(\frac{1}{a}\right)^c$ sein. Da nun aber $a < 1$ und demnach $\frac{1}{a} > 1$, so kann nur dann $\left(\frac{1}{a}\right)^b < \left(\frac{1}{a}\right)^c$ sein, wenn $b < c$ ist. Also muſs hier $b < c$, und daher auch $\underset{a}{\Lambda}\underline{n} < \underset{a}{\Lambda}\underline{r}$ sein, d. h.

11) Wenn man zwei verschiedene Logarithmanden durch eine und dieselbe Grundzahl, die positiv aber kleiner als 1 ist, logarithmiert, so wird der Logarithmus um so kleiner, je gröſser der Logarithmand ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

V. Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{n} = c$, so ist $n = a^c$, und daher auch

$n^s = (a^s)^c$	$\sqrt[r]{n} = \sqrt[r]{a}^c$	$n^{1:c} = a$
$c = \underset{a^s}{\Lambda}\underline{n^s}$	$c = \underset{\sqrt[r]{a}}{\Lambda}\underline{\sqrt[r]{n}}$	$1 : c = \underset{n}{\Lambda}\underline{a}$
		$c = 1 : \underset{n}{\Lambda}\underline{a}$.

Hieraus folgt, dafs $\underset{a}{\Lambda}\underline{n} = \underset{a^s}{\Lambda}\underline{n^s} = \underset{\sqrt[r]{a}}{\Lambda}\underline{\sqrt[r]{n}} = 1 : \underset{n}{\Lambda}\underline{a}$, d. h.

1) Ein formeller Logarithmus bleibt seinem Werte nach unverändert,

α) wenn man ihn erweitert, d. h. wenn man sowohl den Logarithmanden, als auch die Grundzahl mit einer und derselben Zahl potenziert $\left(\underset{2}{\Lambda}\underline{5} = \underset{4}{\Lambda}\underline{25}\right)$.

β) wenn man ihn abkürzt, d. h. wenn man gleichzeitig den Logarithmanden und die Grundzahl durch eine und dieselbe Zahl radiziert $\left(\underset{9}{\Lambda}\underline{49} = \underset{3}{\Lambda}\underline{7}\right)$.

2) Wenn man in einem formellen Logarithmus den Logarithmanden und die Grundzahl miteinander vertauscht, so erhält man den reziproken Logarithmus, d. i. den reziproken Wert des ursprünglich vorhandenen Logarithmus $\left(\underset{3}{\Lambda}\underline{9} = 2 = 1 : \frac{1}{2} = 1 : \underset{9}{\Lambda}\underline{3}\right)$.

Anmerkung. Weil es Logarithmen giebt, deren Werte ganze Zahlen sind, so mufs es auch solche geben, deren Werte Brüche sind $\left(\underset{49}{\Lambda}\underline{7} = 1 : \underset{7}{\Lambda}\underline{49} = \frac{1}{2}\right)$.

Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{n} = c$, so ist $a^c = n$, und folglich auch

$\left(\frac{1}{a}\right)^c = \frac{1}{n}$	$a^{-c} = \frac{1}{n}$;	$\left(\frac{1}{a}\right)^{-c} = n$
$\underset{\frac{1}{a}}{\Lambda}\underline{\frac{1}{n}} = c$	$\underset{a}{\Lambda}\underline{\frac{1}{n}} = -c$; $-\underset{a}{\Lambda}\underline{\frac{1}{n}} = c$.	$\underset{\frac{1}{a}}{\Lambda}\underline{n} = -c$; $-\underset{\frac{1}{a}}{\Lambda}\underline{n} = c$.

Also ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{n} = \underset{\frac{1}{a}}{\Lambda}\underline{\frac{1}{n}} = -\underset{a}{\Lambda}\underline{\frac{1}{n}} = -\underset{\frac{1}{a}}{\Lambda}\underline{n}$, d. h.

3) Ein formeller Logarithmus bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man gleichzeitig den Logarithmanden und die Grundzahl durch ihre reziproken Werte ersetzt. Wenn man aber einseitig entweder blofs den Logarithmanden oder blofs die Grundzahl durch den entsprechenden reziproken Wert ersetzt, so wechselt der Wert des Logarithmus sein Vorzeichen.

Anmerkung. Weil es Logarithmen von positivem Werte giebt, so mufs es auch solche von negativem Werte geben $\left(\underset{3}{\Lambda}\underline{\frac{1}{9}} = -2\right)$.

NB. Wir behandeln in den folgenden Paragraphen nur solche Logarithmen, bei denen Logarithmand und Grundzahl positive wirkliche Zahlen sind.

§. 2. Form der wirklichen Logarithmen.

Der wirkliche Logarithmus ist bald eine ganze, bald eine nicht ganze Zahl, bald positiv, bald negativ. (Cf. § 1. II. a, V. 2. und V. 3.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I. Ist der wirkliche Logarithmus eine positive, aber nicht ganze Zahl, so pflegt man ihn in der Form eines Dezimalbruches anzugeben $\left(\Lambda_9 \underline{3} = 0{,}5\right)$.

In dieser Form hat der Logarithmus vor dem Dezimalkomma seinen „Kopf" (Charakteristik), hinter demselben seinen „Schwanz" (Mantisse).

II. Stellt sich der wirkliche Wert eines Logarithmus als eine negative, nicht ganze Zahl heraus, so verwandelt man ihn in eine Differenz, deren Minuend ein echter Dezimalbruch und deren Subtrahend eine ganze Zahl ist (z. B. $\Lambda_9 \underline{\tfrac{1}{3}} = -\tfrac{1}{2} = 0{,}5 - 1\Big)$. Der wirkliche Logarithmus hat alsdann seinen Schwanz im Minuenden jener Differenz, seinen Kopf aber, der in diesem Falle ein „negativer Kopf" genannt wird, im Subtrahenden, d. i. hinter dem Schwanze.

III. Ist der Schwanz eines Logarithmus wegen seiner Länge unbequem, so wird er (gewöhnlich auf 7 oder 5 Stellen) abgekürzt. Ebenso pflegt man einen kürzern oder scheinbar gar nicht vorhandenen (unsichtbaren) Schwanz durch Anhängen von (wertlosen) Nullen (bis auf 7 oder 5 Stellen) sichtbar zu machen, z. B.

$$\Lambda_{10} \underline{7} = 0{,}845\,10 \qquad (\text{anstatt} = 0{,}845\,0980\ldots),$$

$$\Lambda_9 \underline{3} = 0{,}500\,00 \qquad (\text{anstatt} = 0{,}5),$$

$$\Lambda_9 \underline{\tfrac{1}{3}} = 0{,}500\,00 - 1 \quad (\text{anstatt} = 0{,}5 - 1),$$

$$\Lambda_9 \underline{81} = 2{,}000\,00 \qquad (\text{anstatt} = 2).$$

Die gleichmäfsig abgekürzten Schwänze verschiedener Logarithmen unterscheiden sich nur noch durch ihre „Stärke", worunter die Zahlenwerte der Schwänze an und für sich (nach Tilgung der Köpfe und des Kommas) zu verstehen sind.

Anmerkung. Da Logarithmen mit abgekürzten Schwänzen ungenau sind, so kann der Fall eintreten, dafs in abgekürzter Form zwei Logarithmen von gleicher Grundzahl und ungleichen Logarithmanden einander gleich werden, während sie doch streng genommen verschieden sein müssen, und auch in der That immer verschieden sind, wofern man die Schwänze in ihrer ganzen Länge gelten läfst. So werden z. B. bei fünfstelligen Schwänzen die Zehnlogarithmen von 87 886 und von 87 887 beide gleich 4,943 92; und doch ist genauer dieser = 4,943 9246...., während jener = 4,943 9197.... ist.

§ 3. Gröfse der wirklichen Logarithmen in Bezug auf 0 und 1.

Die nachstehende Tafel ist in Zeilen von links nach rechts zu lesen; z. B. die erste Zeile: „Der 9 Logarithmus von 81 ist 2,000 0000, d. i. genau 2."

Vorbemerkung. Im Folgenden sollen $\bar{a}$ und $\bar{u}$ Zahlen bedeuten, die gröfser als die positive Einheit sind, $\breve{a}$ und $\breve{u}$ dagegen solche, die zwar positiv, aber kleiner als 1 sind.

Unter der in der Vorbemerkung gemachten Voraussetzung gelten folgende Sätze:

1) $\bar{a}$, potenziert mit einer positiven Zahl, giebt stets mehr als 1;
2) $\bar{a}$, potenziert mit einer negativen Zahl, giebt stets weniger als 1;
3) $\breve{a}$, potenziert mit einer positiven Zahl, giebt stets weniger als 1;
4) $\breve{a}$, potenziert mit einer negativen Zahl, giebt stets mehr als 1.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Grundzahlen.	Logarithmanden.	Logarithmen.	
9	81	2,000 0000	(genau = 2)
	9	1,000 0000	1
	3	0,500 0000	$\frac{1}{2}$
	1	0,000 0000	0
	$\frac{1}{3}$	0,500 0000 — 1	$-\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{9}$	0,000 0000 — 1	— 1
$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{729}$	2,000 0000	2
	$\frac{1}{27}$	1,000 0000	1
	$\frac{1}{3}$	0,333 3333	$\frac{1}{3}$
	1	0,000 0000	0
	3	0,666 6667 — 1	$-\frac{1}{3}$
	27	0,000 0000 — 1	— 1
	729	0,000 0000 — 2	— 2

Soll demnach $(\bar{a})^v = \bar{u}$ sein, so mufs v positiv, d. i. gröfser als 0 sein;
soll $(\bar{a})^v = \breve{u}$ sein, so mufs v negativ, d. i. kleiner als 0 sein;
soll $\breve{a}^w = \bar{u}$ sein, so mufs w negativ, d. i. kleiner als 0 sein;
soll $\breve{a}^w = \breve{u}$ sein, so mufs w positiv, d. i. gröfser als 0 sein.

Hiernach ergiebt sich:

1)	$\underset{\bar{a}}{\Lambda}\underline{\bar{u}}$ = einer positiven Zahl;	6)	$\underset{\breve{a}}{\Lambda}\underline{\breve{u}}$ = einer positiven Zahl,
2)	$\underset{\bar{a}}{\Lambda}\underline{\bar{a}} = 1$,	7)	$\underset{\breve{a}}{\Lambda}\underline{\breve{a}} = 1$,
3)	$\underset{\bar{a}}{\Lambda}\underline{1} = 0$,	8)	$\underset{\breve{a}}{\Lambda}\underline{1} = 0$,
4)	$\underset{\bar{a}}{\Lambda}\underline{\frac{1}{\bar{a}}} = -1$,	9)	$\underset{\breve{a}}{\Lambda}\underline{\frac{1}{\breve{a}}} = -1$,
5)	$\underset{\bar{a}}{\Lambda}\underline{\breve{u}}$ = einer negativen Zahl,	10)	$\underset{\bar{a}}{\Lambda}\underline{\bar{u}}$ = einer negativen Zahl;

I. d. h. Liegen Logarithmand und Grundzahl beide auf derselben Seite der ganzen positiven Einheit (d. i. sind beide gröfser als 1 oder beide kleiner als 1), so ist der wirkliche Logarithmus gröfser als 0, d. i. positiv. — Liegen aber Logarithmand und Grundzahl auf verschiedenen Seiten der ganzen Einheit, so ist der wirkliche Lorarithmus kleiner als 0, d. i. negativ.

Vergleicht man Nr. I. mit § 1. IV. 5. und § 1. V. 3., so folgt:

II. Der Logarithmus wird gleich einer positiven ganzen Zahl, wenn der Logarithmand eine echte Potenz der Grundzahl ist; er wird jedoch gleich einer negativen ganzen Zahl, wenn

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Logarithmand eine echte Potenz vom reziproken Werte der Grundzahl ist. (Cf. die Tafel auf voriger Seite.)

11) Ist $\bar{u} < \bar{a}$, so ist $\underset{\bar{a}}{\Lambda}\underline{\bar{u}} < \underset{\bar{a}}{\Lambda}\underline{\bar{a}}$, d. i. < 1; (s. § 1. Nr. 10.)

12) Ist $\bar{u} \overline{\overline{>}} \bar{a}$, so ist $\underset{\bar{a}}{\Lambda}\underline{\bar{u}} \geqq \underset{\bar{a}}{\Lambda}\underline{\bar{a}}$, d. i. $\geqq 1$;

13) Ist $\breve{u} > \breve{a}$, so ist $\underset{\breve{a}}{\Lambda}\underline{\breve{u}} < \underset{\breve{a}}{\Lambda}\underline{\breve{a}}$, d. i. < 1; (s. § 1. Nr. 11.)

14) Ist $\breve{u} \leqq \breve{a}$, so ist $\underset{\breve{a}}{\Lambda}\underline{\breve{u}} \geqq \underset{\breve{a}}{\Lambda}\underline{\breve{a}}$, d. i. $\geqq 1$.

Aus Nr. 11—14 und Nr. I. ergeben sich folgende Sätze:

III. Für eine Grundzahl, die gröfser als 1 ist, wird der Logarithmus ebensogrofs oder gröfser als 1, d. i. gleich einem unechten Dezimalbruche, wenn der Logarithmand ebensogrofs oder gröfser als die Grundzahl ist. (Als unechte Dezimalbrüche gelten auch die ganzen Zahlen. Cf. § 2. III.)

IV. Für eine Grundzahl, die kleiner als 1 ist, wird der Logarithmus ebensogrofs oder gröfser als 1, d. i. gleich einem unechten Dezimalbruche, wenn der Logarithmand ebensogrofs oder kleiner als die Grundzahl ist.

V. Für jede Grundzahl, die von 1 verschieden ist, wird der Logarithmus kleiner als 1, doch gröfser als 0, d. i. gleich einem echten Dezimalbruche, wenn der Logarithmand zwischen 1 und der Grundzahl liegt. (Cf. die Tafel im Eingange des § 3.)

§ 4. **Die Zehnlogarithmen und das Zehner-Ziffernsystem.**

Bezüglich der Logarithmanden betrachten wir in diesem § die Bilder, durch welche sie in unserer gewöhnlichen Ziffernschrift in Form von Dezimalbrüchen dargestellt werden, indem wir auch die ganzen Zahlen als unechte Dezimalbrüche ansehen, deren Schwänze nur aus Nullen bestehen oder unsichtbar sind.

Die folgende Tafel enthält in der 2ten Spalte die Zweilogarithmen, in der 3ten Spalte die Dreilogarithmen und in der 4ten Spalte die Zehnlogarithmen derjenigen Logarithmanden, welche unter der Überschrift n in der 1ten Spalte angegeben sind. Dabei sind die sichtbaren Logarithmenschwänze auf 5 Stellen abgekürzt.

1) Ist a ein unechter Dezimalbruch, dessen Kopf, in Ziffern geschrieben, n Stellen hat, so ist $a \geqq 10^{n-1}$ und zugleich $a < 10^n$. Folglich ist $\underset{10}{\Lambda}\underline{a} \geqq n - 1$, jedoch $< n$. Der Kopf des $\underset{10}{\Lambda}\underline{a}$ mufs daher genau $= n - 1$ sein.

I. Hat also der Kopf des in Form eines unechten Dezimalbruchs geschriebenen Logarithmanden n Stellen, so ist der Kopf des entsprechenden Zehnlogarithmus gleich $n - 1$.

2) $0{,}000\,725 < 0{,}001$, d. i. $< \frac{1}{10^3}$; dagegen $0{,}000\,725 > 0{,}000\,1$, d. i. $> \frac{1}{10^4}$. Daher ist $\underset{10}{\Lambda}\underline{0{,}000\,725} < \underset{10}{\Lambda}\underline{\frac{1}{10^3}}$, jedoch $> \underset{10}{\Lambda}\underline{\frac{1}{10^4}}$, d. i. $\underset{10}{\Lambda}\underline{0{,}000\,725} < -3$, aber > -4. (Cf. § 1. V. 3.) Also ist $\underset{10}{\Lambda}\underline{0{,}000\,725} = -4 + \alpha = \alpha - 4$, wo α ein echter Dezimalbruch sein mufs.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

n	Zwei-logarithmen.	Drei-logarithmen.	Zehn-logarithmen.
0,000 001	0,068 44 — 20	0,424 59 — 13	— 6
0,000 01	0,390 36 — 17	0,525 49 — 11	— 5
0,000 1	0,712 29 — 14	0,616 39 — 9	— 4
0,001	0,034 22 — 10	0,712 29 — 7	— 3
0,01	0,356 15 — 7	0,808 20 — 5	— 2
0,1	0,678 07 — 4	0,904 10 — 3	— 1
1	0	0	0
2	1	0,630 93	0,301 03
3	1,584 96	1	0,477 12
4	2	1,261 86	0,602 06
5	2,321 93	1,464 97	0,698 97
6	2,584 96	1,630 93	0,778 15
7	2,807 35	1,771 24	0,845 10
8	3	1,892 79	0,903 09
9	3,169 92	2	0,954 24
10	3,321 93	2,095 90	1
100	6,643 85	4,191 80	2
1000	9,965 78	6,287 71	3
10 000	13,287 71	8,383 61	4
100 000	16,609 64	10,474 51	5
1 000 000	19,931 56	12,575 41	6

Ist a ein echter Dezimalbruch, der erst auf der $n$ten Stelle hinter dem Komma eine Ziffer von Wert hat, so ist $a < \frac{1}{10^{n-1}}$, aber $\geqq \frac{1}{10^n}$. Folglich ist

$\underset{10}{\Lambda}\underline{a}$ zwar $< \underset{10}{\Lambda}\underline{\frac{1}{10^{n-1}}}$, dagegen $\geqq \underset{10}{\Lambda}\underline{\frac{1}{10^n}}$, d. i. $\underset{10}{\Lambda}\underline{a}$ ist $< -(n-1)$, aber $\geqq -n$ (s. § 1. V. 3.).

Also $\underset{10}{\Lambda}\underline{a} = -n + \alpha = \alpha - n$, wo $\alpha \geqq 0$, aber $\alpha < 1$ sein mufs, d. h. $\underset{10}{\Lambda}\underline{a}$ hat in diesem Falle den Kopf „$-n$“. Hieraus folgt der Satz:

II. Ist der Logarithmand ein echter Dezimalbruch, der erst auf der $n$ten Stelle hinter dem Komma eine Ziffer von Wert hat, so hat der entsprechende Zehnlogarithmus den Kopf „$-n$“.

3) Da nach Nr. I und II aus dem Bilde, durch welches der Logarithmand mit Hilfe der arabischen Ziffern in Form eines Dezimalbruches dargestellt wird, der Kopf des Zehnlogarithmus ohne weiteres abgelesen werden kann, so folgt:

III. Die Zehnlogarithmen sind es, welche unserm Zehner-Ziffernsystem ganz besonders entsprechen. (S. die Tafel.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 5. Berechnung der Logarithmen aus ihrem Begriffe.

I. Alle Fälle, welche beim Logarithmieren einer wirklichen positiven Zahl durch eine andere denkbar sind, können (nach § 1. V. 3) auf den einen Fall zurückgeführt werden, in welchem der Logarithmand und die Grundzahl beide gröfser als 1 sind, wofern wir von dem bereits bekannten $\underset{a}{\wedge}\underline{1} = 0$ hier absehen.

Wir setzen daher für die in Rede stehende Untersuchung im voraus folgendes fest:

1) a und n sind gröfser als 1,
2) k bedeutet eine ganze Zahl, den Kopf des Logarithmus;
3) die griechischen Buchstaben α, β, γ u. s. w. sollen ganze Zahlen, aber kleiner als 10 sein.

II. Dieses vorausgesetzt, mufs notwendig (s. § 2) bis auf 8 Bruchstellen:

1) $\underset{a}{\wedge}\underline{n} = k + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{100} + \frac{\gamma}{1000} + \frac{\delta}{10\,000} + \frac{\varepsilon}{100\,000} + \frac{\vartheta}{1\,000\,000} + \frac{\varkappa}{10\,000\,000} + \frac{\nu}{100\,000\,000}$;

und daher $n = a^{k + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{100} + \frac{\gamma}{1000} + \cdots\cdots + \frac{\nu}{100\,000\,000}}$, d. i.

2) $n = a^k \cdot a^{\frac{\alpha}{10}} \cdot a^{\frac{\beta}{100}} \cdot a^{\frac{\gamma}{10^3}} \cdot a^{\frac{\delta}{10^4}} \cdot a^{\frac{\varepsilon}{10^5}} \cdot a^{\frac{\vartheta}{10^6}} \cdot a^{\frac{\varkappa}{10^7}} \cdot a^{\frac{\nu}{10^8}}$ sein.

3) Umgekehrt folgt aus der Richtigkeit der Gleichung 2) auch die Gültigkeit der Gleichung 1).

Ist nun etwa $a^{\frac{\nu}{10^8}} = q_8$, $a^{\frac{\varkappa}{10^7}} \cdot a^{\frac{\nu}{10^8}} = q_7$, $a^{\frac{\vartheta}{10^6}} \cdot q_7 = q_6$, $a^{\frac{\varepsilon}{10^5}} \cdot q_6 = q_5$, $a^{\frac{\delta}{10^4}} \cdot q_5 = q_4$, $a^{\frac{\gamma}{10^3}} \cdot q_4 = q_3$, $a^{\frac{\beta}{100}} \cdot q_3 = q_2$ und endlich $a^{\frac{\alpha}{10}} \cdot q_2 = q_1$, so ist

$\underset{a}{\wedge}\underline{a^{\frac{\nu}{10^8}}} = \frac{\nu}{10^8}$, d. i. $\geqq 0$, jenachdem $\nu \geqq 0$ ist, und folglich (s. § 3. V.)

4) $a^{\frac{\nu}{10^8}} \geqq 1$, jenachdem $\nu \geqq 0$ ist.

5) Ebenso wie $a^{\frac{\nu}{10^8}}$ und aus demselben Grunde mufs jede von den in Gleichung 2) vorkommenden Potenzen des a, sowie jede der Zahlen q_7, q_6 u. s. w. bis q_1 entweder gröfser oder wenigstens ebensogrofs als 1 sein.

6) Sobald daher irgend ein $q_\omega = 1$ ist, mufs auch $q_{\omega+1}$ und jedes folgende q_ϱ gleich 1 werden.

7) Ferner mufs $q_1 < a$, $q_2 < a^{\frac{1}{10}}$, $q_3 < a^{\frac{1}{10^2}}$, allgemein $q_\omega < a^{\frac{1}{10^{\omega-1}}}$, und endlich $a^{\frac{\nu}{10^8}} < a^{\frac{1}{10^7}}$ sein. Hieraus folgt:

a) Es mufs notwendig [wenn man sich in Gleichung 1) die Summe und dementsprechend in Gleichung 2) das Produkt bis ins Unendliche erweitert denkt] endlich einmal ein q_ϱ entstehen, welches entweder genau gleich 1 oder doch nur um ein geringes gröfser als 1 wird; jedenfalls ist schon $q_9 < a^{\frac{1}{100\,000\,000}}$.

b) a^k ist die gröfste echte Potenz von a, die kleiner als n ist;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

c) $a^{\frac{\alpha}{10}} < q_1 < a^{\frac{\alpha+1}{10}}$; $a^{\frac{\beta}{100}} < q_2 < a^{\frac{\beta+1}{100}}$; $a^{\frac{\gamma}{10^3}} < q_3 < a^{\frac{\gamma+1}{10^3}}$; $a^{\frac{\delta}{10^4}} < q_4 < a^{\frac{\delta+1}{10^4}}$; u. s. w. bis zu demjenigen q, welches gleich 1 wird.

8) Da nun $q_1 = n : a^k$, $q_2 = q_1 : a^{\frac{\alpha}{10}}$, $q_3 = q_2 : a^{\frac{\beta}{100}}$ ist u. s. w., so ist in Nr. 7, a, b und c der Weg zur Bildung der Gleichung 2) und damit auch zur Bestimmung des Wertes von $\underset{a}{\Lambda} n$ gewiesen — wofern — neben den echten Potenzen des a noch die sämtlichen Potenzen von den Formen $a^{\frac{\alpha}{10}}$, $a^{\frac{\beta}{100}}$, $a^{\frac{\gamma}{1000}}$ u. s. w. bekannt sind.

9) Diese aber können durch Potenzieren und Radizieren berechnet werden; denn es ist $a^{\frac{\alpha}{10}} = \sqrt[10]{a^\alpha} = \sqrt[5]{\sqrt{a^\alpha}}$, $a^{\frac{\beta}{100}} = \sqrt[10]{a^{\frac{\beta}{10}}}$, $a^{\frac{\gamma}{1000}} = \sqrt[10]{a^{\frac{\gamma}{100}}}$ u. s. w.

10) Führt man die in Nr. 9 angedeutete Herkules-Arbeit bezüglich der Grundzahl „$a = 10$“ aus, so ergiebt sich die folgende

Tafel der Potenzen von der Form $10^{10^{\frac{\pi}{\omega}}}$,
welche zur Bestimmung sämtlicher Zehnlogarithmen benutzt werden kann.

Exponenten.	Potenzen.	Exponenten.	Potenzen.	Exponenten.	Potenzen.
0,9	7,9432 818	0,006	1,0139 114	0,000 03	1,0000 689
0,8	6,3095 750	0,005	1,0115 794	0,000 02	1,0000 459
0,7	5,0118 724	0,004	1,0092 529	0,000 01	1,0000 229
0,6	3,9810 715	0,003	1,0069 317	0,000 009	1,0000 206
0,5	3,1622 775	0,002	1,0046 157	0,000 008	1,0000 183
0,4	2,5118 866	0,001	1,0023 053	0,000 007	1,0000 161
0,3	1,9952 623	0,000 9	1,0020 744	0,000 006	1,0000 137
0,2	1,5848 930	0,000 8	1,0018 437	0,000 005	1,0000 114
0,1	1,2589 255	0,000 7	1,0016 131	0,000 004	1,0000 091
0,09	1,2302 688	0,000 6	1,0013 825	0,000 003	1,0000 068
0,08	1,2022 645	0,000 5	1,0011 519	0,000 002	1,0000 045
0,07	1,1748 975	0,000 4	1,0009 214	0,000 001	1,0000 022
0,06	1,1481 537	0,000 3	1,0006 910	0,000 0009	1,0000 020
0,05	1,1220 183	0,000 2	1,0004 606	0,000 0008	1,0000 018
0,04	1,0964 782	0,000 1	1,0002 301	0,000 0007	1,0000 016
0,03	1,0715 192	0,000 09	1,0002 071	0,000 0006	1,0000 013
0,02	1,0471 285	0,000 08	1,0001 841	0,000 0005	1,0000 011
0,01	1,0232 929	0,000 07	1,0001 611	0,000 0004	1,0000 009
0,009	1,0209 395	0,000 06	1,0001 381	0,000 0003	1,0000 006
0,008	1,0185 913	0,000 05	1,0001 151	0,000 0002	1,0000 004
0,007	1,0162 487	0,000 04	1,0000 919	0,000 0001	1,0000 002

Die echten Potenzen von 10 gelten von vornherein als bekannt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III. Bestimmen wir hiernach den Wert von $\underset{10}{\wedge}\underline{23456}$, so finden wir:

Hier ist $a^k = 10^4$ (s. o. II. 7. b).

Daher ist $q_1 = 23456 : 10^4 = 2{,}3456$

$a^{\frac{\alpha}{10}} = 10^{0{,}3}$ (s. II. 7c. und 10)

$$q_2 = 2{,}3456 : 10^{0{,}3} = 1{,}1755\,848$$

$a^{\frac{\beta}{100}} = 10^{0{,}07}$ (s. II. 7c. und 10)

$$q_3 = q_2 : 10^{0{,}07} = 1{,}0005\,850$$

$a^{\frac{\gamma}{1000}} = 10^{0{,}000}$ (s. II. 7c. und 10)

$$q_4 = q_3 : 10^{0{,}000} = q_3$$

$a^{\frac{\delta}{10\,000}} = 10^{0{,}0002}$

$$q_5 = q_4 : 10^{0{,}0002} = 1{,}0001\,243$$

$a^{\frac{\varepsilon}{100\,000}} = 10^{0{,}000\,05}$

$$q_6 = q_5 : 10^{0{,}0000\,5} = 1{,}0000\,092$$

$a^{\frac{\vartheta}{1\,000\,000}} = 10^{0{,}000\,004}$

$$q_7 = q_6 : 10^{0{,}000\,004} = 1{,}0000\,000 \cdots.$$

$a^{\frac{\varkappa}{10\,000\,000}} = 10^{0{,}000\,0000}$ d. i. $a^{\frac{\varkappa}{10\,000\,000}} < 10^{0{,}000\,0001}$

$q_8 = 1 + r$, wo $r < 0{,}0000\,001$ ist,

$q_8 < 10^{0{,}000\,0001}$ (s. o. II. 7).

Also ist

$$\begin{aligned}
23456 &= 10^4 &&\cdot 2{,}3456\\
2{,}3456 &= 10^{0{,}3} &&\cdot 1{,}1755\,848\\
1{,}1755\,848 &= 10^{0{,}07} &&\cdot 1{,}0005\,850\\
1{,}0005\,850 &= 10^{0{,}0002} &&\cdot 1{,}0001\,243\\
1{,}0001\,243 &= 10^{0{,}000\,05} &&\cdot 1{,}0000\,092\\
1{,}0000\,092 &= 10^{0{,}000\,004} &&\cdot 1{,}0000\,000 \cdots\cdots\\
1{,}0000\,000 \cdots &= 10^{0{,}000\,0000 \cdots} &&\cdot q_8 \text{ und } q_8 < 10^{0{,}000\,0001}, \text{ doch } \geqq 1.
\end{aligned}$$

Folglich ist $23456 = 10^4 \cdot 10^{0{,}3} \cdot 10^{0{,}07} \cdot 10^{0{,}0002} \cdot 10^{0{,}000\,05} \cdot 10^{0{,}000\,004} \cdot 10^{0{,}000\,0000} \cdot q_8$, d. i. $23456 > 10^{4{,}370\,2540}$, aber $< 10^{4{,}370\,2541}$. Daher ist $\underset{10}{\wedge}\underline{23456} > 4{,}370\,2540$, jedoch $< 4{,}370\,2541$.

Man kann also setzen $\underset{10}{\wedge}\underline{23456} = 4{,}370\,2540$.

Anmerkung. Der Schwanz des Logarithmus ist bis auf 6 Stellen genau; nur die siebente Stelle ist vielleicht wegen der unbekannten Gröfse der achten Stelle, die wir hier nicht berechnet haben, um 1 zu erhöhen.

IV. Wäre zu berechnen $\underset{10}{\wedge}\underline{1 : 23456}$ oder $\underset{0{,}1}{\wedge}\underline{23456}$ oder $\underset{0{,}1}{\wedge}\underline{1 : 23456}$ (s. o. § 5. I.), so würde (s. § 1. V. 3.)

1) $\underset{10}{\wedge}\underline{1 : 23456} = -\underset{10}{\wedge}\underline{23456} = -4{,}370\,2540 = 0{,}629\,7450 - 5;$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) $\underset{0,1}{\Lambda}\underline{23456} = -\underset{10}{\Lambda}\underline{23456} = 0{,}629\,7450 - 5;$

3) $\underset{0,1}{\Lambda}\underline{1:23456} = +\underset{10}{\Lambda}\underline{23456} = 4{,}370\,2540.$

V. $\underset{10}{\Lambda}\underline{2{,}71828\,1828}$ soll bestimmt werden.

Es ist
$$\begin{aligned}
2{,}71828\,1828 &= 10^{0{,}4} \cdot 1{,}0821\,674\\
1{,}0821\,674 &= 10^{0{,}03} \cdot 1{,}0099\,374\\
1{,}0099\,374 &= 10^{0{,}004} \cdot 1{,}0006\,783\\
1{,}0006\,783 &= 10^{0{,}000\,2} \cdot 1{,}0002\,175\\
1{,}0002\,175 &= 10^{0{,}000\,03} \cdot 1{,}0000\,104\\
1{,}0000\,104 &= 10^{0{,}000\,004} \cdot 1{,}0000\,011\\
1{,}0000\,011 &= 10^{0{,}000\,0005} \cdot 1{,}0000\,00 \ldots .
\end{aligned}$$

Folglich ist wenigstens annähernd

$2{,}71828\,1828 = 10^{0{,}4} \cdot 10^{0{,}03} \cdot 10^{0{,}004} \cdot 10^{0{,}0002} \cdot 10^{0{,}00009} \cdot 10^{0{,}000004} \cdot 10^{0{,}0000005} = 10^{0{,}434\,2945}$, und daher $\underset{10}{\Lambda}\underline{2{,}71828\,1828} = 0{,}434\,2945 \ldots .$

VI. Wenn es auch möglich ist, in der vorhin beschriebenen Weise jede beliebige positive Zahl n durch jede andere positive Zahl a zu logarithmieren, so ist doch diese Art des Logarithmierens eine sehr mühevolle und zeitraubende, und zwar wegen der (s. o. III.) wiederholt vorzunehmenden Teilungen auch dann noch, wenn die der Grundzahl entsprechende Hilfstafel (s. o. Nr. 8 und 10) bereits berechnet ist. Man hat deshalb von jeher die einmal berechneten Logarithmen gesammelt und in geordneter Weise zusammengestellt.

Anmerkung. Eine solche Logarithmensammlung konnte auch so angelegt werden, dafs man zu einer bestimmten Grundzahl und bestimmten angenommenen Potenzexponenten (Logarithmen) durch Potenzieren, bezüglich durch Radizieren, die entsprechenden wirklichen Potenzen (Logarithmanden) berechnete (s. die Tafel in § 1, ferner die in § 5 unter Nr. 10 angegebene). Allein auch auf diese Art des Sammelns von Logarithmen konnte sich nur ein sehr tüchtiger, sicherer und ausdauernder Rechenmeister verlegen. Übrigens ist dieses Verfahren kein Logarithmieren.

§ 6. Logarithmen-Tafeln.

1. Logarithmen, welche in Bezug auf eine und dieselbe Grundzahl gebildet sind, heifsen gleichnamige Logarithmen.

2. Eine geordnete Zusammenstellung gleichnamiger Logarithmen mit gleichzeitiger Angabe der entsprechenden Logarithmanden wird eine Logarithmentafel genannt.

3. Die gemeinschaftliche Grundzahl der in einer solchen Tafel angegebenen Logarithmen ist auch die Grundzahl der betreffenden Tafel.

4. Als Grundzahl für die Anfertigung einer Logarithmentafel eignet sich mit Ausnahme der Einheit jede positive wirkliche Zahl, am besten natürlich diejenige, durch welche man am bequemsten logarithmieren kann. Zum Gebrauch beim Rechnen empfiehlt sich jedoch am meisten die Tafel der Zehnlogarithmen (s. § 4.).

5. Mit der Berechnung von Logarithmentafeln hat man im Anfange des 17ten Jahrhunderts begonnen, und zwar in der Absicht, dadurch das Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Radizieren in Bezug auf grofse Zahlen zu erleichtern (s. § 1. die Tafel nebst den zuge-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

hörigen Bemerkungen). Der Erste, der eine solche Tafel zu stande brachte, war nach dem Zeugnisse seines Zeitgenossen, des berühmten Astronomen Keppler, der deutsche Uhrmacher Jost Bürg. Seine diesbezügliche Arbeit hat er jedoch erst im Jahre 1620 zu Prag veröffentlicht. Bürg benutzte als Grundzahl den Dezimalbruch 1,00001 und fand z. B.:

„der 1,00001 Logarithmus von 2,718 268 238 016 472 512 ist 100 000“;
„der 1,00001 Logarithmus von 10 ist 230 259,6606“.

Erfinder der Zehnlogarithmen war Henry Briggs, zuletzt Professor in Oxford. Er gab im Jahre 1618 unter dem Titel: „Logarithmorum chilias prima“ die auf 8 Dezimalbruchstellen berechneten Zehnlogarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 1000 heraus und im Jahre 1620 die auf 14 Stellen berechneten Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20 000 und von 90 000 bis 100 000 unter dem Titel: „Arithmetica logarithmica“.

§ 7. Die natürlichen Logarithmen.

I. Um eine Logarithmentafel für eine grofse Reihe von Logarithmanden bequem herstellen zu können, mufste man vor allem eine Grundzahl e von der Beschaffenheit haben, dafs sich die e Logarithmen aller positiven wirklichen Zahlen auf eine möglichst einfache Art berechnen liefsen. Eine solche Zahl wurde endlich gefunden, als die Mathematiker (ungefähr um das Jahr 1700) folgende Sätze entdeckten:

A. Es giebt eine Zahl e von der Eigenschaft, dafs die Gleichung

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots\cdots\cdots \text{ u. s. w.}$$

für jeden positiven Wert des x gültig ist.

B. Dieselbe Zahl e ist auch so beschaffen, dafs

$$1)\quad \underset{e}{\Lambda}\underline{a+z} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + 2\left\{\frac{z}{2a+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^5 + \cdots\cdots\right\},$$

wofern a eine positive wirkliche Zahl ist, und z einen solchen Wert hat, der gröfser als 0, aber nicht gröfser als a ist;

$$2)\quad \underset{e}{\Lambda}\underline{a+1} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + 2\left\{\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2a+1}\right)^5 + \cdots\cdots\right\}$$

für jede ganze positive Zahl a.

C. In Bezug auf dieselbe Zahl e ist

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{1-v} = -\left\{v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + \frac{v^4}{4} + \frac{v^5}{5} + \frac{v^6}{6} + \cdots\cdots\right\}$$

für jeden zwischen -1 und $+1$ liegenden Wert des v.

Anmerkung 1. Diese Sätze werden hier (doch nur vorläufig) gewissermafsen als Grundsätze hingenommen. Nebenbei kann die Gültigkeit derselben durch Einsetzen bestimmter Zahlen, für welche die anzustellenden Berechnungen nicht allzugrofse Schwierigkeiten bieten, leicht erprobt werden. Wir werden schon bald bezüglich des Satzes A in elementarer Weise zeigen, dafs derselbe wenigstens für alle rationalen positiven Werte des x richtig sein mufs.

Anmerkung 2. Nach dem Satze A kann man sich sehr bequem in Bezug auf die Grundzahl e die in § 5 (s. § 5 Nr. 8 und 10) beschriebene Hilfstafel zur Berechnung aller e Logarithmen herstellen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach dem Satze B, 2. lassen sich, da $\underset{e}{\Lambda}\underline{1} = 0$ ist, der Reihe nach die e Logarithmen aller ganzen Zahlen bestimmen, sowie nach B, 1 diejenigen der unechten und nach C diejenigen der echten Dezimalbrüche.

II. Da sich hiernach die Zahl e ganz natürlich als bequeme Grundzahl für die Berechnung von Logarithmen darbietet, so werden die in Bezug auf diese Grundzahl gebildeten Logarithmen „natürliche Logarithmen" genannt. Sie heifsen auch „nepersche Logarithmen", weil der schottische Edelmann John Napier (Neper, gestorben 1617) als ihr Erfinder gilt.

Da $e = e^1$ sein mufs, so findet man den bestimmten Wert der Grundzahl e dadurch, dafs man in der Gleichung A die unbestimmte Zahl x durch 1 ersetzt. Es ergiebt sich:

III. „$e = 2{,}718\,28\,1828\,459 \ldots\ldots$ (ein Dezimalbruch ohne Ende) ist die Grundzahl der natürlichen Logarithmen."

IV. Nach dem Satze B, 2. ist

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{2} = \underset{e}{\Lambda}\underline{1+1} = \underset{e}{\Lambda}\underline{1} + 2 \cdot \left\{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{1}{3}\right)^7 + \cdots\cdots\cdots\right\}$$
$$= 0 + 0{,}693\,147\,1805\,5994\,5309\,417 \ldots\ldots$$
$$\underset{e}{\Lambda}\underline{3} = \underset{e}{\Lambda}\underline{2+1} = \underset{e}{\Lambda}\underline{2} + 2 \cdot \left\{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{5}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{5}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{1}{5}\right)^7 + \cdots\cdots\cdots\right\}$$
$$= 1{,}098\,612\,2886\,6810\,9691\,39 \ldots\ldots\ldots$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich überhaupt die folgende Tafel:

Logarithmanden.	Natürliche Logarithmen.
1	0
2	0,693 147 1805 5994 .....
3	1,098 612 2886 6810 .....
4	1,386 294 3611 1989 .....
5	1,609 437 9124 3403 .....
6	1,791 759 4692 2805 .....
7	1,945 910 1490 5531 .....
8	2,079 441 5416 7983 .....
9	2,197 224 5773 3621 .....
10	2,302 585 0929 9397 .....

§ 7a. Prüfung (Beweis) der Sätze des § 7.

I. Prüfung des Satzes A.

1. Mit Hilfe des in § 7 bei A angeführten Satzes ist die folgende Tafel berechnet:

$$e^{0{,}000\,0001} = 1{,}000\,000\,100\,000\,005\,000\,000\,166\,666 \ldots\ldots$$
$$e^{0{,}000\,0002} = 1{,}000\,000\,200\,000\,020\,000\,001\,333\,333\,400$$
$$e^{0{,}000\,001} = 1{,}000\,001\,000\,000\,500\,000\,166\,666\,708$$
$$e^{0{,}000\,01} = 1{,}000\,010\,000\,050\,000\,166\,667\,083\,334$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$e^{0,000\,1} = 1{,}000\,100\,005\,000\,166\,670\,833\,416\,668$
$e^{0,001} = 1{,}001\,000\,500\,166\,708\,341\,668\,055\,753$
$e^{0,01} = 1{,}010\,050\,167\,084\,168\,057\,542\,165\,456$
$e^{0,1} = 1{,}105\,170\,918\,075\,647\,624\,811\,707\,826$
$e^{1} = 2{,}718\,281\,828\,459$

2. Wenn man den oben für $e^{0,000\,0001}$ gefundenen Wert der Reihe nach mit 2, mit 4, mit 8, mit 10 u. s. w. und endlich mit 10 000 000 potenziert, so ergiebt sich die folgende Tafel:

$e^{0,000\,0002} = 1{,}000\,000\,200\,000\,020\,000\,001\,333\,33$
$e^{0,000\,0004} = 1{,}000\,000\,400\,000\,080\,000\,010\,666\,66$
$e^{0,000\,0008} = 1{,}000\,000\,800\,000\,320\,000\,085\,333\,35$
$e^{0,000\,001} = 1{,}000\,001\,000\,000\,500\,000\,166\,666\,7$
$e^{0,000\,002} = 1{,}000\,002\,000\,002\,000\,001\,333\,334\,0$
$e^{0,000\,004} = 1{,}000\,004\,000\,008\,000\,010\,666\,677\,4$
$e^{0,000\,008} = 1{,}000\,008\,000\,032\,000\,085\,333\,504\,0$
$e^{0,000\,01} = 1{,}000\,010\,000\,050\,000\,166\,667\,083\,3$
$e^{0,000\,02} = 1{,}000\,020\,000\,200\,001\,333\,340\,000$
$e^{0,000\,04} = 1{,}000\,040\,000\,800\,010\,666\,773\,34$
$e^{0,000\,08} = 1{,}000\,080\,003\,200\,085\,335\,040\,04$
$e^{0,000\,1} = 1{,}000\,100\,005\,000\,166\,670\,833\,42$
$e^{0,000\,2} = 1{,}000\,200\,020\,001\,333\,400\,002\,66$
$e^{0,000\,4} = 1{,}000\,400\,080\,010\,667\,733\,418\,66$
$e^{0,000\,8} = 1{,}000\,800\,320\,085\,350\,402\,730\,98$
$e^{0,001} = 1{,}001\,000\,500\,166\,708\,341\,668\,00$
$e^{0,002} = 1{,}002\,002\,001\,334\,000\,266\,755\,46$
$e^{0,004} = 1{,}004\,008\,010\,677\,341\,872\,358\,55$
$e^{0,008} = 1{,}008\,032\,085\,504\,273\,431\,171\,54$
$e^{0,01} = 1{,}010\,050\,167\,084\,168\,057\,541\,49$
$e^{0,02} = 1{,}020\,201\,340\,026\,755\,810\,158\,75$
$e^{0,04} = 1{,}040\,810\,774\,192\,388\,226\,754\,17$
$e^{0,08} = 1{,}083\,287\,067\,674\,958\,554\,429\,99$
$e^{0,1} = 1{,}105\,170\,918\,075\,647\,624\,804\,05$
$e^{0,2} = 1{,}221\,402\,758\,160\,169\,833\,904\,11$
$e^{0,4} = 1{,}491\,824\,697\,641\,270\,317\,783\,40$
$e^{0,5} = 1{,}648\,721\,270\,700\,138\,146\,791\,39$
$e^{1} = 2{,}718\,281\,828\,459\,078\,209\,596\,87$

3. Die Übereinstimmung beider Tafeln ist ein Beweis für die Richtigkeit der ersten Tafel und läſst daher die Zuverlässigkeit des in § 7 bei A angeführten Satzes wenigstens vermuten.

II. Beweis des Satzes A in § 7.

Wenn wir die beiden endlosen Reihen K und Ω, d. i. (s. § 7, A)

$$1 + \frac{\varkappa}{1} + \frac{\varkappa^2}{1 \cdot 2} + \frac{\varkappa^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\cdots \text{ und } 1 + \frac{\omega}{1} + \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

miteinander multiplizieren, so erhalten wir eine Summe von unendlich mal unendlich vielen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gliedern. Letztere denken wir uns der Reihe nach in die einzelnen Felder eines nach rechts und nach unten ins Unendliche erweiterten Schachbrettes so eingetragen, dafs in jeder $n$ten seitwärts gehenden Felderreihe diejenigen Glieder sich befinden, welche durch Multiplikation der Reihe K mit dem $n$ten Gliede der Reihe Ω entstanden sind, — dafs also die oben links liegende Ecke des so beschriebenen Schachbrettes durch folgende Tafel dargestellt ist:

1	$\frac{\varkappa}{1}$	$\frac{\varkappa^2}{2!}$	$\frac{\varkappa^3}{3!}$	$\frac{\varkappa^4}{4!}$	$\frac{\varkappa^5}{5!}$	$\frac{\varkappa^6}{6!}$	$\frac{\varkappa^7}{7!}$	$\frac{\varkappa^8}{8!}$	$\frac{\varkappa^9}{9!}$	$\frac{\varkappa^{10}}{10!}$	$\frac{\varkappa^{11}}{11!}$
$\frac{\omega}{1}$	$\frac{\omega^1\varkappa^1}{1\cdot 1}$	$\frac{\omega^1\varkappa^2}{1!\,2!}$	$\frac{\omega^1\varkappa^3}{1!\,3!}$	$\frac{\omega^1\varkappa^4}{1!\,4!}$	$\frac{\omega^1\varkappa^5}{1!\,5!}$	$\frac{\omega\varkappa^6}{6!}$	$\frac{\omega\varkappa^7}{7!}$	$\frac{\omega\varkappa^8}{8!}$	$\frac{\omega\varkappa^9}{9!}$	$\frac{\omega\varkappa^{10}}{10!}$	$\frac{\omega\varkappa^{11}}{11!}$
$\frac{\omega^2}{2!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^1}{2!\,1!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^2}{2!\,2!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^3}{2!\,3!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^4}{2!\,4!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^5}{2!\,5!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^6}{2!\,6!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^7}{2!\,7!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^8}{2!\,8!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^9}{2!\,9!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^{10}}{2!\,10!}$	
$\frac{\omega^3}{3!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^1}{3!\,1!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^2}{3!\,2!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^3}{3!\,3!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^4}{3!\,4!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^5}{3!\,5!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^6}{3!\,6!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^7}{3!\,7!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^8}{3!\,8!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^9}{3!\,9!}$		
$\frac{\omega^4}{4!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^1}{4!\,1!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^2}{4!\,2!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^3}{4!\,3!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^4}{4!\,4!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^5}{4!\,5!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^6}{4!\,6!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^7}{4!\,7!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^8}{4!\,8!}$			
$\frac{\omega^5}{5!}$	$\frac{\omega^5\varkappa}{5!}$	$\frac{\omega^5\varkappa^2}{5!\,2!}$	$\frac{\omega^5\varkappa^3}{5!\,3!}$	$\frac{\omega^5\varkappa^4}{5!\,4!}$	$\frac{\omega^5\varkappa^5}{5!\,5!}$	$\frac{\omega^5\varkappa^6}{5!\,6!}$	$\frac{\omega^5\varkappa^7}{5!\,7!}$				
$\frac{\omega^6}{6!}$	$\frac{\omega^6\varkappa}{6!}$	$\frac{\omega^6\varkappa^2}{6!\,2!}$	$\frac{\omega^6\varkappa^3}{6!\,3!}$	$\frac{\omega^6\varkappa^4}{6!\,4!}$	$\frac{\omega^6\varkappa^5}{6!\,5!}$	$\frac{\omega^6\varkappa^6}{6!\,6!}$					
$\frac{\omega^7}{7!}$	$\frac{\omega^7\varkappa}{7!}$	$\frac{\omega^7\varkappa^2}{7!\,2!}$	$\frac{\omega^7\varkappa^3}{7!\,3!}$	$\frac{\omega^7\varkappa^4}{7!\,4!}$	$\frac{\omega^7\varkappa^5}{7!\,5!}$						
$\frac{\omega^8}{8!}$	$\frac{\omega^8\varkappa}{8!}$	$\frac{\omega^8\varkappa^2}{8!\,2!}$	$\frac{\omega^8\varkappa^3}{8!\,3!}$	$\frac{\omega^8\varkappa^4}{8!\,4!}$							
$\frac{\omega^9}{9!}$	$\frac{\omega^9\varkappa}{9!}$	$\frac{\omega^9\varkappa^2}{9!\,2!}$	$\frac{\omega^9\varkappa^3}{9!\,3!}$								

Anmerkung. Es ist $2! = 1\cdot 2$, $3! = 1\cdot 2\cdot 3$; und allgemein bedeutet $m!$ das Produkt der m ersten ganzen Zahlen.

Bei dieser Anordnung ist leicht zu erkennen,

a) dafs alle Glieder der $(w+1)$ten seitwärts gerichteten Felderreihe den gemeinsamen Faktor $\frac{\omega^w}{w!}$ enthalten;

b) dafs alle Glieder der $(v+1)$ten abwärts gehenden Felderreihe den gemeinsamen Faktor $\frac{\varkappa^v}{v!}$ haben;

c) dafs dasjenige Glied, in dessen Felde die $(w+1)$te seitwärts gerichtete und die $(v+1)$te abwärts gehende Felderreihe sich kreuzen, nichts Anderes sein kann, als $\frac{\omega^w\cdot\varkappa^v}{w!\,v!}$;

d) dafs jedes Glied der ganzen unendlich grofsen Tafel die Form hat $\frac{\omega^w\cdot\varkappa^v}{w!\,v!}$, wo w und v zwei ganze Zahlen sind, die je um 1 kleiner sind, als die Stellenzeiger des entsprechenden Feldes;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

e) dafs $$w!\,v! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots v : \frac{1}{w!}$$

$$= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots v\cdot(v+1)(v+2)\cdots\cdots(v+w) : \frac{(v+1)(v+2)\cdots\cdots(v+w)}{w!}$$

$$= (v+w)! : \binom{v+w}{w} \text{ ist.}$$

Anmerkung. Allgemein versteht man unter $\binom{s}{m}$, d. i. „s über m“, einen Bruch, dessen Zähler und Nenner je ein Produkt von m aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist mit der näheren Bestimmung, dafs als gröfster Faktor des Zählers die obere Zahl s und als gröfster Faktor des Nenners die untere Zahl m genommen werde.

Multiplizieren wir nun etwa bei den Gliedern $\frac{\omega^1\varkappa^3}{1!\,3!}$, $\frac{\omega^2\varkappa^2}{2!\,2!}$ und $\frac{\omega^3\varkappa^1}{3!\,1!}$ sowohl den Zähler, als auch den Nenner mit dem entsprechenden $\binom{w+v}{w}$, so wird $\frac{\omega^1\varkappa^3}{1!\,3!} = \frac{\binom{1+3}{1}\omega^1\varkappa^3}{(1+3)!} = \frac{\binom{4}{1}\omega^1\varkappa^3}{4!}$, $\frac{\omega^2\varkappa^2}{2!\,2!} = \frac{\binom{4}{2}\omega^2\varkappa^2}{4!}$, $\frac{\omega^3\varkappa^1}{3!\,1!} = \frac{\binom{4}{3}\omega^3\varkappa^1}{4!}$ und daher $\frac{\varkappa^4}{4!} + \frac{\omega^1\varkappa^3}{1!\,3!} + \frac{\omega^2\varkappa^2}{2!\,2!} + \frac{\omega^3\varkappa^1}{3!\,1!} + \frac{\omega^4}{4!} =$

$$\frac{1}{4!}\cdot\left[\varkappa^4 + \binom{4}{1}\omega^1\varkappa^3 + \binom{4}{2}\omega^2\varkappa^2 + \binom{4}{3}\omega^3\varkappa^1 + \omega^4\right] = \frac{(\varkappa+\omega)^4}{4!}.$$

Denken wir uns auf jedem Felde, welches nicht am obern oder linken Rande der Tafel liegt, den Zähler und den Nenner mit dem entsprechenden $\binom{w+v}{w}$ multipliziert, so hat dadurch das bezügliche Glied die Form $\frac{\binom{w+v}{w}\omega^w\cdot\varkappa^v}{(w+v)!}$ angenommen.

Fassen wir dann alle diejenigen Glieder zusammen, welche ein Schachspiel-Läufer berühren mufs, wenn er etwa von dem Felde des $\frac{\varkappa^n}{n!}$ ausgehend sich beständig nach links abwärts bewegt, so erhalten wir

$$\frac{\varkappa^n}{n!} + \binom{n}{1}\frac{\omega^1\varkappa^{n-1}}{(1+n-1)!} + \binom{n}{2}\frac{\omega^2\varkappa^{n-2}}{(2+n-2)!} + \binom{n}{3}\frac{\omega^3\varkappa^{n-3}}{(3+n-3)!} + \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots + \binom{n}{n-1}\frac{\omega^{n-1}\varkappa^{n-(n-1)}}{(n-1+n-[n-1])!} + \frac{\omega^n}{n!} = \frac{(\varkappa+\omega)^n}{n!}.$$

Sammeln wir daher durch beständiges Wiederholen des eben beschriebenen Verfahrens die sämtlichen Glieder der ganzen Tafel, so erhalten wir als Summe des Ganzen die endlose Reihe

$$1 + \frac{\varkappa+\omega}{1} + \frac{(\varkappa+\omega)^2}{2!} + \frac{(\varkappa+\omega)^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{(\varkappa+\omega)^n}{n!}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Folglich ergiebt sich der Satz: Das Produkt der beiden endlosen Reihen

$$1 + \frac{\varkappa}{1} + \frac{\varkappa^2}{2!} + \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots\cdots \text{ und } 1 + \frac{\omega}{1} + \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

ist stets gleich der endlosen Reihe

$$1 + \frac{\varkappa+\omega}{1} + \frac{(\varkappa+\omega)^2}{2!} + \frac{(\varkappa+\omega)^3}{3!} + \frac{(\varkappa+\omega)^4}{4!}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hieraus aber folgt weiter, dafs

$$\left[1+\frac{\alpha^1}{1}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\cdots\cdots\right]^2=1+\frac{(2\alpha)^1}{1}+\frac{(2\alpha)^2}{2!}+\frac{(2\alpha)^3}{3!}+\cdots\cdots$$

$$\left[1+\frac{\alpha^1}{1}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\cdots\right]^3=\left[1+\frac{(2\alpha)^1}{1}+\frac{(2\alpha)^2}{2!}+\frac{(2\alpha)^3}{3!}+\cdots\right]\cdot\left[1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\cdots\cdots\right]$$

$$=1+\frac{(3\alpha)^1}{1}+\frac{(3\alpha)^2}{2!}+\frac{(3\alpha)^3}{3!}+\cdots\cdots\cdot$$

und daher auch endlich

$$\left[1+\frac{\alpha^1}{1}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\cdots\cdots\right]^n=1+\frac{(n\alpha)^1}{1}+\frac{(n\alpha)^2}{2!}+\frac{(n\alpha)^3}{3!}+\cdots\cdots\cdot \text{ ist,}$$

wo n jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann.

Da aber hiernach

$$\left[1+\frac{(\alpha:\nu)^1}{1}+\frac{(\alpha:\nu)^2}{2!}+\frac{(\alpha:\nu)^3}{3!}+\cdots\cdots\right]^\nu=1+\frac{\alpha^1}{1}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\cdots\cdots \text{ wird,}$$

wofern ν irgend eine ganze Zahl ist, so ergiebt sich schliefslich noch der Satz:

Es ist $\sqrt[\nu]{1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\cdots\cdots\cdot}=1+\frac{\alpha:\nu}{1}+\frac{(\alpha:\nu)^2}{2!}+\frac{(\alpha:\nu)^3}{3!}+\cdots\cdots$ und

$$\left[1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\cdots\cdots\right]^{\frac{n}{\nu}}=1+\frac{\frac{n}{\nu}\cdot\alpha}{1}+\frac{\left(\frac{n}{\nu}\cdot\alpha\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{n}{\nu}\cdot\alpha\right)^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdot$$

für alle ganzzahligen Werte des n und des ν und für jeden beliebigen Wert des α.

Weil nun $e=1+\frac{1}{1}+\frac{1^2}{2!}+\frac{1^3}{3!}+\frac{1^4}{4!}+\cdots\cdots$ ist, so mufs auch $e^{\frac{n}{\nu}}=1+\frac{\frac{n}{\nu}}{1}+\frac{\left(\frac{n}{\nu}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{n}{\nu}\right)^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots$ für alle ganzzahligen Werte des n und des ν sein; und damit ist die allgemeine Gültigkeit des in § 7 bei A angeführten Satzes bewiesen.

III. Prüfung der Sätze B in § 7.

Ergebnisse, welche durch Anwendung der in § 7 bei B angegebenen Formeln gewonnen werden, können nun in folgender Weise geprüft werden:

Es ist $\underset{e}{\Lambda}\underline{a+z}=\underset{e}{\Lambda}\underline{a}+2\cdot\left[\frac{z}{2a+z}+\cdots\cdots\right]=\underset{e}{\Lambda}\underline{a}+r,$

wenn $a+z=e^{\Lambda\underline{a}+r}=a\cdot e^r$, d. i. wenn $e^r=1+\frac{z}{a}$ ist.

Ebenso ist $\underset{e}{\Lambda}\underline{a+1}=\underset{e}{\Lambda}\underline{a}+r$, wenn $e^r=1+\frac{1}{a}$ ist.

IV. Prüfung des Satzes C in § 7.

Zur Prüfung des Satzes C (s. § 7) bemerken wir hier folgendes:

Beispielsweise wird nach § 7 C $\underset{e}{\Lambda}\underline{1-\frac{1}{5}}=-m$. Es mufs aber auch (s. § 1, V. 3)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\underset{e}{\Lambda}\underline{1-\frac{1}{5}} = \underset{e}{\Lambda}\underline{\frac{4}{5}} = -\underset{e}{\Lambda}\underline{\frac{5}{4}} = -\underset{e}{\Lambda}\underline{1+\frac{1}{4}}$ und nach § 7 B $\underset{e}{\Lambda}\underline{1+\frac{1}{4}} = \underset{e}{\Lambda}\underline{1} + r = r$ sein.

In diesem Falle wäre daher zu prüfen, ob $e^m = e^r = 1 + \frac{1}{4}$ wird.

Anmerkung. Ein anderes Mittel, den Satz C zu prüfen, werden wir später (s. § 11) kennen lernen. Der § 11 wird übrigens den Satz C durchaus entbehrlich machen. Nach einem elementaren Beweise für denselben werden wir uns daher auch nicht weiter umsehen, bemerken aber, dafs ein solcher Beweis für die Zuverlässigkeit des Satzes bis zu gewissen Grenzen im § 13 Nr. II enthalten ist.

§ 8. Abkürzung der Formeln des Satzes B in § 7 für die Berechnung der Logarithmen auf n Dezimalbruchstellen.

Nach § 7 B ist $\underset{e}{\Lambda}\underline{a+z} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + 2 \cdot \frac{z}{2a+z} + 2 \cdot R$, wofern $R = \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^7 + \cdots\cdots$ u. s. w. ist.

Wir stellen uns nun die Frage: „Wann wird R so klein, dafs es im wirklichen Werte von $\underset{e}{\Lambda}\underline{a+z}$ für eine gewisse Reihe von Dezimalbruchstellen als wertlos gelten kann?“

Zur Beantwortung diene folgendes:

1) Jedenfalls ist $R < \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^3 \cdot \left[1 + \left(\frac{z}{2a+z}\right)^2 + \left(\frac{z}{2a+z}\right)^4 + \left(\frac{z}{2a+z}\right)^6 + \cdots\cdot \text{ u. s. w.}\right]$

2) Auch kann zweifelsohne a im Vergleich mit z so grofs sein, dafs $\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^3 < \frac{\omega}{10^{n+1}}$, wo $\omega \leqq 3\frac{1}{3}$ und n irgend eine ganze Zahl ist. Ist dieses aber der Fall, so ist $\left(\frac{z}{2a+z}\right)^3 < \frac{3\omega}{10^{n+1}} < \frac{10}{10^{n+1}}$; und daher $\frac{z}{2a+z} < 1 : 10^{\frac{n}{3}}$.

3) Wenn demnach $\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^3 < \frac{\omega}{10^{n+1}}$ und $\omega \leqq 3\frac{1}{3}$ ist, so ist

$$R < \frac{\omega}{10^{n+1}} \cdot \left[1 + \frac{1}{10^{\frac{n}{3}\cdot 2}} + \frac{1}{10^{\frac{n}{3}\cdot 4}} + \frac{1}{10^{\frac{n}{3}\cdot 6}} + \cdots\cdot \text{ u. s. w.}\right]$$

In diesem Ausdrucke wird aber jeder der vorkommenden Brüche um so gröfser, je kleiner die ganze Zahl n ist. Daraus folgt:

4) Wenn zu der bei Nr. 3 ausgesprochenen Voraussetzung noch die hinzukommt, dafs $n \geqq 3$ ist, so ist $R < \frac{\omega}{10^{n+1}} \cdot 1{,}01010101 \cdots\cdots\cdots$, und daher

$$2R < \frac{\omega}{10^{n+1}} \cdot 2{,}02020202 \cdots\cdots\cdots < \frac{\omega}{10^{n+1}} \cdot 2{,}03.$$

5) Ist endlich noch $\omega = 2$, so ist $2R < \frac{4}{10^{n+1}} + \frac{6}{10^{n+3}} < \frac{5}{10^{n+1}}$ und demnach für n Bruchstellen völlig wertlos.

6) Die bei Nr. 3 und 5 aufgestellten Bedingungen sind aber erfüllt, wenn $\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^3 < \frac{2}{10^{n+1}}$, d. i. wenn $\frac{z}{2a+z} < \left(\frac{6}{10^{n+1}}\right)^{\frac{1}{3}}$, d. i. wenn $\left\{10^{\frac{n+1}{3}} : \left(6^{\frac{1}{3}} \cdot 2\right) - \frac{1}{2}\right\} \cdot z < a$, d. i. wenn $a > \left\{\left(\frac{10^{n+1}}{48}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\right\} \cdot z$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

7) Nr. 3, 4, 5 und 6 führen uns daher zu folgendem Satze:

Wenn $a > \left\{\left(\frac{10^n+1}{48}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\right\} \cdot z$ und n eine ganze Zahl, aber > 2 ist, so ist auf n Dezimalbruchstellen genau

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{a+z} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + 2 \cdot \frac{z}{2a+z} \text{ und } \underset{e}{\Lambda}\underline{a+1} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + 2 \cdot \frac{1}{2a+1}.$$

8) Setzt man in Nr. 7 für n die bestimmten Werte 10 oder 7 oder 5, so ergiebt sich:

B. 1) Es ist $\underset{e}{\Lambda}\underline{a+z} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + 2\frac{z}{2a+z}$ wenigstens

1. bis auf 10 Dezimalbruchstellen genau, wenn $a > z \cdot 1276{,}69$;
2. „ „ 7 „ „ „ $a > z \cdot 127{,}22$;
3. „ „ 5 „ „ „ $a > z \cdot 27{,}02$.

B. 2) Es ist $\underset{e}{\Lambda}\underline{a+1} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + 2 \cdot \frac{1}{2a+1}$ wenigstens

1. bis auf 10 Dezimalbruchstellen genau, wenn $a > 1276{,}69$;
2. „ „ 7 „ „ „ $a > 127{,}22$;
3. „ „ 5 „ „ „ $a > 27{,}02$.

§ 9. Folgerungen aus § 7, B.

I. Nach § 7. B, 1. ist

1) $$\underset{e}{\Lambda}\underline{2a} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a+a} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + 2 \cdot \left\{\frac{a}{2a+a} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{3a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a}{3a}\right)^5 + \cdots\cdots\right\}$$
$$= \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + 2 \cdot \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \cdots\cdots\right\}$$
$$= \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{2} \text{ (s. § 7. Nr. IV.).}$$

2) $$\underset{e}{\Lambda}\underline{3a} = \underset{e}{\Lambda}\underline{2a+a} = \Lambda\underline{2a} + 2 \cdot \left\{\frac{a}{4a+a} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{5a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a}{5a}\right)^5 + \cdots\cdots\right\}$$
$$= \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{2} + 2 \cdot \left\{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \cdots\cdots\right\}$$
$$= \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{3} \text{ (s. § 7 Nr. IV.).}$$

II. Wenn es nun für irgend einen beliebigen Wert des n gilt, dafs

$\underset{e}{\Lambda}\underline{na} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{n}$ ist, so wird

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{(n+1)a} = \underset{e}{\Lambda}\underline{na+a} = \underset{e}{\Lambda}\underline{na} + 2\left\{\frac{a}{2na+a} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{(2n+1)a}\right)^3 + \cdots\cdots\right\}$$
$$= \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{n} + 2 \cdot \left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5 + \cdots\cdots\right\}$$
$$= \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{n+1} \text{ (s. § 7. B, 2).}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn also $\underset{e}{\Lambda}\underline{na} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{n}$ ist, so ist auch $\underset{e}{\Lambda}\underline{(n+1)a} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{n+1}$.

Da nun aber $\underset{e}{\Lambda}\underline{2a} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{2}$

und $\underset{e}{\Lambda}\underline{3a} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{3}$ ist, so ergiebt sich der Reihe nach, dafs auch

$\underset{e}{\Lambda}\underline{4a} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{4}$

$\underset{e}{\Lambda}\underline{5a} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{5}$ ist, u. s. w. ohne Ende.

III. Folglich ist allgemein $\underset{e}{\Lambda}\underline{ma} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{m}$, wenn m eine ganze Zahl ist.

Ist a eine ganze Zahl, so ist $\underset{e}{\Lambda}\underline{a^2} = \underset{e}{\Lambda}\underline{aa} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{a} = 2 \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a}$.

Ist ferner a eine ganze Zahl und $\underset{e}{\Lambda}\underline{a^n} = n \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a}$, so ist

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{a^{n+1}} = \underset{e}{\Lambda}\underline{aa^n} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a^n} + \underset{e}{\Lambda}\underline{a} = (n+1) \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a}.$$

Hieraus folgt der Reihe nach, dafs auch

$\underset{e}{\Lambda}\underline{a^3} = 3 \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a}$,

$\underset{e}{\Lambda}\underline{a^4} = 4 \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a}$ ist, u. s. w. ohne Ende.

IV. Daher ist stets $\underset{e}{\Lambda}\underline{a^m} = m \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a}$, wenn a und m ganze Zahlen sind.

Anmerkung 1. Durch die Sätze Nr. III und Nr. IV wird die Erweiterung der in § 7 unter Nr. IV angegebenen Tafel zu einer umfangreichen Logarithmentafel wesentlich erleichtert. Nach § 7. B, 2, bezüglich nach § 8. B sind nun nur noch die natürlichen Logarithmen der unteilbaren Zahlen (Primzahlen) zu berechnen.

Anmerkung 2. Die Sätze Nr. III und IV drängen uns zu der Frage, ob nicht für alle beliebigen Werte von a und m sowohl $\underset{e}{\Lambda}\underline{ma} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{m}$, als auch $\underset{e}{\Lambda}\underline{a^m} = m \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a}$ sei. (Wir stellen hier absichtlich nur diese Frage, einerseits, weil an dieser Stelle die Aufmerksamkeit lediglich auf die natürlichen Logarithmen gerichtet ist, andererseits, um die verschiedenartigen Ableitungen der allgemeinen logarithmischen Sätze an verschiedene geeignete Plätze zu verteilen. Im Unterrichte kann man natürlich die hier geweckte Wifsbegier des Schülers dadurch steigern, dafs man die Frage nach dem natürlichen Logarithmus von ma verallgemeinert.)

§ 10. Natürliche Logarithmen von Produkten und Potenzen überhaupt.

In $\underset{e}{\Lambda}\underline{na}$ mögen n und a beliebige positive wirkliche Zahlen sein. Dann ist entweder $n < 1$ oder $n > 1$ oder $n = 1$.

Ist $n = 1$, so ist selbstverständlich $\underset{e}{\Lambda}\underline{na} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{n}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist $n < 1$, so ist für jedes a $na < a$ und daher (s. § 1. 10)

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{na} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} - v,$$

$$na = e^{\underset{e}{\Lambda}\underline{a} - v} = a : e^v,$$

$$\frac{1}{n} = e^v,$$

$$v = \underset{e}{\Lambda}\underline{\frac{1}{n}} = -\underset{e}{\Lambda}\underline{n} \text{ und daher endlich}$$

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{na} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{n}.$$

Ist $n > 1$, so ist stets $na > a$ und daher (s. § 1. 10)

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{na} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + u,$$

$$na = a \cdot e^u,$$

$$n = e^u,$$

$$u = \underset{e}{\Lambda}\underline{n} \text{ und also schliefslich}$$

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{na} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \underset{e}{\Lambda}\underline{n}.$$

Folglich gilt ganz allgemein der Satz:

I. Der natürliche Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der natürlichen Logarithmen der einzelnen Faktoren, wofern letztere wirkliche positive Zahlen sind.

2) Für positive wirkliche Werte von a und für alle wirklichen Werte von n gilt folgendes: Soll $\underset{e}{\Lambda}\underline{a^n} = z$ sein, so mufs $a^n = e^z$, $a = e^{\frac{z}{n}}$, $\frac{z}{n} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a}$ und also $z = n \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a}$ sein. Mithin ist allgemein $\underset{e}{\Lambda}\underline{a^n} = n \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a}$, d. h.

II. Der natürliche Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Potenzexponenten multipliziert mit dem natürlichen Logarithmus der Grundzahl der Potenz, wofern nur die Potenz-Grundzahl eine positive wirkliche Zahl und der Potenzexponent irgend eine wirkliche Zahl ist.

§ 11. Natürliche Logarithmen von Quotienten und Wurzeln.

1) Soll $\underset{e}{\Lambda}\underline{a : b} = x$ sein, so mufs

$$a : b = e^x,$$

$$a = b \cdot e^x,$$

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{a} = \underset{e}{\Lambda}\underline{b} + x,$$

$$x = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} - \underset{e}{\Lambda}\underline{b}$$

und folglich $\underset{e}{\Lambda}\underline{a : b} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} - \underset{e}{\Lambda}\underline{b}$ sein, d. h.

I. Der natürliche Logarithmus eines Quotienten ist gleich dem natürlichen Logarithmus des Dividenden, vermindert um denjenigen des Divisors.

2) Soll $\underset{e}{\Lambda}\underline{\sqrt[n]{a}} = z$ sein, so mufs

$$\sqrt[n]{a} = e^z,$$

$$a = e^{n \cdot z},$$

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{a} = nz,$$

$$z = \underset{e}{\Lambda}\underline{a : n}$$

und daher $\underset{e}{\Lambda}\underline{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{n} \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a}$ sein, d. h.

II. Der natürliche Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem natürlichen Logarithmus des Radikanden, dividiert durch den Wurzelexponenten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 12. Der natürliche Logarithmus einer Differenz.

1) Ist $g > k$, so ist $g - k = g \cdot \left(1 - \frac{k}{g}\right)$, $\frac{k}{g} < 1$ und daher

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{g - k} = \underset{e}{\Lambda}\underline{g \cdot \left(1 - \frac{k}{g}\right)} = \underset{e}{\Lambda}\underline{g} + \underset{e}{\Lambda}\underline{1 - \frac{k}{g}}$$

$$= \underset{e}{\Lambda}\underline{g} - \left[\frac{k}{g} + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{g}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{g}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{g}\right)^4 + \cdots\cdots\right].$$

2) Ist $g > 2k$, so ist

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{g} = \underset{e}{\Lambda}\underline{(g - k) + k} = \underset{e}{\Lambda}\underline{g - k} + 2 \cdot \left[\frac{k}{2g - k} + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{2g - k}\right)^3 + \cdots\cdots\right] \text{ und daher}$$

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{g - k} = \underset{e}{\Lambda}\underline{g} - 2 \cdot \left[\frac{k}{2g - k} + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{2g - k}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{k}{2g - k}\right)^5 + \cdots\right].$$

Es ergiebt sich also:

I. $\underset{e}{\Lambda}\underline{g - k} = \underset{e}{\Lambda}\underline{g} - \left[\frac{k}{g} + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{g}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{g}\right)^3 + \cdots\cdots\right]$, wofern $g > k$ ist.

II. $\underset{e}{\Lambda}\underline{g - k} = \underset{e}{\Lambda}\underline{g} - 2 \cdot \left[\frac{k}{2g - k} + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{2g - k}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{k}{2g - k}\right)^5 + \cdots\right]$, wenn $g > 2k$ ist.

Aus Nr. I. und II. folgt noch (vergl. § 11, I. und § 7, C):

3) $\underset{e}{\Lambda}\underline{\frac{g - k}{g}} = -\left[\frac{k}{g} + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{g}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{g}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{g}\right)^4 + \cdots\cdots\right]$, wenn $g > k$ ist;

4) $\underset{e}{\Lambda}\underline{\frac{g - k}{g}} = -2 \cdot \left[\frac{k}{2g - k} + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{2g - k}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{k}{2g - k}\right)^5 + \cdots\right]$, wenn $g > 2k$ ist.

Diese letzte Formel ist sehr brauchbar, wenn der Logarithmand ein Bruch ist, bei welchem der Zähler verhältnismäfsig wenig kleiner ist als der Nenner (wie bei $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$ u. s. w.).

§ 13. Folgerungen aus § 7a.

I. Nach § 7a ist stets $e^\alpha - 1 = \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \cdots\cdots \cdots$ Bezeichnen wir hier die einzelnen Glieder der rechten Seite durch g_1, g_2, g_3 u. s. w., so ist, wofern $\alpha < 1$ ist, $g_1 > 2g_2$, $g_2 > 3g_3$ u. s. w., und daher jedes beliebige g_n gröfser als die ganze Summe aller folgenden Glieder. Hieraus folgt:

1) Wenn $\alpha < 1$ ist, so ist zwar $e^\alpha > 1 + \alpha$, aber auch $e^\alpha < 1 + \alpha + \alpha^2$. Bedeuten nun ω und n positive ganze Zahlen, und ist $\omega < 10$, aber $n > 2$, so ergiebt sich,

2) dafs $$e^{\frac{\omega}{10^n}} > 1 + \frac{\omega}{10^n},$$

3) dafs $$e^{\frac{\omega - 1}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}}} < 1 + \frac{\omega - 1}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} + \left(\frac{\omega - 1}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}}\right)^2$$

$$< 1 + \frac{\omega - 1}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{8}{10^{2n-1}} < 1 + \frac{\omega}{10^n},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4) dafs daher $\underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\frac{\omega}{10^n}}$ zwar kleiner ist als $\frac{\omega}{10^n}$, aber gröfser als $\frac{\omega-1}{10^n}+\frac{9}{10^{n+1}}$.

Dies führt uns zu folgendem Schlusse:

5) Wenn $n>2$, und die ganze Zahl ω kleiner als 10 ist, so kann man $\underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\frac{\omega}{10^n}}=\frac{\omega}{10^n}$ setzen; der angegebene Wert des Logarithmus ist alsdann um weniger als $\frac{1}{10^{n+1}}$ zu grofs (vergl. die Tafeln in § 7a).

II. Ist $\alpha<1$, so hat $\underset{e}{\bigwedge}\underline{1-\alpha}$ stets einen negativen Wert; und dieser kommt der Null um so näher, je kleiner α ist.

Bedeutet nun s die denkbar gröfste ganze Zahl, und soll etwa $\underset{e}{\bigwedge}\underline{1-\frac{1}{10^s}}=-x$ sein, so mufs $e^x=1:\left(1-\frac{1}{10^s}\right)=10^s:(10^s-1)=1+\frac{1}{10^s}+\frac{1}{10^{2s}}+\frac{1}{10^{3s}}+\frac{1}{10^{4s}}+\cdots\cdots$, und daher $x=\underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\frac{1}{10^s}+\frac{1}{10^{2s}}+\frac{1}{10^{3s}}+\cdots\cdots}$, also (vergl. oben Nr. 4) $x>\underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\frac{1}{10^s}}>\frac{9}{10^{s+1}}$, aber auch $x<\underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\frac{2}{10^s}}<\frac{2}{10^s}$ sein.

6) Also ist $\underset{e}{\bigwedge}\underline{1-\frac{1}{10^s}}=-x$, wobei $x<\frac{2}{10^s}$ und $x>\frac{9}{10^{s+1}}$ sein mufs.

Ist $\alpha<1$ und genau $\underset{e}{\bigwedge}\underline{1-\alpha}=-b$, so müssen auch folgende Gleichungen gültig sein:

$$-b+\underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\alpha}=\underset{e}{\bigwedge}\underline{1-\alpha}+\underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\alpha}=\underset{e}{\bigwedge}\underline{(1-\alpha)(1+\alpha)}=\underset{e}{\bigwedge}\underline{1-\alpha^2};$$

$$-b+\underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\alpha}+\underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\alpha^2}=\underset{e}{\bigwedge}\underline{(1-\alpha^2)(1+\alpha^2)}=\underset{e}{\bigwedge}\underline{1-\alpha^4};$$

7) $$-b+\underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\alpha}+\underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\alpha^2}+\underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\alpha^4}+\underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\alpha^8}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\alpha^{(2^v)}}=\underset{e}{\bigwedge}\underline{1-\alpha^{(2^{v+1})}},$$

wobei v eine sehr grofse ganze Zahl sein soll.

Ist nun $\frac{\omega}{10^n}$ ein echter Bruch wie oben in Nr. 5, ist aber $\frac{\omega}{10^n}>\frac{1}{10^{s-1}}$, und soll etwa $\underset{e}{\bigwedge}\underline{1-\frac{\omega}{10^n}}=-w$ sein, so mufs (nach Nr. 7 und 5)

8) $$-w+\frac{\omega}{10^n}+\frac{\omega^2}{10^{2n}}+\frac{\omega^4}{10^{4n}}+\frac{\omega^8}{10^{8n}}+\cdots\cdots+\left(\frac{\omega}{10^n}\right)^{(2^v)}>\underset{e}{\bigwedge}\underline{1-\left(\frac{\omega}{10^n}\right)^{(2^{v+1})}}$$ und

9) $$-w+\frac{\omega}{10^n}+\frac{\omega^2}{10^{2n}}+\frac{\omega^4}{10^{4n}}+\frac{\omega^8}{10^{8n}}+\cdots\cdots+\left(\frac{\omega}{10^n}\right)^{(2^v)}-\frac{1}{10^{n+1}}-\frac{1}{10^{2n+1}}-\frac{1}{10^{4n+1}}$$
$$-\frac{1}{10^{8n+1}}-\cdots\cdots-1:10^{n^{(2^v)}}<\underset{e}{\bigwedge}\underline{1-\left(\frac{\omega}{10^n}\right)^{(2^{v+1})}}$$ sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da aber $\frac{\omega^c}{10^{cn}} < \frac{10^c}{10^{cn}}$ und demnach $\frac{\omega^c}{10^{cn}} < \frac{1}{10^{c\cdot(n-1)}}$, sowie $\frac{\omega^2}{10^{2n}} + \frac{\omega^4}{10^{4n}} + \frac{\omega^8}{10^{8n}} + \cdots\cdots$ $< \frac{1}{10^{2(n-1)}} + \frac{1}{10^{4(n-1)}} + \cdots\cdots < \frac{2}{10^{2(n-1)}}$ ist, so mufs (nach Nr. 8) auch

10) $-w + \frac{\omega}{10^n} + \frac{2}{10^{2(n-1)}} > \underline{\bigwedge_e 1 - \left(\frac{\omega}{10^n}\right)^{\left(2^v+1\right)}}$ sein, während (nach Nr. 9)

11) $-w + \frac{\omega}{10^n} - \frac{1}{10^{n+1}} < \underline{\bigwedge_e 1 - \left(\frac{\omega}{10^n}\right)^{\left(2^v+1\right)}}$ sein mufs, weil stets $\frac{\omega^c}{10^{cn}} - \frac{1}{10^{cn+1}}$ > 0 ist.

Nimmt man nun $v = s$ (s. oben), so wird, da $\frac{\omega}{10^n} < \frac{1}{10^n - 1}$ ist, $\left(\frac{\omega}{10^n}\right)^{\left(2^v+1\right)} < \frac{1}{10^s}$ und daher (nach Nr. 6)

12) $\underline{\bigwedge_e 1 - \left(\frac{\omega}{10^n}\right)^{\left(2^v+1\right)}} = -k$, wo $k < \frac{2}{10^s}$, aber auch $k > \frac{9}{10^{s+1}}$.

Aus Nr. 12, 11 und 10 ergiebt sich dann aber, dafs $+w < \frac{\omega}{10^n} + \frac{2}{10^{2(n-1)}} + \frac{2}{10^s}$, während auch $+w > \frac{\omega}{10^n} - \frac{1}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{s+1}}$. Hieraus folgt der Satz:

13) Wenn $n > 2$ und die ganze Zahl ω kleiner als 10 ist, so ist $\underline{\bigwedge_e 1 - \frac{\omega}{10^n}} = -\frac{\omega}{10^n}$ zu setzen; der angegebene Wert des Logarithmus ist alsdann bis auf wenigstens n Dezimalbruchstellen zuverlässig, so lange n nicht die allergröfste ganze Zahl ist.

§ 13a. **Beweis für die Zuverlässigkeit des in § 8 bei B ausgesprochenen Satzes.**

(Vergl. § 7, B.)

1) Wir setzen $a \cdot e^{\frac{2z}{2a+z}} = Q$ und nehmen an, es sei

2) $a = m \cdot z$ und $m \geq 1$. Dann ist

$$Q = a \cdot e^{\frac{2}{2m+1}} = a \cdot \left[1 + \frac{2}{2m+1} + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{2m+1}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{2m+1}\right)^3 + \cdots\cdots\right]$$
$$= a + a \cdot \left[\frac{2}{2m+1} + r\right], \text{ wofern}$$

3) $r = \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{2m+1}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{2m+1}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{2}{2m+1}\right)^4 + \frac{1}{5!}\left(\frac{2}{2m+1}\right)^5 + \cdots\cdots$ etc. ist.

Es ist aber $\frac{2}{2m+1} + r = \frac{1}{m} - \frac{1}{(2m+1)m} + r = \frac{1}{m} - \left(\frac{1}{(2m+1)m} - r\right)$.

Folglich ist $Q = a + \frac{a}{m} - a\delta$ oder, da $\frac{a}{m} = z$ ist,

4) $Q = a + z - a\delta$, wofern

5) $\delta = s - r$ und $s = \frac{1}{(2m+1)m}$ ist. Daher ist $\underline{\bigwedge_e Q} = \underline{\bigwedge_e a + z - a\delta}$

$$= \underline{\bigwedge_e (a+z)\left(1 - \frac{a\delta}{a+z}\right)} = \underline{\bigwedge_e (a+z)\left(1 - \frac{m}{m+1}\delta\right)} = \underline{\bigwedge_e a+z} + \underline{\bigwedge_e 1 - \frac{m}{m+1}\delta}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach Nr. 1 ist aber auch $\underset{z}{\Lambda}\underline{Q} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \frac{2z}{2a+z}$. Hieraus folgt, dafs

6) $\underset{e}{\Lambda}\underline{a+z} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \frac{2z}{2a+z} - \underset{e}{\bigwedge}\underline{1 - \frac{m}{m+1}\delta}$.

Das letzte Glied dieser Gleichung ist nun näher zu bestimmen, wie folgt:

I. Bestimmung des r.

Bezeichnen wir die einzelnen Glieder der endlosen Summe r der Reihe nach durch G_1, G_2, G_3 u. s. w. und beachten wir, dafs $m \geqq 1$ sein soll, so ist klar,

7) dafs $r > G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \cdots\cdots + G_n$ ist;

8) dafs $G_1 + G_2 = \frac{12m+10}{3\cdot(2m+1)^3}$, und also $r > \frac{12m+10}{3(2m+1)^3}$ ist;

9) dafs $G_1 > 3\cdot G_2$, $G_2 > 4\cdot G_3$, $G_3 > 5\cdot G_4$ und allgemein $G_n > (n+2)\cdot G_{n+1}$ ist; dafs daher jedes beliebige G_n gröfser ist, als die endlose Summe aller folgenden Glieder der Reihe;

10) dafs folglich $r < G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \cdots\cdots + 2\cdot G_n$, und $r < G_1 + G_2 + \frac{1}{2}\cdot G_2$, (da $\frac{1}{2}G_2 > 2\cdot G_3$); dafs hiernach

11) $r < \frac{4m+4}{(2m+1)^3}$, während $r > \frac{12m+10}{3\cdot(2m+1)^3}$ (s. o. Nr. 8).

II. Bestimmung des δ (s. oben Nr. 5 und 6).

Nach Nr. 5 und 11 ist

$$s - r > \frac{1}{(2m+1)m} - \frac{4m+4}{(2m+1)^3} \text{ und } s - r < \frac{1}{(2m+1)m} - \frac{12m+10}{3\cdot(2m+1)^3}.$$

Hieraus ergiebt sich,

12) dafs $\delta > \frac{1}{(2m+1)^3\cdot m}$, dafs also δ stets eine positive Gröfse ist,

13) dafs immer $\delta < \frac{2m+3}{3m(2m+1)^3}$ wird.

III. Bestimmung des Produktes $\frac{m}{m+1}\cdot\delta$ (s. o. Nr. 6).

14) $\frac{m}{m+1}\delta$ ist stets eine positive Gröfse (s. o. Nr. 12 und Nr. 2).

15) Es ist immer $\frac{m}{m+1}\delta < \vartheta$, wofern $\vartheta = \frac{2m+3}{3(m+1)(2m+1)^3}$ (s. Nr. 13).

16) Bezüglich des ϑ ist leicht zu erkennen, dafs sein Wert um so kleiner wird, je gröfser der Wert des m ist; denn es ist

$$\vartheta = \frac{2m+1+2}{3\cdot(m+1)(2m+1)^3} = \frac{1}{3\cdot(m+1)(2m+1)^2} + \frac{2}{3(m+1)(2m+1)^3}.$$

Berechnen wir nun für einige bestimmte Werte des m die entsprechenden Werte des ϑ, so ergiebt sich folgendes:

17) Wenn $m = 27$ ist, so ist $\vartheta = 0{,}000\,004\,07\cdots\cdots$, wenn aber $m = 127$ ist, so ist $\vartheta = 0{,}000\,000\,040\,2\cdots$, und wenn $m = 1276$ ist, so ist $\vartheta = 0{,}000\,000\,000\,040\,07\cdots\cdots$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus Nr. 17, 16 und 15 folgt weiter:

18) wenn $m \geqq 27$ ist, so ist $\frac{m}{m+1}\delta < 0{,}000\,0041$,

19) wenn $m \geqq 127$ ist, so ist $\frac{m}{m+1}\delta < 0{,}000\,000\,0403$,

20) wenn $m \geqq 1276$ ist, so ist $\frac{m}{m+1}\delta < 0{,}000\,000\,000\,0401$.

IV. Bestimmung von $\underset{e}{\bigwedge}\underline{1 - \frac{m}{m+1}\delta}$.

In Rücksicht auf § 13, II. sind aus Nr. 18, 19 und 20 folgende Schlüsse zu ziehen (vergl. besonders § 13, 13):

21) Es ist stets $\underset{e}{\bigwedge}\underline{1 - \frac{m}{m+1}\delta} = -\varkappa$; der Wert dieses $\varkappa$ aber bestimmt sich in folgender Weise:

22) ist $m \geqq 27$, so ist $\varkappa < 0{,}000\,005$;

23) ist $m \geqq 127$, so ist $\varkappa < 0{,}000\,000\,05$;

24) ist $m \geqq 1276$, so ist $\varkappa < 0{,}000\,000\,000\,05$.

Aus Nr. 21, 22, 23, 24 und 6 ergiebt sich der Satz:

25) Wenn $a = m \cdot z$ ist, so ist $\underset{e}{\bigwedge}\underline{a + z} = \underset{e}{\bigwedge}\underline{a} + \frac{2z}{2a+z}$ genau richtig

bis auf wenigstens	5	Dezimalbruchstellen,	wofern	$m \geqq$	27 ist,
„ „ „	7	„	„	$m \geqq$	127 ist,
„ „ „	10	„	„	$m \geqq$	1276 ist.

Anmerkung 1. Hiermit sind die in § 8 bei B aufgestellten Sätze bewiesen ohne Rücksicht auf die Wahrheit oder Unwahrheit der in § 7 bei B angeführten Sätze. Diese letzteren aber sind den Gleichungen Nr. 6 und Nr. 21 des vorliegenden Paragraphen durchaus entsprechend. Man kann daher hieraus auch wieder rückwärts auf die wahrscheinliche volle Gültigkeit der erwähnten Sätze des § 7 schliesen.

Anmerkung 2. Nach Nr. 25 können wir im vollen Bewufstsein, richtig zu verfahren, eine Tafel der fünf-, sieben- oder zehnstelligen natürlichen Logarithmen berechnen, wofern wir nur einen entsprechenden zuverlässigen Ausgangspunkt gewonnen haben. Um einen solchen zu finden, wollen wir im folgenden Paragraphen die in § 7 angegebenen natürlichen Logarithmen von 2, 8, 9, 10, 3 und 5 einer Prüfung unterwerfen.

§ 13 b. Prüfung der in § 7 gefundenen natürlichen Logarithmen von 2, 8, 9, 10, 3 und 5.

I. Nehmen wir $l = 0{,}693\,147\,180\,559\,94$ so wird

$$l^2 : 2! = 0{,}240\,226\,506\,958\,97$$
$$l^3 : 3! = 0{,}055\,504\,108\,664\,78$$
$$l^4 : 4! = 0{,}009\,618\,129\,107\,62$$
$$l^5 : 5! = 0{,}001\,333\,355\,814\,64$$
$$l^6 : 6! = 0{,}000\,154\,035\,303\,91$$
$$l^7 : 7! = 0{,}000\,015\,252\,733\,78$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$l^8 : 8! = 0{,}00000132154865$$
$$l^9 : 9! = 0{,}00000010178082$$
$$l^{10} : 10! = 0{,}00000000705488$$
$$l^{11} : 11! = 0{,}00000000044452$$
$$l^{12} : 12! = 0{,}00000000002566$$
$$l^{13} : 13! = 0{,}00000000000135$$
$$l^{14} : 14! = 0{,}00000000000005 \text{ und daher}$$
$$e^l = 1{,}99999999999957 = 2.$$

Nimmt man aber $\lambda = 0{,}69314718056$ und demgemäfs

$\lambda^2 : 2! = 0{,}24022650696$, während man die übrigen Glieder der Summe auf zwölf Stellen abkürzt, so erhält man $e^\lambda = 2{,}000000000008$.

Folglich ist bis auf mindestens 12 Dezimalbruchstellen genau $\underset{e}{\Lambda}\underline{2} = l$.

II. Da $\underset{e}{\Lambda}\underline{2} = l$ ist, so ist $\underset{e}{\Lambda}\underline{8} = \underset{e}{\Lambda}\underline{2^3} = 3l =$ dem in § 7 angegebenen Dezimalbruche.

III. Setzt man $r = 0{,}11778303565638$, so wird

$$r^2 : 2! = 0{,}00693642174420$$
$$r^3 : 3! = 0{,}00027233093652$$
$$r^4 : 4! = 0{,}00000801899223$$
$$r^5 : 5! = 0{,}00000018890021$$
$$r^6 : 6! = 0{,}00000000370819$$
$$r^7 : 7! = 0{,}00000000006237$$
$$r^8 : 8! = 0{,}00000000000091 \text{ und daher}$$
$$e^r = 1{,}12500000000101 = 9 : 8.$$

Folglich ist $r = \underset{e}{\Lambda}\underline{9} - \underset{e}{\Lambda}\underline{8}$, und daher $\underset{e}{\Lambda}\underline{9} = \underset{e}{\Lambda}\underline{8} + r =$ dem in § 7 angegebenen Werte bis auf mindestens 11 Bruchstellen.

IV. Setzt man $\varrho = 0{,}10536051565776$, so wird

$$\varrho^2 : 2! = 0{,}00555041912981$$
$$\varrho^3 : 3! = 0{,}00019493167385$$
$$\varrho^4 : 4! = 0{,}00000513452539$$
$$\varrho^5 : 5! = 0{,}00000010819524$$
$$\varrho^6 : 6! = 0{,}00000000189991$$
$$\varrho^7 : 7! = 0{,}00000000002859$$
$$\varrho^8 : 8! = 0{,}00000000000037 \text{ und daher}$$
$$e^\varrho = 1{,}11111111111092 = 10 : 9.$$

Folglich ist $\varrho = \underset{e}{\Lambda}\underline{10} - \underset{e}{\Lambda}\underline{9}$, und mithin auch $\underset{e}{\Lambda}\underline{10} = \underset{e}{\Lambda}\underline{9} + \varrho =$ dem in § 7 angegebenen Dezimalbruche bis auf mindestens 11 Bruchstellen.

V. Es ist $\underset{e}{\Lambda}\underline{3} = \underset{e}{\Lambda}\underline{\sqrt[2]{9}} = \frac{1}{2} \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{9} =$ dem in § 7 angegebenen Werte bis auf mindestens 11 Bruchstellen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VI. Es ist $\underset{e}{\Lambda}\underline{5} = \underset{e}{\Lambda}\underline{10:2} = \underset{e}{\Lambda}\underline{10} - \underset{e}{\Lambda}\underline{2} =$ dem in § 7 angegebenen Dezimalbruche bis auf mindestens 11 Bruchstellen.

Anmerkung. Bei Berücksichtigung des § 10 ergiebt sich aus Nr. I bis VI des vorstehenden § unter anderm noch folgendes:

VII. $\underset{e}{\Lambda}\underline{27} = \underset{e}{\Lambda}\underline{3^3} = 3 \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{3} = 3{,}295\,836\,8660\,0430 \cdots\cdots;$

VIII. $\underset{e}{\Lambda}\underline{128} = \underset{e}{\Lambda}\underline{2^7} = 7 \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{2} = 4{,}852\,030\,2639\,1958 \cdots\cdots;$

IX. $\underset{e}{\Lambda}\underline{1280} = \underset{e}{\Lambda}\underline{2^8 \cdot 5} = 8 \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{2} + \underset{e}{\Lambda}\underline{5} = 7{,}154\,615\,3569\,1355 \cdots\cdot$

Hiermit sind die am Schlusse des vorigen § in Anmerkung 2 verlangten sichern Ausgangspunkte gefunden. Man geht eben von den Logarithmanden 27 oder 128 (statt 127) oder 1280 (statt 1276) aus.

§ 13, c. Berechnung der Tafel der fünfstelligen natürlichen Logarithmen.

Ausgehend von $\underset{e}{\Lambda}\underline{27} = 3{,}29\,584$ findet man nach § 13 a Nr. 25 $\underset{e}{\Lambda}\underline{28} = 3{,}33\,220$ und hieraus nach § 11 $\underset{e}{\Lambda}\underline{7} = 1{,}94\,591$.

Berechnet man nun nach § 10 die Logarithmen der Zahlen 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45 und hierauf nach § 13 a, Nr. 25 diejenigen der Zahlen 29, 31, 33, 34, 37, 38, 39, 41, 43 und 46, so kann man nach § 11 aus den Logarithmen von 33, 39, 34, 38 und 46 diejenigen der Primzahlen 11, 13, 17, 19 und 23 bestimmen. Um endlich die in dieser Tafel noch vorhandenen Lücken auszufüllen und die Tafel zu erweitern, verfährt man bei Primzahlen nach § 13a, Nr. 25, bei anderen Zahlen aber nach § 10.

Anmerkung. Hierdurch ist auch angedeutet, wie die sieben- oder zehnstellige Tafel zu berechnen wäre.

§ 14. Die künstlichen Logarithmen; Berechnung derselben aus den natürlichen.

1. Logarithmen, welche in Bezug auf eine von e verschiedene Grundzahl (s. § 6, 4) gebildet sind, heifsen künstliche Logarithmen. $\underset{n}{\Lambda}\underline{a}$ ist ein künstlicher Logarithmus, wenn $n \gtrless e$ ist.

2) Wenn nun etwa $\underset{n}{\Lambda}\underline{a} = z$ sein soll, so mufs $a = n^z$, $\underset{e}{\Lambda}\underline{a} = z \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{n}$, $z = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} \cdot \frac{1}{\underset{e}{\Lambda}\underline{n}}$ und daher $\underset{n}{\Lambda}\underline{a} = \underset{e}{\Lambda}\underline{a} \cdot \frac{1}{\underset{e}{\Lambda}\underline{n}}$ sein, d. h.

I. Den künstlichen n-Logarithmus eines jeden Logarithmanden erhält man dadurch, dafs man den natürlichen Logarithmus desselben Logarithmanden mit dem (modulus) „Erzeuger" (E_n) der künstlichen n-Logarithmen multipliziert. — Es ist aber E_n gleich dem reziproken Werte des natürlichen Logarithmus von n.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) Der Erzeuger der Zweilogarithmen ist $E_2 = 1 : \underset{e}{\Lambda}\underline{2} = 1{,}4426\,950 \ldots$, derjenige der Dreilogarithmen ist $E_3 = 0{,}9102\,392 \ldots$, derjenige der Zehnlogarithmen ist $E_{10} = 0{,}4342\,94481903267 \ldots$

4) Aus Nr. I. folgt, dafs (s. § 10 und 11):

$\alpha)\ \underset{n}{\Lambda}\underline{ab} = E_n \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{ab} = E_n \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + E_n \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{b} = \underset{n}{\Lambda}\underline{a} + \underset{n}{\Lambda}\underline{b}$,

$\beta)\ \underset{n}{\Lambda}\underline{a:b} = E_n \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a:b} = E_n \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a} - E_n \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{b} = \underset{n}{\Lambda}\underline{a} - \underset{n}{\Lambda}\underline{b}$,

$\gamma)\ \underset{n}{\Lambda}\underline{a^b} = E_n \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a^b} = b \cdot E_n \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a} = b \cdot \underset{n}{\Lambda}\underline{a}$,

$\delta)\ \underset{n}{\Lambda}\underline{\sqrt[b]{a}} = E_n \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{\sqrt[b]{a}} = \frac{1}{b} \cdot \underset{n}{\Lambda}\underline{a}$ ist,

II) dafs also die in § 10 und 11 bezüglich der natürlichen Logarithmen aufgestellten Sätze auch für künstliche Logarithmen gelten müssen.

Anmerkung. Dennoch wollen wir dieselben in § 16, 17 u. s. w. auch ohne Rücksicht auf die natürlichen Logarithmen zu entwickeln suchen.

III. Für die Berechnung einer künstlichen Logarithmentafel mit der Grundzahl g ergiebt sich aus § 14, I. und § 13a, 25, dafs die Formel $\underset{g}{\Lambda}\underline{a+z} = \underset{g}{\Lambda}\underline{a} + \frac{2z}{2a+z} \cdot E_g$ wenigstens nach Mafsgabe von § 13a, Nr. 25 zuverlässig ist, wofern nur $E_g < 1$ (also $g > e$) ist.

Anmerkung. Auch die fünfstellige Tafel der Zweilogarithmen läfst sich nach derselben Formel berechnen. Hierbei wird man jedoch, da $E_2 = 1{,}44 \ldots$ ist, ausgehen von einem „$a = m \cdot z$“, wobei $m \geqq 127$ genommen wird.

§ 15. Der Quotient und das Produkt zweier Logarithmen.

1. Ist etwa $\frac{\underset{n}{\Lambda}\underline{a}}{\underset{n}{\Lambda}\underline{c}} = z$, so mufs $\underset{n}{\Lambda}\underline{a} = \underset{n}{\Lambda}\underline{c} \cdot z$ sein, und daher $n^{\underset{n}{\Lambda}\underline{c} \cdot z} = a$, d. i. $c^z = a$, d. i. $z = \underset{c}{\Lambda}\underline{a}$. Folglich ist $\underset{n}{\Lambda}\underline{a} : \underset{n}{\Lambda}\underline{c} = \underset{c}{\Lambda}\underline{a}$, d. h.

I. Allgemein ist der Quotient zweier gleichnamiger Logarithmen gleich dem Logarithmanden des Dividenden, logarithmiert durch den Logarithmanden des Divisors.

2) Es ist $\underset{n}{\Lambda}\underline{a} : \underset{r}{\Lambda}\underline{a} = E_n : E_r = \underset{e}{\Lambda}\underline{r} : \underset{e}{\Lambda}\underline{n} = \underset{n}{\Lambda}\underline{r}$, d. h.

II. Der Quotient zweier Logarithmen desselben Logarithmanden ist gleich der Grundzahl des Divisors, logarithmiert durch die Grundzahl des Dividenden.

3) $\frac{\underset{n}{\Lambda}\underline{a}}{\underset{r}{\Lambda}\underline{c}} = \frac{\underset{e}{\Lambda}\underline{a}}{\underset{e}{\Lambda}\underline{n}} : \frac{\underset{e}{\Lambda}\underline{c}}{\underset{e}{\Lambda}\underline{r}} = \frac{\underset{e}{\Lambda}\underline{a}}{\underset{e}{\Lambda}\underline{c}} \cdot \frac{\underset{e}{\Lambda}\underline{r}}{\underset{e}{\Lambda}\underline{n}} = \underset{c}{\Lambda}\underline{a} \cdot \underset{n}{\Lambda}\underline{r}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III. Es ist also $\frac{\underset{n}{\Lambda}\underline{a}}{\underset{r}{\Lambda}\underline{c}} = \underset{c}{\Lambda}\underline{a} \cdot \underset{n}{\Lambda}\underline{r} = \frac{\underset{n}{\Lambda}\underline{r}}{\underset{a}{\Lambda}\underline{c}} = \frac{\underset{c}{\Lambda}\underline{a}}{\underset{r}{\Lambda}\underline{n}}$ (s. § 1. V. 2.).

4. Aus Nr. 1 folgt, dafs

IV. $\underset{n}{\Lambda}\underline{c} \cdot \underset{c}{\Lambda}\underline{a} = \underset{n}{\Lambda}\underline{a}$.

5. Hieraus ergiebt sich weiter der Wert einer Logarithmenkette, worunter wir ein Produkt aus Logarithmen verstehen, die so beschaffen und geordnet sind, dafs stets die Grundzahl eines Faktors gleich dem Logarithmanden des vorhergehenden Faktors ist. Es ergiebt sich nämlich:

V. Der Wert einer solchen Logarithmenkette ist gleich dem Logarithmanden des letzten Gliedes, logarithmiert durch die Grundzahl des ersten Gliedes. Z. B.:

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{b} \cdot \underset{b}{\Lambda}\underline{c} \cdot \underset{c}{\Lambda}\underline{d} \cdot \underset{d}{\Lambda}\underline{g} \cdot \underset{g}{\Lambda}\underline{m} \cdots\cdots \underset{y}{\Lambda}\underline{z} = \underset{a}{\Lambda}\underline{z}.$$

VI. Es ist $\underset{c}{\Lambda}\underline{a} \cdot \underset{n}{\Lambda}\underline{r} = \frac{\underset{n}{\Lambda}\underline{a}}{\underset{r}{\Lambda}\underline{c}} = \frac{\underset{n}{\Lambda}\underline{r}}{\underset{a}{\Lambda}\underline{c}} = \frac{\underset{c}{\Lambda}\underline{a}}{\underset{r}{\Lambda}\underline{n}}$ (s. III.).

VII. Es ist $\underset{c}{\Lambda}\underline{a} = \frac{\underset{n}{\Lambda}\underline{a}}{\underset{n}{\Lambda}\underline{c}}$ (s. Nr. 1), d. h.

Den Wert eines jeden berechenbaren formellen Logarithmus kann man mit Hilfe einer jeden beliebigen vollständigen Logarithmentafel dadurch berechnen, dafs man den Tafellogarithmus des Logarithmanden durch den Tafellogarithmus der Grundzahl dividiert (vergleiche hiermit § 14, Nr. 2).

§ 16. Die Summe und Differenz zweier Logarithmen.

1) Ist etwa $\underset{n}{\Lambda}\underline{a} + \underset{n}{\Lambda}\underline{b} = x$ und $\underset{n}{\Lambda}\underline{a} - \underset{n}{\Lambda}\underline{b} = z$, so ist: $\underset{n}{\Lambda}\underline{a} = x - \underset{n}{\Lambda}\underline{b} = z + \underset{n}{\Lambda}\underline{b}$; und daher $n^{x - \underset{n}{\Lambda}\underline{b}} = a = n^{z + \underset{n}{\Lambda}\underline{b}}$; $n^x : b = a = n^z \cdot b$; $n^x = ab$; $n^z = a : b$; $x = \underset{n}{\Lambda}\underline{ab}$ und $z = \underset{n}{\Lambda}\underline{a : b}$.

Hieraus folgt:

I. Die Summe gleichnamiger Logarithmen ist gleich dem gleichnamigen Logarithmus vom Produkte der Logarithmanden.

II. Die Differenz zweier gleichnamiger Logarithmen ist gleich dem gleichnamigen Logarithmus desjenigen Quotienten, welchen man erhält, wenn man den Logarithmanden des Minuenden durch den Logarithmanden des Subtrahenden dividiert.

Anmerkung. Zu denselben Sätzen gelangt man in folgender Weise: Ist $\underset{n}{\Lambda}\underline{a} = \alpha$ und $\underset{n}{\Lambda}\underline{b} = \beta$, so ist $n^\alpha = a$ und $n^\beta = b$ und daher 1) $n^\alpha \cdot n^\beta = ab$; $n^{\alpha+\beta} = ab$; $\alpha + \beta = \underset{n}{\Lambda}\underline{ab}$; 2) $n^\alpha : n^\beta = a : b$; $n^{\alpha-\beta} = a : b$; $\alpha - \beta = \underset{n}{\Lambda}\underline{a : b}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Da $r = \underset{n}{\Lambda}\underline{n^r}$ ist, so ist

III. $\underset{n}{\Lambda}\underline{a} + r = \underset{n}{\Lambda}\underline{a \cdot n^r}$; $\underset{n}{\Lambda}\underline{a} - r = \underset{n}{\Lambda}\underline{a : n^r}$; $r - \underset{n}{\Lambda}\underline{a} = \underset{n}{\Lambda}\underline{n^r : a}$.

3) Es ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{c} \pm \underset{b}{\Lambda}\underline{c} = \frac{1}{\underset{c}{\Lambda}\underline{a}} \pm \frac{1}{\underset{c}{\Lambda}\underline{b}} = \frac{\underset{c}{\Lambda}\underline{b} \pm \underset{c}{\Lambda}\underline{a}}{\underset{c}{\Lambda}\underline{a} \cdot \underset{c}{\Lambda}\underline{b}}$. Daher ist

IV. $\underset{a}{\Lambda}\underline{c} + \underset{b}{\Lambda}\underline{c} = \frac{\underset{c}{\Lambda}\underline{ab}}{\underset{c}{\Lambda}\underline{a} \cdot \underset{c}{\Lambda}\underline{b}}$ und

V. $\underset{a}{\Lambda}\underline{c} - \underset{b}{\Lambda}\underline{c} = \frac{\underset{c}{\Lambda}\underline{b : a}}{\underset{c}{\Lambda}\underline{a} \cdot \underset{c}{\Lambda}\underline{b}}$.

§ 17. Produkt und Quotient aus einem formellen Logarithmus und einer wirklichen Zahl.

1) Ist g eine ganze Zahl, so folgt aus § 16, I., dafs

$$g \cdot \underset{n}{\Lambda}\underline{a} = \underset{n}{\Lambda}\underline{a} + \underset{n}{\Lambda}\underline{a} + \underset{n}{\Lambda}\underline{a} + \cdots\cdots\cdots + \underset{n}{\Lambda}\underline{a}$$
$$= \underset{n}{\Lambda}\underline{a \cdot a \cdot a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a} = \underset{n}{\Lambda}\underline{a^g} \text{ ist.}$$

2) Soll nun überhaupt etwa $r \cdot \underset{n}{\Lambda}\underline{a} = x$ sein, so mufs $\underset{n}{\Lambda}\underline{a} = \frac{x}{r}$, $a = n^{\frac{x}{r}}$, $a^r = n^x$ $x = \underset{n}{\Lambda}\underline{a^r}$ und daher $r \cdot \underset{n}{\Lambda}\underline{a} = \underset{n}{\Lambda}\underline{a^r}$ sein, d. h.

I. Ein formeller Logarithmus wird mit einer beliebigen Zahl dadurch multipliziert, dafs man den Logarithmanden mit der Zahl potenziert.

3) Soll $\underset{n}{\Lambda}\underline{a} : r = z$ sein, so mufs $\underset{n}{\Lambda}\underline{a} = r \cdot z$, $a = n^{r \cdot z}$, $\sqrt[r]{a} = n^z$; $z = \underset{n}{\Lambda}\underline{\sqrt[r]{a}}$, und daher $\underset{n}{\Lambda}\underline{a} : r = \underset{n}{\Lambda}\underline{\sqrt[r]{a}}$ sein, d. h.

II. Ein formeller Logarithmus wird durch eine beliebige Zahl dadurch dividiert, dafs man den Logarithmanden durch die Zahl radiziert.

III. Es ist $r : \underset{n}{\Lambda}\underline{a} = 1 : \underset{n}{\Lambda}\underline{\sqrt[r]{a}}$ (s. o. Nr. 3)

$= \underset{n}{\Lambda}\underline{n} : \underset{n}{\Lambda}\underline{\sqrt[r]{a}}$ (s. § 1, 4)

$= \underset{\sqrt[r]{a}}{\Lambda}\underline{n}$ (s. § 15, 1)

$= \underset{a}{\Lambda}\underline{n^r}$ (s. § 1, V, 1, α).

$= 1 : \underset{n^r}{\Lambda}\underline{a}$ (s. § 1, V, 2).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 18. **Umkehrung der in § 16 und 17 aufgestellten Sätze** (s. § 14, 4).

Es ist $\underset{n}{\Lambda}\underline{ab} = \underset{n}{\Lambda}\underline{a} + \underset{n}{\Lambda}\underline{b}$ (s. § 16, 1),

$\underset{n}{\Lambda}\underline{a:b} = \underset{n}{\Lambda}\underline{a} - \underset{n}{\Lambda}\underline{b}$ (s. § 16, 2),

$\underset{n}{\Lambda}\underline{a^r} = r \cdot \underset{n}{\Lambda}\underline{a}$ (s. § 17, 2)

und $\underset{n}{\Lambda}\underline{\sqrt[r]{a}} = \underset{n}{\Lambda}\underline{a} : r$ (s. § 17, 3), d. h.

I. Ein Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der gleichnamigen Logarithmen der einzelnen Faktoren.

II. Ein Logarithmus eines Quotienten ist gleich dem gleichnamigen Logarithmus des Dividenden, vermindert um den gleichnamigen Logarithmus des Divisors.

III. Ein Logarithmus einer Potenz ist gleich dem gleichnamigen Logarithmus der Potenzgrundzahl, multipliziert mit dem Potenzexponenten.

IV. Ein Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem gleichnamigen Logarithmus des Radikanden, dividiert durch den Wurzelexponenten. (Vergleiche § 14, II. und 5.)

§ 19. **Andere Herleitung der in § 18 ausgesprochenen Sätze.**

I. Die in § 10 und 11 angestellten Untersuchungen gelten auch dann, wenn man dort anstatt der bestimmten Grundzahl e eine unbestimmte, etwa g einsetzt. Thut man dieses, so gelangt man zu den allgemeinen Sätzen des § 18.

II. Zu § 18, I.

1) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{bc} = x$, so ist auch

$$bc = a^x$$
$$b = a^x : c = a^x : a^{\underset{a}{\Lambda}\underline{c}}$$
$$= a^{x - \underset{a}{\Lambda}\underline{c}}$$
$$x - \underset{a}{\Lambda}\underline{c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b}$$
$$x = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} + \underset{a}{\Lambda}\underline{c}$$
$$\underset{a}{\Lambda}\underline{bc} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} + \underset{a}{\Lambda}\underline{c}.$$

2) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{bc} = \underset{a}{\Lambda}\underline{c} \cdot z$, so ist auch

$$bc = a^{\underset{a}{\Lambda}\underline{c} \cdot z} = c^z$$
$$b = c^{z-1}$$
$$z - 1 = \underset{c}{\Lambda}\underline{b}$$
$$z = 1 + \underset{c}{\Lambda}\underline{b}$$
$$\underset{a}{\Lambda}\underline{bc} = \underset{a}{\Lambda}\underline{c} \cdot \left(1 + \underset{c}{\Lambda}\underline{b}\right)$$
$$= \underset{a}{\Lambda}\underline{c} + \underset{a}{\Lambda}\underline{c} \cdot \underset{c}{\Lambda}\underline{b}$$
$$= \underset{a}{\Lambda}\underline{c} + \underset{a}{\Lambda}\underline{b}.$$

3) Es ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{bc} = v + w$ (vergl. § 10, I.), wenn $bc = a^{v+w} = a^v \cdot a^w$, d. i. wenn $a^v = b$ und $a^w = c$, d. i. wenn $v = \underset{a}{\Lambda}\underline{b}$ und $w = \underset{a}{\Lambda}\underline{c}$ ist. Folglich ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{bc} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} + \underset{a}{\Lambda}\underline{c}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III. Zu § 18, II.

1) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{b:c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} : y$, so ist

$$b = a^{\underset{a}{\Lambda}\underline{b:c}\cdot y} = (b:c)^y,$$

$$c = b^{\frac{y-1}{y}}, \quad \frac{y-1}{y} = \underset{b}{\Lambda}\underline{c},$$

$$y \cdot \left(1 - \underset{b}{\Lambda}\underline{c}\right) = 1,$$

$$\frac{1}{y} = 1 - \underset{b}{\Lambda}\underline{c} \text{ und daher}$$

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{b:c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} \cdot \left(1 - \underset{b}{\Lambda}\underline{c}\right)$$

$$= \underset{a}{\Lambda}\underline{b} - \underset{a}{\Lambda}\underline{b} \cdot \underset{b}{\Lambda}\underline{c}$$

$$= \underset{a}{\Lambda}\underline{b} - \underset{a}{\Lambda}\underline{c}.$$

2) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{b:c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} - u$, so ist

$$b : c = a^{\underset{a}{\Lambda}\underline{b} - u} = b : a^u,$$

$$c = a^u,$$

$$u = \underset{a}{\Lambda}\underline{c}, \text{ und daher}$$

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{b:c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} - \underset{a}{\Lambda}\underline{c}.$$

3) Es ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{b:c} = v - w$ (s. § 11, I.), wenn $b : c = a^v : a^w$, wenn $b = a^v$ und $c = a^w$, d. i. wenn $v = \underset{a}{\Lambda}\underline{b}$ und $w = \underset{a}{\Lambda}\underline{c}$ ist.

Also ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{b:c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} - \underset{a}{\Lambda}\underline{c}$.

IV. Zu § 18, III.

1) Wenn $\underset{a}{\Lambda}\underline{b^c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} \cdot u$ ist, so ist

$$b^c = a^{\underset{a}{\Lambda}\underline{b}\cdot u} = b^u,$$

$$c = u, \text{ und daher}$$

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{b^c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} \cdot c.$$

2) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{b^c} = u \cdot \underset{a}{\Lambda}\underline{b}$, so ist

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{b^c} : \underset{a}{\Lambda}\underline{b} = u,$$

$$\underset{b}{\Lambda}\underline{b^c} = u,$$

$$c = u \text{ u. s. w.}$$

3) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{b^c} = u \cdot \underset{a}{\Lambda}\underline{b}$, so ist

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{b} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b^c} : u = \underset{a}{\Lambda}\underline{b^c} : \underset{a}{\Lambda}\underline{a^u} = \underset{a^u}{\Lambda}\underline{b^c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b^{c:u}},$$

$$b^1 = b^{c:u},$$

$$1 = c : u,$$

$$u = c \text{ u. s. w.}$$

V. Zu § 18, IV.

1) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{\sqrt[c]{b}} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} : v$, so ist

$$\sqrt[c]{b} = a^{\underset{a}{\Lambda}\underline{b} : v} = \sqrt[v]{b},$$

$$c = v, \text{ und folglich}$$

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{\sqrt[c]{b}} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} : c.$$

2) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{\sqrt[c]{b}} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} : v$, so ist

$$v = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} : \underset{a}{\Lambda}\underline{\sqrt[c]{b}} = \underset{\sqrt[c]{b}}{\Lambda}\underline{b} = \underset{b}{\Lambda}\underline{b^c}$$

$$v = c \text{ u. s. w.}$$

3) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{\sqrt[c]{b}} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} : v$, so ist

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{b} = v \cdot \underset{a}{\Lambda}\underline{\sqrt[c]{b}} = \underset{a}{\Lambda}\underline{\sqrt[c]{b}^v},$$

$$b = \sqrt[c]{b}^v = b^{\frac{v}{c}},$$

$$\frac{v}{c} = 1, \quad v = c \text{ u. s. w.}$$

4) Es ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{\sqrt[c]{b}} = 1 : \underset{\sqrt[c]{b}}{\Lambda}\underline{a} = 1 : \underset{b}{\Lambda}\underline{a^c}$

$$= 1 : \left(c \cdot \underset{b}{\Lambda}\underline{a}\right) = 1 : \left(c : \underset{a}{\Lambda}\underline{b}\right) = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} : c.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VI. Zu § 16, I. und § 18, I.

1) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{b} + \underset{a}{\Lambda}\underline{c} = x$, so ist auch

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{b} = x - \underset{a}{\Lambda}\underline{c},$$

$$b = a^{x - \underset{a}{\Lambda}\underline{c}} = a^x : c,$$

$$b \cdot c = a^x,$$

$$x = \underset{a}{\Lambda}\underline{b \cdot c},$$

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{b} + \underset{a}{\Lambda}\underline{c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{bc}.$$

2) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{b} + \underset{a}{\Lambda}\underline{c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{z}$, so ist

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{b} = \underset{a}{\Lambda}\underline{z} - \underset{a}{\Lambda}\underline{c},$$

$$b = a^{\underset{a}{\Lambda}\underline{z} - \underset{a}{\Lambda}\underline{c}} = z : c,$$

$$b \cdot c = z \text{ u. s. w.}$$

3) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{b} + \underset{a}{\Lambda}\underline{c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{z}$, so ist

$$z = a^{\underset{a}{\Lambda}\underline{b} + \underset{a}{\Lambda}\underline{c}} = b \cdot c \text{ u. s. w.}$$

VII. Zu § 16, II. und § 18, II.

1) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{b} - \underset{a}{\Lambda}\underline{c} = u$, so ist auch

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{b} = u + \underset{a}{\Lambda}\underline{c},$$

$$b = a^{u + \underset{a}{\Lambda}\underline{c}} = a^u \cdot c,$$

$$b : c = a^u,$$

$$u = \underset{a}{\Lambda}\underline{b : c},$$

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{b} - \underset{a}{\Lambda}\underline{c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b : c}.$$

2) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{b} - \underset{a}{\Lambda}\underline{c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{v}$, so ist

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{b} = \underset{a}{\Lambda}\underline{v} + \underset{a}{\Lambda}\underline{c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{vc},$$

$$b = a^{\underset{a}{\Lambda}\underline{vc}} = vc,$$

$$v = b : c \text{ u. s. w.}$$

3) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{b} - \underset{a}{\Lambda}\underline{c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{v}$, so ist

$$v = a^{\underset{a}{\Lambda}\underline{b} - \underset{a}{\Lambda}\underline{c}} = b : c \text{ u. s. w.}$$

VIII. Zu § 17, I. und § 18, III.

1) Ist $n \cdot \underset{a}{\Lambda}\underline{b} = \underset{a}{\Lambda}\underline{u}$, so ist

$$n = \underset{a}{\Lambda}\underline{u} : \underset{a}{\Lambda}\underline{b} = \underset{b}{\Lambda}\underline{u},$$

$$u = b^n,$$

$$n \cdot \underset{a}{\Lambda}\underline{b} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b^n}.$$

2) $n \cdot \underset{a}{\Lambda}\underline{b} = \underset{b}{\Lambda}\underline{b^n} : \underset{b}{\Lambda}\underline{a} = \underset{a}{\Lambda}\underline{b^n}.$

3) $n \cdot \underset{a}{\Lambda}\underline{b} = n : \underset{b}{\Lambda}\underline{a}$

$$= 1 : \underset{b^n}{\Lambda}\underline{a}$$

$$= \underset{a}{\Lambda}\underline{b^n}.$$

IX. Zu § 17, II. und § 18, IV.

1) Ist $\underset{a}{\Lambda}\underline{b} : n = \underset{a}{\Lambda}\underline{w}$, so ist

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{b} = n \cdot \underset{a}{\Lambda}\underline{w} = \underset{a}{\Lambda}\underline{w^n},$$

$$b = w^n, \quad w = \sqrt[n]{b},$$

$$\underset{a}{\Lambda}\underline{b} : n = \underset{a}{\Lambda}\underline{\sqrt[n]{b}}.$$

2) $\underset{a}{\Lambda}\underline{b} : n = \underset{a}{\Lambda}\underline{b} : \underset{a}{\Lambda}\underline{a^n} = \underset{a^n}{\Lambda}\underline{b} = \underset{a}{\Lambda}\underline{\sqrt[n]{b}}.$

3) $\underset{a}{\Lambda}\underline{b} : n = 1 : \underset{b}{\Lambda}\underline{a} : n$

$$= 1 : \left(n \cdot \underset{b}{\Lambda}\underline{a}\right)$$

$$= 1 : \underset{b}{\Lambda}\underline{a^n} = \underset{a^n}{\Lambda}\underline{b} = \underset{a}{\Lambda}\underline{\sqrt[n]{b}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 20. Direkte Beweise für die in § 18 aufgestellten Sätze.

Diese Beweise stützen sich auf den Grundsatz Nr. 2 (s. § 1. unter IV.).

1) Es ist $\underset{n}{\Lambda}\underline{ab} = \underset{n}{\Lambda}\underline{a} + \underset{n}{\Lambda}\underline{b}$; denn es ist $n^{\overset{\Lambda a}{}+\overset{\Lambda b}{}} = n^{\overset{\Lambda a}{}} \cdot n^{\overset{\Lambda b}{}} = ab$.

2) Es ist $\underset{n}{\Lambda}\underline{a:b} = \underset{n}{\Lambda}\underline{a} - \underset{n}{\Lambda}\underline{b}$; denn es ist $n^{\overset{\Lambda a}{}-\overset{\Lambda b}{}} = n^{\overset{\Lambda a}{}} : n^{\overset{\Lambda b}{}} = a:b$.

3) Es ist $\underset{n}{\Lambda}\underline{a^r} = \underset{n}{\Lambda}\underline{a} \cdot r$; denn es ist $n^{\overset{\Lambda a}{}\cdot r} = \left(n^{\overset{\Lambda a}{}}\right)^r = a^r$.

4) Es ist $\underset{n}{\Lambda}\underline{\sqrt[r]{a}} = \underset{n}{\Lambda}\underline{a} : r$; denn es ist $n^{\overset{\Lambda a}{}:r} = \sqrt[r]{n^{\overset{\Lambda a}{}}} = \sqrt[r]{a}$.

§ 21. Logarithmen von Summen und Differenzen.

Da $g + k = g\left(1 + \frac{k}{g}\right)$, und $g - k = g\left(1 - \frac{k}{g}\right) = g : \frac{1}{1 - \frac{k}{g}}$ ist, so ist

I. $\underset{n}{\Lambda}\underline{g + k} = \underset{n}{\Lambda}\underline{g} + \underset{n}{\Lambda}\underline{1 + \frac{k}{g}}$,

II. $\underset{n}{\Lambda}\underline{g - k} = \underset{n}{\Lambda}\underline{g} + \underset{n}{\Lambda}\underline{1 - \frac{k}{g}} = \underset{n}{\Lambda}\underline{g} - \underset{n}{\Lambda}\underline{1 : \left(1 - \frac{k}{g}\right)}$.

§ 22. Wodurch kann man logarithmieren?

Wir haben bisher gesehen, dafs man mit Ausschlufs der Einheit durch jede positive wirkliche Zahl logarithmieren kann (s. § 1, IV, 8; § 5; § 7; § 13b; § 14, 2).

Hier stellen wir uns noch die Frage: „Wie logarithmiert man durch eine Summe, durch eine Differenz, durch ein Produkt, durch einen Quotienten, durch eine Potenz, durch eine Wurzel?“

I. Es ist $\underset{a \pm b}{\Lambda}\underline{c} = 1 : \underset{c}{\Lambda}\underline{a \pm b}$ (vergl. § 1, V, 2). Auch ist $\underset{a \pm b}{\Lambda}\underline{c} = \underset{n}{\Lambda}\underline{c} : \underset{n}{\Lambda}\underline{a \pm b}$ (vergl. § 15, VII).

II. Es ist $\underset{ab}{\Lambda}\underline{c} = \underset{n}{\Lambda}\underline{c} : \left(\underset{n}{\Lambda}\underline{a} + \underset{n}{\Lambda}\underline{b}\right) = 1 : \left(\underset{c}{\Lambda}\underline{a} + \underset{c}{\Lambda}\underline{b}\right)$.

III. Es ist $\underset{\frac{a}{b}}{\Lambda}\underline{c} = \underset{n}{\Lambda}\underline{c} : \left(\underset{n}{\Lambda}\underline{a} - \underset{n}{\Lambda}\underline{b}\right) = 1 : \left(\underset{c}{\Lambda}\underline{a} - \underset{c}{\Lambda}\underline{b}\right)$.

IV. Es ist $\underset{a^b}{\Lambda}\underline{c} = 1 : \underset{c}{\Lambda}\underline{a^b} = \frac{1}{b} \cdot \underset{a}{\Lambda}\underline{c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{\sqrt[b]{c}}$.

V. Es ist $\underset{\sqrt[b]{a}}{\Lambda}\underline{c} = 1 : \underset{c}{\Lambda}\underline{\sqrt[b]{a}} = b \cdot \underset{a}{\Lambda}\underline{c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{c^b}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da ferner $\dfrac{1}{\underset{c}{\Lambda}\underline{a} \pm \underset{c}{\Lambda}\underline{b}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\underset{a}{\Lambda}\underline{c}} \pm \dfrac{1}{\underset{b}{\Lambda}\underline{c}}} = \dfrac{\underset{a}{\Lambda}\underline{c} \cdot \underset{b}{\Lambda}\underline{c}}{\underset{b}{\Lambda}\underline{c} \pm \underset{a}{\Lambda}\underline{c}}$ ist, so ergiebt sich noch:

VI. $\underset{ab}{\Lambda}\underline{c} = \dfrac{\underset{a}{\Lambda}\underline{c} \cdot \underset{b}{\Lambda}\underline{c}}{\underset{b}{\Lambda}\underline{c} + \underset{a}{\Lambda}\underline{c}}$ (vergl. Nr. II) und

VII. $\underset{\frac{a}{b}}{\Lambda}\underline{c} = \dfrac{\underset{a}{\Lambda}\underline{c} \cdot \underset{b}{\Lambda}\underline{c}}{\underset{b}{\Lambda}\underline{c} - \underset{a}{\Lambda}\underline{c}}$ (vergl. Nr. III).

Bemerkung zu Nr. VI. In ähnlicher Weise ergiebt sich, dafs

$\underset{abc}{\Lambda}\underline{d} = \dfrac{\underset{a}{\Lambda}\underline{d} \cdot \underset{b}{\Lambda}\underline{d} \cdot \underset{c}{\Lambda}\underline{d}}{\underset{a}{\Lambda}\underline{d} \cdot \underset{b}{\Lambda}\underline{d} + \underset{a}{\Lambda}\underline{d} \cdot \underset{c}{\Lambda}\underline{d} + \underset{b}{\Lambda}\underline{d} \cdot \underset{c}{\Lambda}\underline{d}}$ ist, und dergleichen mehr.

Aus Nr. VI und VII folgt noch (mit Hilfe von § 15, II), dafs

VIII. $\underset{ab}{\Lambda}\underline{c} = \dfrac{\underset{a}{\Lambda}\underline{c}}{1 + \underset{a}{\Lambda}\underline{b}} = \dfrac{\underset{b}{\Lambda}\underline{c}}{1 + \underset{b}{\Lambda}\underline{a}}$ und

IX. $\underset{\frac{a}{b}}{\Lambda}\underline{c} = \dfrac{\underset{a}{\Lambda}\underline{c}}{1 - \underset{a}{\Lambda}\underline{b}} = \dfrac{-\underset{b}{\Lambda}\underline{c}}{1 - \underset{b}{\Lambda}\underline{a}}$.

Anmerkung. Die Formeln II, III, IV und V können auch aus dem Begriffe des Logarithmus abgeleitet werden wie folgt:

1) Zu II.

Ist $\underset{ab}{\Lambda}\underline{c} = x$, so ist $c = (ab)^x$ und daher auch

$$c^{\frac{1}{x}} = ab,$$
$$\frac{1}{x} = \underset{c}{\Lambda}\underline{ab},$$
$$x = 1 : \underset{c}{\Lambda}\underline{ab},$$
$$\underset{ab}{\Lambda}\underline{c} = 1 : \underset{c}{\Lambda}\underline{ab}.$$

$$c : b^x = a^x,$$
$$\underset{n}{\Lambda}\underline{c} - x\underset{n}{\Lambda}\underline{b} = x \cdot \underset{n}{\Lambda}\underline{a},$$
$$\underset{n}{\Lambda}\underline{c} = x \cdot \left(\underset{n}{\Lambda}\underline{a} + \underset{n}{\Lambda}\underline{b}\right) = x \cdot \underset{n}{\Lambda}\underline{ab},$$
$$x = \underset{n}{\Lambda}\underline{c} : \underset{n}{\Lambda}\underline{ab},$$
$$\underset{ab}{\Lambda}\underline{c} = \underset{n}{\Lambda}\underline{c} : \underset{n}{\Lambda}\underline{ab}.$$

2) Zu III.

Ist $\underset{\frac{a}{b}}{\Lambda}\underline{c} = y$, so ist $c = \left(\frac{a}{b}\right)^y$ und darum auch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$c^{1:y} = \frac{a}{b},$$
$$1:y = \underset{c}{\Lambda}\underline{a:b}.$$
$$y = 1:\underset{c}{\Lambda}\underline{a:b}.$$

$$c \cdot b^y = a^y$$
$$\underset{n}{\Lambda}\underline{c} + y \cdot \underset{n}{\Lambda}\underline{b} = y \cdot \underset{n}{\Lambda}\underline{a}$$
$$\underset{n}{\Lambda}\underline{c} = y \cdot \left(\underset{n}{\Lambda}\underline{a} - \underset{n}{\Lambda}\underline{b}\right) = y \cdot \underset{n}{\Lambda}\underline{\frac{a}{b}}$$
$$y = \underset{n}{\Lambda}\underline{c} : \underset{n}{\Lambda}\underline{\frac{a}{b}}.$$

3) Zu IV.

Ist $\underset{a^b}{\Lambda}\underline{c} = z$, so ist $c = a^{b \cdot z}$, und deshalb auch

$$c^{\frac{1}{z}} = a^b,$$
$$\frac{1}{z} = \underset{c}{\Lambda}\underline{a^b}$$
$$z = 1:\underset{c}{\Lambda}\underline{a^b}$$

$$b \cdot z = \underset{a}{\Lambda}\underline{c},$$
$$z = \underset{a}{\Lambda}\underline{c} : b = \underset{a}{\Lambda}\underline{\sqrt[b]{c}}.$$

4) Zu V.

Ist $\underset{\sqrt[b]{a}}{\Lambda}\underline{c} = v$, so ist $c = a^{v:b}$ und daher auch

$$c^{1:v} = a^{1:b},$$
$$1:v = \underset{c}{\Lambda}\underline{\sqrt[b]{a}},$$
$$v = 1:\underset{c}{\Lambda}\underline{\sqrt[b]{a}}.$$

$$v:b = \underset{a}{\Lambda}\underline{c},$$
$$v = b \cdot \underset{a}{\Lambda}\underline{c} = \underset{a}{\Lambda}\underline{c^b}.$$

$$c^b = a^v$$
$$b = v \cdot \underset{c}{\Lambda}\underline{a},$$
$$v = b:\underset{c}{\Lambda}\underline{a}.$$

§ 23. Die Zehnlogarithmen.

Die Zehnlogarithmen, nach ihrem Erfinder (s. § 6, 5) die „Briggs'schen" genannt, sind mit Grund (s. § 4, III und § 15, VII) gemein in der Hand der Rechner geworden. Sie werden darum auch „die gemeinen Logarithmen" oder einfach „die Logarithmen" (Tabularlogarithmen) genannt und durch das blofse Logarithmenzeichen ohne Angabe der Grundzahl angedeutet, sodafs unter $\underset{}{\Lambda}\underline{a}$ nur der Zehnlogarithmus von a zu verstehen ist.

Die Köpfe der gemeinen Logarithmen bestimmter Logarithmanden sind leicht nach § 4 zu bestimmen.

Die allgemein gebräuchlichen Tafeln der Zehnlogarithmen geben daher nur Logarithmenschwänze an; und zwar enthält die kleine fünfstellige Tafel die Logarithmenschwänze zu den ganzen Zahlen von 1 bis 10 009 auf 5 Bruchstellen abgekürzt, während die grofse siebenstellige Tafel die auf 7 Bruchstellen abgekürzten Logarithmenschwänze zu den ganzen Zahlen von 1 bis 100 009 angiebt.

Es ist nun die Frage, wie und innerhalb welcher Grenzen man mit Hilfe einer solchen Tafel die Logarithmen anderer Zahlen zu bestimmen vermag. Der Beantwortung dieser Frage gelten die folgenden Untersuchungen, wobei wir uns den Logarithmanden stets in Form eines Dezimalbruchs geschrieben denken.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 24. Rationalität und Irrationalität der gemeinen Logarithmen.

1) Ist a eine ganze Zahl, oder ein geschlossener (echter oder unechter) Dezimalbruch, nicht aber eine echte Potenz von 10, so ist doch stets $a = A : 10^\nu$ und $\Lambda \underline{a} = \Lambda \underline{A : 10^\nu}$, wobei A und ν ganze Zahlen sind.

Wäre nun $\Lambda \underline{A : 10^\nu}$ gleich dem unabkürzbaren Bruche $\frac{z}{n}$, so müfste $10^{\frac{z}{n}} = A : 10^\nu$ und demnach $10^{z+\nu n} = A^n$ sein. Weil daher die ganze Zahl A, potenziert mit der ganzen Zahl n, eine echte Potenz von 10 sein müfste, so müfste auch A selbst, d. i. $10^{(z+\nu n):n}$ eine echte Potenz von 10 sein. Es müfste also $(z + \nu n) : n$ und mithin auch $\frac{z}{n}$ eine ganze Zahl sein, obgleich $\frac{z}{n}$ ein unabkürzbarer Bruch sein sollte.

2) Ist a ein endloser, jedoch periodischer Dezimalbruch, so ist immer a gleich irgend einem unabkürzbaren gemeinen Bruche $\frac{r}{s}$ und $\Lambda \underline{a} = \Lambda \underline{\frac{r}{s}}$. Wäre nun $\Lambda \underline{\frac{r}{s}}$ gleich einem gemeinen Bruche $\frac{z}{n}$, so müfste $10^z = \frac{r^n}{s^n}$ sein, trotzdem dafs r und s keinen gemeinschaftlichen Teiler haben sollten.

3) Aus Nr. 1 und 2 ergiebt sich der Satz:

I. Der gemeine Logarithmus einer jeden rationalen Zahl ist irrational, wofern er nicht genau gleich einer ganzen Zahl ist.

Anmerkung. Dagegen sind die Logarithmen irrationaler Zahlen teils rational (z. B. $\Lambda \underline{\sqrt{10}}$ genau gleich 0,500 0000), teils auch irrational (z. B. $\Lambda \underline{e}$ und $\Lambda \underline{\pi}$).

§ 25. Gemeine Logarithmen mit durchaus gleichen Schwänzen.

Bezeichnen wir durch k den Kopf und durch s den νstelligen Schwanz des gemeinen Logarithmus von a, wobei wir uns ν so grofs als möglich denken, so ist $\Lambda \underline{a} = k + \frac{s}{10^{\nu+1}}$. Ist nun m eine ganze Zahl, so wird $\Lambda \underline{a \cdot 10^m} = (m + k) + \frac{s}{10^{\nu+1}}$ und

$$\Lambda \underline{a : 10^m} = (k - m) + \frac{s}{10^{\nu+1}} = 0 + \frac{s}{10^{\nu+1}} - (m - k).$$

Denken wir uns nun unter a irgend eine in Form eines Dezimalbruches geschriebene bestimmte Zahl, so unterscheiden sich die drei Logarithmanden a, $a \cdot 10^m$ und $a : 10^m$ nur durch die Stellung des Dezimalkommas oder auch durch eine Reihe von Nullen, welche frei, d. i. nicht zwischen anderen Ziffern stehen — während die Schwänze der Logarithmen genau dieselben sind, so grofs man auch den Wert der Zahl ν annehmen mag. Hieraus folgt der Satz:

I. Die gemeinen Logarithmen aller derjenigen Zahlen, welche sich nach Tilgung des Kommas und der freistehenden Nullen nicht mehr von einander unterscheiden, haben durchaus gleiche Schwänze.

Anmerkung 1. Hiernach ist es unter Berücksichtigung von § 4 schon möglich, den Logarithmus von $A = a \cdot 10^m$ und von $\alpha = a : 10^m$ mit Hilfe der gemeinen Tafel zu bestimmen, wofern der Logarithmenschwanz zur Zahl a in der Tafel angegeben ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anmerkung 2. Der Satz I ist ein neuer Beweis für die Vorzüglichkeit der Zehnlogarithmen (vergl. § 4).

Anmerkung 3. Dafs und in welchen Fällen auch ungleiche Logarithmenschwänze infolge gleichmäfsiger Abkürzung (s. § 2, Anm.) oft einander gleich werden, soll später besprochen werden (§ 28).

§ 26. Berechnung der gemeinen Logarithmen.

A. Die gemeinen Logarithmen können wir berechnen entweder nach § 5, oder, da $E_{10} = 0{,}4342\,94481\,903267 \cdots$ (s. § 14, 3) ist, nach den Formeln:

I. $\Lambda \underline{a+z} = \Lambda \underline{a} + \left[\frac{z}{2a+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^3 + \cdots\cdots\right] \cdot 0{,}8685\,88963\,806534 \cdots$, wofern z nicht gröfser als a ist.

II. $\Lambda \underline{a+1} = \Lambda \underline{a} + \left[\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2a+1}\right)^3 + \cdots\cdots\right] \cdot 0{,}8685\,88963 \cdots\cdots$, wofern a nicht kleiner als 1 ist.

III. $\Lambda \underline{1-v} = -\left[v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + \frac{v^4}{4} + \cdots\cdots\right] \cdot 0{,}8685 \cdots\cdots\cdots$, wenn v positiv und kleiner als 1 ist.

Zu Nr. II. Da $\Lambda \underline{1} = 0$ ist, so können wir mit Hilfe von Nr. II. unter Berücksichtigung der Sätze § 18, I. und III. die Logarithmen der ganzen Zahlen ohne wesentliche Schwierigkeiten berechnen und die gemeine Logarithmentafel selbst herstellen.

B. Im elementaren Unterrichte wird man nicht, wie bei A geschehen ist, an die nicht bewiesenen Sätze von § 7, B, sondern an den in § 8, B aufgestellten und in § 13a bewiesenen Satz (bezüglich an § 14, III) anknüpfen und daraus schliefsen auf den Satz:

Ist $a = mz$, so ist $\Lambda \underline{a+z} = \Lambda \underline{a} + \frac{z}{2a+z} \cdot 2 \cdot E_{10}$ genau

bis auf wenigstens	5	Dezimalbruchstellen,	wenn	$m \geqq 27$ ist,
„ „ „	7	„	„	$m \geqq 127$ ist,
„ „ „	10	„	„	$m \geqq 1276$ ist.

Anmerkung. Damit ist dann auch der § 27 erledigt. Die oben unter A bei Nr. III angegebene Formel ist ohnehin bereits überflüssig (vergl. § 25, Anm. 1).

§ 27. Vereinfachung der Formeln Nr. I und II in § 26 für die Berechnung der Logarithmen auf n Bruchstellen.

1) Nach § 26, I. ist $\Lambda \underline{a+z} = \Lambda \underline{a} + \frac{z}{2a+z} \cdot 0{,}8685\,889 \cdots\cdots + 2\,\mathrm{R.} \cdot 0{,}4342\,9448 \cdots$, wo $\mathrm{R.} = \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^5 + \cdots$ u. s. w. ist (s. § 8).

2) Wenn nun aber $\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^3 < \frac{\omega}{10^{n+1}}$ ist, wo n eine ganze Zahl und $n > 2$, aber $\omega \leqq \frac{10}{3}$ ist, so ist (nach § 8) $2\,\mathrm{R.} < \frac{\omega}{10^{n+1}} \cdot 2{,}0203$. Unter denselben Bedingungen ist daher $2\,\mathrm{R.} \cdot 0{,}4342\,9448 \cdots\cdots < \frac{\omega}{10^{n+1}} \cdot 0{,}8774\,1630$, weil $0{,}8774\,1630$ noch etwas gröfser ist als $2{,}0203 \cdot 0{,}4343$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) Ist nun $\omega = \frac{10}{3}$, so wird $\omega \cdot 0{,}8774\,1630 = 2{,}924\,721$ und daher

$$2\,\mathrm{R} \cdot 0{,}4342\,9448 \cdots < \frac{2{,}924\,721}{10^{n+1}} < \frac{3}{10^{n+1}},$$

sodafs es für n Bruchstellen gänzlich wertlos ist.

4) Die bei Nr. 2 und 3 angegebenen Bedingungen sind aber erfüllt, wenn $\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^3 < \frac{10}{3} : 10^{n+1}$, d. i. wenn $\frac{z}{2a+z} < \left(\frac{1}{10^n}\right)^3$, d. i. wenn $a > z \cdot \left(\frac{10^{\frac{n}{3}}}{2} - \frac{1}{2}\right)$, d. i. wenn

$$a > z \cdot \left\{\left(\frac{10^n}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\right\}.$$

Aus Nr. 1 bis 4 ergiebt sich der folgende Satz:

I. Wenn $a > z \cdot \left\{\left(\frac{10^n}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\right\}$ ist, so ist wenigstens bis auf n Dezimalbruchstellen genau

$$\Lambda\underline{a+z} = \Lambda\underline{a} + \frac{z}{2a+z} \cdot 0{,}8685\,88963\,806534 \ldots\ldots$$

6) Ersetzt man hier n durch die bestimmten Zahlen 10 oder 7 oder 5, so ergiebt sich:

II. Es ist $\Lambda\underline{a+z} = \Lambda\underline{a} + \frac{z}{2a+z} \cdot 0{,}8685\,8896 \ldots\ldots$ wenigstens

1. bis auf 10 Bruchstellen genau, wenn $a > z \cdot 1076{,}72$;
2. „ „ 7 „ „ „ $a > z \cdot 107{,}222$;
3. „ „ 5 „ „ „ $a > z \cdot 22{,}71$.

III. Der Satz Nr. II. gilt natürlich auch dann, wenn $z = 1$ ist.

Anmerkung. Bei Nr. II sind keineswegs die allerkleinsten Werte des a angegeben, für welche die abgekürzte Formel gelten soll; indes ist letztere für $a = 100$ für die siebenstellige Berechnung von $\Lambda\underline{101}$ noch nicht ganz zuverlässig.

Eine genauere Grenze für die Gültigkeit der abgekürzten Formel bei fünfstelliger Berechnung der Logarithmenschwänze mag man durch folgende Betrachtung gewinnen: $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2a+1}\right)^3 \cdot 0{,}8685\,8896 \ldots\ldots$ hat den Wert:

0,000 00 364 . . . ., wenn $a = 21$;
0,000 00 420 . . . ., wenn $a = 20$;
0,000 00 488 . . . ., wenn $a = 19$;
0.000 00 571 . . . ., wenn $a = 18$.

Hieraus kann man schliefsen, dafs für die fünfstellige Berechnung die abgekürzte Formel gültig ist, wenn $a \geq 19$; und dafs sie nicht zuverlässig ist, wenn $a \leq 18$ ist.

§ 28. Gleichheit abgekürzter Logarithmen von verschiedenen Logarithmanden.

1. In den Fällen, in welchen die in § 27, I. oder in § 26 bei B angegebene Formel gültig ist, kann die Zahl a auch eine solche Gröfse erreichen, dafs auf der rechten Seite der Formel das zweite Glied bis auf n Dezimalbruchstellen wertlos wird und dafs demnach bis auf wenigstens n Bruchstellen genau $\Lambda\underline{a+z} = \Lambda\underline{a}$ gesetzt werden kann.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Dieses wird aber sicher dann der Fall sein,

$$\text{wenn } \frac{z}{2a+z} \cdot 0{,}8685\,88963\,806534 \cdots\cdots < \frac{5}{10^{n+1}}, \quad \text{d. i.}$$

$$\text{wenn } z \cdot (10^{n+1} \cdot 0{,}8685\,88963 \cdots\cdots - 5) < 10a, \quad \text{d. i.}$$

$$\text{wenn } z \cdot (10^{n} \cdot 0{,}8685 \cdots\cdots\cdots - 0{,}5) < a.$$

Hieraus ergiebt sich der allgemeine Satz:

I. Wenn $a > z \cdot (10^n \cdot 0{,}8685\,88963\,806534 \cdots\cdots - 0{,}5)$, so ist bis auf wenigstens n Dezimalbruchstellen genau $\Lambda\underline{a+z} = \Lambda\underline{a}$. Dasselbe ist gewifs auch der Fall, wenn $a \geqq z \cdot 10^n$ ist.

Setzt man hier $n = 7$, bezüglich $n = 5$, so folgt:

II. Es ist $\Lambda\underline{a+z} = \Lambda\underline{a}$ wenigstens

1) bis auf 7 Dezimalbruchstellen genau, wenn $a > z \cdot 8685\,889{,}138065 \ldots$
2) „ „ 5 „ „ „ $a > z \cdot 86858{,}39638065 \ldots$

III. Es ist $\Lambda\underline{a+z} = \Lambda\underline{a}$ wenigstens

1) bis auf 7 Dezimalbruchstellen genau, wenn $a \geqq z \cdot 10\,000\,000$;
2) „ „ 5 „ „ „ $a \geqq z \cdot 100\,000$.

3. Da nun $123\,456\,000 > 100\,000 \cdot 1000 > 100\,000 \cdot 999 > 100\,000 \cdot 1$ ist, so ist bis auf wenigstens 5 Dezimalbruchstellen genau 1) $\Lambda\underline{123\,456\,001} = \Lambda\underline{123\,456\,000}$, 2) $\Lambda\underline{123\,456\,999} = \Lambda\underline{123\,456\,000}$; und daher auch 3) $\Lambda\underline{123\,456\,001} = \Lambda\underline{123\,456\,999}$, so dafs also die 7., 8. und 9. Stelle des Logarithmanden auf die 5 höchsten Bruchstellen des Logarithmus keinen Einflufs haben.

4. Ist A eine ganze Zahl mit $(n+1)$ Ziffern, während B eine ganze Zahl ist, die höchstens ν Ziffern hat, so ist $A \geqq 10^n$, $B < 10^\nu$, und daher $A \cdot 10^\nu \geqq 10^n \cdot 10^\nu > B \cdot 10^n$. Folglich ist auch nach § 28, Nr. I. bis auf wenigstens n Dezimalbruchstellen genau $\Lambda\underline{A \cdot 10^\nu + B} = \Lambda\underline{A \cdot 10^\nu} = \nu + \Lambda\underline{A}$. Hieraus ergiebt sich der Satz:

IV. Auf die n höchsten Stellen des Logarithmenschwanzes können nur die $(n+1)$ höchsten Stellen des Logarithmanden einen Einflufs ausüben. — Alle weiteren Stellen des Logarithmanden werden daher (nach der Bestimmung des Logarithmenkopfes) bei der Berechnung des Logarithmenschwanzes ganz aufser acht gelassen.

Dieser Umstand in Verbindung mit § 25, I. führt zu dem weitern Satze:

V. Die n-stelligen gemeinen Logarithmen aller derjenigen Zahlen, welche sich nach Tilgung des Kommas und der links freistehenden Nullen auf ihren $(n+1)$ höchsten Stellen nicht mehr von einander unterscheiden, haben gleiche (abgekürzte) Schwänze.

Anmerkung. Wird § 28 an § 26 B angeknüpft, so kann hier n nur eine der Zahlen 5 oder 7 oder 10 bedeuten. Dasselbe ist auch für § 29 zu beachten, sowie für § 30.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 29. Berechnung von $\Lambda \underline{a+z}$ auf n Dezimalbruchstellen aus $\Lambda \underline{a}$ und $\Lambda \underline{a+1}$ für den Fall, dafs a eine den Sätzen von § 28 und von § 27, I. (oder § 26 B) entsprechende Gröfse hat und $z < 1$ ist.

1) Hat a die entsprechende Gröfse, und ist $z < 1$, so ist bis auf n Dezimalbruchstellen genau $\Lambda \underline{a+z} = \Lambda \underline{a} + w$ und $\Lambda \underline{a+1} = \Lambda \underline{a} + J$, wofern $w = \frac{z}{2a+z} \cdot 0{,}8685 \cdots$ und

2) $J = \frac{1}{2a+1} \cdot 0{,}8685 \cdots = \Lambda \underline{a+1} - \Lambda \underline{a}$ ist. Dann ist ferner $w : J = \frac{z}{2a+z} : \frac{1}{2a+1} = \frac{(2a+1) \cdot z}{2a+z}$, $w = z \cdot J \cdot \frac{2a+1}{2a+z} = z \cdot J \cdot \left(1 + \frac{1-z}{2a+z}\right)$, $w = z \cdot J + z \cdot J \frac{1-z}{2a+z}$. Es ist aber, da $z < 1$ ist, $z \cdot J \cdot \frac{1-z}{2a+z} < \frac{J}{2a}$. Folglich ist zwar $w > z \cdot J$, und doch auch $w < z \cdot J + \frac{J}{2a}$.

I. Wenn daher a so grofs ist, dafs $\frac{J}{2a}$ für n Dezimalbruchstellen wertlos wird, so ist bei n stelliger Berechnung $w = z \cdot J$ zu setzen.

3) Es ist aber $\frac{J}{2a}$ für n Bruchstellen wertlos, wenn $\frac{J}{2a} < 5 : 10^{n+1}$, d. i. (s. o. Nr. 2) wenn $\frac{0{,}868\,588\,9638\,06534}{(2a+1) \cdot 2a} < 5 : 10^{n+1}$, d. i. wenn $\frac{10^n \cdot 0{,}8685 \cdots\cdots}{2} < a^2 + \frac{1}{2} a$, d. i. wenn $\frac{10^n \cdot 0{,}8685 \cdots\cdots}{2} + \frac{1}{16} < \left(a + \frac{1}{4}\right)^2$, d. i. wenn $\sqrt{\frac{10^n \cdot 0{,}8685 \cdots\cdots + 0{,}125}{2}} - 0{,}25 < a$.

II. Wenn also $a > \sqrt{\frac{10^n \cdot 0{,}8685\,8896\,3806 \cdots\cdots + 0{,}125}{2}} - 0{,}25$ und $z < 1$ ist, so ist bis auf wenigstens n Dezimalbruchstellen genau $w = z \cdot J = z \cdot (\Lambda \underline{a+1} - \Lambda \underline{a})$ und daher auch $\Lambda \underline{a+z} = \Lambda \underline{a} + z \cdot (\Lambda \underline{a+1} - \Lambda \underline{a})$.

4) Setzt man hier für n die bestimmten Werte 7 und 5, so ergiebt sich der Satz:

III. Es ist $\Lambda \underline{a+z} = \Lambda \underline{a} + z \cdot (\Lambda \underline{a+1} - \Lambda \underline{a})$ wenigstens

A) bis auf 7 Bruchstellen genau, wenn $z < 1$ und $a > 2083{,}711$ ist (also gewifs auch dann, wenn $z < 1$ und $a \geqq 10\,000$ ist);

B) bis auf 5 Bruchstellen genau, wenn $z < 1$ und $a > 208{,}15$ ist (also auch dann, wenn $z < 1$ und $a \geqq 1000$ ist).

§ 30. Bestimmung des Schwanzes von $\Lambda \underline{a+z}$ aus den Schwänzen von $\Lambda \underline{a}$ und $\Lambda \underline{a+1}$ für den Fall, dafs $z < 1$ ist.

Wenn die ganze Zahl a die in § 29, II angegebene Gröfse hat, und $z < 1$ ist, so ist für die Berechnung des Logarithmus bis auf n Dezimalbruchstellen

$$\Lambda \underline{a+z} = \Lambda \underline{a} + z \cdot (\Lambda \underline{a+1} - \Lambda \underline{a}).$$

Hat nun $\Lambda \underline{a}$ den Kopf k und den auf n Stellen abgekürzten Schwanz σ, so hat $\Lambda \underline{a+z}$ denselben Kopf k und den n stelligen Schwanz $\mathfrak{s}$, während $\Lambda \underline{a+1}$ entweder denselben Kopf k und den auf n Stellen abgekürzten Schwanz s hat, oder genau gleich der ganzen Zahl $(k+1)$ ist.

Anmerkung. Letzteres ist der Fall, wenn a genau um 1 kleiner ist als die nächste echte Potenz von 10.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dann ist jedenfalls $\Lambda \underline{a+z} = k + \frac{\mathfrak{s}}{10^n}$. Ferner ist,

1) falls $a+1$ von 10^{k+1} verschieden ist, $\Lambda \underline{a+z} = k + \frac{\sigma}{10^n} + z \cdot \left[k + \frac{s}{10^n} - \left(k + \frac{\sigma}{10^n}\right)\right]$ $= k + \frac{\sigma + z \cdot (s - \sigma)}{10^n}$ und daher

I. $\mathfrak{s} = \sigma + z \cdot (s - \sigma)$, wobei für das Produkt $z \cdot (s - \sigma)$, welches kleiner ist als $s - \sigma$, die seinem Werte zunächst liegende ganze Zahl zu setzen ist.

2) Ist dagegen $a + 1 = 10^{k+1}$, so ist $\Lambda \underline{a+z} = k + \frac{\sigma}{10^n} + z \cdot \left[k + 1 - \left(k + \frac{\sigma}{10^n}\right)\right]$ $= k + \frac{\sigma + z \cdot (10^n - \sigma)}{10^n}$ und daher

II. $\mathfrak{s} = \sigma + z \cdot (10^n - \sigma)$, wobei wieder für das Produkt $z \cdot (10^n - \sigma)$, welches kleiner ist als $10^n - \sigma$, die seinem Werte zunächst liegende ganze Zahl gesetzt wird.

3) Hieraus ergeben sich folgende Regeln:

A. Für den Gebrauch der siebenstelligen Logarithmentafel:

III. Wenn $z < 1$ und die ganze Zahl $a \geq 10\,000$, aber nicht gleich $99\,999$ ist, so ist der Schwanz ($\mathfrak{s}$) von $\Lambda \underline{a+z}$ gleich dem Schwanze (σ) von $\Lambda \underline{a}$, vermehrt um diejenige ganze Zahl, welche dem $z$fachen Unterschiede $(s - \sigma)$ der Schwänze von $\Lambda \underline{a}$ und $\Lambda \underline{a+1}$ am nächsten steht. $\mathfrak{s} = \sigma + z \cdot (s - \sigma)$.

IV. Wenn $z < 1$ ist, so ist der Schwanz von $\Lambda \underline{99\,999 + z}$ gleich (dem Schwanze von $\Lambda \underline{99\,999}$, vermehrt um diejenige ganze Zahl, welche dem $z$fachen Unterschiede zwischen 10^7 und dem Schwanze von $\Lambda \underline{99\,999}$ am nächsten liegt, also gleich) (s. die Tafel) $999\,9957 + z \cdot 43$, wobei der Wert von $z \cdot 43$ auf eine ganze Zahl abzukürzen ist. $\mathfrak{s} = \sigma + z \cdot (10^7 - \sigma)$.

B. Für den Gebrauch der kleinen fünfstelligen Logarithmentafel:

V. Wenn $z < 1$ und a eine von 9999 verschiedene, aber wenigstens vierstellige ganze Zahl ist, so ist der Schwanz ($\mathfrak{s}$) von $\Lambda \underline{a+z}$ gleich u. s. w. (s. oben unter Nr. III.).

VI. Wenn $z < 1$ ist, so ist der Schwanz von $\Lambda \underline{9999 + z}$ gleich $99\,996 + 4 \cdot z$, wobei der Wert für $4 \cdot z$ auf eine ganze Zahl abzukürzen ist. $\mathfrak{s} = \sigma + z \cdot (10^5 - \sigma)$.

Anmerkung. Von den unter Nr. 2 und II. beschriebenen Fällen sind die unter Nr. IV. und VI. angegebenen die einzigen, die beim Gebrauche der einen oder der andern Logarithmentafel wirklich vorkommen können (s. § 23).

§ 31. Bestimmung der gemeinen Logarithmen mit Hilfe der siebenstelligen Logarithmentafeln.

Denkt man sich den Logarithmanden in Ziffern in Form eines Dezimalbruches geschrieben, und betrachtet man auch jede ganze Zahl als einen Dezimalbruch mit unsichtbarem Komma und unsichtbarem Schwanze, so kann man für die Bestimmung der gemeinen Logarithmen bestimmter Zahlen folgende Regeln aufstellen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

A. Den Kopf des Logarithmus bestimmt man nach § 4.

B. Den Schwanz des Logarithmus bestimmt man in folgender Weise:

I. Ist der Logarithmand eine der ganzen Zahlen von 1 bis 100 009, so findet man den Schwanz des Logarithmus in der Tafel.

II. 1) Ist der Logarithmand (a) eine solche Zahl, für welche die Tafel den Logarithmenschwanz nicht angiebt, so verschiebt man im Logarithmanden das Komma so weit nach links oder rechts, dafs vor dem Komma eine fünfstellige Zahl (α) erscheint (s. § 25, I.).

2) Den hierdurch gebildeten unechten Dezimalbruch kürzt man auf drei Bruchstellen ab (s. § 28, V.).

3) Zu diesem abgekürzten Dezimalbruche bestimmt man den Logarithmenschwanz nach § 30, A. (Die dort erwähnte Differenz $s - \sigma$ wird aus den Angaben der Tafel gewonnen.)

4) Der nach Nr. 3 bestimmte Logarithmenschwanz ist der Schwanz von $\underline{\wedge a}$ (s. § 25, I. und § 28, V.).

§ 31a. Beispiele zu § 31.

Zu bestimmen ist der gemeine Logarithmus:

a) von 1234565432,
b) von 12345654,32,
c) von 123,4565432,
d) von 0,1234565432,
e) von 0,0001234565432.

A. Die Köpfe (s. § 4) sind folgende:

zu a) 9, weil der Logarithmand 10 Stellen vor dem Komma hat;
zu b) 7, „ „ „ 8 „ „ „ „ „;
zu c) 2, „ „ „ 3 „ „ „ „ „;
zu d) — 1, „ „ „ erst auf der 1ten Stelle hinter dem Komma eine Ziffer von Wert hat;
zu e) — 4, „ „ „ „ „ „ 4ten „ hinter dem Komma eine Ziffer von Wert hat.

B. Die Schwänze bestimmt man, wie folgt:

1) Der Schwanz des Logarithmus einer jeden der fünf Zahlen ist durchaus gleich dem Schwanze des Logarithmus von 12345,65432 (s. § 25, I.)

2) und in abgekürzter Form gleich dem Schwanze des Logarithmus von 12345,654 (s. § 28, V.).

3) Da nun der Schwanz von $\underline{\wedge 12345 + 1}$ um 352 gröfser ist als derjenige von $\underline{\wedge 12345}$ (s. die Logarithmentafel), so ist der Schwanz von $\underline{\wedge 12345{,}654}$, d. i. von $\underline{\wedge 12345 + 0{,}654}$, gleich dem Schwanze von $\underline{\wedge 12345}$, vermehrt um diejenige ganze Zahl, welche dem Produkte $0{,}654 \cdot 352$ am nächsten liegt (s. § 30, A.). $\underline{\wedge 12345{,}654}$ hat daher den Schwanz (s. die Logarithmentafel): „091 4911 + 230 = 091 5141“; und dieses ist der Schwanz der Logarithmen von den oben angegebenen Zahlen (s. § 25, I. und § 28, V.).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

C. Folglich ist a) $\Lambda\underline{1234565432} = 9{,}091\,5141$, b) $\Lambda\underline{12345654{,}32} = 7{,}091\,5141$,
c) $\Lambda\underline{123{,}4565432} = 2{,}091\,5141$, d) $\Lambda\underline{0{,}1234565432} = 0{,}091\,5141 - 1$,
e) $\Lambda\underline{0{,}0001234565432} = 0{,}091\,5141 - 4$.

§ 32. Bestimmung der gemeinen Logarithmen mit Hilfe der fünfstelligen Logarithmentafel.

A. Den Kopf des Logarithmus bestimmt man nach § 4.

B. Den Schwanz des Logarithmus bestimmt man, wie folgt:

I. Ist der Logarithmand eine der ganzen Zahlen von 1 bis 10 009, so findet man den Schwanz des Logarithmus in der Tafel.

II. 1) Ist der Logarithmand (a) eine Zahl, für welche die Tafel den Logarithmenschwanz nicht angiebt, so verschiebt man im Logarithmanden das Komma so weit nach links oder rechts, dafs vor dem Komma eine vierstellige Zahl erscheint (s. § 25, I.).

2) Den hierdurch gebildeten unechten Dezimalbruch kürzt man auf zwei Bruchstellen ab (s. § 28, V.).

3) Zu diesem abgekürzten Dezimalbruche bestimmt man den Logarithmenschwanz nach § 30, B. (Die dort erwähnte Differenz $s - \sigma$ wird aus den Angaben der Tafel gewonnen.)

4) Der nach Angabe von Nr. 3 gewonnene Logarithmenschwanz ist der gesuchte Schwanz von $\Lambda\underline{a}$ (s. § 25, I und § 28, V.).

§ 32 a. Beispiele zu § 32, II.

Zu bestimmen ist der Logarithmus:

a) von 987654321 b) von 98765,4321 c) von 987,654321 d) von 0,987654321
e) von 0,00987654321.

A. Die Köpfe (s. § 4) sind folgende: zu a) 8, zu b) 4, zu c) 2, zu d) — 1, zu e) — 3.

B. Die Schwänze werden in folgender Weise gewonnen: 1) Der Schwanz des Logarithmus einer jeden der fünf Zahlen ist durchaus gleich dem Schwanze von $\Lambda\underline{9876{,}54321}$ (s. § 25, I.) und 2) abgekürzt gleich dem Schwanze von $\Lambda\underline{9876{,}54}$ (s. § 28, V.). 3) Da der Schwanz von $\Lambda\underline{9876 + 1}$ um 5 gröfser ist als derjenige von $\Lambda\underline{9876}$ (s. die Tafel), so ist der Schwanz von $\Lambda\underline{9876 + 0{,}54}$ um die dem Produkte $0{,}54 \cdot 5$ zunächst liegende ganze Zahl (3) gröfser als der Schwanz von $\Lambda\underline{9876}$ (s. § 30, B.); er ist also (s. die Tafel) gleich $99458 + 3 = 99461$; und dieses ist der gemeinschaftliche Schwanz von den Logarithmen der oben angegebenen Zahlen (s. § 25, I.).

C. Folglich ist a) $\Lambda\underline{987654321} = 8{,}99461$ b) $\Lambda\underline{98765{,}4321} = 4{,}99461$
c) $\Lambda\underline{987{,}654321} = 2{,}99461$ d) $\Lambda\underline{0{,}987654321} = 0{,}99461 - 1$
e) $\Lambda\underline{0{,}00987654321} = 0{,}99461 - 3$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 33. Umkehrung des Logarithmierens; das Numerieren.

Die Betrachtung der Logarithmen nötigt uns noch zur Lösung der beiden Gleichungen:

$$1)\ \underset{n}{\Lambda}\underline{x} = \omega, \qquad 2)\ \underset{z}{\Lambda}\underline{a} = \alpha.$$

In der 2. Gleichung mufs $z^\alpha = a$, $z = \sqrt[\alpha]{a}$ und daher auch $\underset{n}{\Lambda}\underline{z} = \frac{1}{\alpha} \cdot \underset{n}{\Lambda}\underline{a}$ sein. Hiermit ist die Lösung der zweiten Gleichung auf die der ersten zurückgeführt.

Bezüglich der ersten Gleichung ergiebt sich zwar, dafs $x = n^\omega$ sein mufs. Allein diese Potenz als solche ihrem wirklichen Werte nach zu bestimmen dürfte für den gewöhnlichen Rechner unter Umständen unmöglich sein (z. B. wenn ω ein Bruch mit grofsem Nenner ist). Wir müssen daher den Wert des x in anderer Weise zu bestimmen suchen.

Da nun $x = n^\omega$ ist, so ist auch $\underset{e}{\Lambda}\underline{x} = \omega \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{n}$ und daher $x = e^{\omega \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{n}}$. Hieraus aber ergiebt sich nach § 7, A folgendes:

I) Wenn $\underset{n}{\Lambda}\underline{x} = \omega$ ist, so ist

$$x = 1 + \omega \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{n} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \left(\omega \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{n}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\omega \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{n}\right)^3 + \cdots\cdots \text{ u. s. w.}$$

Es giebt also eine Rechnungsart, welche es ermöglicht, aus einem gegebenen Logarithmus (ω) und der bekannten logarithmischen Grundzahl (n) den unbekannten Numerus (x) in allen Fällen mit Umgehung des Radizierens zu bestimmen.

Diese neue (8.) Rechnungsart (eine eigentliche Potenzrechnung) nennen wir

„das Numerieren“,

deuten sie an durch das Zeichen $\Lambda\overline{}$ und erklären:

II) „Eine Zahl (einen gegebenen Logarithmus) durch eine zweite Zahl (die logarithmische Grundzahl) numerieren heifst diejenige neue Zahl (Numerus) bestimmen, von welcher die erste der durch die zweite gebildete Logarithmus ist. (Der Logarithmus numeriert durch seine Grundzahl giebt den Numerus.)“

Wenn also $\underset{n}{\Lambda}\underline{x} = \omega$ ist, so ist $x = \underset{n}{\Lambda}\sqrt{\omega}$ (gelesen: „x ist gleich ω numeriert durch n“ oder „x ist gleich dem n-Numerus von ω“).

Anmerkung. $\Lambda\sqrt{\alpha}$ (d. i. der Numerus von α) ist stets gleichbedeutend mit $\underset{10}{\Lambda}\sqrt{\alpha}$ (d. i. mit dem Zehn-Numerus von α).

III. Grundsätze.

1) $\underset{n}{\Lambda}\sqrt{\alpha}$ ist dann und nur dann $= b$, wenn $\underset{n}{\Lambda}\underline{b} = \alpha$ ist;

2) $\underset{n}{\Lambda}\sqrt{\underset{n}{\Lambda}\underline{a}} = a$;

3) $\underset{n}{\Lambda}\sqrt{\omega} = n^\omega$;

4) Ist $\alpha = \beta$, so ist auch ($n^\alpha = n^\beta$ und daher) $\underset{n}{\Lambda}\sqrt{\alpha} = \underset{n}{\Lambda}\sqrt{\beta}$;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5) Ist $\alpha > \beta$, so ist (n^α gröfser oder ebensogrofs oder kleiner als n^β und daher auch) $\underset{n}{\Lambda}\sqrt{\alpha}$ gröfser oder ebensogrofs oder kleiner als $\underset{n}{\Lambda}\sqrt{\beta}$, jenachdem n gröfser oder ebensogrofs oder kleiner als 1 ist.

§ 34. Numerieren durch e, durch a und durch 10.

I. Nach § 33, III. 3 und § 7, A ist $\underset{e}{\Lambda}\sqrt{\omega} = 1 + \omega + \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$ u. s. w.

II. Nach § 33, I und III. 1 und nach § 15, 1 ist

1) $\underset{a}{\Lambda}\sqrt{\omega} = 1 + \omega \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\omega \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\omega \cdot \underset{e}{\Lambda}\underline{a}\right)^3 + \cdots\cdots$ u. s. w.

2) $\underset{a}{\Lambda}\sqrt{\omega} = 1 + \frac{\omega \cdot \Lambda\underline{a}}{\Lambda\underline{e}} + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{\omega \cdot \Lambda\underline{a}}{\Lambda\underline{e}}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{\omega \cdot \Lambda\underline{a}}{\Lambda\underline{e}}\right)^3 + \cdots$ u. s. w.

3) Auch ist, wofern $\underset{a}{\Lambda}\sqrt{\omega} = x$ sein soll, $x = a^\omega$, $\underset{b}{\Lambda}\underline{x} = \omega \cdot \underset{b}{\Lambda}\underline{a}$, $x = \underset{b}{\Lambda}\sqrt{\omega \cdot \underset{b}{\Lambda}\underline{a}}$

und daher 4) $\underset{a}{\Lambda}\sqrt{\omega} = \underset{b}{\Lambda}\sqrt{\omega \cdot \underset{b}{\Lambda}\underline{a}}$, sowie 5) $\underset{a}{\Lambda}\sqrt{\omega} = \Lambda\sqrt{\omega \cdot \Lambda\underline{a}}$.

Nach § 34, II. 2 und § 1, IV. 4 ist

$\Lambda\sqrt{\omega} = 1 + \frac{\omega}{\Lambda\underline{e}} + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{\omega}{\Lambda\underline{e}}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{\omega}{\Lambda\underline{e}}\right)^3 + \cdots\cdots$ u. s. w.

§ 35. Numerieren einer Summe, einer Differenz und einer negativen Zahl.

I. $\underset{a}{\Lambda}\sqrt{\alpha + \omega} = a^{\alpha+\omega} = a^\alpha \cdot a^\omega = \underset{a}{\Lambda}\sqrt{\alpha} \cdot \underset{a}{\Lambda}\sqrt{\omega} = a^\alpha \cdot \underset{a}{\Lambda}\sqrt{\omega}$.

II. $\underset{a}{\Lambda}\sqrt{\alpha - \omega} = a^{\alpha-\omega} = a^\alpha : a^\omega = \underset{a}{\Lambda}\sqrt{\alpha} : \underset{a}{\Lambda}\sqrt{\omega} = \underset{a}{\Lambda}\sqrt{\alpha} : a^\omega$.

III. $\underset{a}{\Lambda}\sqrt{-\omega} = a^{-\omega} = 1 : a^\omega = 1 : \underset{a}{\Lambda}\sqrt{\omega}$.

IV. $\underset{a}{\Lambda}\sqrt{-\omega} = \underset{a}{\Lambda}\sqrt{(g - \omega) - g} = \underset{a}{\Lambda}\sqrt{g - \omega} : a^g$.

V. $\underset{a}{\Lambda}\sqrt{\alpha} = \underset{a}{\Lambda}\sqrt{\alpha + \omega} : a^\omega$.

VI. $\underset{a}{\Lambda}\sqrt{\alpha} = \underset{a}{\Lambda}\sqrt{\alpha - \omega} \cdot a^\omega$.

§ 36. Numerieren durch 10 mit Hilfe der gemeinen Logarithmentafeln.

I. Ist der gegebene Logarithmus g eine ganze positive Zahl, so ist nach § 33, III. 3 $\Lambda\sqrt{g} = 10^g$, z. B. $\Lambda\sqrt{3} = 1000$.

II. Ist der gegebene Logarithmus eine negative ganze Zahl $(-g)$, so ist nach § 35, III $\Lambda\sqrt{-g} = 1 : 10^g$, z. B. $\Lambda\sqrt{-2} = 1 : 10^2 = 0{,}01$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III. Ist der gegebene Logarithmus nicht eine ganze Zahl, so mufs man ihm vor allem die in § 2 beschriebene Form eines Logarithmus von siebenstelligem, bezüglich von fünfstelligem Schwanze geben, jenachdem man sich der sieben- oder fünfstelligen Logarithmentafel bedienen will.

Für den Gebrauch der siebenstelligen Tafel gilt dann weiter folgendes:

IV. Hat der Logarithmus l den Kopf 4 und einen Schwanz s, welcher in der Tafel als zu einem fünfstelligen Numerus a gehörig genau angegeben ist, so ist $\Lambda\overline{l} = a$, weil $\Lambda\underline{a} = l$ ist.

Anmerkung. Der Schwanz s kann in diesem Falle leicht in der Tafel bei den fünfstelligen Numeri gefunden werden, weil dort auch die Logarithmenschwänze ihrer Gröfse nach geordnet sind (s. § 1, IV. 10).

V. Hat der Logarithmus L den Kopf 4 und einen Schwanz S, welcher in der Tafel nicht genau angegeben ist, so findet man doch unter den zu fünfstelligen Numeri gehörigen Logarithmenschwänzen der Tafel leicht denjenigen Schwanz s, welcher am wenigsten und zwar etwa um δ kleiner ist, als S und welcher etwa zu dem Numerus a gehört. Alsdann ist

1) $L = 4 + \frac{S}{1000\,0000} = 4 + \frac{s}{10\,000\,000} + \frac{\delta}{10\,000\,000}$;

2) $\Lambda\overline{L} = \sqrt{4 + \frac{s}{10\,000\,000} + \frac{\delta}{10\,000\,000}}$;

3) $\sqrt{4 + \frac{s}{10\,000\,000}} = a$ und $4 + \frac{s}{10\,000\,000} = \Lambda\underline{a}$;

4) $\sqrt{4 + \frac{s}{10\,000\,000} + \frac{\delta}{10\,000\,000}} = a + z$, wo $z < 1$ ist;

5) $4 + \frac{s}{10\,000\,000} + \frac{\delta}{10\,000\,000} = \Lambda\underline{a + z}$.

Weil aber $a \geqq 10\,000$ und $z < 1$ ist, so ist auch (s. § 29, A)

6) $\Lambda\underline{a + z} = \Lambda\underline{a} + z \cdot (\Lambda\underline{a + 1} - \Lambda\underline{a})$.

Aus Nr. 6, 5 und 3 ergiebt sich, dafs

7) $z \cdot (\Lambda\underline{a + 1} - \Lambda\underline{a}) = \frac{\delta}{10\,000\,000}$ und folglich

8) $z = \delta : p$ ist, wo

9) $p = 10\,000\,000 \cdot (\Lambda\underline{a + 1} - \Lambda\underline{a})$ ist.

Aus Nr. 8, 5 und 2 folgt endlich, dafs

10) $\Lambda\overline{L} = \sqrt{\Lambda\underline{a + \delta : p}}$, d. i.

11) $\Lambda\overline{L} = a + \frac{\delta}{p}$ ist.

Hier ist aber δ der Unterschied zwischen dem Schwanze S des gegebenen Logarithmus und dem nächst kleinern Logarithmenschwanze s der Tafel. Ferner ist a derjenige fünfzifferige Numerus, zu dessen Logarithmus nach Angabe der Tafel der Schwanz s gehört. Schliefslich ist p der Unterschied der Schwänze von $\Lambda\underline{a + 1}$ und $\Lambda\underline{a}$, welche beide in der Tafel gefunden werden.

Anmerkung. Nur in dem einzigen Falle, wo sich $a = 99\,999$ ergiebt, mufs der Wert von p in der oben bei Nr. 9 angegebenen Form genommen werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VI. Hat der gegebene Logarithmus λ einen Kopf, welcher um g kleiner oder gröfser ist als 4, so ist (s. § 35)

1) in dem einen Falle $\Lambda\sqrt{\lambda} = \Lambda\sqrt{\lambda + g - g} = \Lambda\sqrt{\lambda + g} : 10^g$,

2) im andern Falle $\Lambda\sqrt{\lambda} = \Lambda\sqrt{\lambda - g + g} = \Lambda\sqrt{\lambda - g} \cdot 10^g$ zu setzen; und es kann dann sowohl dort $\Lambda\sqrt{\lambda + g}$, wie hier $\Lambda\sqrt{\lambda - g}$ entweder nach Nr. IV oder nach Nr. V mit Hilfe der Tafel bestimmt werden.

Für den Gebrauch einer fünfstelligen Tafel gilt folgendes:

IV. Hat der gegebene Logarithmus l den Kopf 3 und einen in der Tafel genau angegebenen Schwanz s, welcher gemäfs der Angabe der Tafel etwa zum Logarithmus des vierzifferigen Numerus a gehört, so ist $\Lambda\sqrt{l} = a$, weil $\Lambda\underline{a} = l$ ist.

V. Hat der Logarithmus L den Kopf 3 und einen in der Tafel nicht angegebenen Schwanz S, welcher etwa um δ gröfser ist als der nächst kleinere Schwanz s der Tafel, während dieser Schwanz s nach Angabe der Tafel zum Logarithmus des vierzifferigen Numerus a gehört, so ist

1) $L = 3 + \frac{S}{100\,000} = 3 + \frac{s}{100\,000} + \frac{\delta}{100\,000}$

2) $\Lambda\sqrt{3 + \frac{s}{100\,000}} = a$ und $\Lambda\underline{a} = 3 + \frac{s}{100\,000}$

3) $\Lambda\sqrt{3 + \frac{s}{100\,000} + \frac{\delta}{100\,000}} = a + z$, wo $z < 1$ ist

4) $3 + \frac{s}{100\,000} + \frac{\delta}{100\,000} = \Lambda\underline{a + z}$.

Weil aber $a \geqq 1000$ und $z < 1$ ist, so ist auch

5) $\Lambda\underline{a + z} = \Lambda\underline{a} + z \cdot (\Lambda\underline{a + 1} - \Lambda\underline{a})$.

Aus Nr. 5, 4 und 2 ergiebt sich aber:

6) $z = \delta : p$, wofern $p = 100\,000 \cdot (\Lambda\underline{a + 1} - \Lambda\underline{a})$ ist.

Aus Nr. 6, 3 und 1 folgt endlich, dafs

7) $\Lambda\sqrt{L} = a + \delta : p$ ist, wo δ der Unterschied zwischen dem Schwanze S des gegebenen Logarithmus und dem nächst kleineren Logarithmenschwanze s der Tafel ist; — wo ferner a derjenige vierzifferige Numerus ist, zu dessen Logarithmus der Schwanz s nach Angabe der Tafel gehört; — und wo p der Unterschied der Schwänze von $\Lambda\underline{a + 1}$ und $\Lambda\underline{a}$ ist.

Anmerkung. Im Falle, wo sich $a = 9999$ ergiebt, mufs der Wert von p in der oben bei Nr. 6 angegebenen Form genommen werden.

VI. Hat der gegebene Logarithmus λ einen Kopf, welcher um g kleiner oder gröfser ist als 3, so ist (s. § 35)

1) in dem einen Falle $\Lambda\sqrt{\lambda} = \Lambda\sqrt{\lambda + g} : 10^g$,

2) im andern Falle $\Lambda\sqrt{\lambda} = \Lambda\sqrt{\lambda - g} \cdot 10^g$

entweder mit Hilfe von Nr. IV oder von Nr. V berechenbar.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 37. Numerieren durch eine beliebige positive Zahl m mit Hilfe der gemeinen Logarithmentafel.

Soll $\underset{m}{\Lambda}\sqrt{\omega} = x$ sein, so mufs $x = m^{\omega}$, $\Lambda x = \omega \Lambda m$ und demnach $x = \sqrt{\omega \cdot \Lambda m}$ sein. Folglich ist $\underset{m}{\Lambda}\sqrt{\omega} = \sqrt{\omega \cdot \Lambda m}$.

Hiernach sind Gleichungen von der Form $\underset{m}{\Lambda} x = \omega$ zu lösen (s. § 33).

§ 38. Logarithmische Berechnung gegebener Zahlenausdrücke,

d. i. Berechnung gegebener Zahlenausdrücke durch Logarithmieren und Numerieren.

1) Es ist stets $A = \sqrt{\Lambda A}$. Ist daher A ein Zahlenausdruck, dessen Logarithmus berechnet werden kann, so kann der Wert von A dadurch berechnet werden, dafs man zuerst den Zahlenwert für ΛA bestimmt und darauf diesen durch 10 numeriert.

2) Ausdrücke, deren Logarithmen bequem bestimmt werden können, sind aber nach §§ 20 und 31 formelle Produkte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln, wofern deren Faktoren Dividenden, Divisoren, Basen, Radikanden und Exponenten nicht in Form von Summen oder Differenzen auftreten.

Bei solchen Berechnungen bewähren sich die Logarithmen in der That als „die Rechnungszahlen“.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 37. **Numerieren durch** … **it Hilfe der gemeinen**

Soll $\underset{m}{\Lambda}\sqrt{\omega} = x$ sein, s … emnach $x = \Lambda\sqrt{\omega \cdot \Lambda m}$ sein.

Folglich ist $\underset{m}{\Lambda}\sqrt{\omega} = \Lambda\sqrt{\omega \cdot \Lambda}$ …

Hiernach sind Gleich … en (s. § 33).

§ 38. **Logarith** … **enausdrücke,**

d. i. Berechnung gegebener Z … und Numerieren.

1) Es ist stets $A =$ … sdruck, dessen Logarithmus berechnet werden kann, so ka … et werden, dafs man zuerst den Zahlenwert für ΛA besti … neriert.

2) Ausdrücke, deren … en können, sind aber nach §§ 20 und 31 formelle Produ … eln, wofern deren Faktoren Dividenden, Divisoren, Basen … in Form von Summen oder Differenzen auftreten.

Bei solchen Berechn … nen in der That als „die Rechnungszahlen“.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf