Die arithmetischen Funktionen

der drei ersten Ordnungen.

Methodische Studie
zum Ausbau der Gymnasialmathematik

von

Professor **Wilhelm Bunkofer.**

Beilage zum Jahresbericht des Grossherzoglichen Gymnasiums Wertheim.

I. Abteilung.

Mit einer Tafel in Steindruck.

WERTHEIM a. M.

E. BECHSTEIN'S BUCH- UND STEINDRUCKEREI.

1895.

1895. PROGR. Nr. 629.

qwe 19 (1895)

629/6

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vorwort.

Die nachfolgenden Blätter enthalten einen Versuch, der Gymnasialmathematik den Funktionsbegriff auf dem Boden der Arithmetik sowie durch geometrische Anschauung etwas näher zu rücken. Wohl bietet sich im Unterricht verschiedentlich Gelegenheit, den Schülern in einzelnen Richtungen eine Anschauung dieses Begriffes beizubringen; es scheint aber nach Urteilen, die Beachtung verdienen, dass im Kampf mit den Schwierigkeiten, die in keinem Falle so lähmend auf das Streben des Lehrers wirken, wie in der Mathematik, man nicht nur lieber entschlossen sich auf das Minimum beschränkt, sondern oft genug auch dieses zu reduzieren Veranlassung hat.

Indessen kommen doch auch Jahreskurse vor, mit denen man wesentlich über das Minimum hinaus gehen kann. In diesem Fall möchte es sich empfehlen, statt durch eintönige, Ueberdruss erzeugende und mit psychologischer Notwendigkeit das Interesse und die Sorgfalt in der Arbeit ertödende Wiederholung immer derselben Uebungen, den Schülern neue Perspektiven zu eröffnen, die den mathematischen Gesichtskreis erweitern.

Insbesondere scheint der mathematische Unterricht des Gymnasiums sich der Aufgabe nicht entziehen zu dürfen, den Schülern eine vollkommen klare Idee davon beizubringen, wie die Mathematik das Stetige behandelt nnd erforscht, also die Grösse verfolgt in jenem Verhalten, welches so recht das Thun der Natur kennzeichnet. Dass hiebei dem unendlich Kleinen schlechterdings nicht auszuweichen ist, liegt auf der Hand, sowie nicht minder, dass die Möglichkeit der Summation unendlich vieler verschwindender Summanden begriffen sein muss, wenn man rechnend dem Walten der Natur nachgehen will, die ja vielfach nicht anders wirkt, als durch Zusammenfassen verschwindender Elementarwirkungen. Ich will mich kurz und bestimmt erklären: Die zwei Grundbegriffe, auf denen die Differenzial- und Integralrechnung sich aufbaut, müssen von der Gymnasialmathematik zu voller, klarer, anschaulicher Erkenntnis gebracht werden.

Wohl ist es wünschenswert, dass der Abiturient mit einer gewissen Gewandtheit die elementaren Operationen handhabe, aber wie geistig minderwertig ist diese angeübte Fertigkeit gegenüber dem Erfassen von Ideen, welche die Wissenschaft und deren Geschichte seit zwei

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Jahrhunderten beherrschen! Das Gymnasium mag sich ruhig die Schuld beimessen, dass nicht selten Gebildete mit Unmut ganze und wichtige Kapitel der Kulturgeschichte einfach überschlagen müssen, weil die Schule es versäumt hat, ihnen wenigstens eine Ahnung von diesen Ideen beizubringen, die nicht etwa wegen zu grosser Schwierigkeit dem Fachgelehrten zugeschoben werden müssten, sondern die einer sehr einfachen, elementaren Erklärung fähig sind.

Niemand leidet, in die Mitte gestellt zwischen die Forderungen des Drills und wahrer geistiger Förderung, mehr als der Lehrer der Mathematik, wenn er aus gewissen Rücksichten dem ersteren namhafte Opfer an Zeit und Mühe bringt, denen der geistige Erlös so wenig entspricht, während andererseits auch der praktische Gewinn insofern viel zu teuer erkauft ist, als nur eine verschwindende Anzahl von Schülern im späteren Berufe von den desfallsigen Schulübungen direkten Nutzen zieht.

Dem humanistischen Gymnasium kann in keiner Richtung die Aufgabe irgend welcher Dressur zufallen. Hat doch selbst der Betrieb der alten Sprachen den Formalismus so ziemlich fallen gelassen. Thatsache wenigstens ist, dass kein hellblickender, die Zeichen der Zeit verstehender Philologe dem Gymnasium heute noch die antiquirte Aufgabe zuerkennt, eine Vorschule für künftige Philologen zu sein. Selbst bei den zäheren Vertretern des Alten hat sich ja die geistig unvergleichlich wertvollere Auffassung Bahn gebrochen, das Gymnasium müsse sich der Kulturaufgabe der fortschreitenden Zeit mit Vorsicht und Weisheit anbequemen.

Soll damit dem Uebergewicht der Mathematik auch am humanistischen Gymnasium das Wort geredet werden? Keineswegs! Am allerwenigsten einer gesteigerten mathematischen Dressur. Es hiesse fürwahr aus dem Regen in die Traufe kommen, wenn der sprachliche Formalismus dem mathematischen den Platz räumen müsste; wenn z. B. mit zäher Ausdauer die Technik der mathematischen Formelsprache so geläufig gemacht werden sollte, dass jeder mässig begabte Schüler die Operationen mit voller Sicherheit handhabte. Wer wüsste besser als der Lehrer der Mathematik, wie diese „Sicherheit" oft genug neben dem dürftigsten Verständnis einhergeht und dabei noch den Schüler über seine mathematische Befähigung in Selbsttäuschung einwiegt!

Die Fertigkeit in den Operationen ist ein Nebenprodukt des Unterrichts und wird bei den einzelnen Schülern ohne notwendig inneren Zusammenhang mit ihrem mathematischen Verständnis verschiedene Grade erreichen. Je grösser diese Fertigkeit ist, desto willkommener wird es dem Lehrer sein, aber eigentliches formelles Lehrziel darf sie niemals werden. Es würde ja damit das Mittel zum Zweck erhoben. Und welches Mittel! Sein Bildungswert ist nahezu gleich Null. Wie ganz anders die logischen Operationen, die notwendig sind, um eine Aufgabe in die Sprache der Mathematik zu kleiden! Sie erfordern ruhige Ueberlegung, richtige Beurteilung, sorgfältige Abwägung, umsichtige Disposition im Entwurf des Gedankengangs, Selbstkontrolle in den Schlüssen bis zur endlichen Ausgestaltung der Gleichung, die zur Lösung führt. Wie ganz anders ferner die gründliche Durcharbeitung eines theoretischen oder praktischen Themas, das, einer kleinen Welt vergleichbar, unter bestimmten Gesetzen steht, die bis ins Einzelne zu erforschen sind, z. B. durch umsichtige Diskussion einer Gleichung, welche den Codex dieser Gesetze darstellt. Hier ist Alles Geistesarbeit, zum Teil verbunden mit einer Art künstlerischen Strebens, die Abstraktion zur ästhetisch befriedigenden Anschauung zu erheben. Mathematische Arbeit dieser Art bringt in der gewonnenen Anregung und Selbstständigkeit den besseren Schülern dauernden Gewinn, während auch den minder begabten das überhaupt Erreichbare nicht ent-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

geht. Um der letzeren willen hingegen das Ideal des Unterrichts einer Dressur zum Opfer zu bringen, deren Spuren nach zwei Jahren vollkommen verwischt sind, ist eine Gepflogenheit, die das Interesse des bildungsfähigen jugendlichen Geistes weder pädagogischen noch wahrhaft praktischen Gesichtspunkten unterordnet.

Mathematisches Denken, mathematische Anschauung ist also das wesentliche Ziel des Unterrichts. Beides setzt eine gute Orientirung in der mathematischen Symbolik voraus. Auch eine gewisse Belastung des Gedächtnisses mit den wesentlichsten Formeln ist dabei unerlässlich. Der tüchtige Schüler wird diese Aneignung von selbst leisten, denn er hat die klare Einsicht, dass in der Mathematik Form — Wesen ist und dass darum diese Formen nicht bloss die Werkzeuge, sondern zum Teil geradezu die behauenen Bausteine sind, aus denen direkt oder mit weiterer Bearbeitung das logische Gebäude nach mathematischer Architektonik aufzuführen ist. Ihm wird die Mühe des Studiums vom Genuss weit überwogen, unter Umständen in einem Grade, der, die Berufswahl bestimmend, ihm immer klarer den hehren Charakter einer Wissenschaft zum Bewusstsein bringt, die, unfehlbar in ihrem Inhalt, in ihrer Form klassisch, als fester, majestätischer, tadelloser Bau absolute geistige Befriedigung gewährt.

Das spezielle Ziel, das sich diese Blätter gesteckt haben, könnte allerdings leichter erreicht werden durh die entsprechend behandelten Elemente einer analytischen Geometrie. Da aber letzere in unserem Unterrichtsplan nicht vorgesehen ist, so bleiben dem Lehrer nur die Wege, die er sich selber bahnt, um Kenntnisse, welche er für unentbehrlich hält, dem Budget seines Unterrichts in loyaler Weise einzuverleiben.

Dass ich gerade die arithmetische Funktion für meine Zwecke gewählt habe, hängt mit der Leichtigkeit zusammen, Begriff, Anschauung und Darstellung stetiger Aenderung bei dieser Funktion gleichsam spielend zu gewinnen. Den Funktionen 1. und 2. Ordnung, die nachstehend behandelt sind, beabsichtige ich die Funktion 3. Ordnung im nächsten Jahre folgen zu lassen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I.

Die arithmetische Funktion und Reihe 1. Ordnung.

a) Die diskrete arithmetische Funktion und Reihe

$$an + b \quad ; \quad \mathfrak{R}(an + b)$$

1) Sind a und b bestimmte, konstante, ganze Zahlen, so sei dagegen n das Symbol jeder beliebigen absoluten ganzen Zahl. Darnach ist der Ausdruck $an + b$ eine arithmetische Funktion, deren Wert mit dem wechselnden Wert von n selbst wechselt. Bezeichnet man mit $\mathfrak{R}$ die geordnete Uebersicht dieser möglichen Werte, so umfasst das Symbol $\mathfrak{R}(an + b)$ die Gesamtheit aller Werte, die der Ausdruck $an + b$ annehmen kann, wenn n alle ganzen Werte durchläuft von $+ \infty$ bis $- \infty$.

Für das positive Wertgebiet von $n = 1$ an hat man z. B. in Kolonnen geordnet:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{R}(2n + 3) = 2 \cdot 1 + 3 & = & 5 \\ 2 \cdot 2 + 3 & & 7 \\ 2 \cdot 3 + 3 & & 9 \\ 2 \cdot 4 + 3 & & 11 \\ \vdots & & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathfrak{R}(an + b) = a \cdot 1 + b & & \\ a \cdot 2 + b & & \\ a \cdot 3 + b & & \\ a \cdot 4 + b & & \\ \vdots & & \end{array}$$

Die Fortsetzung der Reihe $\mathfrak{R}(2n + 3)$ vorwärts und rückwärts ist klar. Es ist die Reihe der ungeraden Zahlen. Die Reihe $\mathfrak{R}(2n + 4)$ z. B. wäre die Reihe der geraden Zahlen. Alle Zahlenwerte, welche nicht im Symbol $\mathfrak{R}$ vertreten sind, werden von diesem Symbol ebenso be-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

stimmt ausgeschlossen, wie jene ersten eingeschlossen. Zugleich erzielt die Darstellung in Kolonnen unmittelbar noch folgende Formgesetze:

1) $\mathfrak{R}(2n + 3) = \mathfrak{R}2n + \mathfrak{R}3$; $\mathfrak{R}(an + b) = \mathfrak{R}an + \mathfrak{R}b$

2) $\mathfrak{R}2n = 2\mathfrak{R}n$; $\mathfrak{R}an = a\mathfrak{R}n$

3) $\mathfrak{R}(kan + kb) = k\mathfrak{R}(an + b)$

deren sprachliche Fassung sofort zu erkennen ist. Selbstverständlich enthält die Reihe $\mathfrak{R}b$ eben so viele Glieder wie die Reihe $\mathfrak{R}an$, wenn beide dem gemeinsamen Symbol $\mathfrak{R}(an + b)$ entstammen.

Die Funktion $an + b$ heisst arithmetische Funktion 1. Ordnung; die aus ihr entwickelte Reihe $\mathfrak{R}(an + b)$ entsprechend arithmetische Reihe 1. Ordnung. Die Aenderung von Glied zu Glied ist sprungweise, je um die konstante Differenz a. Bei positivem a ist die Reihe steigend, bei negativem fallend. Bei grösserer Allgemeinheit können die Konstanten a und b beliebige, also auch gebrochene Werte haben, mit beliebigen Vorzeichen.

Die Reihe $\mathfrak{R}b$ enthält lauter gleiche Glieder b und ist ein besonderer Fall von $\mathfrak{R}(an + b)$ nämlich für $a = 0$. Sie heisst nullter Ordnung.

Wegen der sprungweisen Aenderung der Glieder, die aus dem Bildungsgesetz $an + b$ hervorgehen, heisst diese Funktion, sowie deren Reihe diskret.

Veranschaulichen lässt sich der relative Wert der Glieder diskreter arithmetischer Reihen 1. Ordnung durch geometrische Darstellung. Man ziehe (Fig. 1) zwei auf einander senkrechte Achsen N und H. Von ihrem Schnittpunkte aus trage man die aufeinander folgenden Werte von n an der Achse N an und füge die zugehörigen Funktionswerte h jeweils als senkrechte Ordinaten hinzu. Die Punktreihe, die durch die Endpunkte der Ordinaten markirt ist, giebt das anschauliche Bild der relativen Grössen der Glieder, dargestellt durch die aufeinander folgenden Ordinaten der Punkte. Sofort ersichtlich ist die konstante, sprungweise Aenderung von Glied zu Glied. Der Träger der Punktreihe erweist sich als eine Gerade. Offenbar sind in Fig. 1 die Bilder A, A′, B, B′, C, C′ die Darstellungen der Symbole:

$$\mathfrak{R}2n,\ \mathfrak{R}(-2n),\ \mathfrak{R}(2n + 3),\ \mathfrak{R}(-2n + b),\ \mathfrak{R}(2n - 3),\ \mathfrak{R}(-2n - 3)$$

Die erste Konstante ± 2 ist die trigonometrische Tangente der Neigung des Trägers gegen die positive Richtung der Achse N. Die zweite Konstante ± 3 giebt die Durchgangsstelle des Trägers durch die Achse H.

Da der Ausdruck $an + b$ als sog. allgemeines Glied das Bildungsgesetz der Reihe $\mathfrak{R}(an + b)$ darstellt, so ergiebt sich, wenn das Symbol D die Differenz zweier Nachbarwerte bedeutet,

$$D(an + b) = a(n + 1) + b - (an + b) = a$$

In der Schreibweise $a(n + 1) - a + (b - b)$ liegt das formelle Gesetz:

$$D(an + b) = Dan + Db$$

d. h. das Operationszeichen vollzieht sich an beiden Gliedern der Funktion $an + b$. Dabei ist $Db = 0$, d. h.: Konstante Summanden verschwinden bei der Differenzbildung, dagegen der konstante Faktor von n bleibt, und man hat die Thatsache, dass $D(an + b)$ sich von Dan nicht unterscheidet. Angewendet auf die Reihe $\mathfrak{R}(an + b)$ hat das Symbol $D\,\mathfrak{R}(an + b)$ die Bedeutung der Differenzreihe, also

$$D\,\mathfrak{R}(an + b) = \mathfrak{R}[D(an + b)] = \mathfrak{R}a$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Rücksichtlich der Vereinigung sowie der Mittelwerte sowohl der arithmetischen Funktionen als der Reihen 1. Ordnung hat man folgende leicht beweisbaren Sätze:

$$S(an + b) = nSa + Sb$$
$$\mathfrak{M}(an + b) = n\mathfrak{M}a + \mathfrak{M}b$$
$$S\mathfrak{R}(an + b) = \mathfrak{R}[nSa + Sb]$$
$$\mathfrak{M}\mathfrak{R}(an + b) = \mathfrak{R}[n\mathfrak{M}a + \mathfrak{M}b]$$

wobei durch zufällige Nullwerte der Ausdrücke Sa, $\mathfrak{M}$a, Sb, $\mathfrak{M}$b Vereinfachungen möglich sind und die sprachliche Fassung der Gleichungen sich von selbst ergiebt.

b) Die stetige arithmetische Funktion und Reihe

$$ax + b \quad ; \quad \mathfrak{R}(ax + b)$$

Interpoliert man die diskrete Reihe 1. Ordnung $\mathfrak{R}(an + b)$ durch Verkleinerung des Intervalles und Einschiebung von entsprechenden Zwischenwerten der Funktion, so treten die interpolierten Punkte in denselben Träger ein und rücken bei fortgesetzter Interpolation immer dichter zusammen, Endlos fortgesetzt gedachte Einschiebung führt schliesslich jener Grenze zu, da jede Stelle des Trägers mit einem Systempunkt besetzt ist. Dadurch wird das Symbol $\mathfrak{R}$ der Reihe zum Symbol ihres Trägers, d. h. der Geraden und ihrer Stetigkeit. Man ersetzt in diesem Falle n durch x und h durch y, im Anschluss an die nun ebenfalls geänderten Achsenbezeichnungen X und Y. Die diskrete Funktion $an + b$ hat sich so in die stetige $ax + b$ verwandelt. Da x stetig alle möglichen Werte durchläuft, so auch ihr veränderlicher Wert y, der, statt das treppenförmige Bild der diskreten Funktion $an + b$ zu zeigen, nun der Geraden als seinem Träger stetig folgt. Die stetige Funktion $ax + b$ ist somit das Bildungsgesetz der Geraden $\mathfrak{R}(ax + b)$, welche also alle möglichen Werte der Funktion $ax + b$ im Ueberblick zusammenfasst. Die beiden Konstanten haben dieselbe Bedeutung, wie bei der diskreten Reihe. Die Geraden $\mathfrak{R}(\pm ax)$ gehen durch den Nullpunkt des Achsensystems. Die Geraden $\mathfrak{R}(\pm x)$ halbieren die Winkel der Achsen. Für $a > 1$ neigt sich die Gerade mehr der Y Achse zu, für $a < 1$ hingegen mehr der X Achse.

Nachdem die räumliche Anschauung der stetigen arithmetischen Funktion 1. Ordnung gewonnen ist, werden sich die weiteren Aussagen füglich am zweckmässigsten an das Raumbild anschliessen.

Satz 1. Die Gerade $\mathfrak{R}(ax + b)$ geht oberhalb und unterhalb der X Achse in Gegenrichtungen ins Unendliche.

Satz 2. Die Gerade $\mathfrak{R}(ax + b)$ schneidet die X Achse im Punkt $x = -\frac{b}{a}$.

Satz 3. Die Gerade $\mathfrak{R}(ax + b)$ erreicht eine gegebene Höhe y im Punkt $x = \frac{y - b}{a}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Satz 4. Die Variation der Konstanten b bedeutet eine Parallelverschiebung der Geraden.

Satz 5. Die Variation der Konstanten a bedeutet Drehung der Geraden um ihren Durchgangspunkt durch die Y Achse.

Satz 6. Die Variation beider Konstanten mit demselben Faktor bedeutet Drehung der Geraden um den Durchgangspunkt durch die X Achse.

Der Grund ist, weil derselbe Wert von x, welcher die Funktion $ax + b$ zu Null macht, auch jede Funktion $k(ax + b)$ zu Null macht, was geometrisch gefasst die Aussage der Thesis enthält.

Satz 7. Die Drehung der Geraden $\mathfrak{R}(ax + b)$ um 90^0 führt zur Geraden $\mathfrak{R}\left\{-\frac{1}{a}x + b^*\right\}$

Beweis: Ist α die Neigung der ersten Geraden, so ist $\operatorname{tg}\alpha = a$. Die Neigung der zweiten ist dann $\alpha + \mathfrak{R}$. Aber $\operatorname{tg}(\alpha + R) = -\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{a}$ etc.

Satz 8. Eine Gerade, die durch den Punkt $x = q$, $y = p$ gehen soll, ist dargestellt durch das Symbol $\mathfrak{R}\{p + a(x - q)\}$, wo a alle beliebigen Werte annehmen kann.

Beweis: Wir präsumieren das Bildungsgesetz $ax + b$, in welchem beide Konstanten zunächst unbekannt sind, und haben so die zwei Gleichungen:

$$y = ax + b$$
$$p + aq + b$$

deren Differenz $y - p = a(x - q)$ nach y aufgelöst das Bildungsgesetz $y = p + a(x - q)$, also die Gerade $\mathfrak{R}\{p + a(x - q)\}$ liefert, wobei a beliebig.

Für die Verbindung von stetigen arithmetischen Funktionen und Reihen 1. Ordnung genügt unter Verweisung auf die analogen diskreten Formen die einfache Zusammenstellung:

Satz 9.

$$S(ax + b) = xSa + Sb \quad ; \quad \mathfrak{M}(ax + b) = x\mathfrak{M}a + \mathfrak{M}b$$
$$S\mathfrak{R}(ax + b) = \mathfrak{R}\{xSa + Sb\} \; ; \; \mathfrak{M}\mathfrak{R}(ax + b) = \mathfrak{R}\{x\mathfrak{M}a + \mathfrak{M}b\}$$

d. h. a) die Summe, sowie der Mittelwert von Bildungsgesetzen 1. Ordnung ist ein Bildungsgesetz 1. Ordnung — im allgemeinen, da die zufälligen Werte Sa bezw. $\mathfrak{M}a = 0$ die nullte Ordnung erzeugen.

b) Die Summen, sowie der Mittelwert von Geraden sind stets eine Gerade. Diese Fassung dürfte wohl kaum eine Missdeutung veranlassen. Für $Sa = 0$, bezw. $\mathfrak{M}a = 0$ ist die betr. Gerade der X Achse parallel. Für $Sb = 0$, bezw. $\mathfrak{M}(b) = 0$ geht die Gerade durch den Nullpunkt der Achsen.

Aufgabe 1. Man soll die Summe der zwei Geraden A und B (Fig. 2) durch Konstruktion darstellen.

Lösung. Zieht man in den Durchgangspunkten Q und Q′ durch die X Achse die Ordinaten QP und Q′P′ nach den Geraden A und B, so ist die durch P und P′ gehende Gerade die verlangte Summe.

Beweis: Die fragliche Gerade muss durch P und P′ gehen, da ihre Ordinaten daselbst je der Ordinatensumme der gegebenen Geraden gleichkommen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe 2. Man soll das arithmetische Mittel der zwei Geraden A und B konstruiren. (Fig. 2.)

Lösung. Die gesuchte Gerade geht jedenfalls durch den Schnittpunkt der zwei Geraden A und B. Zieht man noch irgend eine Verbindungsstrecke NN′ beider Geraden parallel der YAchse oder auf ihr selbst, so geht die gesuchte Gerade durch den Mittelpunkt M der Strecke NN′.

Aufgabe 3. Man soll die Summe der drei Geraden A, B, C (Fig. 3) konstruiren.

Lösung: Man ziehe parallel der YAchse vom Schnittpunkt M der Geraden B und C die Strecke MQN bis zur Geraden A. Die Ordinatensumme der drei Geraden ist dann 2MQ — NQ, welche den Punkt P liefert. Das gleiche Verfahren im Schnittpunkt M′ der Geraden A und B liefert den Punkt P′ und damit die Gerade durch P und P′.

Aufgabe 4. Man soll das arithmetische Mittel der drei Geraden A, B, C (Fig. 3) konstruiren.

Lösung: Die Strecken MN und M′N′ werden im Verhältnis von 1 : 2 geteilt, wodurch sich die Pnnkte K und K′ ergeben, durch welche die Gerade gehen muss.

Aufgabe 5. Man soll die Summe der zwei Wellen A und B (Fig. 4) durch Konstruktion darstellen.

Lösung: Fig. 4. Die Ordinatenaddition an den zwei Wellenhöhen liefert den resultierenden Wellenberg $O_1MM'O_2$. Die Mittelwelle ist offenbar $O_1NN'O_2$, wobei N und N′ die Ordinaten von M und M′ halbieren.

II.

Die arithmetische Funktion und Reihe 2. Ordnung.

a) Die diskrete arithmetische Funktion und Reihe

$$an^2 + bn + c \quad ; \quad \mathfrak{R}(an^2 + bn + c)$$

1) Wie die allgemeine Form einer diskreten arithmetischen Reihe 1. Ordnung die Reihe nullter Ordnung in sich aufnimmt in dem Symbol $\mathfrak{R}(an + b)$, welches zerfällt in $\mathfrak{R}an + \mathfrak{R}b$, so greift auch die diskrete arithmetische Reihe 2. Ordnung in voller Allgemeinheit bis zur nullten Ordnung zurück, so dass ihre Bildungsfunktion lautet: $an^2 + bn + c$ und die Reihe demgemäss $\mathfrak{R}(an^2 + bn + c)$, wo nun n wieder alle Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft. Für das Wertgebiet von $n = 1$ aufwärts hat man also z. B. in Kolonnen geordnet:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\mathfrak{R}(an^2 + bn + c) = \begin{array}{l} a \,.\, 1^2 + b \,.\, 1 + c \\ a \,.\, 2^2 + b \,.\, 2 + c \\ a \,.\, 3^2 + b \,.\, 3 + c \\ a \,.\, 4^2 + b \,.\, 4 + c \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \end{array}$$

welche Darstellung zunächst wieder das Formgesetz ausspricht:

$$\mathfrak{R}(an^2 + bn + c) = \mathfrak{R}an^2 + \mathfrak{R}bn + \mathfrak{R}c$$

d. h. das Reihensymbol geht an die Glieder der Funktion über.

Auch kann man die Zerlegung in zwei Reihen vornehmen:

$$\mathfrak{R}(an^2 + bn + c) = \mathfrak{R}an^2 + \mathfrak{R}(bn + c)$$

von denen bei der Untersuchung vorerst die zweite ausgeschieden bleiben soll. Die Darstellung des ersten Symbols $\mathfrak{R}an^2$ liefert für $a = 1$ die Reihe:

. . .	$(-4)^2$	$(-3)^2$	$(-2)^2$	$(-1)^2$	0	1^2	2^2	3^2	4^2	. . .
. . .	16	9	4	1	0	1	4	9	16	. . .

mit der ersten und zweiten Differenzreihe

. . .		−7	−5	−3	−1	1	3	5	7	. . .
. . .			2	2	2	2	2	2	2	. . .

Somit hat die Reihe $\mathfrak{R}(n^2)$ folgende Eigenschaften:

a) Sie stellt die Quadrate der natürlichen Zahlen dar und verläuft von Null aus symmetrisch ins Unendliche, ganz positiv bleibend;

b) Ihre erste Differenzreihe stellt die aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen dar, eine positive und symmetrisch dazu — eine negative Reihe;

c) Die zweite Differenzreihe besteht aus den konstanten Gliedern 2, welche Zahl also die konstante Aenderung der Zunahme von Glied zu Glied in der Reihe $\mathfrak{R}n^2$ darstellt.

Die Veranschaulichung am Achsensystem (Fig. 5) zeigt eine Ordinatenreihe, deren Endpunkte eine Reihe von Punkten darstellen, welche nicht mehr in einer Geraden liegen, wie das Punktsystem $\mathfrak{R}(an + b)$; wohl aber liegt die Punktreihe symmetrisch zur senkrechten Achse.

Die Darstellung der Reihe $\mathfrak{R}an^2$ zeigt natürlich im Vergleiche mit $\mathfrak{R}n^2$ sämtliche Glieder im Verhältnis von $a : 1$ vergrössert, ebenso die Glieder der ersten und zweiten Differenzreihe. Die Ordinaten der Punktreihe $\mathfrak{R}an^2$ sind also alle a mal so gross, als die entsprechenden Ordinaten der Reihe $\mathfrak{R}n^2$. Somit werden Punktsysteme $\mathfrak{R}an^2$ und $\mathfrak{R}a'n^2$ sich niemals decken, ausser wenn $a = a'$.

Da der Ausdruck n^2 als das sog. allgemeine Glied der Reihe $\mathfrak{R}n^2$ deren Bildungsgesetz darstellt, so bedeuten n^2 und $(n + 1)^2$ zwei benachbarte Glieder, deren Differenz beträgt:

$$Dn^2 = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

also eine ungerade Zahl, wie es sein muss. Dabei erzeugt das Symbol D als Operationszeichen aus n^2 den Wert $2n + 1$ ähnlich, wie das Symbol $\sqrt{\ }$ aus n^2 den Wert n erzeugt. Angewendet auf die ganze Reihe $\mathfrak{R}n^2$ bedeutet dann $D\mathfrak{R}(n^2)$ die Differenzreihe, also $\mathfrak{R}Dn^2 = \mathfrak{R}(2n + 1)$. In Anwendung des Symbols D auf diese Reihe hat man $D\mathfrak{R}(2n + 1 = \mathfrak{R}D(2n + 1) = \mathfrak{R}2$. Hält

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

man also fest, dass $Dn^2 = 2n + 1$ und bedeutet D_2 die Differenz der Differenz, so $D_2n^2 = 2$, also $D_3n^2 = 0$ ebenso $D_2n = 0$. Daher die zwei Differenzgleichungen:

$$D\,(an^2 + bn + c) = aD\,n^2 + bDn = a(2n + 1) + b$$
$$D_2(an^2 + bn + c) = aD_2n^2 + bD_2n = 2a$$

womit die Thatsache konstatiert ist, dass die zweite Differenz einer arithmetischen Funktion 2. Ordnung von den Gliedern niederer Ordnung nicht beeinflusst wird.

Satz. Natur und Dimension eines Punktsystems $\mathfrak{R}(an^2 + bn + c)$ ist durch die Konstante an n^2 bestimmt und von den zwei andern Konstanten unabhängig.

Beweis. Da die zweite Differenz 2a ist, also dieselbe wie bei $\mathfrak{R}(an^2)$, so sind beide Punktsysteme kongruent.

Die Verschiedenheit der Bildungsfunktion trotz des gleichen geometrischen Bildes hängt mit der Lage des Punktsystems zum Achsensystem zusammen, was jedoch erst bei der stetigen arithmetischen Funktion 2. Ordnung näher untersucht werden soll.

Leicht erkennbar als Analoga der entsprechenden Sätze bei der Funktion 1. Ordnung und auch sprachlich leicht zu fassen sind folgende Gleichungen:

$$S(an^2 + bn + c) = n^2Sa + nSb + Sc$$
$$\mathfrak{M}(an^2 + bn + c) = n^2\mathfrak{M}a + n\mathfrak{M}b + \mathfrak{M}c$$
$$S\mathfrak{R}(an^2 + bn + c) = \mathfrak{R}[n^2Sa + nSb + Sc]$$
$$\mathfrak{M}\mathfrak{R}(an^2 + bn + c) = \mathfrak{R}[n^2\mathfrak{M}a + n\mathfrak{M}b + \mathfrak{M}c]$$

wobei durch einzelne oder kombinierte Nullwerte von Sa, Sb . . $\mathfrak{M}a$. etc. besondere Fälle unter Herabdrückung auf niedere Ordnungen eintreten können.

b) Die stetige arithmetische Funktion und Reihe

$$ax^2 + bx + c \quad ; \quad \mathfrak{R}(ax^2 + bx + c).$$

1) Durch fortgesetzte Interpolation der Reihe $\mathfrak{R}(an^2 + bn + c)$ tritt der Träger des Punktsystems dieser Ordnung immer deutlicher hervor und erweist sich als eine Kurve von eigentümlichem Verlauf. Die diskrete Bildungsfunktion $h = an^2 + bn + c$ geht in die stetige über: $y = ax^2 + bx + c$ und das Symbol $\mathfrak{R}(ax^2 + bx + c)$ bedeutet die Kurve als Träger des Punktsystems, dessen Punkte die Kurve stetig erfüllen. Die Konstante c giebt die Durchgangsstelle durch die Y Achse.

2) Im Anschlusse an die Ergebnisse beim diskreten Punktsystem 2. Ordnung kann hier sofort ausgesprochen werden, dass die Natur und Dimension der Kurve $\mathfrak{R}(ax^2 + bx + c)$ lediglich durch das erste Glied der Bildungsfunktion bestimmt ist, womit sich nun von selbst die Frage stellt nach der Bedeutung der andern Glieder, speziell nach der Bedeutung der Konstante b. Zunächst aber betrachten wir die Kurve $\mathfrak{R}ax^2$, deren Symbol, da es Natur und Dimension der Kurve ausspricht, ausreichen muss für alle Eigenschaften, welche sich lediglich auf Natur und Dimension beziehen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Satz 1. Die Kurve $\mathfrak{R}ax^2$ geht mit zwei zur Y Achse orthogonal symmetrischen Aesten vom Schnittpunkt der Achsen aus, wo ihr Scheitel liegt, ins positive Unendliche. Die Kurve $\mathfrak{R}(-ax^2)$ analog ins negative Unendliche. Beweis aus dem Bildungsgesetz $\pm ax^2$.

Satz 2. Die Kurve $\mathfrak{R}ax^2$ ist identisch mit der Parabel in der Kegelschnittslehre.

Beweis. Die Gleichung der Parabel heisst in einfachster Gestalt: $y^2 = px$. Dabei liegt aber ein Achsensystem zugrunde, in welchem die beiden Achsen X und Y vertauscht sind gegen die oben angewendeten, so dass, wenn wir auf unser Achsensystem umgestalten, die Gleichung lautet $y = \frac{1}{p}x^2$, somit identisch ist mit $R\frac{1}{p}x^2$. Zugleich stellt sich heraus, dass die Konstante p, welche Parameter heisst, das Reciproke der Konstanten a ist, also $a = \frac{1}{p}$, d. h. gleich dem reciproken Parameter.

Satz 3. Alle Kurven $\mathfrak{R}ax^2$ für jedes beliebige a sind ähnlich.

Beweis. Es mögen zwei Kurven mit ihren Achsen und Scheiteln zusammenfallen, so ist nach Fig. 6

$$\frac{OA}{OB} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{ax_1^2}{a'x_2^2} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{OA^2}{OB^2}$$

also nach Division mit $\frac{OA}{OB}$:

$$OA : OB = a' : a$$

womit die Aehnlichkeit erwiesen ist und die Thatsache, dass der gemeinsame Scheitel für diese Lage den Aehnlichkeitspunkt darstellt.

Aufgabe. Man soll die Bedeutung der Konstanten b in der Kurve $\mathfrak{R}(ax^2 + bx + c)$ bestimmen.

Lösung. (Fig. 7.) Es steht nichts im Wege, die Zerlegung vorzunehmen:

$$\mathfrak{R}(ax^2 + bx + c) = \mathfrak{R}(bx + c) + \mathfrak{R}ax^2$$

welche aussagt, dass die Ordinaten der Kurve $\mathfrak{R}ax^2$ statt auf der X Achse zu stehen, sich auf die Ordinaten der Geraden $\mathfrak{R}(bx + c)$ setzen, welch' letztere in der Höhe c unter der Steigung b durch die Y Achse geht und die Tangente der Kurve $\mathfrak{R}(ax^2 + bx + c)$ am Durchgangspunkt durch die Y Achse darstellt. Bildet die Gerade mit der positiven X Achse den Winkel α, so ist $b = tg\alpha$, welches somit zugleich die Steigung der Kurve beim Durchgang durch die Y Achse darstellt.

Der Umstand, dass sich rechts und links von der Y Achse für jedes $\pm$ x auf die schiefe Gerade die gleichen positiven Werte $\mathfrak{R}a(+x)^2$ und $\mathfrak{R}a(-x)^2$ aufsetzen, zeigt, dass die Kurve $\mathfrak{R}(ax^2 + bx + c)$ schief symmetrisch ist bzgl. der Y Achse, daher:

Satz 4. Die Kurve $\mathfrak{R}ax^2$ ist nicht blos orthogonal symmetrisch zur Hauptachse, sondern auch schief symmetrisch bezüglich jeder Parallele zur Hauptachse. Diese Parallele ist also Durchmesser des Sehnensystems, welches der Geraden $\mathfrak{R}(bx + c)$ parallel ist.

Aufgabe. Man soll die Steigung der Kurve $\mathfrak{R}(ax^2 + bx + c)$ für jeden ihrer Punkte, d. h. über jeder Stelle der X Achse bestimmen.

Lösung. Die Richtung einer Kurve an einem bestimmten Punkte (xy) wird dargestellt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

durch das anliegende Kurvenelement δs, das, wiewohl von verschwindender Kleinheit, doch existieren muss, da die Kurve in jedem ihrer Punkte eine ganz bestimmte Richtung haben muss. Dem Kurvenelement entsprechen bzgl. x und y die verschwindend kleinen Aenderungen δx und δy. Das Symbol δ stellt also verschwindende Differenzen oder Aenderungen dar, also δs am Kurvenbogen s, ebenso δx und δy an den beiden Koordinaten x und y. Offenbar ist der Quotient, $\frac{\delta y}{\delta x}$ in aller Schärfe die trigonometrische Tangente des Winkels, den das Kurvenelement an der Stelle (xy) mit der positiven X Achse bildet und der nun festgehalten werden soll in dem Symbol $tg(x) = \frac{\delta y}{\delta x}$. Es handelt sich also darum, diesen Quotienten aus dem Bildungsgesetz $y = ax^2 + bx + c$ abzuleiten.

Man nenne zu diesem Zweck die Koordinaten der Grenzpunkte des Elementes δs vorerst (xy), (x'y'), so ist:

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$y' = ax'^2 + bx' + c$$
$$y' - y = a(x'^2 - x^2) + b(x' - x)$$
$$\frac{y' - y}{x' - x} = a(x' + x) + b$$

Für verschwindende Differenzen geht diese Gleichung über in

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2ax + b$$

daher:

$$tg(x) = 2ax + b$$

womit für jede Achsenstelle x die Richtung der Kurve $\mathfrak{K}(ax^2 + bx + c)$ bestimmt ist. Z. B. für $\mathfrak{K}(9x^2 + 7x - 2)$ erhält man:

$$tg(x) = 18x + 7$$

also für $x = o$ den Wert 7 als trigonom. Tangente des Winkels zur X Achse, unter dem die Kurve durch die Y Achse geht.

Man nennt solche verschwindend kleinen Werte wie δx und δy in ihrer gesetzmässigen Zusammengehörigkeit Differenziale. Die Steigung der Kurve $\mathfrak{K}(ax^2 + bx + c)$ ergibt sich also aus dem Differenzialquotienten $\frac{\delta y}{\delta x} = 2ax + b$. Diese Steigungsfunktion $2ax + b$ ist aus der Funktion $ax^2 + bx + c$ abgeleitet und heisst deren Derivation. Wie die Funktion $ax^2 + bx + c$ das Bildungsgesetz der Kurve ist, so ist die Derivation das Bildungsgesetz der Steigung. Und wie das Symbol $\mathfrak{K}(ax^2 + bx + c)$ den Ueberblick aller Funktionswerte enthält, so das Symbol $\mathfrak{K}(2ax + b)$ den Ueberblick aller Steigungswerte, d. h. deren stetige Folge. Also das Mittel, eine Grösse in ihrer stetigen Umbildung zu verfolgen, ist der Uebergang zum Verschwindendkleinen, in welchem sich diese stetige Umbildung vollzieht.

Bezeichnet man allgemein die Funktion einer Kurve durch das Symbol f(x), also die Kurve durch $\mathfrak{K}f(x)$, so braucht man für die Derivation das Zeichen f'(x), so dass der Steigungsverlauf dargestellt ist durch $\mathfrak{K}f'(x)$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Steigungsbild der Kurve $\mathfrak{K}(ax^2 + bx + c)$, also $\mathfrak{K}(2ax + b)$, ist offenbar eine Gerade, deren Ordinaten die Steigungswerte darstellen.

Uebung. Man soll die Kurven nachstehender Bildungsgesetze nach ihrer Lage zum Achsensystem bestimmen:

ax^2	$ax^2 + c$	$ax^2 + bx$	$ax^2 + bx + c$	
$-ax^2$	$ax^2 - c$	$ax^2 - bx$	$ax^2 + bx - c$	
	$-ax^2 + c$	$-ax^2 + bx$	$ax^2 - bx + c$	
	$-ax^2 - c$	$-ax^2 - bx$	$ax^2 - bx - c$	etc.

Bemerkung. Steht die Kurve $\mathfrak{K}(ax^2 + bx + c)$ fest und lässt man das Achsensystem sich selbst parallel fortschreiten, so wird, so oft der Nullpunkt desselben in die Kurve selbst eintritt, sofort die Konstante c verschwinden; im Scheitel auch die Konstante b. So oft der Nullpunkt durch die Symmetrieachse geht, wo es auch sei, verschwindet b, im Scheitel zugleich auch c. Wandert der Nullpunkt vom Scheitel aus dem der positiven X Achse entsprechenden Zweige entlang, so verwandelt sich die Form $\mathfrak{K}(ax^2)$ sofort in $\mathfrak{K}(ax^2 + bx)$ und dabei wird b ohne Ende wachsen bis ins Unendliche nach Aussage des Steigungsgesetzes $\mathfrak{K}(2ax + b)$. Geht man dem andern Zweige entlang, so verwandelt sich $\mathfrak{K}ax^2$ in $\mathfrak{K}(ax^2 - bx)$, wobei der absolute Wert von b dasselbe Schicksal hat. Befindet sich der Nullpunkt des Achsensystems weder in der Symmetrieachse, noch in der Kurve, so lautet die Form stets allgemein $\mathfrak{K}(ax^2 + bx + c)$. Findet er sich aber an einer Stelle der Scheiteltangente, so lautet die Form $\mathfrak{K}[a(x \pm q)^2]$, wobei q den Abstand des Nullpunktes vom Scheitel darstellt.

Satz 5. Die Kurve $\mathfrak{K}(ax^2 + bx + c)$ wird die X Achse schneiden oder berühren, oder keines von beiden, je nachdem die Konstantenverbindung $b^2 - 4ac$ positiv, Null oder negativ ist.

Beweis. Im Falle des Schnittes muss die Ordinate, also die Bildungsfunktion, Null werden, demnach:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Also Kriterien: $b^2 > 4ac$ .... Schnitt in zwei Punkten;

$b^2 = 4ac$ .... Berührung im Punkt $x = -\frac{b}{2a}$;

$b^2 < 4ac$ .... imaginäres x, also weder Schnitt noch Berührung.

Haben a und c entgegengesetzte Zeichen, so wird der Radikand sicher positiv, also der Schnitt notwendig.

Aufgabe. Da die Kurve $\mathfrak{K}(ax^2 + bx + c)$ nach ihrer Natur ein Minimum der Ordinaten hat, die Kurve $\mathfrak{K}(-ax^2 + bx + c)$ aus demselben Grund ein Maximum, so soll die Stelle der X Achse bestimmt werden, wo solches eintritt mit Bestimmung der Werte des Minimums und Maximums.

Lösung. An der Stelle, wo die Kurve ihr Minimum, bezw. Maximum hat, muss der Steigungswerth $tg(x) = 2ax + b$ gleich Null sein, daher

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

für die Kurve $\mathfrak{R}(ax^2 + bx + c)$ mit der Steigungsfunktion $2ax + b$

ist die Stelle des Minimums : $x = -\frac{b}{2a}$;

für die Kurve $\mathfrak{R}(-ax^2 + bx + c)$ mit der Steigungsfunktion $-2ax + b$

ist die Stelle des Maximums : $x = \frac{b}{2a}$

Die zugehörigen Ordinatenwerte sind :

$$\text{Min. } y = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$\text{Max. } y = c + \frac{b^2}{4a}$$

Aufgabe. Man soll die Steigungsänderung längs der Achsenstrecke $x_2 - x_1 = \Delta x$ bestimmen.

Lösung.

$$tg(x_1) = 2ax_1 + b$$
$$tg(x_2) = 2ax_2 + b$$

also deren Differenz

$$tg(x_2) - tg(x_1) = 2a\Delta x$$

oder links analog geschrieben wie rechts

$$\Delta tg(x) = 2a\Delta x$$

Die Steigungsänderung ist also der betr. Achsenstrecke proportional, somit für gleiche Achsenstrecken gleich. Der Uebergang zu verschwindenden Aenderungen führt auf das Symbol

$$\partial tg(x) = 2a\partial x$$

also bis zur äussersten Kleinheit der Veränderungen, d. h. bis zum Moment des Werdens ist die Steigungsänderung konstant. Damit ist der Charakter des Reihe $\mathfrak{R}(ax^2 + bx + c)$ als von 2. Ordnung bis in ihre Elemente zurück erwiesen, da die erste Differenzreihe die Form $\mathfrak{R}(2ax + b)\partial x$ hat, also eine Reihe 1. Ordnung darstellt, und nun die zweite Differenzreihe die Form $\mathfrak{R}2a(\partial x)^2$, also konstante Glieder aufweist.

Ist somit $\mathfrak{R}f(x)$ eine Kurve, also $\mathfrak{R}f'(x)$ das Bild ihrer Steigung, so ist $\mathfrak{R}f''(x)$ das Bild ihrer Steigungsänderung. Man kann auch sagen: zur Erforschung der Kurve $\mathfrak{R}y$ dienen die drei Symbole $\mathfrak{R}y$, $\mathfrak{R}\partial y$, $\mathfrak{R}\partial^2 y$. Der offenbar ganz allgemeine Grundgedanke dieser Entwicklung wird von der Differenzialrechnung auf alle möglichen Funktionen angewendet.

Aufgabe. Man soll die Bedingungen angeben, unter welchen die Gerade $G = \mathfrak{R}(b'x + c')$ die Kurve $K = \mathfrak{R}(ax^2 + bx + c)$ schneidet, oder berührt, oder keines von beiden.

Lösung. Ausgehend von der Annahme gleicher Funktionswerte, also gleicher Ordinaten, hat man:

$$ax^2 + bx + c = b'x + c'$$
$$ax^2 + (b - b')x + (c - c') = o$$
$$x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b - b'}{a} + \sqrt{\left(\frac{b - b'}{2a}\right)^2 - \frac{c - c'}{a}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kriterien:

$$\left(\frac{b-b'}{2a}\right)^2 > \frac{c-c'}{a} : \text{Schnitt in zwei Punkten.}$$

$$\left(\frac{b-b'}{2a}\right)^2 = \frac{c-c'}{a} : \text{Berührung in einem Punkt.}$$

$$\left(\frac{b-b'}{2a}\right)^2 < \frac{c-c'}{a} : \text{keines von beiden.}$$

Besondere Fälle:

a) Für $b' = b$, d. h. wenn die Gerade in gleicher Richtung mit der Kurve durch die Y Achse geht, erhält man (Fig. 8)

$$x = \pm \sqrt{\frac{c'-c}{a}}$$

Also für $c' > c$ schneidet die Gerade die Kurve schief symmetrisch zur Y Achse. Bei $c' = c$, findet Berührung statt. Bei $c' < c$ keines von Beiden, wie denn die Ordinatendifferenz $ax^2 + bx + c - bx - c'$ d. h. $ax^2 + (c - c')$ nie auf Null herabsinken kann.

b) Für $c' = c$, d. h. wenn die Gerade an der gleichen Stelle wie die Kurve die Y Achse schneidet, erhält man: (Fig. 9)

$$x = -\frac{b-b'}{2a} \pm \frac{b-b'}{2a}$$

also $\quad x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = \frac{b'-b}{a}$ (Fig. 9,1)

Somit zwei Schnittpunkte, ausser wenn noch $b' = b$, d. h. in dem Fall der Berührung. (Fig. 9,2).

A u f g a b e. Man soll die Bedingungen angeben, unter welchen die zwei Kurven $K = \mathfrak{R}(ax^2 + bx + c)$ und $K' = \mathfrak{R}(a'x^2 + b'x + c')$ sich schneiden oder berühren oder keines von beiden.

L ö s u n g.

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$$

$$(a - a')x^2 + (b - b')\,x + (c - c') = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b-b'}{a-a'} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b-b'}{a-a'}\right)^2 - \frac{c-c'}{a-a'}}$$

Kriterien:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b-b'}{a-a'}\right)^2 > \frac{c-c'}{a-a'} : \text{zwei Schnittpunkte.}$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b-b'}{a-a'}\right)^2 = \frac{c-c'}{a-b'} : \text{ein Berührungspunkt.}$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b-b'}{a-a'}\right)^2 < \frac{c-c'}{a-a'} : \text{keines von beiden.}$$

Besondere Fälle:

a) Für $b' = b$, d. h. wenn beide Kurven in gleicher Richtung durch die Y Achse gehen, erhält man: (Fig. 11)

$$x = \pm \sqrt{\frac{c'-c}{a-a'}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Also zwei Schnittpunkte in schief symmetrischer Lage, wenn der Radikand $\frac{c' - c}{a - a'}$ positiv ist, was nur eintritt für

$$\begin{Bmatrix} c' > c \\ a > a' \end{Bmatrix} \text{ oder } \begin{Bmatrix} c' < c \\ a < a' \end{Bmatrix}$$

Kommt $c' = c$ zur Bedingung $b' = b$ hinzu, so hat man Berührung in der Y Achse. Dieser Berührungspunkt ist Aehnlichkeitspunkt. Beweis nach Fig. 12 analog Fig. 6. Für einen negativen Radikanden hingegen, also für:

$$\begin{Bmatrix} c' > c \\ a < a' \end{Bmatrix} \text{ oder } \begin{Bmatrix} c' < c \\ a > a' \end{Bmatrix}$$

ist weder Schnitt noch Berührung möglich. Die eine Kurve liegt innnerhalb der andern.

b) Für $c' = c$, d. h. wenn beide Kurven durch denselben Punkt der Y Achse gehen, erhält man: (Fig. 10 punktierte Y Achse)

$$x = -\frac{1}{2}\frac{b - b'}{a - a'} \pm \frac{1}{2}\frac{b - b'}{a - a'}$$

Also: $\quad x_1 = o \quad ; \quad x_2 = \frac{b - b'}{a - a'}$

Somit zwei Schnittpunkte, ausser im Falle der Berührung: $b' = b$. (Fig. 12.)

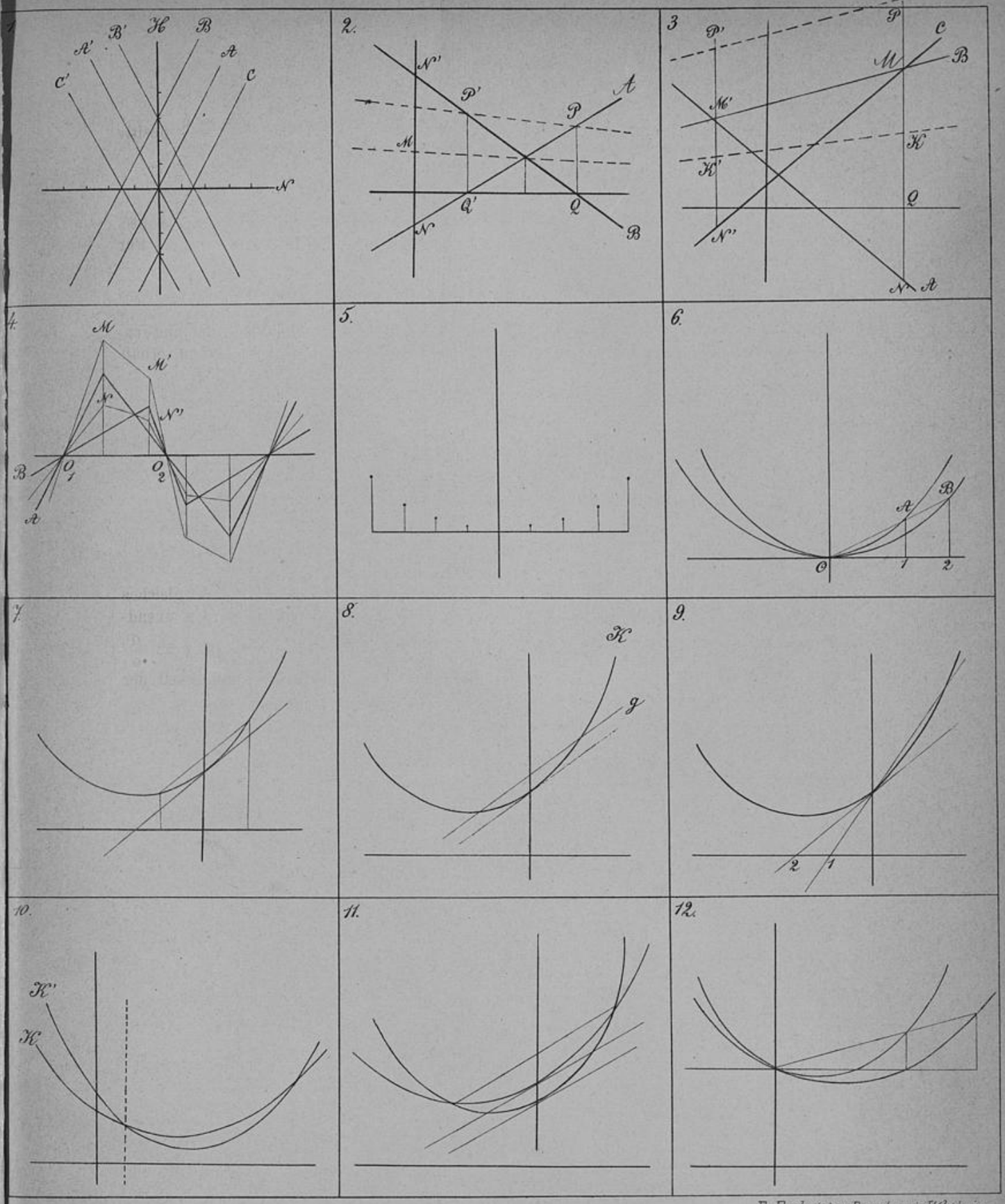
c) Für $a' = a$ reducirt sich die Hauptgleichung auf

$$(b - b')\,x + (c - c') = o$$

$$x = -\frac{c - c'}{b - b'}$$

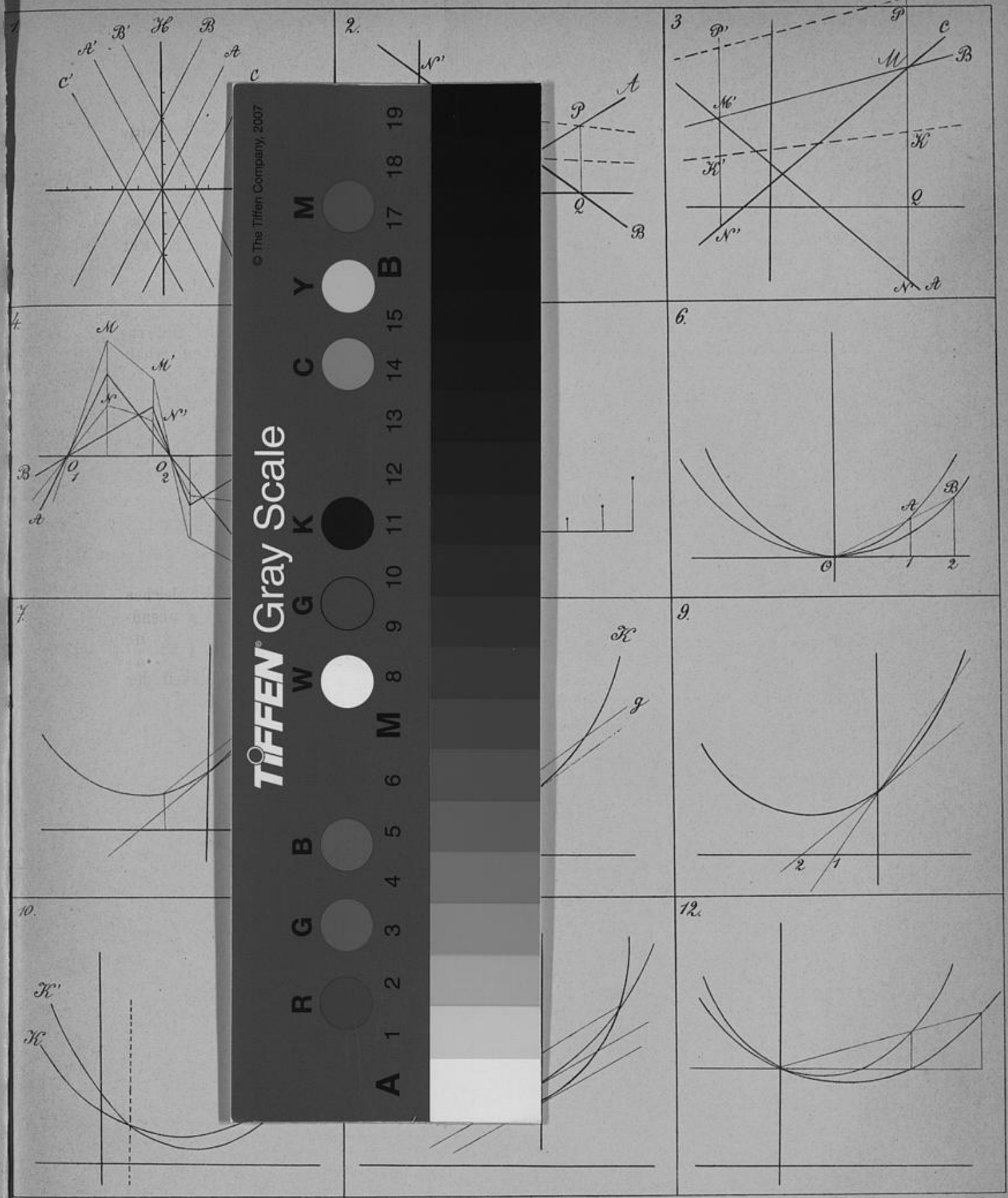
Also zwei kongruente Kurven $\mathfrak{K}(ax^2 + bx + c)$ und $\mathfrak{K}(ax^2 + b'x + c')$ mit der gleichen Konstanten a können sich nur einmal schneiden. Kommt noch $b' = b$ hinzu, so wird x unendlich, d. h. sie schneiden sich gar nicht. Verbindet sich damit noch $c' = c$, so ist $x = \frac{o}{o}$, was offenbar vollkommenes Zusammenfallen bedeutet, ein Beweis für die Feinfühligkeit der analytischen Sprache, die auch ein Wort besitzt für das „Nirgends und überall."

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



E. Bechstein, Druckerei, Wertheim.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



E. Bechstein, Druckerei, Wertheim.

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf