# Die arithmetischen Funktionen
## der drei ersten Ordnungen.

Methodische Studie
zum Ausbau der Gymnasialmathematik

von

Professor **Wilhelm Bunkofer.**

Beilage zum Jahresbericht des Grossherzoglichen Gymnasiums Wertheim.

**II. Abteilung.**

Mit einer Tafel in Steindruck.

WERTHEIM a. M.

E. BECHSTEIN'S BUCH- UND STEINDRUCKEREI.

1896.

**1896. PROGR. Nr. 628.**

qwe 19 (1896)

628, 1.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK
DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

# Die arithmetische Funktion und Reihe 3. Ordnung.

## a) Die diskrete arithmetische Funktion und Reihe

$$an^3 + bn^2 + cn + d \quad ; \quad \mathfrak{R}(an^3 + bn^2 + cn + d)$$

1) Das Sybmol der arithmetischen Funktion 3. Ordnung ist in voller Allgemeinheit

$$an^3 + bn^2 + cn + d$$

wo die Beiziehung der Funktionen niederer Ordnung ihre analoge Berechtigung hat, wie im gleichen Falle der 2. Ordnung. Ist nämlich die Funktion und Reihe 3. Ordnung dadurch gekennzeichnet, dass die 3. Differenz konstant ist, so kann man nachweisen, dass dieser Charakter wieder lediglich am ersten Glied obiger Funktion hängt und von den beigefügten Gliedern niederer Ordnung nicht beeinflusst wird. Es ist in der That (vergl. I. Abtlg. S. 12, oben):

$$\begin{aligned} D_3(an^3 + bn^2 + cn + d) &= D_3an^3 + D_3(bn^2 + cn + D) = D_3an^3 \\ &= aD_3n^3 = aD_2Dn^3 = aD_2\{(n+1)^3 - n^3\} \\ &= aD_2(3n^2 + 3n + 1) = 3 \,.\, 2 \,.\, a = 6a \end{aligned}$$

2) Der Sinn des Symbols $\mathfrak{R}(an^3 + bn^2 + cn + d)$ ist: Entwickelung der Reihe, die entsteht durch Einsetzung aller ganzen Werte für n von $-\infty$ bis $+\infty$. Eine beliebig begrenzte Entwicklung würde am Symbol $\mathfrak{R}$ anzudeuten sein, z. B.:

$$\mathfrak{R}_1^n(an^3 + bn^2 + cn + d) =$$

$$\begin{array}{ll} a \,.\, 1^3 + b \,.\, 1^2 + c \,.\, 1 + d & \alpha \\ a \,.\, 2^3 + b \,.\, 2^2 + c \,.\, 2 + d & \beta \\ a \,.\, 3^3 + b \,.\, 3^2 + c \,.\, 3 + d & \gamma \\ a \,.\, 4^3 + b \,.\, 4^2 + c \,.\, 4 + d & \delta \\ \vdots & \\ a \,.\, n^3 + b \,.\, n^2 + c \,.\, n + d & \nu \end{array}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sind die Koeffizienten a, b, c, d Zahlenwerthe und sind die Werte der aufeinander folgenden Reihen dargestellt durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$, so will das Symbol $\mathfrak{R}_1^n(an^3 + bn^2 + cn + d)$ eben die Reihe dieser Werte darstellen, also die Reihe:

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta \ldots\ldots \nu$$

Beachtet man aber die Anordnung nach Kolonnen, so tritt das bei der 2. Ordnung erkannte Gesetz wieder hervor, dass das Reihen-Symbol $\mathfrak{R}$ zu jedem Glied des Funktionssymbols tritt, also:

$$\mathfrak{R}(an^3 + bn^2 + cn + d) = \mathfrak{R}an^3 + \mathfrak{R}bn^2 + \mathfrak{R}cn + \mathfrak{R}d$$

wobei beliebige Zusammenfassungen zu 2 oder 3 Gliedern zulässig sind.

3) Wir beginnen mit der Darstellung der Reihe $\mathfrak{R}n^3$ und fügen zugleich die Differenzreihen hinzu:

$$\mathfrak{R}n^3 =$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\ldots & (-5)^3 & (-4)^3 & (-3)^3 & (-2)^3 & (-1)^3 & 0 & 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & \ldots \\
\ldots & -125 & -64 & -27 & -8 & -1 & 0 & 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & \ldots \\
 & 61 & 37 & 19 & 7 & 1 & 1 & 7 & 19 & 37 & 61 & & \\
 & -24 & -18 & -12 & -6 & 0 & 6 & 12 & 18 & 24 & & & \\
 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & & & &
\end{array}$$

Somit hat die Reihe $\mathfrak{R}n^3$ zunächst folgende Eigenschaften:

a) Sie stellt die Kuben der natürlichen Zahlen dar und verläuft von Null aus in symmetrisch entgegengesetzten Werten ins Unendliche.

b) Die Differenzreihen sinken nach einander auf die 2., 1. und 0. Ordnung herab.

c) Die 3. Differenzreihe enthält das konstante Glied 6.

d) Die Veranschaulichung am senkrechten Achsensystem zeigt ein Punktsystem, das aus zwei punktsymmetrischen Gegensystemen besteht.

4) Das Punktsystem $\mathfrak{R}an^3$ hat offenbar die Eigenschaft, dass sämmtliche Ordinaten im Verhältnis von a : 1 vergrössert sind, also eine Verschiedenheit bedingen, die eine Kongruenz der Punktsysteme ausschliesst, welche somit den gleichen Koeffizienten a verlangt. (Fig. 1)

5) Voreilig wäre aber gleichwohl der Schluss, dass die Punktsysteme $\mathfrak{R}\,an^3$ und $\mathfrak{R}(an^3 + bn^2 + cn + d)$ kongruent seien wegen der Identität des Koeffizienten a. Denn fügt man der Funktionsform $an^3$ z. B. nur das Glied cn hinzu, so entsteht die Reihe $\mathfrak{R}(an^3 + cn)$, in welcher die Ordinaten der Reihe $\mathfrak{R}an^3$ auf die der Reihe $\mathfrak{R}cn$ gesetzt sind und je nachdem c positiv oder negativ ist, die zwei ganz verschiedenen Punktsysteme A und B (Fig. 2) darstellen. Näheres hierüber erst bei der stetigen Funktion 3. Ordnung.

6) Summen und Mittelwerte hier wie bei der 1. und 2. Ordnung.

## b) Die stetige arithmetische Funktion und Reihe

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \quad ; \quad \mathfrak{R}\,(ax^3 + bx^2 + cx + d).$$

### Einleitendes.

1) Entwickelt man die Reihe $\mathfrak{R}(an^3 + bn^2 + cn + d)$ nicht durch Fortschreiten je um die Einheit, sondern in sehr kleinen gleichen Intervallen für n, so geht die diskrete Funktion

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$an^3 + bn^2 + cn + d$, wenn man das Intervall verschwindend klein denkt, schliesslich über in die stetige Funktion $ax^3 + bx^2 + cx + d$ und das Punktsyteu $\mathfrak{R}(an^3 + bn^2 + cn + d)$ in die Kurve $\mathfrak{R}(ax^3 + bx^2 + cx + d)$.

2) Um aber die Bedeutung der Kurve $\mathfrak{R}(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ gegenüber allen defekten Formen bis herab zu $\mathfrak{R}ax^3$ zu erkennen, thut man gut, von letzterer Form als der einfachsten auszugehen und deren Eigenschaften festzustellen. Zunächst untersuchen wir das Gesetz der Steigung und der Steigungsänderung.

Aufgabe. Man soll die Steigungsfunktion der Kurve $\mathfrak{R}ax^3$ darstellen.

Lösung. Es seien die zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Kurvenpunkten entsprechenden Koordinaten x y, x'y', so hat man die zwei Gleichungen:

$$y = ax^3$$
$$y' = ax'^3$$
$$y' - y = a(x' - x)\{x'^2 + x'x + x^2\}$$

Wegen der verschiedenen Unterschiede $y' - y = \delta y$ und $x' - x = \delta x$ ist

$$\delta y = a \,.\, \delta x \,.\, 3x^2$$
$$= 3ax^2\, \delta x$$
$$\frac{\delta y}{\delta x} = 3ax^2$$

also nach Abteilung I Seite 14:

$$tg(x) = 3ax^2$$

Die Steigungsfunktion der Kurve $\mathfrak{R}ax^3$ ist also $3ax^2$. Sie werde mit B(x), kurz mit B bezeichnet, das Bildungsgesetz der Kurve mit A.

Aufgabe. Man soll die Gleichung für die Steigungsänderung, d. h. die Ablenkungsfunktion, der Kurve $\mathfrak{R}ax^3$ darstellen.

Lösung. Man hat für zwei unmittelbar aufeinander folgende Punkte der Kurve $\mathfrak{R}ax^3$

$$tg(x) = 3ax^2$$
$$tg(x') = 3ax'^2$$
$$tg(x') - tg(x) = 3a(x'^2 - x^2)$$
$$= 3a(x' + x)(x' - x)$$
$$\delta tgx = 6ax\delta x$$
$$\frac{\delta tg(x)}{\delta x} = 6ax$$

Die Ablenkungsfunktion der Kurve $\mathfrak{R}ax^3$ ist also 6ax. Sie werden mit C(x), kurz mit C bezeichnet. (Bemerkung: So wie die Gleichung $tg(x) = B = 3ax^2$ aussagt, dass die Kurve $\mathfrak{R}ax^3$ in ihrem ganzen Verlauf nirgends Gefäll haben kann, weil die Funktion $3ax^2$ unfähig ist, negativ zu werden, so sagt im Gegensatz hiezu die Gleichung $\frac{\delta tg(x)}{\delta x} = C = 6ax$ aus, dass die Steigungsänderung für positive und negative x, also diesseits und jenseits des Nullpunkts entgegengesetzten Sinn hat: links vom Nullpunkt, und zwar aus dem Unendlichen bis zu ihm heran — stetige Abnahme der Steigung von anfangs senkrechter Richtung zur X-Achse bis auf Null; rechts vom Nullpunkt hingegen Zunahme von Null aus ins Endlose. Also der Kurve entlang anfangs Ablenkung nach rechts bis zum Nullpunkt, dann Ablenkung nach links.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe. Man soll die Gleichung für Ablenkungsänderung der Kurve $\mathfrak{K}ax^3$ darstellen.

Lösung. Man hat für zwei unmittelbar benachbarte Punkte der Kurve

$$C = 6ax$$
$$C' = 6ax'$$
$$C' - C = 6a(x' - x)$$
$$\partial C = 6a\partial x \quad ; \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 6a \ (= D)$$

worin die Aussage liegt, dass die Kurve bis in ihre Elemente zurück wirklich den Charakter der 3. Ordnung bewahrt.

Damit sind die Hilfsmittel gewonnen, um die speziellen und allgemeinen Formen der arithmetischen Kurve 3. Ordnung genauer zu untersuchen.

## Die Kurve $\mathfrak{K}ax^3$

Die Bildungsfunktion $ax^3$ giebt folgende drei Sätze:

Satz 1. Die Kurve $\mathfrak{K}ax^3$ schneidet das Achsensystem nur einmal und zwar im Nullpunkt.

Satz 2. Sie verläuft im 1. und 3. Quadranten des Achsensystems in zwei punktsymmetrischen Zweigen.

Satz 3. Sie entfernt sich stetig von beiden Achsen ins Endlose.

Anmerkung. Während bei der Kurve 2. Ordnung aus der Funktionsgleichung $y = ax^2$ folgt: $y : x = ax$, so dass für $x = \infty$ offenbar $\frac{y}{x} = a\infty$, also das unendliche y unendlich mal grösser ist als das unendliche x, letzteres also gegen ersteres verschwindet, so ist bei der Kurve 3. Ordnung das Verhältnis $\frac{y}{x}$ gleich $ax^2$, so dass für $x = \infty$ offenbar $\frac{y}{x} = a\infty\infty$, also y nicht bloss $\infty$ mal grösser ist als sein x, sondern $\infty \cdot \infty$ mal grösser. Ein endliches Verhältnis erhielte man ja erst in der Form $\frac{y}{x^3} = a$, welches für $x = \infty$ überginge in $\frac{\infty}{\infty^3} = a$. Also erst die dritte Potenz erhebt das $\infty$ des Nenners auf die gleiche Stufe mit dem $\infty$ des Zählers, und im Gebiete des Unendlichen sind somit Grössenverhältnisse möglich, wie im Gebiete endlicher Zahlen.

Satz 4. An punktsymmetrischen Stellen sind die Steigungen absolut gleich, die Ablenkungen entgegengesetzt gleich.

Beweis. Ergiebt sich für $\pm x$ aus den zwei Gleichungen:

$$B = 3ax^2 \quad ; \quad C = 6ax.$$

Zusatz. Im Nullpunkt des Achsensystems, also für $x = 6$ ist sowohl B als C gleich Null, d. h. die Kurve hat daselbst die Richtung der X-Achse und die Ablenkung ist momentan = Null, als Durchgangswert von der Ablenkung nach rechts zur Ablenkung nach links. Dieser Punkt der Kurve heisst daher Wendepunkt. Er ist der Mittelpunkt der Punktsymmetrie. Im Unendlichen hat die Kurve die Richtung der Y-Achse. Auch ein Unendlichwerden für C darf nicht auffallen, denn lenkt Fig. 3 das Kurvenelement MN aus der Richtung MN = NP in die Richtung NP' ab, so erfährt die Kurve die Ablenkung PP', die, wenn die Kurve die senkrechte Richtung annimmt, offenbar unendlich wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Satz 5. Die senkrechte virtuelle Ablenkung $C_t$, bezogen auf die Tangente, verglichen mit der Ablenkung C bezüglich der X-Achse, wird dargestellt durch die Gleichung

$$C_t = \frac{C}{1 + B^2}$$

Beweis. Für zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Kurvenpunkte hat man die Gleichungen:

$$tg\varphi = 3ax^2 \quad ; \qquad tg\varphi' = 3ax'^2$$

$$tg\varphi' - tg\varphi = 3a(x'^2 - x^2) = 6ax\delta x$$

Die linke Seite lässt sich umgestalten wie folgt:

$$tg\varphi' - tg\varphi = \frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi - \cos\varphi'\sin\varphi}{\cos\varphi'\cos\varphi} = \frac{\sin(\varphi' - \varphi)}{\cos\varphi'\cos\varphi}$$

Wählt man für $\varphi'$ und $\varphi$ analytisches Winkelmass, und beachtet, dass der Unterschied $\varphi' - \varphi$ verschwindend klein, also $\delta\varphi$ ist, welches $\delta\varphi$ demnach die fragliche virtuelle Ablenkung darstellt, die der Achsenstrecke $\delta x$ entspricht, so geht der letzte Ausdruck über in $\frac{\delta\varphi}{\cos^2\varphi}$, wofür wir schreiben $\delta\varphi \,.\, \sec^2\varphi$ oder $\delta\varphi\,(1 + tg^2\varphi)$ oder endlich $\delta\varphi\,(1 + B^2)$, also:

$$\delta\varphi\,(1 + B^2) = 6ax\delta x = C\delta x$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x} = C_t = \frac{C}{1 + B^2}$$

Also unter Einsetzung der Werte:

$$C_t = \frac{6ax}{1 + 9a^2x^4}$$

Zusatz. Im Nullpunkt des Achsensystems, also für $x = o$ wird $\frac{\delta\varphi}{\delta x} = o$, wie es der lokale Charakter des Wendepunkts verlangt. Für sehr grosse x reducirt sich die Ablenkung auf $\frac{\delta\varphi}{\delta x} = \frac{6ax}{9a^2x^4} = \frac{2}{3ax^3}$ mit der Aussage, dass in jenen Regionen die Winkelablenkung dem Kubus der Abscisse umgekehrt proportional ist, also enorm schnell abnimmt, und sehr gering ist, d. h, dass die Kurve dort den Charakter der Geraden anstrebt.

Anmerkuug. Da die Winkelablenkung am Wendepunkt und im Unendlichen Null ist, dazwischen hingegen endliche Werte besitzt, die stetig ineinander übergehen, so muss dieselbe irgendwo ein Maximum erreichen, welches also die Stelle stärkster Krümmung ist. Diesseits und jenseits dieser Stelle gehen die Krümmungen stetig dem Nullwert zu, so dass jede kleinere Krümmung als die maximale immer zweimal vorhanden ist. Sind nun x und u zwei solcher Stellen in der Nähe des Maximums, so hat man für diese die Gleichung:

$$\frac{6ax}{1 + 9a^2x^4} = \frac{6au}{1 + 9a^2u^4}$$

aus welcher folgt:

$$x + 9a^2xu^4 = u + 9a^2ux^4$$

$$x - u + 9a^2xu(u^3 - x^3)$$

$$1 - 9a^2xu(x^2 + xu + u^2)$$

Lässt man nun die beiden Punkte bis zum Maximum heranrücken, so erhält man, weil $u = x$ wird:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$9a^2x^2 \,.\, 3x^2 = 1$$
$$27a^2x^4 = 1$$
$$x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{27a^2}}$$

Anmerkung 1. Bei der Kurve $\mathfrak{R}ax^2$ löstsich die Frage nach dem Maximum der Krümmung einfacher, weil für sie in analoger Behandlung sich ergiebt:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x} = \frac{2a}{1 + 4a^2x^2}$$

wo nun das Maximum eintreten muss für das Minimum von $x^2$, also für $x = o$. Für $x = \infty$ ist $\frac{\delta\varphi}{\delta x} = o$, d. h. die Kurve ist zur Geraden geworden.

Anmerkung 2. Denkt man sich an zwei Nachbarpunkten die Normalen gezogen, die sich (Fig. 4) in O schneiden und an der Kurve das Element $\delta s$ zwischen sich haben, so sind diese Normalen $\varrho$ gleich und können als Radien des Kreises betrachtet werden, der mit der Kurve das Krümmungselement $\delta s$ gemeinsam hat und Krümmungskreis der Kurve an dieser Stelle heisst, der also die Stärke der Krümmung veranschaulicht. Sein Radius $\varrho$ heisst Krümmungsradius; sein Centrum O heisst Krümmungsmittelpunkt. Da nun offenbar $\delta s = \varrho\delta\varphi$, also $\delta\varphi = \frac{\delta s}{\varrho}$, so geht obige Gleichung über in:

$$\frac{\delta s}{\varrho\delta x} = \frac{2a}{1 + 4a^2x^2}$$

Ist nun $\varphi$ der Winkel des Kurvenelements mit der positiven X Achse an der Stelle x, also $\frac{\delta s}{\delta x} = \sec\varphi = \sqrt{1 + tg^2\varphi} = \sqrt{1 + 4a^2x^2}$, so folgt:

$$\varrho = \frac{1}{2a}\cdot(1 + 4a^2x^2)\sqrt{1 + 4a^2x^2}$$

welcher Wert mit x ins Endlose wächst, während das Minimum eintritt für $x^2 = o$, also $\varrho = \frac{1}{2a}$; also, da $a = \frac{1}{p}$, d. h. gleich dem reciproken Parameter ist, so folgt Min. $\varrho = \frac{p}{2}$ eintretend im Scheitel.

Für die Kurve $\mathfrak{R}ax^3$ ergiebt sich nach gleicher Ableitung

$$\varrho = \frac{(1 + 9a^2x^4)\sqrt{1 + 9a^2x^4}}{6ax} = \frac{(1 + B^2)\sqrt{1 + B^2}}{C}$$

Das Minimum dieses Ausdruckes fällt zusammen mit dem Maximum der Winkelablenkung $\frac{\delta\varphi}{\delta x}$, die an die Bedingung geknüpft war: $27a^2x^4 = 1$. Die entsprechende Substitution führt zu dem Wert Min. $\varrho = \frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{27a^2}} = \frac{4}{3}\,x_{\text{Min.}}$ Also der Krümmungsradius an der Stelle stärkster Krümmung ist das $\frac{4}{3}$fache von der Abscissenstrecke jener Stelle.

Satz 6. Die Subtangente der Kurve $\mathfrak{R}ax^3$, d. h. die Projektion der Tangente auf die X Achse, ist ein Drittel der Abscissenstrecke des betr. Kurvenpunktes.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. Nach Fig. 5 ist:

$$y : t' = \partial y : \partial x$$
$$t' = \frac{1}{3}x$$

also von a unabhängig. Liegt daher im gleichen Achsensystem die Kurvenschar $\mathfrak{R}a^*x^3$, wo $a^*$ eine Manigfaltigkeit dieser Konstante andeutet, und man zieht eine beliebige Ordinate, so werden die Tangenten sämmtlicher getroffenen Kurvenpunkte sich im Achsenpunkt $\frac{2}{3}x$ treffen. Die allgemeine Form der Gleichung der Subtangente ist offenbar $t' = \frac{y}{B}$.

Bei der Kurve $\mathfrak{R}ax^2$ ist die Subtangente $\frac{1}{2}x$.

Satz 7. Die Subnormale der Kurve $\mathfrak{R}ax^3$, d. h. die Projektion der Normale auf die X-Achse ist dargestellt durch die Gleichung $n' = 3a^2x^5$.

Beweis. Nach Fig. 5 aus der Beziehung $n't' = y^2$.

Die allgemeine Gleichung für die Subnormale ist $n' = By$.

Die Wertformel $3a^2x^5$ besagt ein enormes Wachstum der Subnormale. Z.B.:

$$n'_1 : n'_3 = 1^5 : 3^5 = 1 : 243$$

für $x = 1$ und $x = 3$.

Die Unendlichkeit, der die Subnormale zustrebt, steht zwei Stufen über jener der Ordinate, welche bloss von der 3. Stufe ist.

Satz 8. Alle Kurven der Form $\mathfrak{R}ax^3$ für beliebige a sind ähnlich mit dem Aehnlichkeitspunkt im Nullpunkt des Achsensystems.

Beweis. Nach Fig. 6 ist:

$$OA : OA' = y : y'$$
$$= ax^3 : a'x'^3$$

Da aber $x^3 : x'^3 = \overline{OA}^3 : OA'^3$, so folgt durch Einsetzung

$$OA : OA' = a\overline{OA}^3 : a'\overline{OA'}^3$$
$$OA : OA' = \sqrt{a'} : \sqrt{a}$$

Verschiebung der Kurve $\mathfrak{R}ax^3$ längs den Achsen. Es ist leicht ersichtlich (Fig. 7), dass eine Parallelverschiebung der Kurve $\mathfrak{R}ax^3$ längs der Y-Achse an die Stellen 1 und 2 im Abstand d vom Nullpunkt zu den Formen führt:

1) $\mathfrak{R}(ax^3 + d)$
2) $\mathfrak{R}(ax^3 - d)$

Verschiebt man hingegen längs der X-Achse an die Stellen 3 und 4 im Abstand q vom Nullpunkt, so erzeugen sich die Formen:

3) $\mathfrak{R}a(x - q)^3$
4) $\mathfrak{R}a(x + q)^3$

Beide Verschiebungen kombiniert, wodurch der Wendepunkt in die Winkelräume des Achsensystems zu liegen kommt, liefern die allgemeinste Form:

$$\mathfrak{R}\{a(x \pm q)^3 \pm d\}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

## Die Kurve $\mathfrak{R}(-ax^3)$

betreffend genügt die Bemerkung, dass sie das symmetrische Gegenbild der Kurve $\mathfrak{R}ax^3$ bezgl. der X-Achse ist, somit im zweiten und vierten Quadranten des Achsensystems liegt. Sie zeigt also von ihrer linken Seite aus eine stetige Abnahme der Ordinaten von $+\infty$ durch Null bis $-\infty$. Abgesehen von dieser symmetrischen Gegensätzlichkeit und dem was davon bedingt ist, hat also diese Kurve die Eigenschaften ihres Gegenbildes $\mathfrak{R}ax^3$.

## Die Kurven $\mathfrak{R}(ax^3 + cx)$ und $\mathfrak{R}(ax^3 - cx)$.

### Einleitendes.

1) Unter Verweisung auf Fig. 2 und in Erinnerung an die analogen Fälle bei der Kurve $\mathfrak{R}ax^2$ ist unmittelbar klar, dass die Beifügung des Gliedes $\pm cx$ zu dem Bildungsgesetz $ax^3$ die Bedeutung hat, dass die Ordinaten der stetigen Reihe $\mathfrak{R}ax^3$ nicht direkt auf der X-Achse stehen, sondern auf den Ordinaten der Reihe $\mathfrak{R}cx$ bezw. $\mathfrak{R}(-cx)$, weil $\mathfrak{R}(ax^3 \pm cx) = \mathfrak{R}ax^3 + \mathfrak{R} \pm cx$. Somit tritt im Nullpunkt, also im Wendepunkt an die Stelle der Richtung in der X-Achse, welche der Kurve $\mathfrak{R}ax^3$ eigen war, die Richtung der Geraden $\mathfrak{R} \pm cx$, so dass demnach die Steigung bei diesem Durchgange dargestellt ist durch $\pm c$. Die erste und zweite Derivierte sind

$$B = 3ax^2 \pm c \quad ; \quad C = 6ax.$$

### Die Kurve $\mathfrak{R}(ax^3 + cx)$,

welche aus dem negativ Unendlichen ursprünglich senkrecht aufsteigend, stetig nach rechts ablenkend, im Wendepunkt und Nullpunkt der Achsen sich bis zur Richtung $tg\alpha = c$ gesenkt hat, lenkt hier nach links ab und nimmt mit wachsender Steigung mehr und mehr die zur X-Achse senkrechte Richtung an. Alles das folgt aus der Auflagerung der Ordinaten von $\mathfrak{R}ax^3$ auf die von $\mathfrak{R}cx$ als direktes Ergebniss der Anschauung.

Aus dem Symbol $\mathfrak{R}(ax^3 + cx)$ selbst ergeben sich folgende Eigenschaften:

1) Die Kurve schneidet das Achsensystem im Nullpunkt in der Richtung $c = tg\alpha$. Sie erstreckt sich von da aus im ersten und dritten Quadranten in zwei punktsymmetrischen Zweigen ins Unendliche. An punktsymmetrischen Stellen sind die Steigungen gleich, die Ablenkungen entgegengesetzt gleich.

Beweis. Aus den drei Gleichungen:

$$A = y = ax^3 + cx \quad ; \quad B = 3ax^2 + c \quad ; \quad C = 6ax.$$

2) Eine Parallelrichtung zur X-Achse ist unmöglich, denn sie würde $B = o$ erfordern, was zu imaginärem x führt.

3) Ueberhaupt ist eine geringere Steigung als c unmöglich, denn die Auflösung der Gleichung $B = 3ax^2 + c$ nach x liefert $x = \pm\sqrt{\frac{B - c}{3a}}$, verlangt also $B \geqq c$.

4) Die Ablenkung von der Tangentenrichtung ist dargestellt durch die Gleichung:

$$C_t = \frac{C}{1 + B^2} = \frac{6ax}{1 + (3ax^2 + c)^2}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Demnach ist auch bei dieser Kurve die Krümmung im Nullpunkt und im Unendlichen verschwunden.

5) Die Achsenstelle stärkster Ablenkung, also stärkster Krümmung, ergiebt sich durch die gleichen Schlüsse wie bei der Kurve $\mathfrak{R}ax^3$ aus der Gleichung:

$$\frac{6ax}{1+(3ax^2+c)^2}=\frac{6au}{1+(3au^2+c)^2}$$

deren Reduktion auf die Form

$$x^4-\frac{2c}{9a}x^2-\frac{1+c^2}{27a^2}=0$$

Die gesuchte Achsenstelle liefert in der Gleichung:

$$x=\pm\sqrt{\frac{c}{9a}+\frac{1}{9a}\sqrt{4c^2+3}}$$

welche für $c=0$ in die frühere Gleichung übergeht.

6) Der Krümmungsradius der Kurve $\mathfrak{R}(ax^3+c)$ ergiebt sich nach den gleichen Gesichtspunkten wie bei $\mathfrak{R}ax^3$ zum Wert von

$$\varrho=\frac{(1+B^2)\sqrt{1+B^2}}{C}$$

also

$$\varrho=\frac{\{1+(3ax^2+c)^2\}\sqrt{1+(3ax^2+c^2)}}{6ax}$$

welcher Wert für $x=0$ und $x=\infty$ selbst unendlich wird, wie zu erwarten, weil die Krümmung daselbst verschwunden ist. Das Minimum des Krümmungsradius ergiebt sich durch Einführung des x-Wertes für das Maximum der Ablenkung.

7) Die Subtangente ergiebt sich aus der allgemeinen Gleichung $t'=\frac{y}{B}$ zu dem Wert:

$$t'=x\,\frac{ax^2+c}{3ax^2+c}$$

Für sehr grosse Werte von x geht diese Formel über in $t'=\frac{x}{3}$, also für jene Region stellt sich für die Kurve $\mathfrak{R}(ax^3+cx)$ die bereits gefundene Eigenschaft der Kurve $\mathfrak{R}ax^3$ wieder her.

8) Die Subnormale ergibt sich nach dem allgemeinen Gesetz $n'=By$ zu

$$n'=x\,(ax^2+c)\,(3ax^2+c)$$

Nullwert ist nur möglich für $x=0$, da die beiden anderen Faktoren imaginäre Werte für x liefern.

9) Alle Kurven $\mathfrak{R}(ax^3+cx)$, die im Gliede cx inclus. Vorzeichen übereinstimmen, also in derselben Richtung durch den Nullpunkt gehen, sind ähnlich mit dem Wendepunkt als Aehnlichkeitspunkt.

B e w e i s. Für die zwei Kurven $\mathfrak{R}(ax^3+cx)$ und $\mathfrak{R}(a'x^3+cx)$ hat man wie bei Fig. 6:

$$y=ax^3+cx$$
$$y'=a'x'^3+cx'$$

daher:

$$\frac{y}{y'}=\frac{ax^3+cx}{a'x'^3+cx'}=\frac{ax^2+c}{a'x'^2+c}\cdot\frac{x}{x'}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also wegen $\frac{y}{y'} = \frac{x}{x'}$:

$$ax^2 + c = a'x'^2 + c$$
$$x : x' = \sqrt{a'} : \sqrt{a}$$
$$OA : OA' = \sqrt{a'} : \sqrt{a} \quad \text{q. e. d.}$$

## Die Kurve $\mathfrak{K}(ax^3 - cx)$

verläuft wegen des Gliedes $-cx$ anders als die Kurve $\mathfrak{K}(ax^3 + cx)$. Sie schneidet die X-Achse dreimal: im Nullpunkt und in symmetrischen Punkten der positiven und negativen Achsenseite. Ueber der negativen Seite erzeugt sie ein Maximum, unter der positiven ein Minimum. Von $-\infty$ bis zum Wendepunkt im Nullpunkt der Achsen geht die Ablenkung nach rechts; von da an nach links. Auch diese Kurve erstrebt im Unendlichen die zur X-Achse senkrechte Richtung. Diese allgemeine Charakteristik folgt aus der Auflagerung der Ordinaten der Kurve $\mathfrak{K}ax^3$ auf die Gerade $\mathfrak{K}(-cx)$.

Aus dem Symbol $\mathfrak{K}(ax^3 - cx)$ ergeben sich folgende Schlüsse:

1) Die Schnittpunkte in der X-Achse liegen an den Stellen:

$$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = +\sqrt{\frac{c}{a}} \quad ; \quad x_3 = -\sqrt{\frac{c}{a}}$$

2) An punktsymmetrischen Stellen sind die Steigungen gleich, die Ablenkungen entgegengesetzt gleich.

3) Die Parallelrichtung zur X-Achse, also Maximum und Minimum findet statt an den Achsenstellen, die der Gleichung $B = 0$ entsprechen, also:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{c}{3a}} \quad ; \quad x_2 = +\sqrt{\frac{c}{3a}}$$

4) Die Auflösung der Gleichung $B = 3ax^2 - c$ nach x, also

$$x = \pm\sqrt{\frac{B + c}{3a}}$$

enthält die Aussage, dass die Steigung von $+\infty$ herabsinken kann bis $-c$, welches die äusserste Ablenkung nach rechts ist und im Punkt $x = 0$, also im Wendepunkt, stattfindet.

5) Die Ablenkung von der Tangentenrichtung ist dargestellt durch die Gleichung:

$$C_t = \frac{C}{1+B^2} = \frac{6ax}{1 + (3ax^2 - c)^2}$$

daher auch bei dieser Kurve die Krümmung im Nullpunkt und im Unendlichen verschwunden.

6) Die Achsenstelle stärkster Ablenkung, also stärkster Krümmung, ergibt sich analog wie bei der Kurve $\mathfrak{K}(ax^3 + cx)$ zum Werte:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{9a} - \frac{1}{9a}\sqrt{4c^2 + 3}}$$

7) Der Krümmungsradius der Kurve ist

$$\varrho = \frac{(1 + B^2\sqrt{1 + B^2}}{C} = \frac{(1 + (3ax^2 - c)^2)\sqrt{1 + (3ax^2 - c)^2}}{6ax}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welcher Wert für $x = o$ und $x = \infty$ selbst unendlich wird, was mit der daselbst herrschenden Ablenkung vom Werte Null stimmt.

Das Minimum des Krümmungsradius ergiebt sich durch Einführung des x-Wertes für das Maximum der Ablenkung.

8) Die Subtangente ist dargestellt durch

$$t' = x \cdot \frac{ax^2 - c}{3ax^2 - c}$$

Also für sehr grosse Werte von x, wie bei der Kurve $\mathfrak{R}(ax^3 + cx)$ wieder $t' = \frac{x}{3}$

9) Die Subnormale ist bestimmt durch die Gleichung:

$$n' = x(ax^2 - c)\,(3ax^2 - c)$$

und liefert Nullwerte für:

$$x_1 = o \;;\quad x_2 = +\sqrt{\frac{c}{a}} \;;\quad x_4 = +\sqrt{\frac{c}{3a}}$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{c}{a}} \;;\quad x_5 = -\sqrt{\frac{c}{3a}}$$

also an den Schnittpunkten und an den Stellen des Maximums und Minimums.

10) Auch alle Kurven der Form $\mathfrak{R}(ax^3 - cx)$, die im Glied $-cx$ incl. Vorzeichen übereinstimmen, sind ähnlich mit dem Wendepunkt als Aehnlichkeitspunkt. Beweis wie im Fall $+cx$.

11) Die Kurven $\mathfrak{R}(-ax^3 \pm cx)$ sind die symmetrischen Gegenbilder der Kurven $\mathfrak{R}(ax^3 \pm cx)$ Haben also mutatis mutandis die gleichen Eigenschaften.

### Allgemeinere Formen.

Paralleverschiebung längs der Y-Achse erzeugt die Formen:

$$\mathfrak{R}(\pm ax^3 \pm cx \pm d)$$

Paralleverschiebung längs der X-Achse erzeugt dagegen die Formen:

$$\mathfrak{R}\{\pm a(x \pm q)^3 \pm c(x \pm q)\}$$

Beide kombinirt, wodurch also der Wendepunkt in die Winkelquadranten des Achsensystems zu liegen kommt, liefern die allgemeinste Form, in welcher die Doppelzeichen weggelassen, aber hinzuzudenken sind:

$$\{\mathfrak{R}a(x + q)^3 + c(x + q) + d\}$$

die nun also in der reducirten Form erscheint:

$$\mathfrak{R}(ax^3 + px^2 + qx + r)$$

## Die Kurve $\mathfrak{R}(ax^3 + bx^2 + cx + d)$

1) So lange der Wendepunkt der Kurve $\mathfrak{R}(\pm ax^3 \pm cx \pm d)$ die Y-Achse nicht verliess, fehlte in der Bildungsfunktion das Glied mit der zweiten Potenz von x. Mit dem Verlassen dieser Achse kam es sofort zum Vorschein. Solches musste naturgemäss eintreten. Denn aus den zwei Gleichungen, die aus $A = ax^3 + bx^2 + cx + d$ folgen, nämlich:

$$B = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$C = 6ax + 2b$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ergiebt sich für $x = o$ der Wert $c = B(o)$, d. h. der Koeffizient an x stellt die Steigung beim Durchgang durch die Y-Achse dar. Entsprechend für $x = o$ der Wert $2b = C(o)$, d. h. der doppelte Koeffizient von $x^2$ stellt die Ablenkung beim Durchgang durch die Y-Achse dar, muss also wegfallen, wenn die Y-Achse durch den Wendepunkt geht, wo ja die Ablenkung Null ist.

Auf Grund der allgemeinen Gleichung und der Bedeutung ihrer Koeffizienten hat man also noch nachstehende Besonderheiten festzuhalten :

a) Fehlt das absolute Glied, so geht die Kurve durch den Nullpunkt.
b) Fehlt das Glied cx, so liegt ein Maximum oder Minimum in der Y-Achse.
c) Fehlt das Glied $bx^2$, so liegt der Wendepunkt in der Y-Achse.
d) Fehlen die zwei letzten Glieder, so liegt ein Maximum oder Minimum im Nullpunkt.
e) Fehlt das zweite und letzte Glied, so liegt der Wendepunkt im Nullpunkt.
f) Fehlen die zwei mittleren Glieder, so geht die Kurve parallel der X-Achse am Wendepunkt durch die Y-Achse.
g) Fehlen die drei letzten Glieder, so geht die Kurve am Wendepunkt in der X-Acsse durch den Nullpunkt.

Bewegt sich das Achsensystem parallel mit seinem Nullpunkt der Kurve entlang, so werden allmählich alle diese Formen durchlaufen.

2) Hat nun eine arithmetische Kurve 3. Ordnung die 3 Durchgangspunkte in der X-Achse: $x = a$ ; $x = b$ ; $x = c$, so ist die Kurve dargestellt in dem Symbol $\mathfrak{K}(x - a)(x - b)(x - c)$. Das Bildungsgesetz ist dann nach Potenzen von x geordnet:

$$y = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$$

Die Bedeutung der 3 Koeffizienten ist darnach:

1) $-abc$ ist die Höhe des Durchgangs durch die Y-Achse,
2) $ab + ac + bc$ ist die Steigung daselbst,
3) $-2 . (a + b + c)$ ist die Ablenkung daselbst.

Beachtet man aber, dass

$$C = 6x - 2(a + b + c)$$

und man wünscht jenes x, welches die Ablenkung C zu Null macht, also die Ablenkung des Wendepunkts, so folgt für dessen x wegen $C = o$:

$$x = \frac{a + b + c}{3}$$

Mit anderen Worten: der Achsenpunkt des Wendepunktes ist der Mittelpunkt der Durchgangspunkte der Kurve durch die X-Achse. Zugleich ist ersichtlich, dass die Aufgabe, in einer kubischen Gleichung

$$x^3 + bx^2 + cx + d = o$$

das zweite Glied zu eliminiren, identisch ist mit der geometrischen Aufgabe, die Y-Achse in den Wendepunkt zu verlegen.

Aufgabe. Man soll die Steigung der Kurve $\mathfrak{K}(x - a)(x - b)$, die also die X-Achse an den Stellen $x = a$ und $x = b$ schneidet $(b > a)$, bestimmen.

Lösung. Da für $x = a$ oder $x = b$ notwendig $(x - a)(x - b) = o$, so ist fürdie unmittelbar folgenden Punkte $a + \delta x$ oder $b + \delta x$ die Ordinate jeweils verschwindend klein, etwa $\alpha$ und $\beta$, so dass

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) $$(a + \delta x - a)(a + \delta x - b) = \alpha$$
$$\delta x(a - b) = \alpha$$
$$a - b = \frac{\alpha}{\delta x} = tg(a)$$

Ebenso:

2) $$(b + \delta x - a)(b + \delta x - b) = \beta$$
$$(b - a)\,\delta x = \beta$$
$$b - a = \frac{\beta}{\delta x} = tg(b)$$

Schneidet die Kurve z. B. mit dem linken Zweig den Nullpunkt ($a = o$) so ist $tg(a) = tg(o) = -b$; $tg(b) = b$. Also unter allen Umständen symmetrische Richtungen.

Aufgabe. Man soll die Steigungen der Kurve $\mathfrak{K}(x - a)(x - b)(x - c)$ an den drei Durchgangspunkten durch die X-Achse bestimmen.

Lösung. Da für $x = a$ oder $b$ oder $c$ notwendig $(x - a)(x - b)(x - c) = o$, so ist für die unmittelbar folgenden Punkte $a + \delta x$, $b + \delta x$, $c + \delta x$ die Ordinate jeweils verschwindend klein und heisse bezüglich $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so dass

1) $$(a + \delta x - a)(a + \delta x - b)(a + \delta x - c) = \alpha$$
$$\delta x(a - b\,(a - c) = \alpha$$
$$(a - b)(a - c) = \frac{\alpha}{\delta x} = tg(a)$$

2) $$(b + \delta x - a)(b + \delta x - b)(b + \delta x - c) = \beta$$
$$-\,\delta x\,(b - a)(c - b) = \beta$$
$$-\,(b - a)(c - b) = \frac{\beta}{\delta x} = tg(b)$$

3) $$(c + \delta x - a)(c + \delta x - b)(c + \delta x - c) = \gamma$$
$$\delta x\,(c - a)(c - b) = \gamma$$
$$(c - a)(c - b) = \frac{\gamma}{\delta x} = tg(c)$$

Schneidet die Kurve mit d.m linken Zweig im Nullpunkt, also $a = o$, so ergiebt sich (Fig. 9,1)

$$tg(a) = bc \;;\quad tg(b) = -\,b(c - b) \;;\quad tg(c) = c(c - b)$$

daher: $$tg(b : tg(c) = -\,b : c$$

Schneidet die Kurve im Wendepunkt die X-Achse, so dass also $b - a = c - b$, so folgt (Fig. 9,2):

$tg(a) = (c - a)(c - b)$ ; $tg(b) = -\,(b - a)^2$ ; $tg(c) = (c - a)(c - b) = tg(a)$.

Schneidet die Kurve mit dem Wendepunkt im Nullpunkt, so ist $b = o$, $a = -\,c$, daher (Fig 9,3):

$$tg(a) = 2a^2 \;;\quad tg(b) = -\,a^2 \;;\quad tg(c) = 2a^2.$$

Berührt die Kurve die X-Achse, so dass z. B. $a = b$, so folgt (Fig. 9,4):

$$tg(c) = (c - a)^2 \quad \text{etc.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

# Schlussbemerkung.

Da jede Kurve, wenn man ihrem Verlauf entlang geht, nur je längs des Elements eine bestimmte konstante Richtung hat, um sie sofort, nach dem soeben eingeschlagen, in verschwindender Ablenkung zu verlassen, so kann die Verfolgung der Kurve von Punkt zu Punkt nicht anders als in der Weise geschehen, dass man ihr Bahngesetz in Bezug auf diese verschwindend kleinen Intervalle aufsucht. Geht man also längs der X-Achse jeweils nur um jene Strecke $\delta x$ weiter, der ein gerades Kurvenelement $\delta s$ entspricht, so gelten unter Zuziehung der Ordinatenzunahme $\delta y$ in absoluter Schärfe die Gleichungen:

$$(\delta s)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 \quad ; \quad \frac{\delta y}{\delta x} = tg(x) \quad ; \quad \frac{\delta y}{\delta s} = \sin(x) \quad ; \quad \frac{\delta x}{\delta s} = \cos(x),$$

wo die Bedeutung z. B. für tg(x) festzuhalten ist: trigonometrische Tangente der Kurvenrichtung an der Achsenstelle x.

Nun ergaben sich aus den Bildungsgesetzen der arithmetischen Kurven 2. und 3. Ordnung:

$$y = ax^2 \quad ; \quad y = ax^3$$

Die beiden ersten Differenzialquotienten oder Derivationen:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2ax \quad ; \quad \frac{\delta y}{\delta x} = 3ax^2$$

Diese Funktionen geben nach Form und Wert die Steigung der Kurven für jeden Achsenpunkt. Sie wurden, da die Bildungsfunktion statt mit y auch mit A bezeichnet wurde, durch das Symbol B festgehalten, daher $\delta A = B\delta x$. Man kann diese Gleichungen auch schreiben in der Form:

$$\delta y = 2ax\delta x \quad ; \quad \delta y = 3ax^2\delta x.$$

Da nun diese Steigungen und somit auch die $\delta y$ nicht konstant sind, sondern sich stetig ändern, so kann man nach dem Unterschied der aufeinanderfolgenden $\delta y$ fragen, was wenn x und x′ auf zwei benachbarte Achsenpunkte vom Abstand $\delta x$ hinweist, in arithmetischer Form geschieht durch die Gleichungen:

$$\delta\delta y = 2ax'\delta x - 2ax\delta x \quad ; \quad \delta\delta y = 3ax'^2\delta x - 3ax^2\delta x.$$

welche sich reduciren auf:

$$\delta\delta y = 2a\delta x\delta x \quad ; \quad \delta\delta y = 6ax\delta x\delta x$$

Um die Grössenordnung, zu welcher $\delta\delta y$ gehört zu bestimmen, muss man dasselbe im Verhältniss zu jenen Grössen setzen, zu denen es im allgemeinen in endlichem Verhältniss steht, also:

$$\frac{\delta\delta y}{\delta x\delta x} = 2a \quad ; \quad \frac{\delta\delta y}{\delta x\delta x} = 6ax$$

Somit ist $\delta\delta y$ von der Ordnung der Grösse $\delta x\delta x$, welche ein Verschwindendes 2. Ordnung heisst im Vergleich zu $\delta x$, dem Verschwindenden 1. Ordnung. Das Verschwindende 2. Ordnung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

spielt neben dem erster Ordnung dieselbe Rolle, wie dieses gegenüber einer endlichen Grösse: also $\delta x \delta x$ zählt nicht neben $\delta x$, so wie $\delta x$ nicht zählt neben x. Man kann auch sagen: $\delta x$ ist unendlich mal grösser als $\delta x \delta x$.

Dieser zweite Differenzialquotient stellte nach Form und Wert die sog. Ablenkung dar und wurde festgestellt in dem Symbol C, wobei also

$$\frac{\delta B}{\delta x} = C \quad , \quad \delta B = C \delta x$$

Die Funktion 3. Ordnung lässt noch eine dritte und letzte Derivation zu, die dann die Ablenkungsänderung darstellt, während die Kurve 2. Ordnung eine konstante Ablenkung erfährt, deren Aenderung also Null ist. Demnach:

$$\begin{aligned} \delta\delta\delta y &= 6ax'\delta x\delta x - 6ax\delta x\delta x \\ &= 6a(x' - x)\,\delta x\delta x \\ &= 6a\delta x\delta x\delta x \end{aligned}$$

$$\frac{\delta\delta\delta y}{\delta x\delta x\delta x} = 6a \quad ; \quad \frac{\delta C}{\delta x} = D \quad ; \quad \delta C = D\delta x$$

womit sich die Ablenkungsänderung als ein Verschwindendes 3. Ordnung, sowie als konstant ausweist und die Natur der arithmetischen Kurve 3. Ordnung bis in ihre letzten Elemente konstatirt.

---

Wenn der Lehrer der Mathematik in den Mittelklassen des Gymnasiums oft genug in die Lage kommt, z. B. über die Bedeutung des Ausdruckes $5 \cdot 0 = 0$ zu sprechen, besonders, wenn solch' ein Ausdruck in der Form $\frac{0}{0} = \frac{5}{1}$ die denkenden Schüler geradezu nötigt um Aufklärung zu bitten über die »Unbegreiflichkeit«, dass die Null des Zählers 5 mal so gross sein soll als die Null des Nenners, da ihr mathematisches Denken geneigt ist, alle Nullen als vollständige Gleichheiten unter einen Hut zu bringen, so wird wohl nach den Erfahrungen aller Lehrer sich die Behandlung der Verhältnisse der Grössenatome an den Grenzen der Null als ein Gegenstand zeitiger und stets sich wiederholender Besprechung empfehlen. Vollends, wenn man an die zahlreichen Fälle denkt, wo Physik und Mechanik auf diese Ideen des unendlich Kleinen mit Notwendigkeit führen, weil ja das Kontinuirliche nach den Gesetzen der Kontinuität behandelt sein will, so möchten wohl einzelne Parthien des oben Behandelten als eine kaum entbehrliche Ergänzung der Gymnasialmathematik erscheinen, sei es in der gegebenen, sei es in irgend welcher anderen passenden Form. Die auferlegte Raumbeschränkung veranlasste den Verfasser, diejenigen Lehren, welche den Begriff des Integrals für die Gymnasialmathematik fruchtbar machen können, lieber in einer besonderen Programmbeilage zusammen zu fassen.

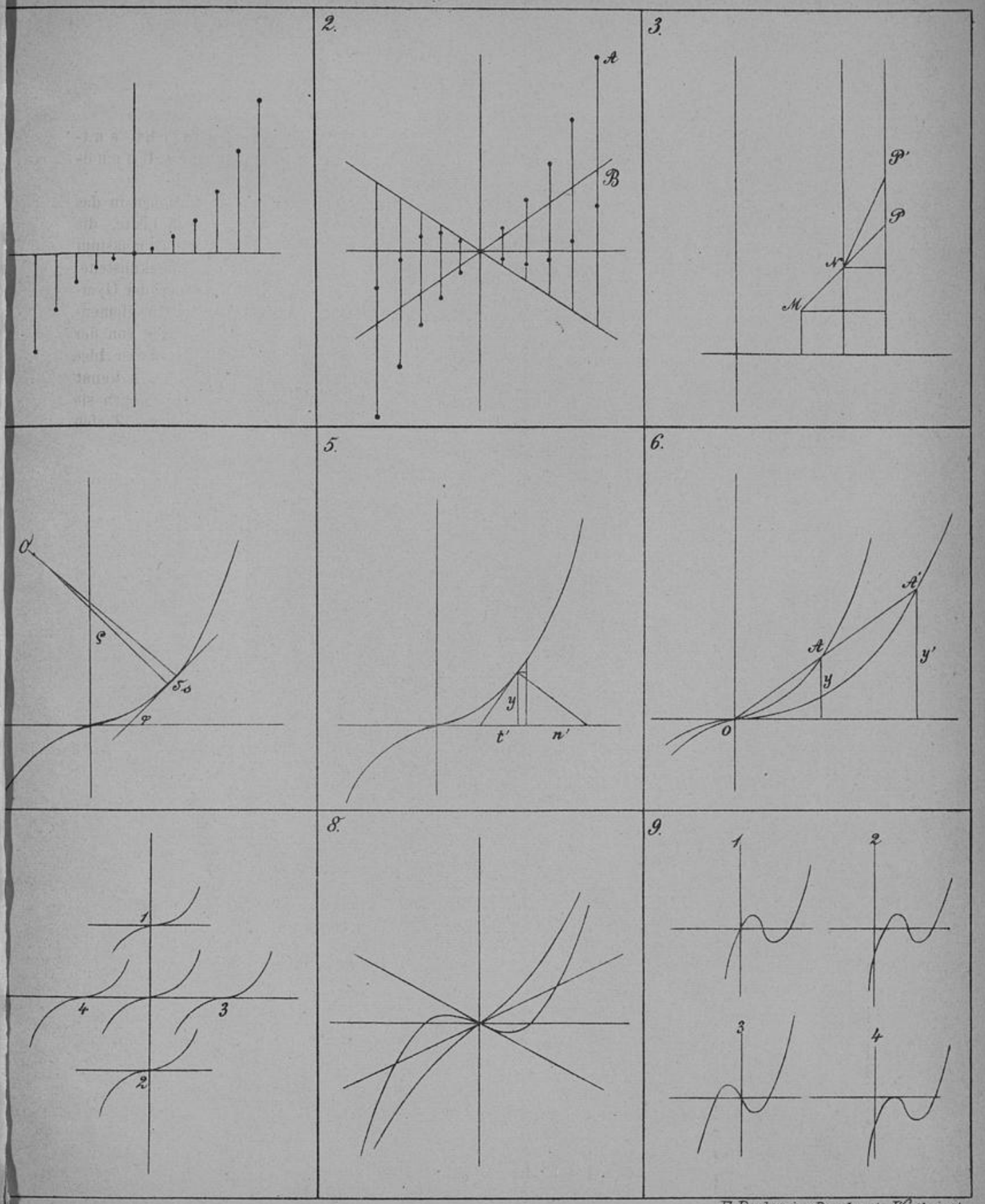
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ich wiederhole meine Anschauung:

Das Gymnasium kann und darf sich der Aufgabe nicht entziehen, die Rechnung des Stetigen unter Beiziehung des Unendlichkleinen zur vollen klaren Anschauung zu bringen.

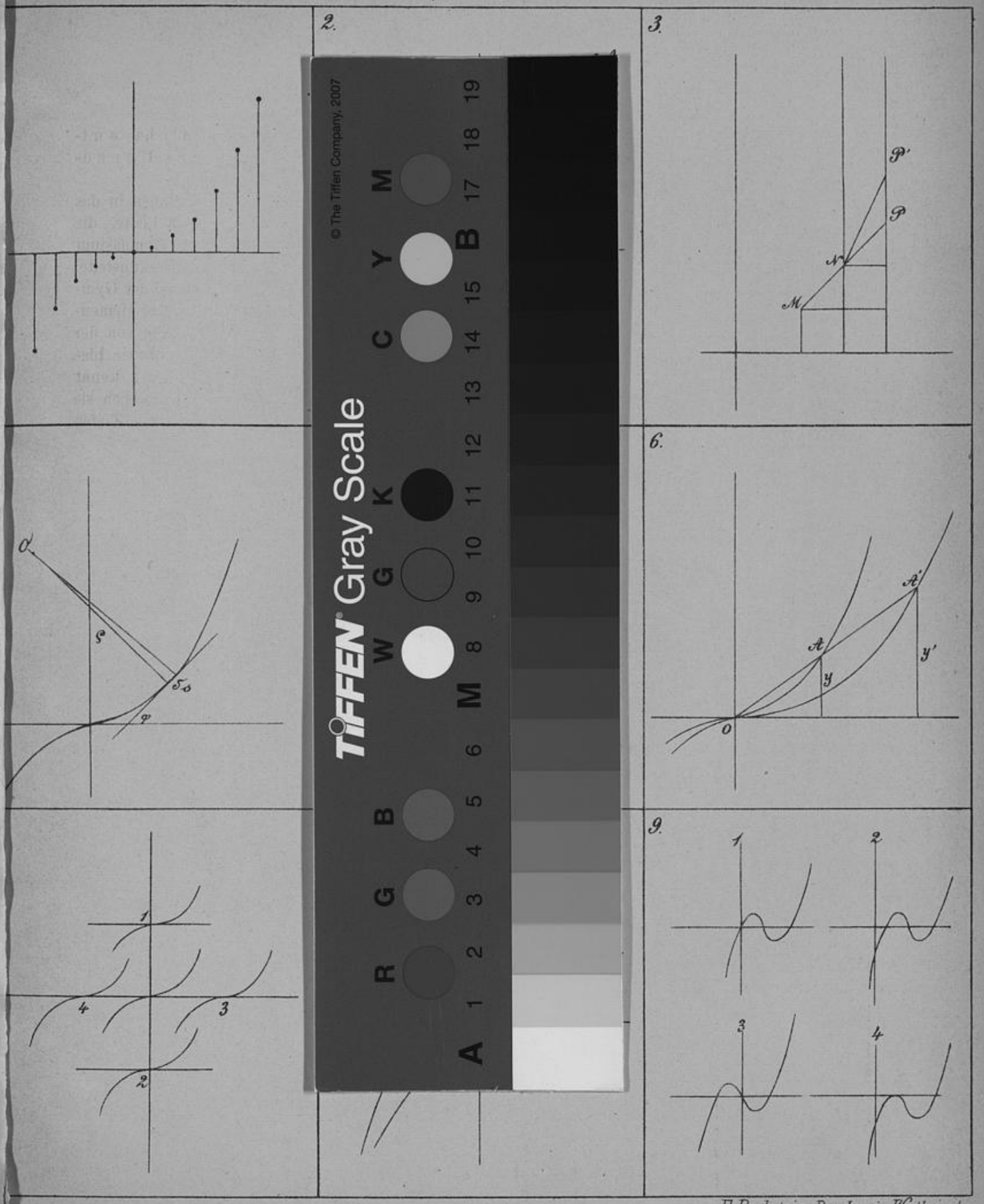
Die Entgegnung, es sei das die Heranziehung von mathematischen Spekulationen in das Gebiet der Schule, erledigt sich durch die Gegenfrage nach dem Alter der jungen Leute, die auf der technischen Hochschule Differenzialrechnung beginnen. Uebrigens dürfte das Gymnasium auch nicht vor einer Spekulation zurückschrecken, wenn diese die einzig mögliche ungekünstelte, überdies gar nicht schwierige, Auffassung von Grössenbeziehungen darstellte, denen der Gymnasialunterricht nicht ausweichen kann. Warum soll eine einfache fruchtbare Idee, welche elementarer Darstellung fähig ist, und Klarheit über elementare Probleme verbreitet, deswegen von der Schulmathematik gemieden werden, weil die weitere wissenschaftliche Ausgestaltung dieser Idee einen eigenen Zweig der sog. höheren Mathematik bildet? Eine gesunde Pädagogik kennt solche Abgrenzung nicht, denn sie weiss, dass die hier in Frage kommenden Ideen, mögen sie auch noch so hochfliegende Spekulationen zulassen, ihre feinsten Wurzeln bis in die Tiefen elementarster Anschauung herabtreiben. Sapere aude!

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf




E. Bechstein, Druckerei Wertheim.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf




E. Bechstein, Druckerei Wertheim.

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
A 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
R G B M W G K C Y B M

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf