Die arithmetischen Funktionen
der drei ersten Ordnungen.

Methodische Studie
zum Ausbau der Gymnasialmathematik

von

Professor **Wilhelm Bunkofer.**

Beilage zum Jahresbericht des Grossherzoglichen Gymnasiums Wertheim.

III. Abteilung.

Mit einer Tafel in Steindruck.

WERTHEIM a. M.

E. BECHSTEIN'S BUCH- UND STEINDRUCKEREI.

1897.

1897. PROGR. Nr. 641.

gwe 19 (1897)

641/6

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK
DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III.

Die Summirung des Verschwindendkleinen.

In den beiden ersten Abteilungen der Studie, die hiemit zum Abschluss kommen soll, wurden in Anlehnung an die Punktreihen

$$\mathfrak{R}(an + b)\ ,\quad \mathfrak{R}(an^2 + bn + c)\ ,\quad \mathfrak{R}(an^3 + bn^2 + cn + d)$$

die Kurven

$$\mathfrak{R}(ax + b)\ ,\quad \mathfrak{R}(ax^2 + bx + c)\ ,\quad \mathfrak{R}(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

betrachtet, mit Rücksicht auf die Bedeutung der einzelnen Koeffizienten und die Variation der Kurve bei Aenderung dieser Koeffizienten. Die Beiziehung der Begriffe des Differenzials und des Differenzialquotienten der drei ersten Ordnungen ermöglichten die Verfolgung der Kurve von Punkt zu Punkt und die Lösung von Aufgaben über Steigung, Gefälle, Maxima, Minima, Art der Ablenkung, Grad der Krümmung in elementarer, anschaulicher Weise, die auch dem mässig begabten Schüler leicht zum Verständnis gebracht werden kann. Zugleich wird der Unterricht nicht verfehlen, die mit dem Begriff der Kontinuität so enge zusammenhängende Thatsache einzuprägen, dass die aufeinanderfolgenden Potenzen des verschwindend Kleinen $(\delta x)^1$, $(\delta x)^2$, $(\delta x)^3$, so wie die Symbole $\delta\delta y$. $\delta\delta\delta y$ Grössenwerte darstellen, von denen jeder neben dem vorausgehenden verschwindet, so dass das Denken des Schülers gezwungen wird, sich vertraut zu machen mit der Idee von verschiedenen Stufen des Verschwindendkleinen, wodurch ja die weiche Biegung der Kurve gleichsam arithmetisch gezeichnet ist. Erscheinen doch die Glieder, welche die höheren Potenzen von δx enthalten, zusammen als der Reservefond für den Fall, dass dieses δx im Widerspruch mit seinem Begriff, statt als verschwindend, bloss als sehr klein behandelt wird.

Der vorliegende 3. Teil unsererer Studie nimmt die stetige arithmetische Funktion der drei ersten Ordnungen wieder auf, jetzt aber unter anderen Gesichtspunkten. Die auftauchenden und zu lösenden Fragen verlangen die Herstellung der Summen der natürlichen Zahlen und ihrer Potenzen von $n = 1$ bis $n = \infty$. welchem Bedürfnisse wir unter Beschränkung auf die drei ersten Potenzen die Form geben:

$$\mathfrak{S}n\ ;\qquad \mathfrak{S}n^2\ ;\qquad \mathfrak{S}n^3$$

wo der Buchstabe $\mathfrak{S}$ die Fortsetzung des Wertes von n bis ins Unendliche verlangen soll. Der unendliche Wert von n soll aber bezeichnet werden durch ω und dabei die wesentliche Voraussetzung gemacht sein, dass $\omega\delta$ einen endlichen Wert z. B. b habe, also δ verschwindend klein sei.

Bei dem Uebergang zum »Unendlichen« ist klar, dass der Begriff einer noch innerhalb des Vor- und Darstellbaren liegenden unermesslich grossen Zahl genügt, deren wesentliches Merkmal in dem Symbol ausgesprochen ist: $\omega = \omega + 1 = \omega + 2 = \omega + 3$ etc. Metaphysische Grübeleien über das »Unendliche«, die nur den Zweck haben, verblüffende Sophismen aufzustellen, sind abzuweisen. Der Schüler soll lernen, die logisch zwingenden Konsequenzen eines Gedankens gewissenhaft auszusprechen, und formell zu fixiren. Es gehört zur ethischen Seite des Intellektus, das auf korrekt logischem Wege Gewonnene festzuhalten und nicht durch Kokettieren mit dem Geist der Verneinung glänzen zu wollen. Da nun für endliche Werte von n:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}; \qquad \Sigma n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1); \qquad \Sigma n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{1}\right)^2$$

so erhält man augenscheinlich für $n = \omega$ die drei Werte:

$$\mathfrak{S} n = \frac{1}{2}\omega^2; \qquad \mathfrak{S} n^2 = \frac{1}{3}\omega^3; \qquad \mathfrak{S} n^3 = \frac{1}{4}\omega^4$$

Diese durchweg unendlichen Werte sind in dieser Form nicht direkt verwendbar, werden aber in das Gebiet des Endlichen herabgezogen durch Beachtung der Vorschrift, dass $\omega\delta = b$. Multiplizirt man also die erste Gleichung mit δ^2, die zweite mit δ^3, die dritte mit δ^4, so gestalten sie sich, weil $(\omega\delta)^2 = b^2$, $(\omega\delta)^4 = b^4$, um in:

$$\mathfrak{S} n\delta^2 = \frac{b^2}{2}; \qquad \mathfrak{S} n^2\delta^3 = \frac{b^3}{3}; \qquad \mathfrak{S} n^3\delta^4 = \frac{b^4}{4}$$

der Exponent von δ ist immer um eine Einheit höher als der von n.

Also um dieser Formeln willen wurden die Summen $\mathfrak{S}$ eingeführt, die, wie erwähnt, sonst unfruchtbar wären. Diese Formeln sind dem eisernen Bestand im Gedächtnis des Schülers zu übergeben.

Es empfiehlt sich aber, diese Summen nach ihrem Sinn näher zu studieren und umzugestalten.

Zunächst zeigt der Anblick der Reihe

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} n\delta^2 &= 1\delta^2 + 2\delta^2 + 3\delta^2 + 4\delta^2 + \quad \ldots\ldots \quad \omega\delta^2 \\ &= 1\delta^2 + 2\delta^2 + 3\delta^2 + 4\delta^2 + \quad \ldots\ldots \quad b\delta \end{aligned}$$

dass dieselbe mit verschwindenden Gliedern der 2. Stufe beginnt und in verschwindende Glieder der 1. Stufe ausläuft. Die Reihe

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} n^2\delta^3 &= 1^2\delta^3 + 2^2\delta^3 + 3^2\delta^3 + 4^2\delta^3 + \quad \ldots \quad \omega^2\delta^3 \\ &= 1^2\delta^3 + 2^2\delta^3 + 3^2\delta^3 + 4^2\delta^3 + \quad \ldots \quad b^2\delta \end{aligned}$$

beginnt mit verschwindenden Gliedern der 3. Stufe und läuft in verschwindende Glieder der 1. Stufe aus. Endlich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} n^3\delta^4 &= 1^3\delta^4 + 2^3\delta^4 + 3^3\delta^4 + 4^3\delta^4 + \quad \ldots\ldots \quad \omega^3\delta^4 \\ &= 1^3\delta^4 + 2^3\delta^4 + 3^3\delta^4 + 4^3\delta^4 + \quad \ldots\ldots \quad b^3\delta \end{aligned}$$

Diese Reihe beginnt mit verschwindenden Gliedern der 4. Stufe und läuft ebenfalls in verschwindende Glieder der 1. Stufe aus.

Man kann übrigens jedes Glied der Reihe wie das letzte Glied behandeln, z. B. $n^3\delta^4$ ersetzen durch $(n\delta)^3\delta$. Bezeichnet man nun $n\delta$ mit x, wo also x alle Werte annimmt, die $n\delta$ annimmt, indem n von 1 bis ∞ geht, so kann man, wenn $x_1\ x_2\ x_3 \ldots$ diese Werte darstellen, obige drei Gleichungen auch so schreiben:

$$\mathfrak{S}_0^b x\delta = x_1\delta + x_2\delta + x_3\delta + \ldots\ldots b\delta = \frac{1}{2}b^2$$

$$\mathfrak{S}_0^b x^2\delta = x^2_1\delta + x^2_2\delta + x^2_3\delta + \quad \ldots \quad b^2\delta = \frac{1}{3}b^3$$

$$\mathfrak{S}_0^b x^3\delta = x^3_1\delta + x^3_2\delta + x^3_3\delta + \ldots\ldots b^3\delta = \frac{1}{4}b^4$$

wobei die untere Grenze als Null angenommen wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man nennt solche Summen von lauter verschwindenden Summanden Integrale; die Glieder sind Differenziale, dabei ist also b das Gebiet, welches x von Null aus durchläuft. Beginnt es aber seinen Lauf mit $a < b$ und geht bis b, so drückt man diese Summen z. B. für x^2 durch das Symbol $\mathfrak{S}_a^b x^2 \delta$ aus und hat augenscheinlich die drei Werte:

$$\mathfrak{S}_a^b x\delta = \mathfrak{S}_o^b x\delta - \mathfrak{S}_o^a x\delta = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$\mathfrak{S}_a^b x^2\delta = \mathfrak{S}_o^b x\delta - \mathfrak{S}_o^a x^2\delta = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

$$\mathfrak{S}_a^b x^3\delta = \mathfrak{S}_o^b x^3\delta - \mathfrak{S}_o^a x^2\delta = \frac{1}{4}(b^4 - a^4)$$

Auch diese Formen lassen eine Umgestaltung zu, indem man beachtet, dass $b - a = \omega\delta$, also $\delta = \frac{b - a}{\omega}$, und dass der Ausdruck $\frac{\mathfrak{S}}{\omega}$ das Symbol $\mathfrak{M}$ des Mittelwertes ist. Also z. B.

$$\mathfrak{S}_a^b x\delta = \delta\mathfrak{S}_a^b x = (b - a)\frac{\mathfrak{S}_a^b x}{\omega} = (b - a)\,\mathfrak{M}_a^b x$$

daher:

$$(b - a)\,\mathfrak{M}_a^b x = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$(b - a)\,\mathfrak{M}_a^b x^2 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

$$(b - a)\,\mathfrak{M}_a^b x^3 = \frac{1}{4}(b^4 - a^4)$$

welche Gleichungen durch Division mit (b—a) übergehen in:

$$\mathfrak{M}_a^b x = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{1}{2}(a + b)$$

$$\mathfrak{M}_a^b x^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{b^3 - a^3}{b - a} = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

$$\mathfrak{M}_a^b x^3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{b^4 - a^4}{b - a} = \frac{1}{4}(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

Also für $a = o$:

$$\mathfrak{M}_o^b x = \frac{1}{2}b \qquad \mathfrak{M}_o^b x^2 = \frac{1}{3}b^2 \qquad \mathfrak{M}_b^o x^3 = \frac{1}{4}b^3$$

Sinn dieser drei letzten Gleichungen:

1) Jede einfache Grösse, die, von Null ausgehend, stetig gleichmässig zunimmt, hat zum Mittelwert aller der unendlich vielen von ihr durchlaufenen Werte die Hälfte ihres Endwertes.

2) Jede quadratische Grösse, die von Null ausgehend, stetig zunimmt, indem ihre Basis gleichmässig zunimmt, hat zum Mittelwert aller der unendlich vielen von ihr durchlaufenen Werte ein Drittel ihres Endwertes.

3) Jede kubische Grösse, die, von Null ausgehend, stetig zunimmt, indem ihre Basis gleichmässig zunimmt, hat zum Mittelwert aller der unendlich vielen von ihr durchlaufenen Werte ein Viertel ihres Endwertes.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da ferner, wenn die veränderliche Grösse in allgemeinster Form einer arithmetischen Funktion auftritt, eine Zerfällung stattfindet, z. B.:

$$\mathfrak{M}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = a\mathfrak{M}x^3 + b\mathfrak{M}x^2 + c\mathfrak{M}x + d$$

so bedürfen dergleichen allgemeinste Fälle keiner besonderen Behandlung. Auch für die zwei ersten Darstellungsformen ergiebt sich eine entsprechende Zerfällung in einfache Formen wie oben. Z. B.:

$$\mathfrak{S}(ax^3 + bx^2 + cx + d)\delta = a\mathfrak{S}x^3\delta + b\mathfrak{S}x^2\delta + c\mathfrak{S}x\delta + d\mathfrak{S}\delta$$

$$\mathfrak{S}(ax^3 + bx^2 + cx + d)\delta = a\mathfrak{S}n^3\delta^4 + b\mathfrak{S}n^2\delta^3 + c\mathfrak{S}n\delta^2 + d\mathfrak{S}\delta$$

Wenn man die drei Darstellungsweisen ins Auge fasst:

$$\mathfrak{S}n^2\delta^3\ ; \quad \mathfrak{S}x^2\delta\ ; \quad \mathfrak{M}x^2$$

so wird sich bei den Anwendungen je für die eine oder die andere eine Empfehlung finden. Die erste Form entstand aus der Absicht, die hier behandelten Sätze dem Pensum der Prima organisch einzuverleiben, das die Theorie der arithmetischen und geometrischen Reihen vorschreibt und bezüglich der ersteren eine bestimmte Begrenzung nicht enthält. Somit kann die im Symbol $\mathfrak{S}n^p\delta^{p+1}$ angedeutete Aufgabe unbedenklich dem Pensum der Prima zugesprochen werden. Die zweite oder dritte Form sind blosse Umgestaltungen der ersten. Die zweite kann bekanntlich mit Umgehung der ersten elementar abgeleitet werden unter Benützung der Gleichungen:

$$x_1^{p+1} = (a + \delta)^{p+1} = a^{p+1} + (p + 1)\, a^p\delta$$

$$x_2^{p+1} = (x_1 + \delta)^{p+1} = x_1^{p+1} + (p + 1)\, x_1^p\, \delta$$

$$x_3^{p+1} = (x + \delta)^{p+1} = x_2^{p+1} + (p + 1)\, x_2^p\delta \qquad \text{etc.}$$

welche durch Addition zu dem Resultat führen:

$$\mathfrak{S}_0^b x^p\, \delta = \frac{b^{p+1}}{p+1}$$

welche Form mit Beachtung von $b = \omega\delta$ in die zwei anderen umgesetzt werden kann.

Die pädagogische Rücksicht auf konsequente Durchführung eines bestimmten Gedankenganges an verschiedenen Beispielen lässt die Beschränkung auf bloss eine der Formen empfehlenswert erscheinen. In den nun folgenden Uebungen zur Anwendung der behandelten Theorie mögen aber alle drei Formen ihre Berücksichtigung finden, und tüchtigere Schüler werden für Bearbeitung einer Aufgabe von verschiedenen Gesichtspunkten immer ein dankbares Verständnis zeigen.

Falls man die allgemeine Formel $\mathfrak{S}n^p\delta^{p+1}$ im Anschlusse an die Potenzreihen entwickeln will, kann man, ausgehend von der Gruppe:

$$\begin{aligned}
1^3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \\
2^3 &= (1 + 1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\
3^3 &= (2 + 1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\
4^3 &= (3 + 1)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\
5^3 &= (4 + 1)^3 = 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1 \\
&\ \vdots \\
(n+1)^3 &= n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \\
\hline
(n+1)^3 &= \qquad 3\Sigma n^2 + 3\Sigma n + n + 1
\end{aligned}$$

ohne weiteres Hinzufügen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(n+1)^4 = 4\Sigma n^3 + \binom{4}{2}\Sigma n^2 + \binom{4}{3}\Sigma n + n + 1$$
$$(n+1)^5 = 5\Sigma n^4 + \binom{5}{2}\Sigma n^3 + \binom{5}{3}\Sigma n^2 + \binom{5}{4}\Sigma n + n + 1$$
$$(n+1)^{p+1} = (p+1)\Sigma n^p + \binom{p+1}{2}\Sigma n^{p-1} + \binom{p+1}{2}\Sigma n^{p-2} + \ldots$$

Lässt man n ins Unendliche gehen, so gehen diese Gleichungen über in:

$$\omega^4 = 4\mathfrak{S}n^3 + \binom{4}{2}\mathfrak{S}n^2 + \binom{4}{3}\mathfrak{S}n + \omega$$
$$\omega^5 = 5\mathfrak{S}n^4 + \binom{5}{2}\mathfrak{S}n^3 + \binom{5}{3}\mathfrak{S}n^2 + \binom{5}{4}\mathfrak{S}n + \omega$$
$$\omega^{p+1} = (p+1)\mathfrak{S}n^p + \binom{p+1}{2}\mathfrak{S}n^{p-1} + \binom{p+1}{3}\mathfrak{S}n^{p-2} + \binom{p+1}{4}\mathfrak{S}n^{p-3} +$$

Multiplizirt man diese drei Gleichungen der Reihe nach mit δ^4, δ^5, δ^{p+1} und setzt $\omega\delta = b$ so ziehen sie sich, weil rechts die Glieder vom zweiten an verschwinden, zusammen in:

$$b^4 = 4\mathfrak{S}n^3\delta^4 \; ; \quad b^5 = 5\mathfrak{S}n^4\delta^5 \; ; \quad b^{p+1} = (p+1)\,\mathfrak{S}n^p\delta^{p+1}$$

Uebrigens geht aus der Gleichung:

$$\omega^4 = 4\mathfrak{S}n^3 + 6\mathfrak{S}n^2 + 4\mathfrak{S}n + \omega$$

weil $\mathfrak{S}n^2 = \frac{\omega^3}{3}$; $\mathfrak{S}n = \frac{\omega^2}{2}$, durch Einsetzung dieser Werte die umgestaltete Form hervor

$$\omega^4 = 4\mathfrak{S}n^3 + 2\omega^3 + 2\omega^2 + \omega$$

in welcher neben ω^4 die Glieder mit niederen Potenzen von ω wegzulassen sind — trotz ihres an sich unendlichen Wertes, so dass aus der übrig bleibenden Gleichung $\omega^4 = 4\mathfrak{S}n^3$ folgt: $\mathfrak{S}n^3 = \frac{\omega^4}{4}$ welcher Wert in der Gleichung für ω^5 benützt den Wert von $\mathfrak{S}n^4$ liefert u. s. w.

Es ist entschieden eine für wahrhaft lernbegierige Schüler wertvolle Unterbrechung des schablonenmässigen Rechnens, wenn denselben zwischen hinein die Gelegenheit zu einer mehr philosophisch mathemathischen Geistesarbeit geboten wird in der konsequenten Verfolgung neuer Ideen, die der Elementarmathematik nicht fremd sind, sondern im Gegentheil deren letzte feinste Verzweigungen darstellen. Sollten sich dabei einmal gelegentlich die schwächeren Schüler langweilen, so möge man bedenken, wie viel grössere Opfer die besseren Schüler fast das ganze Jahr hindurch ihnen bringen durch geduldiges oder widerwilliges Ausharren in der Tretmühle die sie selbst nicht nötig hätten.

Anwendungen.

Uebung 1. Die Strecke OB = b sei in ω gleiche Elemente δ zerlegt, also $b = \omega\delta$; $\delta = \frac{b}{\omega}$. Nach jedem Teilpunkt denke man einen Vektor von O aus gezogen. Man soll das arithmetische Mittel $\mathfrak{M}$ dieser Vektoren bestimmen.

Lösung: Die Vektoren sind der Reihe nach 1δ, 2δ, 3δ . . . $\omega\delta$ daher:

$$\mathfrak{M} = \frac{1\delta + 2\delta + 3\delta + \ldots \omega\delta}{\omega}$$

a) Um die Lösung auf die erste Form zu bringen, gestalte man durch Multiplikation mit δ in Zähler und Nenner um in:

$$\mathfrak{M} = \frac{1\delta^2 + 2\delta^2 + 3\delta^2 + \ldots \omega\delta^2}{\omega\delta} = \frac{1}{b}\mathfrak{S}n\delta^2 = \frac{1}{b}\cdot\frac{b^2}{2} = \frac{b}{2}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) Nach der zweiten Fassung hat man:

$$\mathfrak{M} = \frac{1\delta + 2\delta + 3\delta + \ldots \omega\delta}{\omega}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots b}{\omega}$$

$$= \frac{x_1\delta + x_2\delta + x_3\delta + \ldots b\delta}{\omega\delta} = \frac{1}{b}\mathfrak{S}_0^b x\delta = \frac{1}{b}\cdot\frac{b^2}{2} = \frac{b}{2}$$

c) Für die dritte Fassung:

$$\mathfrak{M} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots b}{\omega} = \mathfrak{M}_0^b x = \frac{b}{2}$$

Es ist also der Vektor von O nach dem Mittelpunkt von OB der gesuchte Mittelvektor. Geometrische Veranschaulichung.

Man denke (Fig. 1) in jedem Teilpunkt den dahin gehenden Vektor als Ordinate y errichtet. Die Verbindungslinie OC der Endpunkte sämmtlicher Ordinaten ist eine Gerade, die unter 45^0 zu OB geneigt ist. Da nun stets $x = y$, so ist auch immer $x\delta = y\delta$, d. h. das Element $x\delta$ ist identisch mit $y\delta$, d. h. stellt den Elementarstreif $y\delta$ dar, folglich ist der Ausdruck $\mathfrak{S}x\delta$ ersetzbar durch $\mathfrak{S}y\delta$ und stellt demnach dar die Gesammtheit aller Elementarstreifen, so weit die Summe reicht, d. h. die Fläche des Dreiecks OBC.

Entsprechend ist also auch $\mathfrak{M}x = \mathfrak{M}y$, d. h. ist die Mittelordinate aller auf OB stehenden Ordinaten zu OC, also $MN = \frac{1}{2}BC$.

Zusatz. Liegt auf OB der Punkt A (Fig. 2) und will man das arithmetische Mittel der Vektoren, die zu sämmtlichen Punkten der Strecke AB gehen, so ist die Strecke $AB = b - a$ in ω Elemente δ zu zerlegen. Man geht in diesem Falle am einfachsten von der dritten Fassung aus:

$$\mathfrak{M}_a^b x = \frac{a + b}{2},$$

also der Vektor zum Mittelpunkt Q von AB, daher $\mathfrak{M}y = PQ$.

Bemerkung. Diese geometrische Veranschaulichung ist von ganz besonderem pädagogischem Werth. Sie lässt dem Schüler klar werden, dass das sog. Unendliche nicht anders aufzufassen sei, denn als eine Grösse, die jede gewählte Grenze überschreitet; zugleich, dass die Elemente der Summe $\mathfrak{S}$ keineswegs Nullen sind, obgleich als »verschwindend« bezeichnet; dass es aber trotzdem logisch nicht bloss erlaubt, sondern nothwendig ist, das Verschwindende neben einer endlichen Grösse zu vernachlässigen, so dass $a = a + \delta = a + 2\delta \ldots$, eben so wie $\omega = \omega + 1 = \omega + 2$ etc.

Uebung 2. Man soll unter den gleichen Voraussetzungen wie bei Uebung 1 das arithmetische Mittel der Vektorenquadrate bestimmen.

Lösung:

Fassung 1.

$$\mathfrak{M} = \frac{(1\delta)^2 + (2\delta)^2 + (3\delta)^2 + \ldots (\omega\delta)^2}{\omega}$$

$$= \frac{(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots \omega^2)\delta^3}{\omega\delta}$$

$$= \frac{1}{b}\mathfrak{S}n^2\delta^3 = \frac{1}{b}\cdot\frac{b^3}{3} = \frac{b^2}{3}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fassung 2. $$\mathfrak{M} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots b_2}{\omega}$$

$$= \frac{x_1^2\delta + x_2^2\delta + x_3^2\delta + \ldots b^2\delta}{\omega\delta}$$

$$= \frac{1}{b}\mathfrak{S}_0^b x^2\delta = \frac{1}{b}\cdot\frac{b^3}{3} = \frac{b^2}{3}$$

Fassung 3. $$\mathfrak{M} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots b^3}{\omega}$$

$$= \mathfrak{M}_0^b x^2 = \frac{b^2}{3}$$

Geometrische Veranschaulichung. Man denke (Fig. 3) in jedem Teilqunkt als Ordinate den Grössenwert des Quadrates des dahin gehenden Vektors errichtet, d. h. man konstruire die Kurve $y = x^2$. Analog wie bei der ersten Aufgabe ist dann das Element $x^2\delta = y\delta$ also ein elementarer Flächenstreif und $\mathfrak{S}_0^b x^2\delta$ die Fläche OBC. Da also $\mathfrak{M}_0^b x^2 = \frac{b^2}{3}$, so ist, wenn man jenes gesuchte mittlere x^2 mit x'^2 bezeichnet, $x' = \sqrt{b\cdot\frac{b}{3}} = OQ$. Da nun in dieser Figur $\mathfrak{M}x^2 = \mathfrak{M}y$, so ist die Ordinate in Q zugleich die Mittelordinate der Fläche OBC, diese also $= OB\,.\,PQ$.

Beginnen aber (Fig. 4) die Vektoren mit dem Vektor $OA = a$ und gehen zu den Teilpunkten von $AB = b - a = \omega\delta$, so ist $\mathfrak{M}_a^b x^2 = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$, also wenn das gesuchte mittlere x^2 mit x'^2 bezeichnet:

$$x' = \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)}$$

Legt man nun die Strecke $a = OA = BE$ unter 120^0 an $b = OB$, so ist das Quadrat der Seite OE des Dreiecks OBE gleich $a^2 + ab + b^2$ und man hat nun

$$x' = \sqrt{c\cdot\frac{c}{3}}$$

also OF. Trägt man OF von O aus an OB $ab = OQ$, so ist die Ordinate PQ in Q die Mittelordinate über AB für die Fläche ABCD, welche dargestellt ist durch die Formel $\mathfrak{S}_a^b x^2\delta = (b-a)\,\mathfrak{M}y$

Uebung 3. In dem Rechtecke ab (Fig. 5) sei $a = n\lambda$, $b = m\lambda$, so liegen an der Basis a n Quadrate der Grösse λ^2 und solcher Quadratstreifen liegen m übereinander, daher ist die Fläche des Rechtecks $= mn\lambda^2 = m\lambda\cdot n\lambda = ba$. Ist also $a = \omega\delta$, $b = \omega,\delta$, so ist die Fläche analog $F = \omega\cdot\omega'\delta^2 = \omega\delta\cdot\omega'\delta = ab$. Da der Inhalt der einzelnen Parallelstreifen zu a sich nicht ändert durch seitliche Verschiebung, so könnten sich diese Streifen statt an b an eine beliebige Linie K anlehnen.

Uebung 4. Enthält (Fig. 6) jeder folgende Parallelstreif ein Quadrat weniger, — der Streif der Basis enthalte n Quadrate — und liegen n solcher Streifen über einander, so ist der Inhalt dieser treppenförmigen Figur

$$F = n\lambda^2 + (n-1)\lambda^2 + (n-2)\lambda^2 + \ldots + 3\lambda^2 + 2\lambda^2 + 1\lambda^2$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Also $F = \Sigma n\lambda^2 = \frac{n(n+1)}{2}\lambda^2$ also für $a = \omega\delta$, wodurch die Treppenfigur in ein Dreieck übergeht,

$$F = \Sigma n\delta^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}a \cdot a$$

Dabei kann wieder eine beliebige seitliche Verschiebung stattfinden. Vergleiche (Fig. 6) die Formen aC, aC′, aC″.

Uebung 5. In dem rechtwinkligen Parallelflach abc sei die Kante $a = n\lambda$, $b = m\lambda$, $c = r\lambda$, so liegen auf der Basis mn Würfel λ^3. Solcher Würfelschichten liegen r aufeinander. Das Volumen beträgt somit $mnr\lambda^3 = m\lambda \cdot n\lambda \cdot r\lambda = abc$. Ist also $a = \omega\delta$, $b = \omega'\delta$, $c = \omega''\delta$, so ist das Volumen analog $= \omega\omega'\omega''\delta^3 = \omega\delta \cdot \omega'\delta \cdot \omega''\delta = abc$. Auch hier würde die seitliche Verschiebung am Volumengehalt nichts ändern, ja es könnte sich der Verschiebung sogar eine stetige Drehung von Schichte zu Schichte zugesellen und so eine gewundene Säule erzeugen.

Uebung 6. Enthält zu einer quadratischen Würfelschicht jede folgende Würfelschicht an der Schichtseite immer einen Würfel weniger (Fig. 7), so ist

$$V = n^2\lambda^3 + (n-1)^2\lambda^3 + (n-2)^2\lambda^3 + 3^2\lambda^3 + 2^2\lambda^3 + 1^2\lambda^3,$$

also $V = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\lambda^3$, daher für verschwindend kleine Würfel, also für die Kante a der untersten Schicht: $a = \omega\delta$ statt $n\lambda$:

$$V = \Sigma n^2\delta^3 = \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}a^2 \cdot a$$

Also die treppenförmige Pyramide geht über in eine Quadratpyramide von der Basis a^2 und der Höhe a.

Uebung 7. Die Basis sei eine dreieckige Würfelschicht. Es sei n die Anzahl der Würfel λ^3 an der vorderen Seite $a = n\lambda$ der Basis, so ist die Anzahl der Würfel an der Basisschicht $\frac{n(n+1)}{2}$ Wird nun n von Schichte zu Schichte um 1 kleiner, so ist das Gesamtvolumen der dreiseitigen Würfelpyramide:

$$V = \Sigma\frac{n(n+1)}{2} \cdot \lambda^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \cdot \lambda^3$$

für verschwindend kleine Würfel, also für $a = \omega\delta$ statt $n\lambda$ geht diese Formel über in

$$V = \frac{\omega(\omega+1)(\omega+2)\delta^3}{6} = \frac{1}{6}\omega^3\delta^3 = \frac{1}{6}(\omega\delta)^3$$

$$= \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot a}{2} \cdot a,$$

die bekannte Pyramidenformel.

Auch bei diesen Pyramidenformen ist eine seitliche Verschiebung von Schichte zu Schichte mit und ohne stetige Drehung ohne Einfluss auf das Volumen. (Cavalerisches Prinzip.)

Uebung 8. Die quadratische Basis bestehe aus n^2 rechtwinkligen Parallelepipeden $\alpha\beta\gamma$. In jeder folgenden Schicht nehmen n um 1 ab, so ist das Volumen:

$$V = 1^2\alpha\beta\gamma + 2^2\alpha\beta\gamma + 3^2\alpha\beta\gamma + \ldots\ldots n^2\alpha\beta\gamma$$

$$= \Sigma n^2\alpha\beta\gamma = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\alpha\beta\gamma$$

für verschwindend kleine $\alpha\beta\gamma$, indem die Basiskante $a = \omega\delta$ statt $n\alpha$; $b = \omega\delta'$ statt $n\beta$, $c = \omega\delta''$ statt $n\gamma$, ωobei $\alpha : \beta : \gamma = \delta : \delta' : \delta''$, so ist das Volumen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$V = \frac{1}{6}\omega(\omega + 1)(2\omega + 1)\,\delta\delta'\delta''$$

$$\frac{1}{3}\omega^3\delta\delta'\delta'' = \frac{1}{3}\omega\delta \,.\, \omega\delta' \,.\, \omega\delta'' = \frac{1}{3}\,a\,b \cdot c$$

Also wieder die Pyramidentormel. Zulässigkeit der Seitenverschiebung wie oben.

Uebung 9. Ein beliebiger Kegel habe die Basis B und die Höhe h: man soll das Volumen durch Summation der zur Basis parallelen Elementarschichten bestimmen.

Es sei $h = \omega\delta$. Man lege in der Entfernung x von der Spitze einen Parallelschnitt zur Basis; er heisse φ_x. Der Parallelschnitt in der Entfernung 1 von der Spitze sei φ. Die auf φ_x ruhende Elementarschicht ist also $\varphi_x\delta$ oder $= \varphi \cdot x^2\delta$, somit das Gesamtvolumen:

$$V = \mathfrak{S}\varphi \cdot x^2\delta = \varphi\mathfrak{S}n^2\delta^3 = \varphi \cdot \frac{h^3}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\varphi h^2 \cdot h = \frac{1}{3}Bh.$$

Uebung 10. Das Volumen des Kegelstumpfes mit den Parallelflächen A und B und der Höhe h' ergiebt sich in gleicher Weise für $h' = \omega\delta$. Man ergänze den Stumpf zum Kegel, dessen Höhe H, während die Höhe des Ergänzungskegels $= h$. Wählt man für diesen Fall die Form des Mittelwertes, so ist:

$$V = \mathfrak{S}\varphi x^2\delta = \varphi h'\mathfrak{M}_h^H x^2 = \varphi h' \cdot \frac{1}{3}\left\{H^2 + Hh + h^2\right\}$$

$$= \frac{h'}{3}\left\{H^2\varphi + \sqrt{H^2\varphi} \cdot \sqrt{h^2\varphi} + h^2\varphi\right\} = \frac{h'}{3}\left\{A + \sqrt{AB} + B\right\}$$

Uebung 11. Das Volumen der Kugel durch Summation der konzentrischen Elementarschalen ergiebt sich analog wie bei der Pyramide. Eine konzentrische Kugel vom Radius x hat die Oberfläche $4x^2\pi$. Die zugehörige Elementarschale ist $4x^2\pi\delta$, daher das Gesamtvolumen:

$$V = 4\pi\,\mathfrak{S}_0^r x^2\delta = 4\pi r\mathfrak{M}_0^r x^2 = 4\pi r \,.\, \frac{r^2}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Uebung 12. Das Volumen der Kugel durch Summation paralleler Elementarschichten ist, wenn y eine beliebige Ordinate senkrecht zu einem Durchmesser im Abstand x von dessen einem Endpunkte darstellt, offenbar ausgesprochen in dem Symbol $\mathfrak{S}y^2\pi\delta$. Ersetzt man y^2 durch $2rx - x^2$, so ist, wenn $2r = \omega\delta$:

$$V = \mathfrak{S}_0^{2r}(2rx - x^2)\pi\delta = \pi \,.\, r\,\mathfrak{M}_0^{2r}(2rx - x^2) = \pi \,.\, 2r\left\{2r\mathfrak{M}_0^{2r}x - \mathfrak{M}_0^{2r}x^2\right\}$$

$$= \pi r\left\{2r \,.\, r - \frac{4r^2}{3}\right\} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Uebung 13. Das Trägheitsmoment einer materiellen homogenen Kreisscheibe vom Radius r und der spez. Masse σ ist augenscheinlich dargestellt durch:

$$T = \mathfrak{S}_0^r 2x\pi\delta\sigma x^2 = 2\pi\sigma r\mathfrak{M}_0^r x^3$$

$$\frac{1}{2}r^2\pi\sigma \,.\, r^2 = \frac{1}{2}mr^2 \qquad (m = \text{Gesamtmasse})$$

Uebung 14. Das Trägheitsmoment einer massiven, homogenen Kugel vom Radius r und der spez. Masse σ ergiebt sich aus dem Trägheitsmoment der Scheibe $r^2\pi\delta$ nach der vorstehenden Uebung für y statt r, wo $y^2 = 2rx - x^2$ als Ordinate der Kugel:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$
\begin{aligned}
T &= \mathfrak{S}\frac{1}{2}y^4\pi\sigma\delta = \frac{1}{2}\pi\sigma \,.\, 2r\mathfrak{M}_0^{2r}(2rx - x^2)^2 \\
&= \pi\sigma r\mathfrak{M}_0^{2r}\{4r^2x^2 - 4rx^3 + x^4\} \\
&= \pi\sigma r\{4r^2\mathfrak{M}_0^{2r}x^2 - 4r\mathfrak{M}_0^{2r}x^3 + \mathfrak{M}_0^{2r}x^4\} \\
&= \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\sigma \,.\, r^2 = \frac{2}{5}Mr^2
\end{aligned}
$$

wo M die Masse der Kugel darstellt.

Uebung 15. Bedeutet φ^x irgend einen Parallelschnitt zur Basis eines beliebigen Kegels der Basis B, wo der Index x die Entfernung des Schnittes von der Spitze darstellt, während $h = \omega\delta$ die Höhe sei, (Fig. 8) so ist:

$$\mathfrak{M}_0^h\varphi_x = \frac{\mathfrak{S}\varphi_x}{\omega} = \frac{\mathfrak{S}\varphi_x\delta}{\omega\delta} = \frac{V}{h} = \frac{\frac{1}{3}Bh}{h} = \frac{1}{3}B$$

Ist es ein Kreiskegel mit dem Basisradius r, so ist $B = r^2\pi$. Der Radius des Mittelschnittes sei ϱ, so ist $\varrho^2\pi = \frac{1}{3}r^2\pi$, also $\varrho = \sqrt{r \,.\, \frac{r.}{3}}$ (vergl. Fig.)

Das Resultat $\mathfrak{M}\varphi_x = \frac{V}{h}$ ist ein allgemeines für jeden Körper, der zwischen zwei Parallelebenen des Abstandes h liegt. Unter allen Umständen ist $V = h\mathfrak{M}\varphi_x$.

Für den Mittelschnitt der Halbkugel ergiebt die Gleichung

$$\mathfrak{M}\varphi_x = \frac{\frac{2}{3}\pi r^3}{r} = \frac{2}{3}\pi r^2 = \varrho^2\pi$$

$$\varrho = \sqrt{r \,.\, \frac{2}{3}r}$$

Ist überhaupt φ_x der Ausdruck für die Fläche einer geschlossenen ebenen Figur, die senkrecht zu ihrer Ebene um die Strecke x in den Raum eindringt und bei diesem Eindringen eine Umgestaltung erfährt, deren Gesetz eben in diesem Symbol φ_x liegt und sich von der Tiefe x des Eindringens abhängig zeigt, so ist also φ_x ein raumerzeugendes Gebilde und man kann den Ausdruck $\varphi_x\delta$ seine elementare (virtuelle) Wegleistung (Raumerzeugung) nennen — analog dem mechanischen Begriff der Elementararbeit. Die gesamte raumerzeugende Leistung ist also dargestellt in dem Symbol $\mathfrak{S}\varphi_x\delta$, wobei nochmals erwähnt sein möge, dass eine nebenbei stattfindende seitliche Verschiebung und Drehung der erzeugenden Fläche an der Quantität des Gesamtresultats nichts ändert.

Uebung 16. Der Mittelpunkt einer beliebigen Raumform ist derjenige Punkt, in welchem der Pol eines zu sämtlichen Punkten der Raumform gehenden Vektorenbüschels so liegen muss, dass dieses Büschel den Wert Null habe. Hieraus folgt, dass bezüglich einer beliebigen Ebene E die Ordinate des Mittelpunktes einer Raumform das arithmetische Mittel der Ordinaten x sämmtlicher Punkte der Raumform ist. Dieser Mittelpunkt ist bei einem materiellen homogenen Körper zugleich der Schwerpunkt. Bezeichnet man das Volumenelement mit v, so ist, wenn $\omega v = V$, also $v = \frac{V}{\omega}$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\mathfrak{S}xv = v\mathfrak{S}x = V \cdot \frac{\mathfrak{S}x}{\omega} = V\mathfrak{M}x$$

$$\mathfrak{M}x = \frac{\mathfrak{S}xv}{V} = \frac{\mathfrak{S}xv}{\mathfrak{S}v}$$

In Anwendung auf eine beliebige Pyramiden- oder Kegelform von der Basis B und der Höhe h, also $V = \frac{1}{3}Bh$ ist also (Fig. 9)

$$\mathfrak{M}x = \frac{3\,\mathfrak{S}xv}{Bh}$$

Die Summation der xv führt man zunächst für die Parallelschicht $\varphi_x\delta$ zur Basis B aus, deren Volumen $= \varphi \,.\, x^2\delta$, wenn φ der Parallelschnitt im Abstand 1 von der Spitze ist. Das Resultat dieser nächsten Summirung ist $\varphi \,.\, x^2\delta \,.\, x = \varphi \,.\, x^3\delta$; daher durch Einsetzung in obige Formel:

$$\mathfrak{M}x = \frac{3\varphi\mathfrak{S}x^3\delta}{Bh} = \frac{3\varphi}{Bh} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{3}{4}h \,.\, \frac{\varphi h^2}{B}$$

$$\mathfrak{M}x = \frac{3}{4}h$$

U e b u n g. Durch vollkommene analoge Behandlung erhält man für die Lage des Mittelpunktes der Halbkugel:

$$\mathfrak{M}x = \frac{\pi\,\mathfrak{S}(2rx^2 - x^3)\delta}{\frac{2}{3}\pi r^3} = \frac{5}{8}r$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Abschluss.

Die in den drei Beilagen zu den Jahresberichten des Wertheimer Gymnasiums für 1895/97 enthaltene Studie will einen Beitrag liefern zu einer Funktionslehre, wie sie mit den Mitteln eines badischen Gymnasiums etwa könnte behandelt werden, und zwar als integrierender Teil des vorschriftsmässigen Pensums. Ein flüchtiger Ueberblick lässt erkennen, dass der Mangel der analytischen Geometrie, an dem unser badisches Gymnasium laborirt, eine wesentliche Erschwerung der Aufgabe ist und, um die Kontinuität des Wissens zu erhalten, die Einschlagung von Wegen nötig macht, welche zwar Anschaulichkeit gewähren, aber einen Zeitaufwand erheischen, der vielleicht das verfügbare Mass überschreitet. Indessen ist doch ersichtlich, dass eine namhafte Zusammenziehung, eventuell eine auf anderem Wege gewonnene Darstellung, eine schulmässige Funktionslehre liefern könnte, die dem Wissensstand der Prima und dem Können einer Klasse von mittlerer Begabung entspräche. Der Verfasser hat seit Jahren inanbetracht der Freiheit, einzelne Parthien des Pensums der Prima als nicht obligat ausfallen lassen zu dürfen, bald diesen, bald jenen Teil vorliegender Studie in Prima behandelt. Im Hinblick auf die Vorkenntnisse, welche der Uebergang zum akademischen Studium mehrfach als dringend wünschenswert erscheinen lässt, möchte wohl mancher Kollege ähnliche Versuche gemacht haben aus Besorgnis, es könnten namentlich die Schüler des Gymnasiums, die zum mathematisch-naturwissenschaftlichen Studium übergehen, sich beklagen, dass entweder die akademischen Vorträge das Niveau des Gymnasialunterrichts oder dieser die Höhe jener ausseracht lasse. Gerade der Funktionsbegriff scheint am Gymnasium mehr und mehr ins Auge gefasst werden zu sollen. Dass aber hiezu, wenigstens für die Schüler, der Begriff des Verschwindendkleinen ein unentbehrliches Arbeitselement ist, wird vermutlich von keinem Lehrer des Gymnasiums in Abrede gestellt werden. Ist doch der Erfahrung gar nicht auszuweichen, dass ohne diesen Begriff der Unterricht in Mathematik und Physik bedeutend erschwert ist. Eine Funktionslehre vollends ist am Gymnasium wenigstens ohne den Begriff des Verschwindendkleinen meines Erachtens undenkbar.

Liegt eine wertvolle geistige Schulung in der Verfolgung des Zusammenhangs von Ursache und Wirkung, so haben wir in der Funktionslehre in eminentem Sinne eine solche Schulung, da hier der Zusammenhang quantitativ Schritt für Schritt kontrollirt wird und dem Geiste so eine in den meisten anderen Wissensgebieten nicht erreichbare Befriedigung gewährt, insofern hier Ursache und Wirkung nach unerbittlichen Gesetzen unter der freien Disposition der Denkkraft in beweglicher Gebundenheit auftreten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

An den Begriff des Verschwindendkleinen schliesst sich unabweislich der seiner Summirung. Die Bedeutung dieser Operation in Mathematik und Physik ist bekanntlich eminent. Selbst die begriffliche Fassung einer Menge von Beziehungen und Vorgängen leitet unausweichlich zu diesem Begriff und postuliert seine mathematische Ausführung. Wie viele interessante Probleme werden dadurch in das Gebiet der Schule hereingezogen und lassen klare, einfache Lösungen zu! Nachdem die Lossagung von Euklidischer Scholastik vollzogen ist: welchen Beweggrund könnte man haben, dem einfachen Akt letzter Konsequenz auszuweichen: der Zulassung von Ideen, die als direkte Anschlüsse an die elementare Mathematik und als deren feinste Produkte eine leichtfassliche, anschauliche, schulmässige Darstellung zulassen? Gerade diese Zulassung ist die aus Pietät unserer Wisssenschaft gebührende dankbare, aufmerksame Pflege, welche sie selbst nicht minder dankbar mit dem Besten lohnt, was sie zu erzeugen vermag.

In der Mathematik steht der Schüler mitten in einer Welt der reinsten Erkenntnis und des lautersten Strebens. Hier steht er unter dem beständigen Eindruck, dass in diesem Reiche nur die Wahrheit herrscht und dass, wo diese nicht in absoluter Form erreichbar ist, die unnnachsichtliche Pflicht eintritt, wenigstens den Grad der Zuverlässigkeit aufs genaueste festzustellen um so weder dem Irrtum noch der Phrase irgend welches Recht zu verstatten. Die Mathematik ist die Todfeindin der Phrase, des Schwindelns und der oberflächlichen Auffassung, und man thut gut, auch diese ethische Seite ihres sorgfältigen, gewissenhaften Betriebes nicht zu unterschätzen. Keine Wissenschaft arbeitet mit so absoluter Lauterkeit und Unbefangenheit an ihrer Vervollkommnung, in keiner ist dem Leichtsinn, der Selbstüberschätzung, der Rechthaberei, die Möglichkeit, sich geltend zu machen, die Möglichkeit der Verdunkeluug der Wahrheit durch Leidenschaft so gründlich abgeschnitten, wie in ihr. In keiner ist ja der Erfolg so ganz an selbstlose Wahrheitsliebe, an absoluten Gehorsam gegen die mathematischen und logischen Gesetze gebunden. Keine weist mit gleicher sacrosancta sinceritas als aus ihrem Wesen ausgeschlossen den Irrtum zurück, den auch die grösste Autorität mit ihrem Namen nicht zu decken vermöchte. Was in ihr fortlebt, ist nur die Wahrheit. Aber nicht bloss die Wahrheit als fertiges Resultat, sondern auch das Kunstwerk ihrer Erforschung, das logische Feingewebe, dessen Maschen gleichsam in sichtbaren Richtlinien die Spuren des Geistes erkennen lassen, der, geleitet von der lichten Intuition des Ganzen, Schritt für Schritt die Fäden zusammenzieht, bis in der letzten Zusammenfassung das Kunstwerk in seiner Vollendung dasteht. Was so die grossen Meister gedacht haben, nachzudenken, ist Gewinn und Genuss zugleich, ein Genuss, der Schritt hält mit dem Verständnis, dem wohlverdienten Lohn für die aufgewendete Geistesarbeit. Was in aller Welt, das überhaupt des Strebens wert ist, lässt sich denn anders als auf diesem Wege der Arbeit erreichen? Hier ist das Erreichte — Wahrheit ohne Irrtum. Dem Irrtum ist nicht einmal in der Geschichte der Wissenschaft eine bescheidene Stelle vergönnt, ausser da, wo er das unvermeidliche Durchgangsstadium in der gedanklichen Durchdringung schwieriger Probleme war.

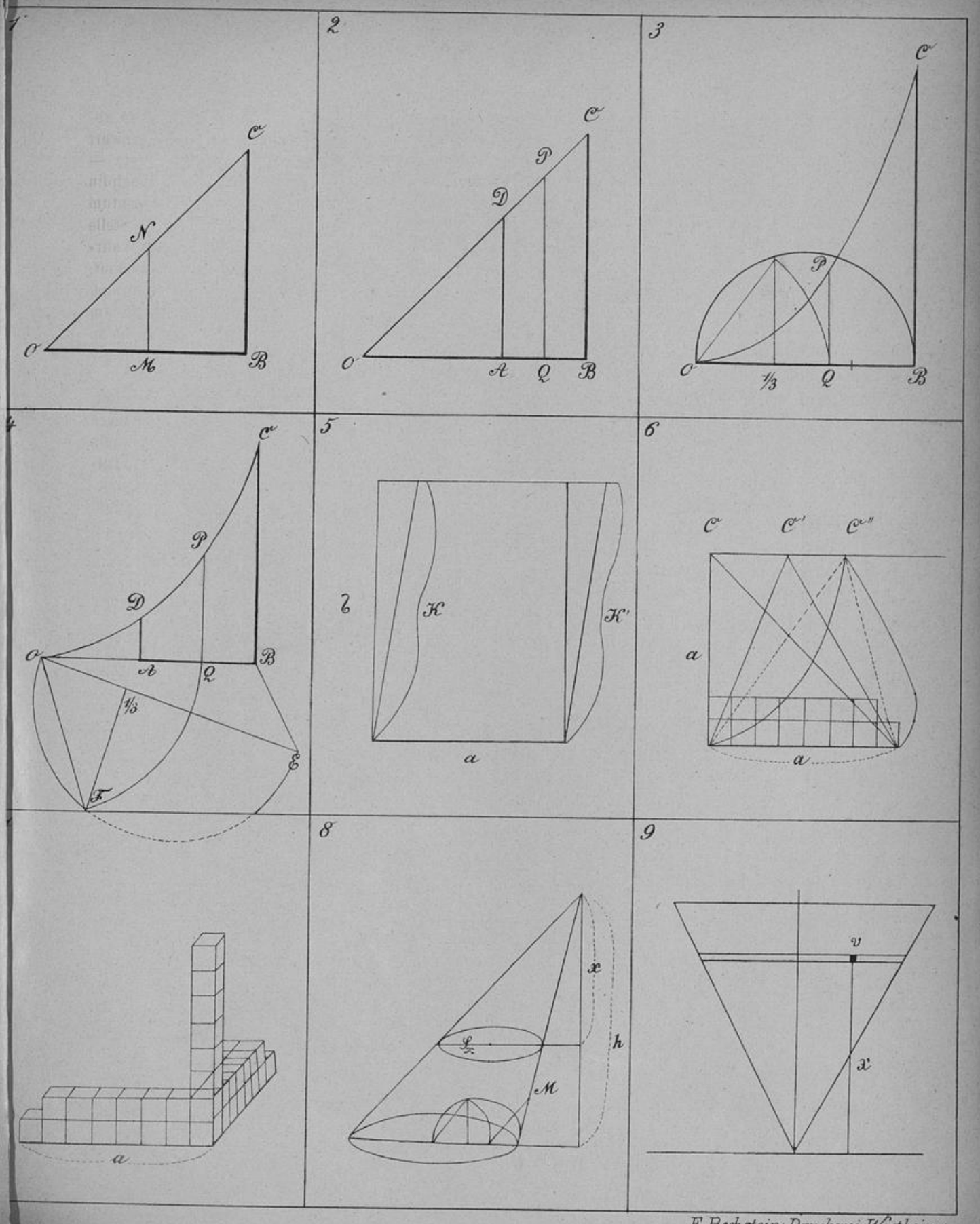
Dieses unbestechliche, lautere, wahrhaftige Wesen der Mathematik ist es auch, das ihr als Schuldisciplin selbst vom Standpunkt der Charakterbildung aus einen hohen Rang anweist. Welche Zucht in dieser Disciplin liegt, beweist der zähe Widerstand, den die jugendliche Oberflächlichkeit gerade ihr gegenüber zu leisten pflegt. Welche ideale, exponierte Stellung die Mathematik in dieser sittlich pädagogischen Hinsicht einnimmt, beleuchtet die Thatsache, dass

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sie in vorderster Reihe mit der einer gewissenhaften, treuen, ausdauernden Geistesarbeit so abgeneigten, überhaupt für Ideale so wenig empfänglichen studirenden Jugend der Gegenwart in beständigem Kampfe liegt und dass dem Idealismus, dessen Trägerin sie ist, zum Trotz — fast nur einer an pedantische Strenge grenzenden unnachgiebigen Handhabung dieser Disciplin die kärglichen Erfolge zu verdanken sind zum Beweise, dass in diesem Kampf das experimentum crucis vorliegt, welches für ein nicht durch Optimismus getrübtes Auge auf die wunde Stelle hinweist, der sich die Pädagogik der Gegenwart heilend zu widmen hat durch Pflege des Wahrheitssinnes, des Sinnes für die Schönheit des Wahren und seiner Darstellung, der Lauterkeit, der Gewissenhaftigkeit, der Freude an der Arbeit, des feineren Ehrgefühls, überhaupt des idealen Strebens. „*Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω*" . . . Hat wohl Plato mit dieser Ueberschrift am Eingang seiner Lehrhalle bloss an mathematisches Wissen gedacht oder glaubte er vielleicht so Elemente ferne zu halten, deren sich die moderne höhere Schule nicht zu erwehren vermag? Man möchte es fast glauben.

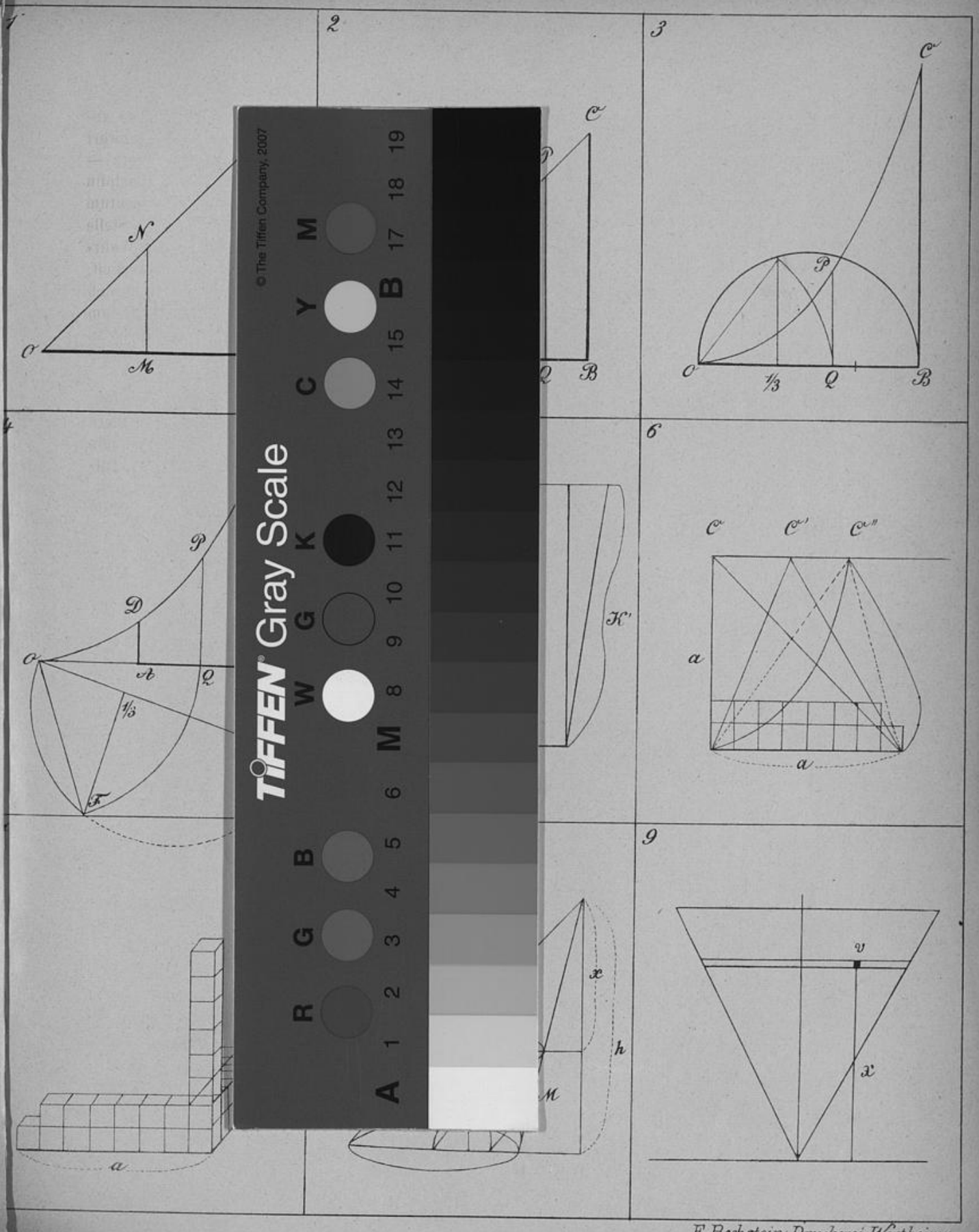
Das Bewusstsein, dass die Mathematik an der ethischen Aufgabe wesentlich mitarbeitet, ist eine fühlbare Genugthuung für jeden Lehrer dieser Wissenschaft, der sich fast dem Bedauern gegenüber sieht, dass er das Unglück habe, den trockensten, abstraktesten Gegenstand behandeln zu müssen, und der beinahe versucht sein könnte, an dieses Vorurteil selbst zu glauben aufgrund der thatsächlichen Erfolge, die weit hinter seinen Wünschen und Erwartungen zurückbleiben, jedenfalls dem Masse seiner Mühe und Arbeit keineswegs entsprechen. Und trotz dem Erweiterung des Pensums?! Nein! Erweiterung des Gesichtskreises, Vertiefung der Einsicht, Steigerung des Interesses, Herabminderung dessen, was als positiver, präsanter Besitz des Gedächtnisses beansprucht wird! Das und nur das ist es, was der hiemit zum Abschluss kommenden Studie als Leitstern vorschwebte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



E. Bechstein, Druckerei, Wertheim.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



E. Bechstein, Druckerei, Wertheim.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf