Elementare Untersuchungen über die räumlichen Örter.

Erste Abteilung: allgemeine Untersuchungen.

I. Begriff des Orts.

Nach der herkömmlichen Auffassung ist unter Ort ein Gebilde zu verstehen, das durch gesetzmässige Bewegung eines Punktes oder einer Linie erzeugt wird.

Dieser Begriff enthält zwar nichts Falsches; er ist aber zu unbestimmt und leer, als dass er ein fruchtbares Prinzip für Ableitungen bieten könnte. Wir müssen ihn daher durch einen bestimmteren und inhaltsreicheren Ortsbegriff zu ersetzen suchen. Ein solcher dürfte mit folgender Aufstellung gegeben sein:

Ort $\begin{cases}\text{eines Punktes}\\ \text{einer Linie}\end{cases}$ ist die Gesamtheit der Lagen, in denen $\begin{cases}\text{der Punkt}\\ \text{die Linie}\end{cases}$ zu einem oder zu mehreren festen Gebilden (von null bis zwei Dimensionen) bestimmte unveränderliche, aber durch bewegliche Gebilde vermittelte Beziehungen hat. Dabei kann die orterzeugende Linie in ihren verschiedenen Lagen Gestalt und Grösse ändern oder unverändert beibehalten.

Nach seinem geometrischen Charakter ist der Ort $\begin{cases}\text{eines Punktes}\\ \text{einer Linie}\end{cases}$ im allgemeinen ein Gebilde von $\begin{cases}\text{einer Dimension,}\\ \text{zwei Dimensionen,}\end{cases}$ wenn die Zahl der Beziehungen möglichst gross, aber nicht so gross ist, dass die Beweglichkeit der vermittelnden Gebilde aufgehoben wird.

Aber auch der Ort eines Punktes kann zweidimensional werden dadurch, dass die Zahl seiner Beziehungen in geeignetem Masse vermindert und

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

so die Beweglichkeit seiner vermittelnden Gebilde gesteigert wird.

Örter von einer oder zwei Dimensionen sind Örter im eigentlichen, engeren Sinn.

Ist die Zahl der Beziehungen zu klein, als dass { der orterzeugende Punkt / die orterzeugende Linie } in einer Fläche festgehalten werden könnte, so erhält man Örter von mehr als zwei Dimensionen d. i. Örter im uneigentlichen, weiteren Sinn.

Ist endlich die Zahl der Beziehungen so gross, dass die Beweglichkeit der vermittelnden Gebilde aufgehoben wird, so ist nach der oben aufgestellten Begriffsbestimmung der Begriff Ort ausgeschlossen.

In Grenzfällen können auch eigentliche Örter sich in dreidimensionale Gebilde ausbreiten.

Das zeigt folgendes Beispiel: Ein prismatischer Raum wird von drei Seitenflächen eingeschlossen, von denen eine fest, die zwei andern veränderlich und einander gleich sind. Was ist der Ort des Mittelpunktes einer die drei Flächen berührenden Kugel? Dieser Ort besteht, wie sich leicht zeigen lässt aus einer hyperbolischen Zylinderfläche, zwei Ebenen und einer den ganzen Raum erfüllenden Schar hyperbolischer Zylinder. Der letztere, dreidimensionale Bestandteil tritt auf, wenn die zwei veränderlichen Flächen die unveränderliche decken.

Umgekehrt kann in anderen besonderen Fällen die normale Zahl der Dimensionen eines Orts sich erniedrigen d. h. es kann eine Linie in einen oder mehrere Punkte, eine Fläche in eine oder mehrere Linien oder Punkte zusammenschrumpfen.

Ein Beispiel dafür ist folgender Ort: Ein Punkt bewegt sich so, dass sein Abstand von der Mitte einer gegebenen festen Strecke die unveränderliche Grösse a hat, die Summe seiner Abstände von den Endpunkten jener Strecke die unveränderliche Grösse 2 s behält. Der Ort jenes Punktes besteht im allgemeinen aus zwei Kreislinien. Für $s = a$ aber gehen diese in ein Punktepaar über.

2. Die bestimmenden Elemente eines Orts.

Nach der in Abschnitt 1 aufgestellten Begriffsbestimmung ist der Ort { eines Punktes / einer Linie } bestimmt durch gegebene feste Gebilde und durch unveränderliche Beziehungen zwischen diesen Gebilden und { jenem Punkt. / jener Linie. } Träger dieser Beziehungen aber

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sind bewegliche Gebilde, die { den orterzeugenden Punkt / die orterzeugende Linie } mit den festen Gebilden verbinden.

Es sind also bei jedem Ort dreierlei bestimmende Elemente zu unterscheiden: 1) bestimmende feste Gebilde, 2) bestimmende bewegliche Gebilde, 3) bestimmende unveränderliche Beziehungen.

Beispiele: a) Die Ebene E' dreht sich um die in ihr liegende feste Gerade L und schneidet die festen Geraden L_1 und L_2 in P' und P''; es handelt sich um den Ort der Geraden P' P''.

Hier sind die gegebenen festen Gebilde die Geraden L, L_1 und L_2, die beweglichen Gebilde die Ebene E' und die Punkte P' und P'', die unveränderlichen Beziehungen zwischen der orterzeugenden Geraden einerseits und L, L_1, L_2 andererseits sind in den Forderungen enthalten, dass E' durch L gehen, P' in L_1, P'' in L_2 sich bewegen und die orterzeugende Gerade P' mit P'' verbinden soll.

b) Das gleichseitige Dreieck AP'P wandelt sich so um, dass P' die feste Gerade L durchläuft, während A fest und P' P senkrecht zu L ist.

Für den Ort, den die Ecke P beschreibt, sind A und L die festen, P' und die Geraden AP', AP, P'P die vermittelnden beweglichen Gebilde; die unveränderlichen Beziehungen sind die Forderungen, dass P' sich in L bewegen, P'P senkrecht zu L und AP' = AP = P'P sein soll.

3. Ebene und räumliche Örter.

Liegen alle bestimmenden Gebilde eines (eindimensionalen) Orts und der Ort selbst in einer Ebene, so heisst der Ort ein ebener Ort. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird der Ort räumlicher Ort oder Ort überhaupt genannt.

Ein ebener Ort im eigentlichen Sinn ist also nicht vorhanden, wenn der Ort selbst zwar eine ebene Linie ist, die bestimmenden Gebilde aber nicht alle in der Ebene dieser Linie liegen.

Beispiel: An ein festes Ellipsoid F wird von einem ausserhalb F liegenden festen Punkt A eine Tangente gelegt, deren Berührungspunkt orterzeugend sei.

Der Ort ist zwar eine Ellipse, also eine ebene Linie. Von einem ebenen Orte im eigentlichen Sinn kann aber trotzdem nicht die Rede sein. Denn A und die durch A gehenden Tangenten liegen ausserhalb der Ellipsenebene; ausserdem ist F ein dreidimensionales Gebilde.

4. Zurückführung der Linienörter auf Punktörter.

Eine Ebene E' (Abschnitt 2, Beispiel a)) soll sich um eine in ihr liegende feste Gerade L drehen und zwei andere feste Gerade L_1 und L_2 in P' und P'' schneiden; verlangt wird der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ort der Geraden P'P". Diese letztere Forderung kann man dadurch ersetzen, dass man nach dem Ort eines beliebig in P'P" liegenden Punktes, d. h. aller Punkte der Geraden P'P" fragt. So gibt die Linie P'P" die Rolle der Orterzeugenden ab und tritt in die Reihe der verbindenden Gebilde, während ein Punkt P* als orterzeugend auftritt.

Was hier für einen einzelnen Fall gezeigt ist, gilt für jeden durch eine Linie erzeugten Ort: man darf nur die orterzeugende Linie als verbindende Bewegliche betrachten und einen beliebigen d. h. alle Punkte dieser Linie als orterzeugend einführen. Somit lassen sich alle durch Linien erzeugten Örter durch punkterzeugte, die mit jenen zusammenfallen, ersetzen.

Diese Erkenntnis macht es uns möglich, die folgenden Untersuchungen wesentlich zu vereinfachen: wir können uns dabei auf die Punktörter beschränken und brauchen die Linienörter nicht besonders zu behandeln.

* Anmerkung. P soll im folgenden immer den orterzeugenden Punkt bedeuten. Zur Bezeichnung aller anderen Veränderlichen verwenden wir Strichzeiger. Demgemäss seien P', P" ... bewegliche Punkte, L', L" ... bewegliche Gerade, E', E" ... bewegliche Ebenen, K', K" bewegliche krumme Linien, F', F" ... bewegliche krumme Flächen. Unveränderliche Gebilde und Grössen dagegen bezeichnen wir unter Ausschluss aller Strichzeiger durch einfache Buchstaben oder, wenn mehrere Unveränderliche gleicher Art vorkommen, durch Buchstaben mit Zahlzeigern. Feste Punkte haben also etwa die Bezeichnung A, A_1, A_2 . . ., feste Gerade L, L_1, L_2 . . ., feste Ebenen E, E_1, E_2 . . . feste krumme Linien K, K_1, K_2 . . ., feste krumme Flächen F, F_1, F_2 . . .

5. Die verbindenden beweglichen Gebilde.

Den orterzeugenden Punkt P können wir mit einem festen Gebilde vermittelst der Gebilde Punkt, Linie, Fläche verbinden, indem wir eine bewegliche Kette herstellen, deren eines Endglied P ist, während das feste Gebilde der Träger des anderen ist.

Zur Verbindung von P mit einem festen Punkt A brauchen wir mindestens ein bewegliches Gebilde, nämlich entweder eine durch A und P gehende Linie oder eine durch dieselben Punkte gehende Fläche.

Zur Verbindung von P mit einer festen Fläche F sind (in der Regel) mindestens zwei bewegliche Gebilde notwendig, entweder ein in F sich bewegender

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Punkt P' und eine Linie durch P und P' oder eine in F sich bewegende Linie K' und eine durch P und K' gehende Fläche.

Endlich erfordert die Verbindung von P mit einer festen Linie K mindestens ein bewegliches Gebilde, nämlich eine durch K und P gehende Fläche.

Eine Verbindung zwischen P und einem festen Gebilde, die aus der kleinsten möglichen Zahl von Gliedern besteht, nennen wir einfach (Beisp. a)), eine Verbindung mit grösserer Gliederzahl zusammengesetzt (Beisp. b)).

Beispiele. a) Die Ebene E' dreht sich um die in ihr liegende feste Gerade L_1, ebenso E'' um L_2, E''' um den festen Punkt A so, dass die drei Ebenen aufeinander senkrecht bleiben; P ist der gemeinsame Punkt der drei Ebenen.

Die Verbindungen zwischen P einerseits und L_1, L_2 und A andererseits sind einfach.

b) P'P''P'''P''''P ist ein windschiefes Fünfeck mit unveränderlichen Seitenrichtungen; die Ecken P', P'', P''', P'''' bewegen sich in den festen Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4.

P ist mit E_1 und E_4 durch einfache, mit E_2 und E_3 durch zusammengesetzte Züge verbunden.

Zwischen dem Punkt P und einem festen Gebilde können aber auch mehrere Verbindungen bestehen, und andererseits können mehrere Verbindungen teilweise zusammenfallen.

Beides zeigt das Beispiel b). Zwischen P und E_1 besteht nicht bloss die Verbindung PP', sondern auch PP''''P''P''P', zwischen P und E_2 liegen die Züge PP'P'' und PP''''P'''P'' u. s. w. Von diesen Zügen fallen verschiedene teilweise zusammen z. B. PP' und PP'P'' u. s. w.

Elementar soll eine Verbindung heissen, wenn sie keine andern Gebilde als solche, die durch Gleichungen ersten Grads darstellbar sind, nämlich Punkte, Gerade und Ebenen enthält. (Beispiele a), b), d) und e)). Finden sich in der Verbindung auch höhere, d. h. krumme Gebilde, so soll sie eine höhere Verbindung genannt werden. (Beisp. c)).

Beispiel c). P ist der Scheitel eines durch die festen Punkte A_1, A_2 und A_3 gehenden Drehungsparaboloids F', das unveränderliche Achsenrichtung hat.

P ist mit A_1, mit A_2 und mit A_3 durch die veränderliche krumme Fläche F' verbunden.

Geht von dem orterzeugenden Punkt nach jedem der gegebenen festen Gebilde ein besonderer einfacher Zug, und nur ein solcher, so heissen wir die Verbindung normal. (Beisp. a)). Eine solche Verbindung enthält $(p + l + 2f)$ Glieder, wenn die Zahl der festen Punkte p, die Zahl der festen Linien l, die Zahl der festen Flächen f ist. Denn ein einfacher

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zug von P nach einem festen Punkt oder nach einer festen Linie enthält ein, ein einfacher Zug nach einer festen Fläche zwei verbindende Einzelgebilde.

Dass die Gesamtzahl der verbindenden Glieder grösser als bei normaler Verbindung sein kann, ist selbstverständlich.

Sie kann aber auch kleiner sein, nämlich dann, wenn die verbindenden Glieder teilweise zusammenfallen (Beisp. d)), oder wenn ein gegebenes festes Gebilde Träger eines anderen solchen ist (Beisp. e)).

Beispiele. d) In der unveränderlich gerichteten Geraden L', die die festen Ebenen E_1, E_2, E_3 in P', P'', P''' schneidet, liegt der Punkt P so, dass er mit P', P'', P''' eine harmonische Punktreihe bildet.

Da hier die Geraden P'P, P''P und P'''P in L' zusammenfallen, sind nur vier verbindende Gebilde vorhanden, die drei Punkte P', P'', P''' und die Gerade L'. Bei normaler Verbindung wären es sechs.

e) In L_1 liegen A_1 und A_2, in L_2 A_3 und A_4; es werden A_1A_2 durch P', A_3A_4 durch P'', P'P'' durch P im gleichen Verhältnis geteilt.

Die Normalzahl der verbindenden Glieder wäre hier sechs. In Wirklichkeit hat man nur drei Glieder: die zwei Punkte P' und P'' und die Gerade P'P'', was damit zusammenhängt, dass L_1 Träger von A_1 und A_2, L_2 Träger von A_3 und A_4 ist.

6. Die festen Gebilde.

Als Element eines Orts ist ein fester Punkt Träger der durch ihn gehenden Linien und Flächen, eine feste Linie Träger der in ihr liegenden Punkte und durch sie gehenden Flächen, eine feste Fläche Träger der in ihr enthaltenen Punkte und Linien.

Es gibt aber Ausnahmen.

1) Ein fester Punkt A kann Träger einer einzigen $\begin{cases}\text{geraden}\\ \text{krummen}\end{cases}$ Linie $\begin{cases}L\\ K\end{cases}$ sein; A ist dann Grenzpunkt für veränderliche $\begin{cases}\text{Strecken,}\\ \text{Bögen,}\end{cases}$ die in $\begin{cases}L\\ K\end{cases}$ liegen.

Beispiel a). A liegt in der Geraden L, in der sich P' bewegt; P'P ist senkrecht zu L und mittlere Proportionale zwischen AP' und c.

2) Eine feste Gerade erscheint als Träger eines einzigen bestimmten Punktes, nämlich ihres unendlich entfernten Punktes, wenn sie nur dazu dienen soll, eine feste Richtung darzustellen, auf die die Richtungen beweglicher Geraden bezogen werden.

Beispiel b). Gegeben A und L; P bewegt sich so, dass stets $AP = c \cdot \cos(L, AP)$ ist.

3) Eine feste Ebene erscheint als Träger einer einzigen bestimmten Geraden, nämlich ihrer unendlich entfernten Geraden,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn sie nur dazu dienen soll, eine feste Stellung zu bieten, auf die die Stellungen beweglicher Ebenen oder die Richtungen beweglicher Geraden bezogen werden.

Beispiel c). P ist Mittelpunkt eines durch A_1 und A_2 gehenden Drehungsellipsoids von unveränderlicher Gestalt, dessen Äquatorebene E parallel sei.

7. Die bestimmenden Beziehungen.

Es gibt zwei Arten von Beziehungen, die den Zusammenhang des orterzeugenden Punktes mit den gegebenen festen Gebilden bestimmen: Lage- und Grössenbeziehungen.

Lagebeziehung ist ein Verhältnis, das darin besteht, dass ein Gebilde (Punkt, Linie, Fläche) Träger eines andern ist d. h. dass ein Gebilde ein anderes enthält oder in diesem enthalten ist.

Es gibt demnach dreierlei Lagebeziehungen:

1) zwischen Punkt und Linie,
2) zwischen Linie und Fläche,
3) zwischen Fläche und Punkt.

Es kann nämlich

1) ein Punkt in einer Linie liegen oder, was dasselbe ist, eine Linie durch einen Punkt gehen,

2) eine Linie in einer Fläche liegen oder eine Fläche durch eine Linie gehen,

3) eine Fläche durch einen Punkt gehen oder ein Punkt in einer Fläche liegen.

Die Grössenbeziehungen treten zunächst in viererlei Gestalt auf. Entsprechend den vier Arten von Grössen: Strecke (oder Länge überhaupt), Fläche, Raumgrösse, Winkel kann man Strecken-, Flächen-, Raumgrössen- und Winkelbeziehungen unterscheiden.

Da sich aber Winkel durch ihre trigonometrischen Funktionen d. h. durch Quotienten von Strecken, Flächen und Raumgrössen durch Produkte von Strecken darstellen lassen, so können wir alle Grössenbeziehungen eines Orts auf Beziehungen zwischen Strecken zurückführen.

Ein Ort kann nur Lagebeziehungen oder nur Grössenbeziehungen oder sowohl Lage- als Grössenbeziehungen enthalten.

Beispiele. a) Die Ebene E' dreht sich um die in ihr liegende Gerade L_1, ebenso E'' um L_2; E' und E'' schneiden eine dritte Gerade L in P'; orterzeugend ist die Schnittlinie von E' und E''.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Ort enthält nur Lagebeziehungen, nämlich die folgenden: 1) E' geht durch L_1, 2) E'' geht durch L_2, 3) P' liegt in L, 4) E' geht durch P', 5) E'' geht durch P', 6) P liegt in E', 7) P liegt in E''.

b) P ist die Spitze eines gleichseitigen Dreikants mit den Kanten PA_1, PA_2 und PA_3.

Es sind nur die zwei Grössenbeziehungen vorhanden: 1) $\measuredangle A_1PA_2 = \measuredangle A_2PA_3$, 2) $\measuredangle A_2PA_3 = \measuredangle A_3PA_1$.

c) Die Ebene E' dreht sich um die in ihr liegende Gerade L_1, ebenso E'' um L_2 so, dass beide Ebenen immer senkrecht aufeinanderstehen; P liegt im Schnitt von E' und E''.

Hier bestehen die Lagebeziehungen: 1) E' geht durch L_1, 2) E'' geht durch L_2, 3) P liegt in E', 4) P liegt in E''; ferner die Grössenbeziehung: $\measuredangle (E', E'') = 90^0$.

In der analytischen Geometrie werden die bestimmenden Beziehungen durch Gleichungen dargestellt, und zwar gilt dies nicht bloss von den Grössen-, sondern auch von den Lagebeziehungen.

Zum Beispiel die Forderung, dass ein Punkt in einer bestimmten Fläche liege, wird dargestellt durch eine Gleichung, die ausdrückt, dass die Koordinaten des Punktes der Gleichung der Fläche Genüge leisten.

Ist zur algebraischen Darstellung einer Beziehung nicht mehr als eine Gleichung erforderlich, so nennen wir die Beziehung einfach; sind zwei, drei oder mehr Gleichungen notwendig, so heisse die Beziehung zweifach, dreifach u.s.w.

Ein Beispiel einer einfachen Beziehung ist die oben gestellte Forderung, ein Punkt solle in einer bestimmten Fläche liegen; zweifach ist die Forderung, ein Punkt solle in einer bestimmten Linie liegen, dreifach die Forderung, ein Punkt solle eine bestimmte Strecke in einem bestimmten Verhältnis teilen u. s. w.

Es ist klar, dass jede mehrfache Beziehung in mehrere einfache Beziehungen zerlegt und durch diese ersetzt werden kann.

Den Beziehungen legen wir denselben algebraischen Charakter bei wie den entsprechenden Gleichungen. Wir sprechen also von transcendenten und algebraischen Beziehungen, von Beziehungen ersten, zweiten, dritten Grads u. s. w., wenn die zugehörigen Gleichungen in Bezug auf die Veränderlichen, die sie enthalten, transcendent oder algebraisch, vom ersten, zweiten, dritten Grad u. s. w. sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

8. Begriff des elementaren Orts.

Im Anschluss an die in der Programmabhandlung von 1902 gegebene Bestimmung des Begriffs elementarer ebener Ort nennen wir einen Ort überhaupt elementar, wenn seine Gleichung oder, (falls er eindimensional ist), seine Gleichungen und ausserdem die Gleichungen seiner bestimmenden festen und beweglichen Gebilde sowie seine bestimmenden Beziehungen von nicht höherem als dem zweiten Grad sind.

9. Zahl der Beziehungen.

Wenn wir einen Ort mit den Mitteln der analytischen Geometrie behandeln*, so können wir ein System von Gleichungen aufstellen, das sich aufbaut aus den Koordinaten des orterzeugenden Punktes P und sämtlichen veränderlichen und unveränderlichen Grössen, die den Ort bestimmen. Aus diesem System lassen sich eine oder zwei Ortsgleichungen dadurch ableiten, dass man alle Veränderlichen mit Ausnahme der Koordinaten von P ausscheidet.

Möglich ist eine solche Ableitung aber nur dann, wenn die Zahl der Gleichungen um 1 oder um 2 grösser ist als die Zahl jener auszuscheidenden Veränderlichen. Im ersten Fall erhält man eine, im zweiten zwei Gleichungen für den Ort, im ersten also eine Fläche, im zweiten den Schnitt zweier Flächen oder eine Linie.

Da nun aber jede Gleichung unmittelbar oder mittelbar eine einfache Beziehung (Abschnitt 7) zwischen P und den festen Gebilden oder eine einfache Forderung an P darstellt, so dürfen wir den Satz aussprechen: die Zahl der (von einander unabhängigen) einfachen Beziehungen eines Orts ist gleich der Zahl der den Ort bestimmenden Bedingungsgleichungen, also um 1 oder um 2 grösser als die Zahl der zu ihm gehörenden veränderlichen Grössen (mit Ausschluss der Koordinaten von P).

---

* Siehe Beilage zum Programm des Realgymnasiums und der Realanstalt in Ulm vom Jahre 1895/6: Über die Behandlung der geometrischen Örter im Elementarunterricht der analytischen Geometrie.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Selbstverständliche Voraussetzung dieses Satzes ist, dass etwa vorhandene mehrfache Beziehungen in einfache aufgelöst werden. (Abschnitt 7).

Befinden sich in den Zügen, die P mit den festen Gebilden verbinden, n bewegliche Punkte, die im Verein mit P und den festen Gebilden jene Züge bestimmen, oder lassen sich überhaupt die Verbindungszüge durch n solche bewegliche Punkte bestimmen, so bilden die 3 n Koordinaten dieser Punkte die Veränderlichen, die aus dem genannten System von Gleichungen ausgeschieden werden müssen. Folglich ist die Zahl der Beziehungen des Orts $3 n + 1$ oder $3 n + 2$. Somit können wir den Satz aufstellen: lassen sich die Züge, die P mit den festen Gebilden verbinden, durch n bewegliche Punkte bestimmen, so ist die Zahl der einfachen Beziehungen des Orts (oder der an den Ort zu stellenden einfachen Forderungen) um 1 oder um 2 grösser als 3 n; im ersten Fall hat der Ort zwei, im zweiten eine Dimension. Die Zahl der Beziehungen ist nie durch 3 teilbar.

Ist die Zahl der Beziehungen kleiner als $3 n + 1$, so ist der Ort unbestimmt d. h. dreidimensional. Ist jene Zahl grösser als $3 n + 2$, so ist der Ort überbestimmt, und zwar ergibt sich für $3 n + 3$ ein nulldimensionales d. h. ein aus einzelnen Punkten bestehendes Gebilde, auf das der Begriff Ort nicht mehr angewendet werden kann, während in den Fällen, wo die Zahl der (wirklich verschiedenen) Beziehungen über $(3 n + 3)$ hinausgeht, der verlangte Ort im Widerspruch mit sich selbst steht und daher unmöglich ist.

Den Einfluss der relativen Zahl der Beziehungen auf die Natur der Ortsgebilde zeigt die folgende Reihe von Beispielen.

a) In dem Dreieck $P' P'' P$ wird die Seite $P' P''$ durch P''', $P' P$ durch P'''', $P'' P$ durch P^{V} halbiert; die Ecken P' und P'' bewegen sich in den Ebenen E_1 und E_2, die Seitenmitten in E_3, E_4 und E_5.

Es sind hier fünf verbindende bewegliche Punkte: P', P'', P''', P'''', P^{V}, es ist also $n = 5$. Die Beziehungen sind:

1) P' in E_1,	3) P''' in E_3,	6) P''' Mitte von $P' P''$,
2) P'' „ E_2,	4) P'''' „ E_4,	7) P'''' „ „ $P' P$,
	5) P^{V} „ E_5,	8) P^{V} „ „ $P'' P$.

Unter diesen Beziehungen finden sich drei dreifache: 6), 7) und 8), die andern sind einfach. Führt man jene auf einfache zurück, so erhält man eine Gesamtzahl von 14 oder $(3 . 5 - 1)$ einfachen Beziehungen. Der Ort von P ist dreidimensional, er erfüllt den ganzen Raum, aber nicht nur einfach, sondern wie eine nähere Untersuchung zeigt, unendlichfach; es ist kein Ort im eigentlichen Sinn. (Abschnitt 1).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) Ersetzt man in a) eine Ebene, etwa E_3, durch eine Gerade, so tritt an die Stelle der einfachen Beziehung 3) eine Doppelbeziehung; die Gesamtzahl der einfachen Beziehungen wird daher $15 = 3 . 5$, der Ort ist dreidimensional, er erfüllt den ganzen Raum in einfacher Weise; einen eigentlichen Ort haben wir auch hier nicht.

c) An die Stelle der zwei Ebenen E_1 und E_2 in a) sollen zwei Gerade treten. Die Beziehungen 1) und 2) werden zweifach, man erhält 16 oder $(3 . 5 + 1)$ einfache Beziehungen; der Ort ist zweidimensional oder eine Fläche und zwar eine Ebene).

d) In a) werden die drei Ebenen E_3, E_4, E_5 durch Gerade ersetzt. Die Gesamtzahl der einfachen Beziehungen wird $17 = 3 . 5 + 2$, der Ort eindimensional oder eine Linie (und zwar eine Gerade).

e) Anstatt der vier Ebenen E_1, E_2, E_4, E_5 nehme man vier Gerade. Man erhält 18 oder $(3 . 5 + 3)$ Beziehungen und ein nulldimensionales Gebilde, nämlich einen Punkt, also keinen Ort im Sinne unserer Begriffsbestimmung.

f) Alle fünf Ebenen E_1, E_2 u. s w. werden durch Gerade ersetzt. Zahl der Beziehungen $= 19 = 3 . 5 + 4$; der verlangte Ort enthält innere Widersprüche, ist daher unmöglich. —

g) Zum Schluss soll noch ein Ort folgen, der keines verbindenden beweglichen Punktes bedarf, für den also $n = o$ ist: die in P zusammenstossenden Kanten des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 P$ bilden eine stetige Proportion. Die einzige Beziehung, die hier besteht, ergibt: $1 = 3 . 0 + 1$; der Ort ist eine Fläche dritten Grads.

10. Bildung von Örtern aus ihren Elementen.

Wir können uns die Aufgabe stellen: aus gegebenen festen Gebilden und einer bestimmten Zahl beweglicher Punkte, Linien und Flächen Örter zu bilden.

Um eine zusammenhängende und, soweit möglich, vollständige Lösung dieser Aufgabe zu erhalten, bilden wir zuerst aus den zur Verfügung stehenden beweglichen Punkten, Linien und Flächen alle möglichen Typen verbindender Züge zwischen dem orterzeugenden Punkt P und den gegebenen festen Gebilden. Hierauf setzen wir für jeden dieser Typen soviele Beziehungen ein, als nach dem in Abschnitt 9 aufgestellten Gesetze notwendig sind. Diese Beziehungen sind ausschliesslich Grössenbeziehungen; denn die möglichen Lagebeziehungen enthält jeder Typus im voraus.

Für Einsetzung jener Grössenbeziehungen sind unendlich viele Möglichkeiten vorhanden, während die Zahl der Typen endlich ist. Vollständigkeit ist daher nur für die letzteren möglich.

Zur Erläuterung der vorstehenden Regel diene das folgende Beispiel.

Aufgabe. Aus einem festen Punkte A, einer festen Geraden L, einer festen Ebene E, zwei beweglichen Punkten P′ und P″ und drei beweglichen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(durch A, P', P'' und P bestimmten) Geraden L', L'' und L''' in zusammenhängender Weise die möglichen Typen verbindender Züge darzustellen und mit deren Hilfe eine Anzahl Örter zu bilden, oder kürzer: die Gruppe (A, L, E, P', P'', L', L'', L''') zu entwickeln.

Zunächst stellen wir fest, dass P' und P'' in L und E liegen müssen; denn jedes dieser beiden Gebilde bedarf zu seiner Verbindung mit P eines in ihm liegenden beweglichen Punktes, da keine bewegliche Fläche zur Verfügung steht. Ferner beachten wir, dass die vier Punkte A, P', P'', P $\binom{4}{2} = 6$ Gerade ergeben, die je zwei dieser Punkte enthalten, nämlich AP', AP'', AP, P'P'', P'P, P''P. Kombinieren wir dann diese Geraden zu drei, so erhalten wir $\binom{6}{3} = 20$ Verbindungen, die wir im folgenden zusammenstellen.

1) A P', A P'', A P	11) A P'', A P, P' P''
[2) A P', A P'', P' P'']	12) A P'', A P, P' P
3) A P', A P'', P' P	[13) A P'', A P, P'' P]
4) A P', A P'', P'' P	14) A P'', P' P'', P' P
5) A P', A P, P' P''	15) A P'', P' P'', P'' P
[6) A P', A P, P' P]	16) A P'', P' P, P' P
7) A P', A P, P'' P	17) A P, P' P'', P' P
8) A P', P' P'', P' P	18) A P, P' P'', P'' P
9) A P', P' P'', P'' P	19) A P, P' P, P'' P
10) A P', P' P, P'' P	[20) P' P'', P' P, P'' P].

Von diesen zwanzig Kombinationen haben wir diejenigen auszuscheiden in denen einer der Punkte A, P', P'', P fehlt, nämlich 2), 6), 13) und 20). Es bleiben demnach 16 brauchbare und in ihrem Bau verschiedene Typen.

Hiezu treten aber noch 12 weitere Typen, die man erhält, wenn man die Geraden, die je drei der Punkte A, P', P'', P enthalten, mit je zwei andern Geraden kombiniert, deren jede zwei dieser Punkte enthält, nämlich:

1) A P' P'', A P, P' P	7) A P'' P, A P', P' P''
2) A P' P'', A P, P'' P	8) A P'' P, A P', P' P
3) A P' P'', P' P, P'' P	9) A P'' P, P' P'', P' P
4) A P' P, A P'', P' P''	10) P' P'' P, A P', A P''
5) A P' P, A P'', P'' P	11) P' P'' P, A P', A P
6) A P' P, P' P'', P'' P	12) P' P'' P, A P'', A P.

Bei der Entwicklung der vorstehenden 28 Typen war vorausgesetzt, dass von den drei festen Gebilden A, L und E keines Träger eines andern ist. Diese Voraussetzung trifft zwar im allgemeinen zu; es darf aber die Möglichkeit nicht ausgeschlossen werden, dass eines jener Gebilde für ein anderes oder für beide andern den Träger bildet. Daher treten neben den allgemeinen besondere Fälle auf und zwar folgende sechs:

(1) A liegt in L,
(2) E enthält A,
(3) L liegt in E,
(4) A liegt in L und in E d. h. A ist Schnitt von L und E,
(5) E enthält A und L,
(6) L enthält A und liegt in E.

Die Typen der besonderen Fälle oder die Nebentypen werden auf ähnliche Weise gefunden wie die Typen des allgemeinen Falls, die Haupttypen.

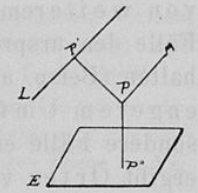
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ergibt sich, dass die Zahl der Nebentypen für den besonderen Fall (1) 10, für (2) und (3) je 22, für (4) 9, für (5) 19, für (6) 9 beträgt. Somit ist die Summe der Haupt- und Nebentypen der Gruppe (A, L, E, P', P", L', L", L"') gleich $28 + 10 + 22 + 22 + 9 + 19 + 9 = 119$.

Jeder dieser 119 Typen enthält zwei (im Verein mit P und den festen Gebilden) die Verbindungen bestimmende bewegliche Punkte P' und P". Nach Abschnitt 9 sind daher zur Bildung der zugehörigen Örter je $(3 \,.\, 2 + 1) = 7$ oder $(3 \,.\, 2 + 2) = 8$ Beziehungen oder Forderungen notwendig, je nachdem die Örter zweidimensional oder eindimensional sein sollen. Es sind jedoch in jedem der 119 Züge zwei Lagebeziehungen vorhanden, die darin bestehen, dass P' in L, P" in E liegt; die erstere ist eine Doppel-, die letzere eine einfache Beziehung. Dazu kommt in den Fällen, wo drei der Punkte A, P', P", P in einer Geraden liegen, noch eine weitere zweifache Beziehung der Lage. In diesen letzteren Fällen sind daher nur noch 2 oder 3, in den anderen 4 oder 5 einfache Grössenbeziehungen neu einzuführen.

Wie die hierher gehörigen Örter im einzelnen zu bilden sind, sollen die folgenden Beispiele zeigen.

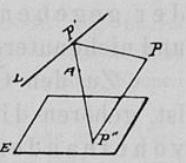
Zu Haupttypus (A P, P' P, P" P).



a) 1) P' P ⊥ L (einf.), 2) P" P ⊥ E (zweif.), 3) P' P : A P = A P : P" P (einf.). Der Ort ist eine Fläche.

b) 1) P' P ⊥ L (einf.), 2) P" P ⊥ E (zweif.), 3) A P = P' P = P" P (zweif.). Der Ort ist eine Linie.

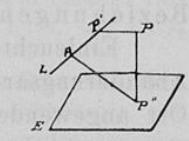
Zu Haupttypus (A P' P", P' P, P" P).



c) 1) P' P ⊥ L (einf.), 2) P' P = P" P (einf.). Der Ort ist eine Fläche.

d) 1) P' P ⊥ L (einf.), 2 P' P = P" P = P' P", (zweif.). Der Ort ist eine Linie.

Zu Nebentypus (A P", P' P, P" P), besonderer Fall A in L.



e) 1) P" P ⊥ E (zweif.), 2) je zwei Gegenseiten des Vierecks A P' P P" sind gleich (zweif.). Der Ort ist eine Fläche.

f) 1) P" P ⊥ E (zweif.), 2) das Viereck A P' P P" ist gleichseitig (dreif.). Der Ort ist eine Linie.

Die Bildung der Typen ist, wie die vorstehende Entwicklung zeigt, eine Aufgabe der Kombinationsrechnung. Je grösser die Zahl der beweglichen im Verhältnis zur Zahl der festen Gehilde ist, um so zahlreicher werden die Typen sein, um so mühevoller und schwieriger aber auch die kombinatorischen Untersuchungen, die die vollständige Darstellung der Typen erfordert.

Wenn die eben behandelte verhältnismässig einfache Gruppe (A, L, E, P', P", L', L", L"') 119 Typen aufweist, so

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist daraus zu entnehmen, dass wir für Gruppen mit zusammengesetzterem Bau sehr beträchtliche Typenzahlen zu erwarten haben. Zu jedem einzelnen Typus aber gehören, wie wir schon oben angedeutet haben, unendlich viele mögliche Örter.

II. Gegenseitige Ableitung gleichdimensionaler Örter.

Von einem gegebenen Ort kann man andere Örter dadurch ableiten, dass man seine Unveränderlichen teilweise oder sämtlich abändert. Diese Abänderung kann in einer Verallgemeinerung oder in einer Besonderung oder in einem Ersatz durch logisch Gleichwertiges bestehen.

Durch die erste Art der Abänderung erhalten wir Örter von weiterem begrifflichem Umfang, die als allgemeine Fälle den ursprünglichen Ort als besonderen Fall in sich enthalten (Beisp. a) und b)); die zweite Art ergibt Örter von engerem Umfang, die in dem ursprünglichen Ort als besondere Fälle enthalten sind (Beisp. c)); die dritte Art endlich ergibt Örter von logisch gleich weitem Umfang wie der gegebene Ort, also Örter, die diesem nicht übergeordnet und nicht untergeordnet, sondern nebengeordnet sind (Beisp. d)).

Zu den Örtern, deren Verhältnis das der Nebenordnung ist, gehören die Umkehrungen. Diese werden dadurch voneinander abgeleitet, dass man die Träger der Beziehungen vertauscht. (Beisp. e)).

Einleuchtend ist, dass die oben aufgeführten verschiedenen Abänderungsarten auch zugleich auf einen und denselben Ort angewendet werden können, wobei sie selbstverständlich an verschiedenen Unveränderlichen zur Ausführung kommen. So kann man Örter erhalten, die zum gegebenen Ort zugleich im Verhältnis der Überordnung, der Unterordnung und der Nebenordnung stehen. (Beisp. f)).

Alle Örter, die durch eines der angegebenen Verfahren abgeleitet werden, sind von gleicher Art d. h. sie stehen auf derselben Dimensionsstufe wie der ursprüngliche Ort; ist dieser eine Fläche, so sind jene auch Flächen, und sie sind Linien, wenn der ursprüngliche Ort eine Linie ist.

Wie die Ableitungen sich im einzelnen gestalten können, mögen die folgenden Beispiele zeigen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I. Ableitung durch Überordnung. a) Ursprünglicher besonderer Ort: P ist Ecke eines windschiefen Vierecks von unveränderlichen Seitenrichtungen und unveränderlichem Umfang; zwei Seiten werden von zwei festen Ebenen halbiert. (Der Ort ist eine Linie).

Abgeleitete allgemeinere Örter. Wir heben zunächst folgende einer Verallgemeinerung fähigen Forderungen hervor:

1) das Teilungsverhältnis der ersten Seite ist 1 : 1,

2) das Teilungsverhältnis der zweiten Seite ist gleich dem der ersten Seite,

3) die Summe der Seitenlängen ist unveränderlich.

Hieraus lässt sich durch Verallgemeinerung ableiten:

(1) das Teilungsverhältnis der ersten Seite ist $1 : k_1$,

(2) das Teilungsverhältnis der zweiten Seite ist $1 : k_2$,

(3) zwischen den Seitenlängen besteht eine beliebige unveränderliche Beziehung ersten Grads.

Ersetzen wir 1), 2) und 3) teilweise oder vollständig durch (1), (2) und (3), so erhalten wir folgende $\left[\binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}\right] = 7$ allgemeinere Örter:

α) 1) durch (1) ersetzt. P ist Ecke eines windschiefen Vierecks von unveränderlichen Seitenrichtungen und unveränderlichem Umfang; zwei Seiten werden von zwei festen Ebenen im gleichen Verhältnis $1 : k_1$ geteilt.

β) 2) durch (2) ersetzt. P ist Ecke eines Vierecks von unveränderlichen Seitenrichtungen und unveränderlichem Umfang; eine Seite wird von einer festen Ebene halbiert, eine zweite Seite von einer zweiten festen Ebene im Verhältnis $1 : k_2$ geteilt.

γ) 3) durch (3) ersetzt. P ist Ecke eines Vierecks von unveränderlichen Seitenrichtungen, zwischen dessen Seitenlängen eine unveränderliche Beziehung ersten Grads besteht; zwei Seiten werden von zwei festen Ebenen halbiert.

δ) 1) und 2) durch (1) und (2) ersetzt. P ist Ecke eines Vierecks von unveränderlichen Seitenrichtungen und unveränderlichem Umfang; zwei Seiten werden durch zwei feste Ebenen in den Verhältnissen $1 : k_1$ und $1 : k_2$ geteilt.

ε) 1) und 3) durch (1) und (3) ersetzt. P ist Ecke eines Vierecks von unveränderlichen Seitenrichtungen, zwischen dessen Seitenlängen eine unveränderliche Beziehung ersten Grads besteht; zwei Seiten werden von zwei festen Ebenen in dem Verhältnis $1 : k_1$ geteilt.

ζ) 2) und 3) durch (2) und (3) ersetzt. P ist Ecke eines Vierecks von unveränderlichen Seitenrichtungen, zwischen dessen Seitenlängen eine unveränderliche Beziehung ersten Grads besteht; eine Seite wird von einer festen Ebene halbiert, eine zweite Seite von einer zweiten festen Ebene im Verhältnis $1 : k_2$ geteilt.

η) 1), 2) und 3) durch (1), (2) und (3) ersetzt. P ist Ecke eines Vierecks von unveränderlichen Seitenrichtungen, zwischen dessen Seitenlängen eine unveränderliche Beziehung ersten Grads besteht und in dem zwei Seiten von zwei festen Ebenen in den Verhältnissen $1 : k_1$ und $1 : k_2$ geteilt werden.

Würden wir auch die Seitenzahl der sich umwandelnden Figur verallgemeinern, also das Viereck durch ein n—eck, die Zahl 4 durch n, 2 durch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(n—2) ersetzen, so erhielten wir $\left[\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}\right]$ oder 15 allgemeine Fälle; der vom allgemeinsten Charakter wäre:

9) 1), 2), 3) durch (1), (2), (3) und ausserdem die Zahl 4 durch n ersetzt. P ist Ecke eines n-ecks von unveränderlichen Seitenrichtungen, zwischen dessen Seitenlängen eine unveränderliche Beziehung ersten Grads besteht und in dem (n—2) Seiten von (n—2) festen Ebenen in unveränderlichen Verhältnissen geteilt werden.

b) Ursprünglicher besonderer Ort: L ist eine Achse der Ellipse F, P' P'' eine zu L senkrechte Sehne von F und zugleich Durchmesser eines P enthaltenden Kreises F', dessen Ebene senkrecht zu L ist. (Fläche).

Abgeleiteter allgemeiner Ort: man ersetze den Kreis F' durch eine Ellipse von beliebiger unveränderlicher Gestalt, deren eine Achse P' P'' ist; alles übrige bleibt unverändert.

Gegenstand der Abänderung ist hier ein (im ursprünglichen Ort) unveränderliches Element der Veränderlichen F', nämlich ihre Kreisform.

II. Ableitung durch Unterordnung. c) Ursprünglicher allgemeiner Ort: das Dreieck AP'P ist von unveränderlicher Gestalt, P' durchläuft L und P'P bildet mit L einen Winkel von der Grösse α. (Der Ort ist eine Linie).

Abgeleitete besondere Örter. Wir können von den allgemeinen Forderungen:

1) P' P soll mit L einen Winkel von der Grösse α bilden,

2) die Gestalt des Dreiecks soll unveränderlich sein,

die besonderen ableiten:

(1) P'P soll mit L einen Winkel von 90°, von 45° u. s. w. bilden,

(2) das Dreieck soll gleichseitig, gleichschenklig rechtwinklig u. s. w. sein.

Ersetzen wir nun nacheinander 1) durch (1), 2) durch (2), 1) und 2) durch (1) und (2), so erhalten wir drei Gruppen besonderer Fälle, in deren letzte z. B. der Ort gehört:

das Dreieck AP'P ist gleichseitig, P' durchläuft L und P'P ist senkrecht zu L.

III. Ableitung durch Nebenordnung. d) Ursprünglicher Ort: L' ist eine bewegliche Gerade von unveränderlicher Richtung, die P enthält und die Ebenen E_1, E_2, E_3 in P', P'', P''' schneidet; die drei Strecken P'P, P''P, P'''P bilden eine stetige Porportion. (Fläche).

Abgeleitete nebengeordnete Örter. Die zwischen den drei Strecken bestehende Beziehung ist eine Beziehung zweiten Grads. Beispiele anderer solcher Beziehungen sind:

1) die drei Strecken bilden mit a eine Porportion;

2) sie können die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden;

3) P', P'', P''', P bilden eine harmonische Punktreihe u. s. w.

Setzt man diese und ähnliche Beziehungen nacheinander in den gegebenen Ort anstatt der ursprünglichen Beziehung zwischen P'P, P''P und P'''P ein, so erhält man neue Örter, die auf gleicher Stufe mit dem gegebenen stehen.

e) Ursprünglicher Ort: ein Tetraeder hat drei feste Ecken A_1, A_2, A_3, während die vierte sich auf dem Paraboloid F bewegt; P ist Schwerpunkt des Tetraeders. (Fläche).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Umkehrungen. Überträgt man die Rolle des Schwerpunkts nacheinander der beweglichen und einer festen Ecke, so erhält man die Umkehrungen:

1) A_1, A_2, A_3, P sind die Ecken, P' der Schwerpunkt des Tetraeders;

2) A_1, A_2, P', P sind die Ecken, A_3 der Schwerpunkt.

IV. Ableitung durch Überordnung, Unterordnung und Nebenordnung zugleich. f) Urprünglicher Ort: L liegt in einer Hauptebene des Ellipsoids F und ist einer Achse von F parallel, L' schneidet L senkrecht in P' und berührt F in P'', P'P'' wird durch P halbiert. (Linie).

Abgeleiteter Ort: L ist eine in einer Hauptebene liegende Scheiteltangente des Hyperboloids F, L' schneidet L senkrecht in P' und berührt F in P'', P'P'' wird von P im Verhältnis 1 : k geteilt.

Der abgeleitete Fall ist dem ursprünglichen zugleich übergeordnet, untergeordnet und nebengeordnet. Denn 1) ist das Teilungsverhältnis 1 : k gegenüber der Halbierung ein allgemeiner Fall; 2) ist die Lage von L bei dem abgeleiteten Ort ein besonderer Fall der ursprünglichen Lage von L; 3) ist das Hyperboloid eine dem Ellipsoid gleichstehende Fläche.

12. Gegenseitige Ableitung ungleichdimensionaler Örter.

Um von einem gegebenen Ort neue Örter abzuleiten, haben wir (Abschnitt 11) an den Unveränderlichen des Orts in verschiedener Weise Abänderungen vorgenommen. Dabei blieb die Zahl und Art der Beziehungen und damit auch die Dimensionalität des Orts unverändert. Wir können aber auch durch Vermehrung und Verminderung der Beziehungen unter Veränderung der Dimensionalität neue Örter entstehen lassen. Wenn wir nämlich zu den Beziehungen eines zweidimensionalen Orts noch eine weitere hinzufügen, so erhalten wir einen neuen, eindimensionalen Ort, und umgekehrt entsteht aus einem Ort mit einer Dimension ein zweidimensionaler, wenn man eine seiner Beziehungen ausscheidet.

Jene Vermehrung der Beziehungen wird aber nicht bloss dadurch erreicht, dass man eine unabhängige, einfache Beziehung neu einführt, sondern auch dadurch, dass man eine einfache durch eine doppelte, eine doppelte durch eine dreifache Beziehung u. s. w. ersetzt. — Ebenso kann die Zahl der Beziehungen dadurch um 1 vermindert werden dass man an der Stelle einer doppelten eine einfache Beziehung u. s. w. setzt.

Beispiele. a) Ursprünglicher zweidimensionaler Ort: die Ebene E' geht durch L_1, E'' durch L_2, E''' durch A; die drei Ebenen drehen sich so, dass E' und E'' mit E''' rechte Winkel bilden; P ist Spitze des von E', E'' und E''' gebildeten Dreikants. Der Ort ist eine Fläche.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Abgeleiteter eindimensionaler Ort. Stellt man noch die weitere (einfache) Forderung, dass auch E' und E'' einen rechten Winkel miteinander bilden, so ergibt sich als neuer Ort eine Linie.

b) Ursprünglicher zweidimensionaler Ort: $A_1 A_3$ wird von P' in demselben Verhältnis geteilt wie $A_2 A_4$ von P''; P liegt in P' P''. (Fläche).

Abgeleiteter eindimensionaler Ort. Der Ort geht in einen eindimensionalen Ort über, wenn man die zweifache Forderung, dass P in P' P'' liege, durch die dreifache ersetzt, P' P'' solle durch P im Verhältnis 1 : 1 oder 1 : k oder A_1 P' : P' A_3 u. s. w. geteilt werden.

c) Ursprünglicher eindimensionaler Ort: P ist Ecke eines (windschiefen) Fünfecks, von dessen übrigen Ecken eine in L, eine zweite in E sich bewegt, während der Umfang unveränderliche Grösse und die fünf Seiten unveränderliche Richtungen haben. (Linie).

Abgeleitete zweidimensionale Örter. Der gegebene eindimensionale Ort geht in einen zweidimensionalen über, wenn man auf die Forderung unveränderlichen Umfangs verzichtet oder die feste Gerade L durch eine feste Ebene ersetzt oder nur von vier Seiten unveränderliche Richtung, von der fünften unveränderliche Länge fordert u. s. w.

13. Gegenseitige Ableitung ebener und räumlicher Örter.

Das Verhältnis gegenseitiger Ableitung kann nicht bloss zwischen räumlichen und räumlichen, sondern auch zwischen räumlichen und ebenen Örtern bestehen. Wir können uns die Aufgaben stellen: 1) aus einem gegebenen ebenen Ort räumliche, 2) aus einem gegebenen räumlichen Ort ebene Örter abzuleiten. Sind dabei die räumlichen Örter Linien, so haben wir einen besonderen Fall der Ableitung gleichdimensionaler Örter vor uns, sind sie Flächen, so handelt es sich um einen besonderen Fall der Ableitung verschiedendimensionaler Örter.

Zur Behandlung dieser besonderen Fälle reichen aber die in den Abschnitten 11 und 12 für die Hauptfälle aufgestellten Regeln nicht aus. Denn der Begriff des ebenen Orts (Abschn. 3) erfordert nicht bloss, dass die Ortskurve eben sei, sondern auch, dass alle bestimmenden Gebilde in einer Ebene, eben der der Ortskurve liegen. Beim Übergang von einem räumlichen zu einem ebenen Ort müssen daher die ursprünglich im Raum zerstreuten Gebilde in einer Ebene zusammengefasst werden, wobei Flächen durch Linien zu ersetzen sind und auch sonstige Erniedrigungen der Dimensionalität vorkommen können. Beim umgekehrten Übergang ist im Raum zu zerstreuen was ursprünglich in der Ebene zu-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sammengefasst war. Dabei können einzelne Gebilde auf eine höhere Dimensionsstufe erhoben werden, so dass an die Stelle von Punkten Linien, an die Stelle von Linien Flächen treten.

Beispiele. a) Ursprünglicher ebener Ort: gegeben in einer Ebene L_1, L_2, A_{11}, A_{22} und A_{33}; durch A_{33} geht die bewegliche Gerade L'''', die L_1 in P', L_2 in P'' schneidet; durch P' und A_{11} geht L', durch P'' und A_{22} L''; P ist Schnitt von L' und L''.

Abgeleitete räumliche Örter. α) Zweidimensionaler Ort: gegeben im Raum L_1, L_2, L_{11}, L_{22} und L_{33}; durch L_{33} geht die bewegliche Ebene E''', die L_1 in P', L_2 in P'' schneidet; durch P' und L_{11} geht E', durch P'' und L_{22} E''; P liegt im Schnitt von E' und E''.

L_1 und L_2 sind aus der Ebene herausgenommen, an die Stelle der nulldimensionalen Punkte A_{11}, A_{22}, A_{33} treten die eindimensionalen Geraden L_{11}, L_{22}, L_{33}, an die Stelle der Geraden L', L'', L''' die Ebenen E', E'', E''', an die Stelle eines orterzeugenden Schnittpunktes eine orterzeugende Schnittlinie.

β) Eindimensionaler Ort: gegeben im Raum L_1, L_2, A_{11}, L_{22} und L_{33}; durch L_{33} geht die Ebene E''', die L_1 in P', L_2 in P'' schneidet; durch P' und A_{11} geht L', durch P'' und L_{22} E''; P ist der Schnitt von L' und E''.

Abgesehen davon, dass A_{11} und L' unverändert beibehalten werden, finden sich hier dieselben Abänderungen von a) wie in α).

b) Ursprünglicher zweidimensionaler Ort: P ist Fusspunkt eines Lotes, das vom Mittelpunkt des Ellipsoids F auf eine an F hingleitende Berührungsebene E' gefällt wird.

Abgeleiteter ebener Ort: P ist Fusspunkt eines Lotes, das vom Mittelpunkt der Ellipse K auf eine an K hingleitende Tangente L' gefällt wird.

Es ist hier die Fläche F durch die Linie K, die Berührungsebene E' durch die Tangente L' ersetzt.

c) Ursprünglicher eindimensionaler räumlicher Ort: gegeben im Raum L_1, L_2, L_3, A_1 in L_1, A_2 in L_2, A_3 in L_3; in L_1, L_2 und L_3 bewegen sich die Punkte P', P'' und P''' so, dass sie im gleichen Augenblick durch A_1, A_2 und A_3 gehen und ihre Geschwindigkeiten immer das gleiche Verhältnis zu einander haben; P ist Schwerpunkt des Dreiecks P'P''P'''.

Abgeleiteter ebener Ort. Abgesehen davon, dass L_1, L_2 und L_3 in einer Ebene liegen, alles wie in dem gegebenen räumlichen Ort.

Hier ist die Ableitung mit keiner Änderung der Dimensionsstufen einzelner Gebilde verbunden.

Zum Schluss wollen wir darauf hinweisen, dass ein einfaches Mittel zur Ableitung räumlicher aus ebenen Örtern in der Zentral- und Parallelprojektion besteht. Aber es sind nur Kegel- und Zylinderflächen, was man durch dieses Mittel erhält.

14. Grad der Ortsgleichungen.

Ein zweidimensionaler Ort wird algebraisch dargestellt durch eine Gleichung, die aus dem System der Bedingungs-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gleichungen (Abschnitt 9) hervorgeht, wenn man daraus alle Veränderlichen mit Ausnahme der Koordinaten des orterzeugenden Punkts, ξ, η, ζ, ausscheidet. Der Grad jener Gleichung hängt ab vom Grad der Bedingungsgleichungen. Dieses Abhängigkeitsverhältnis allgemein zu untersuchen, ist eine Aufgabe der Algebra. Wir beschränken uns hier auf die Behandlung der einfachsten Fälle.

Enthält das System der Bedingungsgleichungen n auszuscheidende Veränderliche, so muss die Zahl der Gleichungen $n + 1$ sein. Sind nun n dieser Gleichungen vom ersten Grad, so können wir mit deren Hilfe jene n Veränderlichen als Funktionen ersten Grads von ξ, η und ζ darstellen. Durch Einsetzung dieser Funktionen in die $(n + 1)$te Gleichung erhalten wir für den Ort eine Gleichung von demselben Grad wie die $(n + 1)$te Gleichung. Daraus ergibt sich der Satz: besteht das System der Bedingungsgleichungen nur aus Gleichungen ersten Grads, so ist die Gleichung des Orts vom ersten Grad, der Ort eine Ebene; enthält es neben Gleichungen ersten Grads eine Gleichung zweiten Grads, dritten Grads, pten Grads, so ist der Ort eine Fläche zweiten, dritten, pten Grads. Sind mehr als eine Gleichung von höherem als dem ersten Grad, so ist der Ort im allgemeinen von höherem als dem zweiten Grad.

Handelt es sich um die algebraische Darstellung eines eindimensionalen Orts, so sind zwei Gleichungen notwendig. Bei n auszuscheidenden Veränderlichen müssen daher $(n + 2)$ Bedingungsgleichungen vorhanden sein. Sind nun diese alle vom ersten Grad, so sind die zwei Ortsgleichungen ebenfalls vom ersten Grad, der Ort ist der Schnitt zweier Ebenen oder eine Gerade. Ist neben Gleichungen ersten Grads eine einzige Gleichung zweiten, dritten, pten Grads vorhanden, so ist der Ort eine ebene Kurve und zwar zweiten, dritten, pten Grads. Übersteigen mehrere Bedingungsgleichungen den ersten Grad, so ist der Ort im allgemeinen eine doppelt gekrümmte Kurve.

Mit Hilfe dieser Regeln können wir in vielen Fällen den Grad der Ortsgleichungen und damit die Natur des Orts bestimmen, ohne das System der Bedingungsgleichungen aufzulösen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Umgekehrt können wir die Beziehungen oder Forderungen im voraus so gestalten, dass ein Ort von bestimmter Natur sich ergeben muss. Wir brauchen nur Beziehungen zu wählen, die durch Gleichungen von bestimmtem, unserem Zweck entsprechendem Grad dargestellt sind.

Zur Erleichterung dieser Wahl stellen wir einige häufige und leicht zu bildende Beziehungen unter Angabe des Grads der sie darstellenden Gleichungen zusammen, wobei wir die in Abschnitt 4, Anmerkung, aufgeführten Bezeichnungen anwenden. Ausserdem setzen wir voraus, dass eine bewegliche Ebene E' durch eine Gleichung von der Form $A'x + B'y + C'z + 1 = 0$, eine bewegliche Gerade L' durch $\begin{cases} x = m'z + a' \\ y = q'z + b' \end{cases}$, eine veränderliche Fläche zweiten Grads F' durch $A'x^2 + A''y^2 + A'''z^2 + 2B'xy + 2B''yz + 2B'''zx + 2C'x + 2C''y + 2C'''z + 1 = 0$ dargestellt seien.

I. Zu einer Gleichung ersten Grads führen die Forderungen:

1) P' oder P liege in E.
2) E' gehe durch A.
3) Die Fläche zweiten Grads F' gehe durch A.
4) E' $\perp$ E. 5) L' $\parallel$ E. 6) L' $\perp$ L.
7) Zwischen mehreren veränderlichen Strecken mit unveränderlichen Richtungen bestehe eine Beziehung ersten Grads.

II. Zu zwei Gleichungen ersten Grads:

1) P' liege in L.
2) Die Kurve zweiten Grads K' gehe durch A.
3) P'P'' oder P'P liege in E.
4) L' $\perp$ E. 5) L' $\parallel$ L.
6) E' $\parallel$ E. 7) L' $\parallel$ L''.

III. Zu drei Gleichungen ersten Grads:

1) Eine Strecke mit zwei beweglichen Endpunkten werde durch einen festen oder beweglichen Punkt,
2) eine Strecke mit einem festen und einem beweglichen Endpunkt werde durch einen beweglichen Punkt in dem unveränderlichen Verhältnis 1 : k geteilt.

IV. Zu einer Gleichung zweiten Grads:

1) P' oder P liege in der Fläche zweiten Grads F.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) $\measuredangle$ (E', E) = α. 3) $\measuredangle$ (L', E) = α.
4) $\measuredangle$ (L', L) = α. 5) E' $\perp$ E".
6) Eine Strecke mit einem oder zwei beweglichen Endpunkten sei gleich d.
7) L' || E'. 8) L' $\perp$ L".
9) Zwei veränderliche Strecken verhalten sich wie 1 : k.
10) Zwischen mehreren veränderlichen Strecken mit unveränderlichen Richtungen bestehe eine Beziehung zweiten Grads.
11) Ein Dreieck mit zwei festen und einer beweglichen Ecke habe die Fläche c^2.
12) Die Flächen zweier Dreiecke mit je zwei festen und einer veränderlichen Ecke verhalten sich wie 1 : k.

V. Zu einer Gleichung ersten und einer Gleichung zweiten Grads:

1) P' liege in der Kurve zweiten Grads K.

VI Zu zwei Gleichungen zweiten Grads:

1) P' liege in dem Schnitt zweier Flächen zweiten Grads F_1 und F_2.
2) Drei Punkte, von denen mindestens zwei beweglich sind, sollen in einer Geraden liegen.
3) E' || E". 4) L' $\perp$ E'.

VII. Zu einer Gleichung vierten Grads:

1) $\measuredangle$ (E', E") = α. 2) $\measuredangle$ (L', E') = α. 3) $\measuredangle$ (L', L") = α.
4) Zwischen zwei Strecken, deren jede mindestens einen beweglichen Endpunkt hat, bestehe eine Beziehung ersten Grads.
5) Zwischen den Flächen zweier Dreiecke mit je zwei festen und einer beweglichen Ecke bestehe eine Beziehung ersten Grads.

Beispiel. Gegeben seien die zwei festen Ebenen E_1 und E_2; das windschiefe Viereck P'P"P'"P wandle sich so um, dass die einfachen Forderungen erfüllt werden:

1) P' bewege sich in E_1,
2) P" » » » E_2,

ferner die Doppelforderungen:

3) P P' habe unveränderliche Richtung,
4) P'P" » » » ,
5) P"P'" » » » ,
6) P'"P » » » ,

und endlich die weitere einfache Forderung:

7) der Umfang von P'P"P'"P sei unveränderlich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Benützen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen z-achse der Schnitt von E_1 und E_2 ist und dessen xz- und yz-ebene die Winkel (E_1, E_2) halbieren, und wenden die oben (Abschn. 4) aufgestellten Grundsätze für die Bezeichnung an, so erhalten wir folgende Bedingungsgleichungen, deren Reihenfolge derjenigen der Forderungen entspricht:

$$\begin{cases} 1)\ y' = m x' \\ 2)\ y'' = -m x'' \\ 3)\ \dfrac{x' - \xi}{\cos \alpha_1} = \dfrac{y' - \eta}{\cos \beta_1} = \dfrac{z' - \zeta}{\cos \gamma_1} \\ 4)\ \dfrac{x'' - x'}{\cos \alpha_2} = \dfrac{y'' - y'}{\cos \beta_2} = \dfrac{z'' - z'}{\cos \gamma_2} \\ 5)\ \dfrac{x''' - x''}{\cos \alpha_3} = \dfrac{y''' - y''}{\cos \beta_3} = \dfrac{z''' - z''}{\cos \gamma_3} \\ 6)\ \dfrac{\xi - x'''}{\cos \alpha} = \dfrac{\eta - y'''}{\cos \beta} = \dfrac{\zeta - z'''}{\cos \gamma} \\ 7)\ \dfrac{x' - \xi}{\cos \alpha_1} + \dfrac{x'' - x'}{\cos \alpha_2} + \dfrac{x''' - x''}{\cos \alpha_3} + \dfrac{\xi - x'''}{\cos \alpha} = s. \end{cases}$$

Die Zahl der einfachen Gleichungen dieses Systems ist elf. Da alle diese Gleichungen vom ersten Grad sind und die Zahl der auszuscheidenden Veränderlichen neun beträgt, erhält man zwei Ortsgleichungen ersten Grads, der Ort ist also eine Gerade.

Dieses Ergebnis hätten wir auch finden können, ohne die Gleichungen 1)–7) einzeln aufzustellen. Denn von Anfang an ist bekannt, dass mit den Punkten P', P'', P''' neun auszuscheidende veränderliche Koordinaten auftreten und ausserdem, dass die Forderungen 1), 2) und 3) drei einfache, die Forderungen 3) bis 6) vier Doppelgleichungen ersten Grads ergeben. Daraus folgt, dass wir zur Darstellung des Orts zwei Gleichungen ersten Grads erhalten.

Ersetzt man die Forderung 7) nacheinander durch die Forderungen:

a) $PP' = d$,

b) $PP' + P''P''' = P'P'' + P'''P$,

c) $PP' : P'P'' = P''P''' : P'''P$,

so erhält man für a) eine Gerade, für b) eine Gerade, für c) eine Kurve zweiten Grads; denn a) und b) sind Forderungen ersten, c) ist eine Forderung zweiten Grads.

Ersetzt man 3) und 7) durch

d) $\begin{cases} P'P'' = P''P''' = P'''P \\ P'P = d \end{cases}$ oder e) $\begin{cases} P''P''' = d \\ \measuredangle\, P'PP''' = R, \end{cases}$

so erhält man für d) eine Kurve zweiten Grads, für e) eine einfache Forderung zweiten Grads. Denn d) enthält eine Doppelforderung ersten und eine einfache Forderung zweiten Grads, e) eine einfache Forderung ersten und eine einfache Forderung zweiten Grads.

15. Natürliches System der Örter.

Eine naturgemässe Klassifizierung der Örter muss sich auf den Ortsbegriff gründen. Die Ein-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

teilungsprinzipien für eine solche Klassifizierung bieten die Elemente des Orts: die bestimmenden festen Gebilde, die bestimmenden beweglichen Gebilde und die bestimmenden unveränderlichen Beziehungen.

Unter Benützung dieser Elemente können wir zunächst nach der Zahl der bestimmenden festen Gebilde, auf die der orterzeugende Punkt P bezogen ist, Klassen bilden. Wir reihen demnach in die erste Klasse Örter mit einem, in die zweite Örter mit zwei, in die dritte Örter mit drei bestimmenden festen Gebilden u. s. w. ein. Die Zahl der Klassen ist also unendlich.

Für die Bildung von Unterklassen sodann benützen wir die Artverschiedenheit der festen Gebilde. Die dritte Klasse z. B. zerfällt in zehn Unterklassen, da P innerhalb dieser Klasse auf drei feste Punkte, auf zwei feste Punkte und eine feste Fläche, auf zwei feste Punkte und eine feste Linie, auf einen festen Punkt und zwei feste Flächen u.s.w. bezogen werden kann. Ebenso hat die erste Klasse drei, die zweite sechs, die n te $\binom{n+2}{n}$ Unterklassen. Die Zahl der einer bestimmten Klasse zugehörigen Unterklassen ist demnach endlich.

Ferner können wir in jeder Unterklasse zwei Stufen unterscheiden.

Die erste Stufe soll Örter enthalten, deren verbindende Züge elementar, d. h. nur aus Punkten, Geraden und Ebenen zusammengesetzt sind (Abschn. 5).

Auf der zweiten Stufe sind unter die verbindenden Gebilde Kurven und Flächen zweiten Grads aufgenommen.*

Jede Stufe zerlegen wir in zwei Unterstufen: auf der ersten ist die Zahl der verbindenden Einzelgebilde nicht grösser als die Normalzahl (Abschn. 5), auf der zweiten ist sie grösser als diese.

Wir können aber noch weiter gehen und im Anschluss an Abschnitt 10 auf jeder Unterstufe Gruppen von Örtern aufstellen, deren Verbindungszüge in der Art und Zahl der einzelnen Bestandteile, und sodann innerhalb jeder Gruppe Untergruppen, deren Örter

* Wollten wir die Möglichkeit der Unterbringung ganz beliebiger Örter festhalten, so hätten wir nur anstatt bewegliche Kurven und Flächen zweiten Grads zu setzen: bewegliche Kurven und Flächen beliebiger höherer Art.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

auch in der Reihenfolge jener Bestandteile d. h. im Typus (Abschnitt 10) übereinstimmen.

Die Zahl der Gruppen der ersten Unterstufe ist endlich, die Gruppenzahl der zweiten Unterstufe unendlich. Dagegen sind die Untergruppen jeder einzelnen Gruppe nur in endlicher Zahl vorhanden.

Innerhalb der Untergruppen endlich können wir die Einteilung weiterführen dadurch, dass wir die Art der Beziehungen als Einteilungsprinzip verwenden und etwa Örter mit Lagebeziehungen, Örter mit Grössenbeziehungen und Örter mit gemischten Beziehungen unterscheiden u.s.w.

So erhalten wir ein natürliches System der Örter, dessen Hauptabteilungen sich in folgender Weise übersichtlich darstellen lassen.

I. Klasse: P auf ein festes Gebilde bezogen.

1. Unterklasse: P auf einen festen Punkt bezogen.
2. Unterklasse: P auf eine feste Fläche bezogen.
3. Unterklasse: P auf eine feste Linie bezogen.

Bei dem beschränkten Umfang des Gebiets der ersten Klasse unterlassen wir hier die Unterscheidung von Stufen und Unterstufen.

II. Klasse: P auf zwei feste Gebilde bezogen.

1. Unterklasse: P auf zwei feste Punkte bezogen.
   - Erste Stufe: die Verbindung besteht aus Elementargebilden (Punkten, Geraden, Ebenen).
     - Erste Unterstufe: die Zahl der verbindenden Einzelgebilde ist nicht grösser als die Normalzahl.
     - Zweite Unterstufe: die Zahl der verbindenden Einzelgebilde ist grösser als die Normalzahl.
   - Zweite Stufe: die Verbindung enthält krumme Gebilde.
     - Erste Unterstufe: die Zahl der verbindenden Einzelgebilde ist nicht grösser als die Normalzahl.
     - Zweite Unterstufe: die Zahl der verbindenden Einzelgebilde ist grösser als die Normalzahl.

2. Unterklasse: P auf einen festen Punkt und eine feste Fläche bezogen.

Stufen und Unterstufen hier und in allen folgenden Unterklassen wie oben in der ersten Unterklasse.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Unterklasse: P auf einen festen Punkt und eine feste Linie bezogen.

4. Unterklasse: P auf zwei feste Flächen bezogen.

5. Unterklasse: P auf eine feste Fläche und eine feste Linie bezogen.

6. Unterklasse: P auf zwei feste Linien bezogen.

III. Klasse: P auf drei feste Gebilde bezogen.

1. Unterklasse: P auf drei feste Punkte bezogen.

2. Unterklasse: P auf zwei feste Punkte und eine feste Fläche bezogen.

3. Unterklasse: P auf zwei feste Punkte und eine feste Linie bezogen.

4. Unterklasse: P auf einen festen Punkt und zwei feste Flächen bezogen.

5. Unterklasse: P auf einen festen Punkt, eine feste Fläche und eine feste Linie bezogen.

. . . . . .

. . . . . .

10. Unterklasse: P auf drei feste Linien bezogen.

. . . . . .

. . . . . .

Nte Klasse: P auf n feste Gebilde bezogen.

1. Unterklasse: P auf n feste Punkte bezogen.

2. Unterklasse: P auf (n — 1) feste Punkte und eine feste Fläche bezogen.

3. Unterklasse: P auf (n — 1) feste Punkte und eine feste Linie bezogen.

4. Unterklasse: P auf (n — 2) feste Punkte und zwei feste Flächen bezogen.

. . . . . .

. . . . . .

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

qte Unterklasse: P auf n_1 feste Punkte, n_2 feste Flächen und $(n - n_1 - n_2)$ feste Linien bezogen.
$(q = {}^1/_2 [n - n_1][n - n_1 + 3] - n_2 + 1)$.

. . . . . .

. . . . . .

$\binom{n+2}{n}$te (letzte) Unterklasse: P auf n feste Linien bezogen.

In dem Fachwerk dieses Systems findet jeder Ort seine bestimmte Stelle. Manche Örter allerdings lassen sich auf mehrfache Weise einreihen, solche nämlich, deren Bau eine mehrfache Auffassung zulässt.

Beispiele. a) P gehört als Ecke einem Viereck an, in dem zwei Gegenseiten durch zwei feste Punkte, die zwei anderen Gegenseiten durch zwei feste Gerade in bestimmten unveränderlichen Verhältnissen geteilt werden.

Die Stelle des Ortes ist: vierte Klasse, sechste Unterklasse, erste Stufe, zweite Unterstufe, Gruppe (A_1, A_2, L_1, L_2, P', P'', P''', P'''', P^V, L', L'', L''', L'''').

b) Die Abstände des Punktes P von einem festen Punkt, einer festen Geraden und einer festen Ebene sind gleich.

Stelle des Orts: dritte Klasse, fünfte Unterklasse, erste Stufe, zweite Unterstufe, Gruppe (A, E, L, P', P'', L', L'', L''').

Betrachtet man P als Mittelpunkt einer Kugelfläche F', die durch den festen Punkt geht und die feste Ebene und die feste Gerade berührt, so ist die Stelle des Orts: dritte Klasse, fünfte Unterklasse, zweite Stufe, erste Unterstufe, Gruppe (A, E, L, P', P'', F').

Das oben aufgestellte natürliche System ist selbstverständlich nicht das einzig mögliche. Die Gliederung kann mehr oder weniger zusammengesetzt, die Einteilungsprinzipien können in anderer Weise einander übergeordnet und untergeordnet sein als oben: wenn nur keine fremdartigen, ausserhalb des Ortsbegriffs liegenden Leitgedanken hereingetragen werden, so ist das System der Örter ein natürliches.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zweite Abteilung; räumliche Einzelörter in natürlicher Ordnung.

Vorbemerkungen. 1) Die Bezeichnungsweise, die im folgenden zur Anwendung kommt, ist die in der ersten Abteilung, Abschn. 4, Anm., angegebene. Dazu kommen noch die Zeichen f_1, φ_1 für Funktionen ersten, f_2, φ_2 für Funktionen zweiten Grads.

2) Hinter jedem Ort steht eine römische Ziffer oder eine Gruppe solcher Ziffern, durch die der Grad der in Parallelkoordinaten dargestellten Ortsgleichung angegeben wird. Eine Gruppe von mehreren Ziffern, die durch Punkte getrennt sind, bedeutet algebraisch eine Flächengleichung, die sich in mehrere Teilgleichungen zerlegen lässt, geometrisch eine Fläche, die aus mehreren einfacheren Flächen besteht. Zum Beispiel I. I. II zeigt an, dass eine Gleichung vierten Grads in zwei Gleichungen ersten und eine zweiten Grads zerfällt oder dass eine Fläche aus zwei Ebenen und einer Fläche zweiten Grads zusammengesetzt ist. Dagegen bedeuten zwei durch ein Komma getrennte römische Ziffern die zwei Gleichungen einer Linie, zum Beispiel I, II die Gleichungen einer Linie zweiten Grads, I.I, II die Gleichungen eines Paares solcher Linien.

3) Die folgende Zusammenstellung enthält vorwiegend elementare Örter (1. Abt., Abschn. 8); höhere Örter sind aufgenommen, soweit sie ein besonderes Interesse, aber keine besonderen Schwierigkeiten bieten. Vollständigkeit, auch nur in Beziehung auf die Ortsgattungen, kann und soll selbstverständlich nicht geboten werden.

4) Bei dem mässigen Umfang der Zusammenstellung genügt eine einfachere Gliederung als die beispielsweise in Abschnitt 15 der 1. Abteilung entwickelte.

5) Bei der sprachlichen Fassung der folgenden Aufgaben ist besondere Rücksicht auf Kürze und Raumersparnis genommen worden. Es ist aber nicht schwer, wenn man es wünscht, dem Ausdruck mehr Fülle zu geben und ihn dadurch manchmal gefälliger zu gestalten.

I. Klasse: P auf ein festes Gebilde bezogen.

1. Unterklasse: P auf einen festen Punkt bezogen. (A).

1. AP = a. II.

2. Unterklasse: P auf eine feste Fläche bezogen. (F).

1. P'P ist senkrecht zu E in P' und = a. I.

2. P'P ist senkrecht zu der Kugelfläche F und = a. II. II.

3. P'P" ist eine Sehne der Kugel F, hat die Länge a und wird von P im Verhältnis 1 : k geteilt. II.

3. Unterklasse: P auf eine feste Linie bezogen. (K).

Erste Stufe: die verbindenden Züge sind nur aus Punkten, Geraden und Ebenen zusammengesetzt.* (S. 1. Abt., Abschn. 5 und 15).

1. P'P ist senkrecht auf L in P' und = a. II.

2. P'P ist senkrecht auf dem Kreis K in P' und = a. IV.

* gilt für die erste Stufe aller folgenden Unterklassen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

P'P"P ist ein Dreieck, dessen Ebene senkrecht auf einer Achse der Ellipse K steht; P'P" ist eine auf derselben Achse senkrechte Sehne von K;

3. P'P"P hat unveränderliche Gestalt. I, II.
4. „ „ „ Fläche. IV.
5. „ „ unveränderlichen Umfang. IV.

Entsprechende Fälle für die Hyperbel und Parabel.
Verallgemeinerung: die Sehne P'P" hat beliebige unveränderliche Richtung. —

Zweite Stufe: die verbindenden Züge enthalten auch Kurven und Flächen zweiten Grads.* (S. 1. Abt., Abschn. 5 und 15).

Die P enthaltende Ellipse (Hyperbel) K' bewegt sich so, dass ihre Ebene senkrecht zu einer Achse der Ellipse (Hyperbel, Parabel) K und eine ihrer Achsen eine Sehne von K ist;

1. K' hat unveränderliche Gestalt. II.
2. Die zweite Achse von K' ist = a. IV. —

Die P enthaltende Parabel K' hat mit der Ellipse (Hyperbel, Parabel) K eine Sehne P'P" gemeinsam, die senkrecht zu einer Achse von K ist; die Ebene von K' ist senkrecht zu der Ebene von K;

3. K' bleibt sich kongruent. II.
4. P'P" ist Parameter von K'. IV. —

Die Achsen der Parabeln K und K' sind parallel, ihre Ebenen senkrecht aufeinander, K' enthält P;

5. Der Scheitel von K' durchläuft K. II.
6. Der Brennpunkt von K' durchläuft K. II.
7. Ein Parameterendpunkt von K' durchläuft K. II. —

Die Ebene der P enthaltenden Parabel K' ist senkrecht zu einer Achse der Ellipse (Hyperbel, Parabel) K, ihre Achse liegt in der Ebene von K, ihr Scheitel durchläuft K;

8. K' bleibt sich kongruent. IV.
9. Auch der Brennpunkt von K' bewegt sich in K. IV. —

Die Ebene der P enthaltenden, sich kongruent bleibenden Ellipse (Hyperbel) K' ist senkrecht zu einer Achse der

* gilt für die zweite Stufe aller folgenden Unterklassen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ellipse (Hyperbel, Parabel) K, eine Achse von K' liegt in der Ebene von K;

10. Der Mittelpunkt von K' durchläuft K. IV.
11. Ein Scheitel „ „ „ „ IV.
12. Ein Brennpunkt „ „ „ „ IV.—

II. Klasse: P auf zwei feste Gebilde bezogen.

1. Unterklasse: P auf zwei feste Punkte bezogen. (A_1, A_2).

Erste Stufe. 1. $A_1P^2 + k.A_2P^2 = c^2$. II.

Besonderer Fall: $k = -1$. I.

2. $A_1P + k.\ A_2P = c$. IV.

Besondere Fälle: a) $k = \pm 1$. II. b) $c = o$. II.

3. $A_1P : c = c : A_2P$. IV. 4. $\sphericalangle A_1PA_2 = \alpha$. IV.

Besonderer Fall.

5. $\sphericalangle A_1A_2P = 2 \sphericalangle PA_1A_2$. II. II.
6. $\sphericalangle A_1A_2P = \sphericalangle PA_1A_2 + \alpha$. IV.
7. $\operatorname{ctg} PA_1A_2 + k.\operatorname{ctg} A_1A_2P + k_1 = o$. IV.
8. Fläche $A_1A_2P = c^2$. II.
9. $A_1P' = c_1$, $A_2P'' = c_2$, A_1P' und $A_2P'' \perp A_1A_2$, $A_1P' \perp A_2P''$, P Mitte von $P'P''$. I, II.

Verallgemeinerung: $\sphericalangle A_2A_1P' = \alpha_1$ u. s. w. I, II.

Zweite Stufe. 1. Durch A_1 und A_2 geht die Kugel F'; P ist ein Endpunkt des mit A_1A_2 parallelen Durchmessers. II.

K' ist eine durch A_1 und A_2 gehende Ellipse (Hyperbel) von unveränderlicher Gestalt, deren eine Achse mit A_1A_2 den Winkel α bildet;

2. P ist Mittelpunkt von K'. II.
3. P ist ein Scheitel von K'. IV.
4. P ist ein Brennpunkt von K'. IV.

Entsprechende Fälle für die Parabel. IV. —

5. P ist ein Parameterendpunkt einer Ellipse (Hyperbel) mit den Gegenscheiteln A_1 und A_2. IV. IV.

2. Unterklasse: P auf einen festen Punkt und eine feste Fläche bezogen. (A, F).

Erste Stufe. 1. $\sphericalangle (E, AP) = \alpha$. II.

Besonderer Fall: A in E. II.

2. P' liegt in dem Ellipsoid (Hyperboloid, Paraboloid) F, AP' wird von P im Verhältnis 1 : k geteilt. II.

Besondere Fälle.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Von A aus wird ein Berührungskegel an das Ellipsoid (Hyperboloid, Paraboloid) F gelegt. II.

Besondere Fälle: a) A in einer Achse von F. II. b) F ein Drehungsellipsoid, eine Kugel u. s. w. II.

4. AP berührt das Ellipsoid (Hyperboloid, Paraboloid) F in P. I, II.

Besondere Fälle.

5. AP' berührt das Ellipsoid (Hyperboloid, Paraboloid) F in P' und wird von P im Verhältnis 1:k geteilt. I, II.

Besondere Fälle.

6. Von A wird auf eine bewegliche Berührungsebene des Ellipsoids (Hyperboloids, Paraboloids) F ein Lot gefällt, dessen Fusspunkt P ist. IV. (Paraboloid: III).

Besondere Fälle: a) A ist Mittelpunkt, Scheitel u. s. w. von F. IV. (Paraboloid: III). b) F ist ein Drehungsellipsoid (Drehungshyperboloid) mit Brennpunkt A. II. II. (Drehungsparaboloid: I. II).

P' in E, $P'P \perp E$;

7. $AP + k.\ P'P = c$. II.

Besondere Fälle: a) $k = \pm 1$, b) $c = o$, c) A in E. II.

8. $AP' + k.\ P'P = c$. II.

Besondere Fälle wie in 7. II.

9. $\sphericalangle P'AP = R$. II.

10. Dreieck AP'P hat unveränderliche Gestalt. I, II.

Besondere Fälle. —

11. Drei Seiten eines windschiefen Vierecks, dem P als Ecke angehört, haben unveränderliche Richtungen, die vierte Seite wird von A, die dieser gegenüberliegende Seite von E in unveränderlichem Verhältnis geteilt. I.

Besondere Fälle. Verwandte Fälle: an die Stelle von E tritt eine Kugel F mit Mittelpunkt A u. s. w. II.

Zweite Stufe. 1. P ist Mittelpunkt einer Kugel F', die durch A geht und E (oder eine Kugel F) in einem Kreise vom Halbmesser c schneidet. II.

Besonderer Fall: $c = o$. II.

2. Die Kugel F', deren Halbmesser unveränderlich ist, dreht sich um einen auf ihr liegenden festen Punkt; P ist Pol von E in Beziehung auf F'. IV.

3. Die Kugel F', deren Halbmesser unveränderlich ist, rollt auf E; E' ist Polarebene von A in Beziehung auf F', P Fusspunkt des von A auf E' gefällten Lots. III.

3. Unterklasse: P auf einen festen Punkt und eine feste Linie bezogen. (A, K).

Erste Stufe. 1. A in L, $\sphericalangle (L, AP) = \alpha$. II.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. A und P' in L, P'P $\perp$ L; $f_1(AP', P'P) = o$. II.

Besondere Fälle.

A und P' in L, P'P $\perp$ L, AP'PP" ein Rechteck;

3. AP'PP" hat unveränderliche Gestalt. II.

Besonderer Fall.

4. AP'PP" hat unveränderlichen Umfang. II.

5. AP'PP" hat unveränderlichen Inhalt. IV. —

6. Von A aus durch die Ellipse (Hyperbel, Parabel) F eine Kegelfläche zu legen. II.

Besondere Lagen von A.

7. P' in der Ellipse (Hyperbel, Parabel) F; P teilt AP' im Verhältnis 1:k. I, II.

Besondere Fälle.

P' in L, P'P $\perp$ L;

8. Dreieck AP'P gleichschenklig (drei Fälle). II.

9. „ „ (bei A oder P) rechtwinklig. II.

10. „ „ gleichseitig. II, II. Verallgemeinerung. —

P' in L, P'P" $\perp$ L, P Schwerpunkt von Dreieck AP'P";

11. AP'P" gleichschenklig. II.

12. AP'P" (bei A oder P") rechtwinklig. II.

13. AP'P" gleichseitig. II, II. Verallgemeinerung.

Umkehrungen von 11 bis 13: a) A ist Schwerpunkt von P'P"P, b) P' von AP"P, c) P" von AP'P. Gebilde derselben Art wie in 11 bis 13. —

In dem Viereck P'P"P'"P werden die Gegenseiten PP' und P"P'" von A und L in unveränderlichen Verhältnissen geteilt, die beiden andern Gegenseiten P'P" und P'"P haben unveränderliche Richtungen;

14. $P'P'' + P'''P = c$. I.

Verallgemeinerung: $f_1(P'P'', P'''P) = o$. I.

15. $P'P'' = c_1$, $P'''P = c_2$. I, I.

16. $\sphericalangle P = R$. II.

Verwandte Fälle: an die Stelle von L tritt in 14 und 15 eine Ellipse K mit Mittelpunkt A u. s. w. I, II. —

Zweite Stufe. 1. P ist Mittelpunkt einer Kugel F', die durch A geht und aus L eine Sehne von der Länge c herausschneidet. II.

Besonderer Fall: $c = o$. II.

2. In L verschiebt sich die Achse eines sich kongruent bleibenden Paraboloids F', dessen Hauptebenen unveränderliche Stellung haben; von A wird an F' ein Berührungskegel gelegt; in der Berührungskurve liegt P. II.

Besonderer Fall: F' ist ein Drehungsparaboloid. II. Verwandte Fälle: F' ist eine Kugel, ein Ellipsoid, ein Hyperboloid. IV.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. In L verschiebt sich die Achse eines sich kongruent bleibenden Paraboloids F', dessen Hauptebenen unveränderliche Stellung haben; E' ist Polarebene von A in Beziehung auf F', P Fusspunkt des von A auf E' gefällten Lots. I, I.

Besonderer Fall wie 2. I, I. Verwandte Fälle wie 2. I, III.

4. In L verschieben sich mit gleicher Geschwindigkeit die Mittelpunkte zweier je sich kongruent bleibender Kugeln F' und F''; P liegt in dem Schnitt der auf F' und F'' bezogenen Polarebenen von A. II.

Verwandte Fälle für Ellipsoid (Hyperboloid), II; für Paraboloid, I.

4. Unterklasse: P auf zwei feste Flächen bezogen. (F_1, F_2).

Erste Stufe. L' hat unveränderliche Richtung, schneidet E_1 in P', E_2 in P'' und enthält P;

1. f_1 (P'P, P''P) = o. I.

Besondere Fälle: a) P'P + P''P = c. I. b) P'P = k. P''P. I. u. s. w. Verwandte Fälle: an die Stelle von E_1 und E_2 tritt ein Ellipsoid mit einer seiner Hauptebenen u. s. w. II.

2. P'P.P''P = c^2. II.

Verallgemeinerung: f_2 (P'P, P''P) = o. II. —

P' in E_1, P'' in E_2, P'P $\perp$ E_1, P''P $\perp$ E_2;

3. f_1 (P'P, P''P) = o. I.

Besondere Fälle. I.

4. f_2 (P'P, P''P) = o. II.

Besondere Fälle. II. –

5. E ist eine Hauptebene des Ellipsoids F, P' in E, P'' in F, P'P $\perp$ E, P''P parallel einer in E liegenden Ellipsoidachse, f_1 (P'P, P''P) = o. II.

Allgemeiner Fall. II.

Zwei Ecken eines Dreiecks von unveränderlichen Seitenrichtungen bewegen sich in E_1 und E_2;

6. P ist die dritte Ecke des Dreiecks. I.

7. P ist Schwerpunkt. I.

8. P ist Höhenschnittpunkt. I.

9. P ist Mittelpunkt des Umkreises I. —

Umkehrungen. I. Andere verwandte Fälle: an die Stelle von E_1 und E_2 trete eine Kugel mit einer Durchmesserebene u. s. w. II. —

Zwei Seiten eines Dreiecks, die in P zusammenstossen, haben unveränderliche Richtungen; zwei von den drei Punkten: Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt, Mittelpunkt des Umkreises bewegen sich in E_1 und E_2;

10. die dritte Seite hat unveränderliche Richtung. I.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

11. Die dritte Seite ist gleich a. II.

12. Der Umfang ist gleich s. II.

13. Der Inhalt ist gleich c^2. II. —

Umkehrungen. I und II. —

Zwei Seiten eines Dreiecks, die in P zusammenstossen, haben unveränderliche Richtungen; aus der dritten Seite wird durch E_1 und E_2 das mittlere Drittel herausgeschnitten;

14. die dritte Seite hat unveränderliche Richtung. I.

15. Die Summe der zwei in P zusammenstossenden Seiten ist unveränderlich. I.

16. Der Umfang des Dreiecks ist unveränderlich. II.

17. Der Inhalt ist unveränderlich. II. —

Verallgemeinerung: E_1 und E_2 teilen die dritte Seite in drei Stücke von beliebigen unveränderlichen Verhältnissen. I und II. —

18. Zwei Ecken (oder Seitenmitten) eines Vierecks mit unveränderlichen Seitenrichtungen, dem P als Ecke angehört, bewegen sich in E_1 und E_2. I. Allgemeinere und verwandte Fälle.

19. Der Umfang des Vierecks in 18 ist unveränderlich. I,I.

Allgemeiner Fall. I,I.

20. Die Seiten des Vierecks in 18 bilden eine Proportion. I,II.

Allgemeiner Fall. I,II.

21. Das Ellipsoid F_1 und die Kugel F_2 haben den Mittelpunkt gemeinsam; an F_1 gleitet die Berührungsebene E', P ist Pol von E' in Beziehung auf F_2. II.

Allgemeiner Fall: F_1 und F_2 sind beliebige Flächen zweiten Grads. II. Hieraus abzuleitende besondere Fälle.

Zweite Stufe. 1. P ist Mittelpunkt einer Kugel F', die aus E_1 und E_2 Kreise mit den Halbmessern c_1 und c_2 herausschneidet. II.

Besondere Fälle: $c_1 = o$ u. s. w. I.I und II.

Ein Drehungsellipsoid F', dessen Äquator sich in E_1 verschiebt, wird von E_2 berührt; P ist ein Scheitel von F';

2. der Äquatorhalbmesser ist gleich a. II.

3. F' hat unveränderliche Gestalt. I.I.

Besonderer Fall. — Gleichstehende Fälle. —

Ein Drehungsellipsoid F' wird von E_1 in einem Scheitel und ausserdem von E_2 berührt; P ist Mittelpunkt oder zweiter Scheitel von F';

4. der Äquatorhalbmesser von F' ist gleich a. II.

5. F' hat unveränderliche Gestalt. II.

Besonderer Fall. — Gleichstehende Fälle. —

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6. Die Kugel F' mit dem Halbmesser r rollt auf E_1; P ist Pol von E_2 in Beziehung auf F'. II.

Allgemeiner Fall: an die Stelle der Kugel F' tritt ein sich kongruent bleibendes Ellipsoid von unveränderlicher Stellung, das von E_1 in einem Scheitel berührt wird. II. Daraus abzuleitende besondere und gleichstehende Fälle.

5. Unterklasse: P auf eine feste Fläche und eine feste Linie bezogen. (F, K).

Erste Stufe. Die Ellipse (Hyperbel, Parabel) K senkrecht auf E zu projizieren;

1. projizierender Zylinder. II.

2. Projektion. I,II. —

3. L' hat unveränderliche Richtung und schneidet die Ellipse (u. s. w.) K in P', E in P''; P teilt P'P'' im Verhältnis 1 : k. I,II. Besondere Fälle.

Parallel L an das Ellipsoid (Hyperboloid, Paraboloid) F einen Berührungszylinder zu legen;

4. P ein Punkt des Zylinders. II.

5. P ein Berührungspunkt. I,II. — Besondere Fälle. —

6. L ist eine in einer Hauptebene liegende Scheiteltangente des Hyperboloids (Ellipsoids u. s. w) F; L' schneidet L senkrecht in P' und ausserdem F in P''; P teilt P'P'' im Verhältnis 1 : k. II. Allgemeinere, besondere Fälle.

L ist eine in einer Hauptebene liegende Scheiteltangente des Ellipsoids (u. s. w.) F; L' schneidet L senkrecht in P' und berührt F in P'';

7. P in L'. II.IV.

8. P teilt P'P'' im Verhältnis 1 : k. II,II. —

Besondere Fälle.

L' schneidet L senkrecht in P' und ausserdem E in P''; P'P'' = c;

9. P in L'. IV. 10. P teilt P'P'' im Verhältnis 1 : k. I,II. — P'P $\perp$ L in P', P''P $\perp$ E in P'';

11. Dreieck P'P''P rechtwinklig (bei P oder P'). II.

12. „ „ gleichschenklig. II.

13. „ „ gleichseitig. II,II. Verallgemeinerung. —

P'P''' $\perp$ L in P', P''P''' $\perp$ E in P''; P Schwerpunkt von P'P''P''';

14. Dreieck P'P''P''' rechtwinklig (bei P' oder P'''). II.

15. „ „ gleichschenklig. II.

16. „ „ gleichseitig. II,II. Verallgemeinerung. —

Umkehrungen. P''' Schwerpunkt von P'P''P u. s. w. Gebilde derselben Art wie in 11—13. —

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

P' und P'' bewegen sich in L, P''' in E; P'P''P'''P ist ein Rechteck;

17. P'P''P'''P hat unveränderliche Gestalt. II.

18. „ „ unveränderlichen Umfang. II.

19. „ „ „ Inhalt. IV. —

20. Zwei Ecken (oder Seitenmitten) eines Vierecks mit unveränderlichen Seitenrichtungen, dem P als Ecke angehört, bewegen sich in L und E. I,I. Verwandte Fälle: an die Stelle von E tritt ein Ellipsoid u. s. w. I,II.

Zweite Stufe. 1. P ist Mittelpunkt einer Kugel F', die aus L eine Sehne c herausschneidet und mit E oder der Kugel F einen Kreis vom Halbmesser a bildet. II.

Besondere Fälle.

P ist Pol von E in Beziehung auf eine sich kongruent bleibende Kugel F'; der Mittelpunkt von F' bewegt sich

2. in L; II,II; 3. in dem Kreis K; II,II;

4. in einer beliebigen festen Kurve zweiten Grads; II,II. —

Verallgemeinerung: an die Stelle der Kugel F' tritt ein sich kongruent bleibendes Ellipsoid von unveränderlicher Stellung. II,II. Gleichstehende Fälle. —

5. P ist Pol von E in Beziehung auf eine sich kongruent bleibende Kugel F', die L berührt. IV.

6. Unterklasse: P auf zwei feste Linien bezogen. (K_1, K_2).

Erste Stufe. 1. Durch die Ellipse (Hyperbel, Parabel) F parallel L eine Zylinderfläche zu legen. II.

Besondere Fälle.

2. E' geht durch L_1, E'' durch L_2, E' $\perp$ E'', P im Schnitt von E' und E''. II.

Besondere Fälle: a) L_1 schneidet L_2, b) $L_1 \parallel L_2$. II. Allgemeiner Fall: $\measuredangle (E', E'') = \alpha$. IV.

L' schneidet L_1 und L_2, P liegt in L';

3. L' $\perp$ L_1. II. 4. $\measuredangle (L_1, L') = \measuredangle (L_2, L')$. II.

5. $\measuredangle (L_1, L') = \alpha$. IV. —

Besondere Fälle. —

6. L ist parallel einer Achse der Ellipse (Hyperbel, Parabel) K; L' schneidet L senkrecht und ausserdem K, P liegt in L'. IV.

Besondere Fälle. Allgemeiner Fall.

7. Zwei Ellipsen K_1 und K_2 haben eine Achse gemeinsam und schneiden einander senkrecht; L' enthält P, schneidet K_1 und K_2 und ist senkrecht zu jener gemeinsamen Achse. I.I.II.

Besondere Fälle. Gleichstehende Fälle.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

8. Eine Gerade, deren Anfangslage L_1 ist, dreht sich um L. II.
Besondere Fälle: a) $L_1 \parallel L$, b) $L_1 \perp L$, c) L_1 schneidet L. II.

9. Eine Ellipse dreht sich um eine ihrer Achsen. II.
Besonderer Fall. Allgemeinere Fälle: a) eine Scheiteltangente, b) eine beliebige in der Ellipsenebene liegende Parallele einer Ellipsenachse ist Drehachse. IV. Gleichstehende Fälle für Hyperbeln und Parabeln.

$P'P \perp L_1$ in P', $P''P \perp L_2$ in P'', Dreieck P'P''P ist

10. gleichschenklig; II; 11. rechtwinklig; II;

12. gleichseitig; II,II. Verallgemeinerung. —

Zwei Ecken eines Dreiecks von unveränderlicher Ebenenstellung bewegen sich in L_1 und L_2, P ist dritte Ecke oder Schwerpunkt;

13. Die Fläche des Dreiecks ist unveränderlich. II.

14. Die Gestalt „ „ „ „ II,II. —
Umkehrungen. —

15. P ist Ecke eines Vierecks, in dem zwei Gegenseiten unveränderliche Richtung und Grösse haben, während die Mitten der zwei andern Gegenseiten L_1 und L_2 durchlaufen. I.
Verallgemeinerung. Ableitung eindimensionaler Örter. Andere verwandte Fälle: an die Stelle von L_1 und L_2 tritt eine Ellipse K und das in ihrem Mittelpunkt auf ihrer Ebene errichtete Lot L u. s. w. II.

Zweite Stufe. 1. P ist Mittelpunkt einer Kugel F', die aus L_1 und L_2 Sehnen von der Grösse c_1 und c_2 herausschneidet. II. Besondere Fälle.

2. Der Mittelpunkt der sich kongruent bleibenden Kugel F' bewegt sich in L_1, P liegt in der auf F' bezogenen Polare von L_2. II.
Verallgemeinerung: F' ist eine Fläche zweiten Grads mit Hauptebenen von unveränderlicher Stellung. Ableitung neuer besonderer Fälle aus dem allgemeinen Fall.

L_1 und L_2 sind die einander senkrecht schneidenden Achsen zweier senkrechter Kreiszylinder F' und F'' mit den Halbmessern r' und r''; P liegt im Schnitt von F' und F'';

3. $f_1(r'^2, r''^2) = 0$. II. Besondere Fälle.

4. $f_1(r', r'') = 0$. IV. Besondere Fälle. —

5. Der P enthaltende Kreis K' hat unveränderliche Ebenenstellung und liegt mit zwei Gegenpunkten auf L_1 und L_2 auf. II.

K' ist eine auf L_1 und L_2 aufliegende sich kongruent bleibende Ellipse mit unveränderlichen Achsenrichtungen;

6. P ist Mittelpunkt von K'. II,II.

7. P ist ein Scheitel von K'. II,II.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

8. P ist ein Brennpunkt von K'. II,II. —
Gleichstehende Fälle: K' ist eine Hyperbel oder Parabel. II,II. —

9. L ist parallel der Ebene der Ellipse (Hyperbel, Parabel) K und projiziert sich in diese Ebene als eine Achse von K; P ist Mittelpunkt einer Ellipse (Hyperbel) K' von unveränderlicher Gestalt, deren Ebene senkrecht zu jener Achse ist und die L und K und zwar K in zwei Punkten schneidet; ausserdem ist eine Achse von K' senkrecht zu der Ebene von K. I,II.
Besondere Fälle: a) K ist ein Kreis, b) K' ist ein Kreis. I,II. Allgemeiner Fall: die Gerade L schneidet die Achse von K, in die sie sich projiziert. I,II.

10. L projiziert sich in die Ebene der Ellipse (Hyperbel, Parabel) K als eine Achse von K; P ist Brennpunkt einer Parabel K', deren Ebene senkrecht zu jener Achse ist und die L und K und zwar K in zwei Punkten schneidet; ausserdem steht die Achse von K' senkrecht auf der Ebene von K. I,II.
Besonderer Fall.

11. L projiziert sich in die Ebene der Ellipse (Hyperbel, Parabel) K als eine Achse von K; K' ist eine P enthaltende Ellipse (Hyperbel) von unveränderlicher Gestalt, deren Ebene auf jener Achse senkrecht steht, die K in zwei Punkten schneidet und deren Mittelpunkt L durchläuft. II.
Besonderer Fall.

K_1 und K_2 sind zwei Ellipsen mit einer gemeinsamen Achse, deren Ebenen einander senkrecht schneiden; P liegt in einer Ellipse K', deren Ebene senkrecht zu den Ebenen von K_1 und K_2 ist und die mit ihren Scheiteln auf K_1 und K_2 aufliegt;

12. K_1 und K_2 haben zwei Scheitel gemeinsam. II.
13. „ „ „ „ einen Scheitel „ III.
14. „ „ „ „ keinen Scheitel „ IV. —

Verallgemeinerung: die Ebenen von K_1 und K_2 schneiden einander unter einem beliebigen Winkel, K' liegt mit den Endpunkten zweier konjugierter Durchmesser auf K_1 und K_2 auf. Flächen derselben Art wie 12—14. Gleichstehende Fälle für Hyperbeln und Parabeln.

III. und folgende Klassen: P auf drei und mehr feste Gebilde bezogen.

1. Unterklasse: P auf drei und mehr feste Punkte bezogen. (A_1, A_2 . .).

Erste Stufe. Das Tetraeder $PA_1A_2A_3$ hat
1. unveränderlichen Rauminhalt; I;
2. unveränderliche Oberfläche; VIII;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. unveränderliche Kantensumme; VIII;

4. „ Summe der Kantenquadrate; II. —

Ableitung eindimensionaler Örter durch Verbindung je zweier der Forderungen 1—4. —

Das Dreikant $PA_1A_2A_3$, dessen Spitze P ist, ist

5. gleichschenklig; IV; 6. gleichseitig; IV,IV. —

7. $\sphericalangle A_1PA_2 = \sphericalangle A_2PA_3 = R$. I,II.

Verallgemeinerung.

8. $f_1(A_1P^2, A_2P^2 \,..\, A_nP^2) = o$. II.

Besondere Fälle.

9. $f_1(A_1P^2, A_2P^2 .. A_nP^2) = o$, $\varphi_1(A_1P^2, A_2P^2 .. A_nP^2) = o$. I,II.

Besondere Fälle.

Drei getrennte Seiten eines Sechsecks, dem P als Ecke angehört, werden von A_1, A_2, A_3 halbiert, die drei andern Seiten haben unveränderliche Richtung;

10. die Summe der letzteren Seiten ist unveränderlich. I.

11. Sie bilden eine Proportion. II.

12. Sie sind einander gleich. I,I.

13. Sie genügen den Forderungen 1 und 2. I,II. —

n getrennte Seiten eines 2n-ecks, dem P als Ecke angehört, werden von $A_1, A_2 \,..\, A_n$ in unveränderlichen Verhältnissen geteilt, die übrigen n Seiten haben unveränderliche Richtung; zwischen den Längen dieser Seiten bestehen

14. (n—2) Beziehungen ersten Grads; I;

15. (n—1) „ „ „ I,I;

16. (n—3) „ „ und eine Beziehung zweiten Grads; II;

17. (n—2) „ „ und eine Beziehung zweiten Grads; I,II. —

Zweite Stufe. 1. F' ist ein Drehungsellipsoid (Drehungshyperboloid) mit den Scheiteln A_1 und A_2, das von A_3P in P berührt wird. III.

Verallgemeinerung.

Durch zwei* feste Punkte geht:

2. ein Drehungsparaboloid von unveränderlicher Achsenrichtung mit Scheitel P; II;

allgemeiner Fall: ein Paraboloid habe unveränderliche Gestalt und Stellung der Hauptebenen u. s. w.; II;

3. ein Drehungsellipsoid oder -hyperboloid von unveränderlicher Gestalt und Achsenrichtung mit Mittelpunkt P; I;

allgemeiner Fall.

* Hier sind scheinbar nur zwei feste Punkte vorhanden. In Wirklichkeit

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist mit der unveränderlichen Achsenrichtung noch ein drittes festes Gebilde, etwa ein fester unendlich entfernter Punkt, gegeben. Dieses letztere Gebilde muss beigezogen werden, weil mit Hilfe der zwei ersten festen Punkte allein die Achsenrichtung nicht bestimmt werden kann.

Durch drei* feste Punkte geht:

4. ein Drehungsparaboloid von unveränderlicher Achsenrichtung mit dem Scheitel P; II,II;
allgemeiner Fall;

5. ein Drehungsellipsoid oder -hyperboloid von unveränderlicher Gestalt und Achsenrichtung mit Mittelpunkt P; I,I;
allgemeiner Fall;

6. ein Drehungsellipsoid oder -hyperboloid von unveränderlicher Achsenrichtung mit Mittelpunkt P; III;
allgemeiner Fall;

7. ein Paraboloid von unveränderlicher Stellung der Hauptebenen mit dem Scheitel P; IV. —

* Die Einführung eines weiteren festen Gebildes zur Bestimmung der unveränderlichen Achsenrichtung ist hier nicht notwendig, weil mit Hilfe dreier gegebener fester Punkte, wenn sie nicht in einer Geraden liegen, jede Richtung bestimmt werden kann.

Durch vier feste Punkte geht:

8. ein Drehungsellipsoid oder -hyperboloid von unveränderlicher Achsenrichtung mit dem Mittelpunkt P; III,III;
allgemeiner Fall;

9. ein Paraboloid von unveränderlicher Stellung der Hauptebenen mit dem Scheitel P; IV,IV;

10. ein Ellipsoid oder Hyperboloid von unveränderlicher Stellung der Hauptebenen mit dem Mittelpunkt P; V. —

11. Durch sieben feste Punkte geht eine Fläche zweiten Grads mit dem Mittelpunkt P. XI.

12. Durch acht feste Punkte geht eine Fläche zweiten Grads mit dem Mittelpunkt P. XI,XI.

F' und F'' sind Kugeln mit festen Mittelpunkten und den Halbmessern r' und r'', P liegt im Schnitt der auf F' und F'' bezogenen Polarebenen von A;

13. $f_1\ (r'^2, r''^2) = o$. I. 14. $f_1\ (r', r'') = o$. II.

15. F' und F'' berühren einander. II.

16. F' und F'' schneiden einander senkrecht. I.

17. F' und F'' schneiden einander unter dem Winkel α. II.

18. F' und F'' schneiden einander in einem Kreise vom Halbmesser r. II. —

19. F' ist ein Drehungsellipsoid oder -hyperboloid mit

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

festen Scheiteln; P liegt im Schnitt der auf F' bezogenen Polarebenen von A_1 und A_2. II.

F' ist ein sich kongruent bleibendes Ellipsoid (Hyperboloid, Paraboloid) mit Hauptebenen von unveränderlicher Stellung; P ist die Spitze eines Dreikants, das von den auf F' bezogenen Polarebenen dreier fester Punkte gebildet wird;

20. F' geht durch einen festen Punkt. II.

21. F' geht durch zwei feste Punkte. II,II. —

Besondere Fälle. —

F', F" . . F^N sind Kugeln mit festen Mittelpunkten; P liegt im Schnitt von F' und F^N; F' wird von F", F" von F"' u.s.w., F^{N-1} von F^N

22. berührt; II (2^{n-1}fach);

23. senkrecht geschnitten; II, wenn n gerade, I, wenn n ungerade ist. —

2. Unterklasse: P auf drei und mehr feste Flächen bezogen. (F_1, F_2 . .).

Erste Stufe. L' hat unveränderliche Richtung, enthält P und schneidet die Seiten eines festen Dreikants in P', P", P"';

1. P'P" = P"' P. I.

Allgemeiner Fall: f_1 (P'P, P"P, P"'P) = o. I. Hieraus neue besondere Fälle abzuleiten.

2. P'P" = P" P"' = P"' P. I,I.

Allgemeiner Fall: f_1 (P'P, P"P, P"'P) = o, φ_1 (P'P, P"P, P"'P) = o. I,I. Weitere besondere Fälle.

3. P', P", P"', P bilden eine harmonische Punktreihe. II.

Allgemeiner Fall: f_2 (P'P, P"P, P"'P) = o. II. Weitere besondere Fälle.

4. P'P, P"P, P"'P haben eine unveränderliche Summe und bilden zugleich eine stetige Proportion. I,II.

Allgemeiner Fall: f_1 (P'P, P"P, P"'P) = o, f_2 (P'P, P"P, P"'P) = o. I,II. Weitere besondere Fälle. —

5. L' hat unveränderliche Richtung, enthält P und schneidet das Ellipsoid F und zwei seiner Hauptebenen in P', P", P"'; f_1 (P'P, P"P, P"'P) = o. II.

Besondere, gleichstehende und allgemeinere Fälle. Ableitung eindimensionaler Örter.

L' hat unveränderliche Richtung, enthält P und schneidet E_1, E_2 . . E_n in P', P" . . P^N;

6. f_1(P'P, P"P, P"'P) = o. I. 7. f_2(P'P, P"P, P"'P) = o. II. —

Besondere Fälle. Ableitung eindimensionaler Örter. —

d', d" . . d^N sind die senkrechten oder in beliebigen un-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

veränderlichen Richtungen gemessenen Abstände zwischen P und $E_1, E_2 \ldots E_n$;

8. $f_1(d', d'' \ldots d^N) = o$. I. 9. $f_2(d', d'' \ldots d^N) = o$. II. —
Besondere Fälle. Ableitung eindimensionaler Örter. —

10. Ein Dreieck hat Seiten von unveränderlicher Richtung; von den neun Punkten: Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt, Mittelpunkt des Umkreises, Ecken, Seitenmitten bewegen sich drei in festen Ebenen, einer ist P. I,I.
Zahl der logisch verschiedenen Fälle 80. Allgemeinere Fälle.

11. Ein Dreieck hat zwei Seiten von unveränderlicher Richtung; von den neun Punkten: Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt, Mittelpunkt des Umkreises, Ecken, Seitenmitten bewegen sich vier in festen Ebenen, einer ist P. I,I.
Zahl der logisch verschiedenen Fälle 270. Allgemeinere Fälle.

12. Ein Dreieck hat unveränderliche Ebenenstellung; von den sieben Punkten: Schwerpunkt, Ecken, Seitenmitten bewegen sich fünf in festen Ebenen, einer ist P. I.
Zahl der logisch verschiedenen Fälle 10. Allgemeinere Fälle.

13. Ein Dreieck hat unveränderliche Ebenenstellung; von den sieben Punkten: Schwerpunkt, Ecken, Seitenmitten bewegen sich sechs in festen Ebenen, einer ist P. I,I.
Zahl der logisch verschiedenen Fälle 3. Allgemeinere Fälle.

14. P ist Schwerpunkt des Eckensystems eines ebenen n-ecks mit unveränderlichen Seitenrichtungen, dessen Ecken oder Seitenmitten sich in festen Ebenen bewegen. I,I.
Besondere Fälle: $n = 3, 4$ u. s. w. I,I.

15. Das Ellipsoid F_1 und das Hyperboloid F_2 haben gemeinsame Hauptebenen; F_3 ist ein Paraboloid, dessen Hauptebenen mit zwei Hauptebenen von F_1 und F_2 zusammenfallen, während der Scheitel von F_3 in dem gemeinsamen Mittelpunkt von F_1 und F_2 liegt; in F_1 bewegt sich P', E'' ist Polarebene von P' in Beziehung auf F_2, P Pol von E'' in Beziehung auf F_3. II.
Gleichstehende Fälle. Allgemeiner Fall: F_1, F_2 und F_3 sind beliebige Flächen zweiten Grads. II.

16. F_1, F_2, F_3 sind drei kongruente, aber nicht zusammenfallende Ellipsoide mit gemeinsamen Hauptebenen, F_4 eine Kugel mit demselben Mittelpunkt wie die Ellipsoide. An F_1 gleitet eine Berührungsebene E', P'' ist Pol von E' in Beziehung auf F_2, E''' Polarebene von P'' in Beziehung auf F_3, P Pol von E''' in Beziehung auf F_4. II.
Gleichstehende Fälle. Allgemeiner Fall.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

17. $F_1, F_2 .. F_n$ sind Flächen zweiten Grads, ihre Anzahl n ist gerade. An F_1 gleitet eine Berührungsebene E', P" ist Pol von E' in Beziehung auf F_2, E"' Polarebene von P" in Beziehung auf F_3 u. s. w., P Pol von E^{N-1} in Beziehung auf F_n. II.

18. $F_1, F_2 .. F_n$ sind Flächen zweiten Grads, ihre Anzahl n ist ungerade. In F_1 bewegt sich P', E" ist Polarebene von P' in Beziehung auf F_2, P"' Pol von E" in Beziehung auf F_3 u. s. w., P Pol von E^{N-1} in Beziehung auf F_n. II.

Zweite Stufe. Die Kugel F' mit Mittelpunkt P berührt:

1. E_1, E_2 und E_3. I.I, I.I.
2. E_1, E_2 und die Kugel F. I.I, II.II.
3. E_1 und die Kugeln F_1 und F_2. II.II, II.II.
4. die Kugeln F_1, F_2 und F_3. II.II, II.II. —

Verallgemeinerung: F' schneidet E_1 u. s. w. in Kreisen von unveränderlichen Halbmessern. —

5. P ist Mittelpunkt eines Kreises von unveränderlicher Ebenenstellung, der drei feste Ebenen berührt. I,I; I,I; I,I; I,I.

P ist Scheitel eines Drehungsellipsoids F', das von E_1 und E_2 berührt wird und dessen Äquator sich in E_3 verschiebt;

6. der Äquatorhalbmesser ist veränderlich. II.
7. Der Äquatorhalbmesser ist unveränderlich. II,II.
8. F' hat unveränderliche Gestalt. I.I, I.I. –

Gleichstehende Fälle. Allgemeinere Fälle. —

P ist Mittelpunkt eines Drehungsellipsoids F', das von E_1 in einem Scheitel und ausserdem von E_2 und E_3 berührt wird;

9. der Äquatorhalbmesser ist veränderlich. II.
10. Der Äquatorhalbmesser ist unveränderlich. II,II.
11. F' hat unveränderliche Gestalt. I.I, I.I. —

Gleichstehende und allgemeinere Fälle. —

3. Unterklasse: P auf drei und mehr feste Linien bezogen. ($K_1, K_2 ..$).

Erste Stufe. L' gleitet an L_1, L_2 und L_3;

1. P ist ein beliebiger Punkt von L'. II.
2. P bildet mit den Schnittpunkten von L' und L_1, L_2, L_3 eine harmonische Punktreihe. I,I. —

Andere Fassung: Die Ebene E' dreht sich um die in ihr liegende Gerade L_1, ebenso E" um L_2, E' und E" schneiden L_3 in P"', P liegt im Schnitt von E' und E". —

L_1 und L_2 sind parallel der Ebene der Parabel K; L_1 projiziert sich in diese Ebene als Achse, L_2 als Scheiteltangente von K; L' gleitet an L_1, L_2 und K;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. P ist ein beliebiger Punkt von L'. III.

4. P bildet mit den Schnittpunkten von L' und L_1, L_2, K eine harmonische Punktreihe. I,II. —

Verallgemeinerung. Andere Fassung. —

L_1 und L_2 sind parallel der Ebene der Ellipse (Hyperbel) K und projizieren sich in diese Ebene als die Achsen von K;

5. P ist ein beliebiger Punkt von L'. IV.

6. P bildet mit den Schnittpunkten von L' und L_1, L_2, K eine harmonische Punktreihe. I,II. —

Verallgemeinerung. Andere Fassung.

L' schneidet die Geraden L_1 und L_2 und die Kurve zweiten Grads K;

7. P ist ein beliebiger Punkt von L'. IV.

8. P bildet mit den Schnittpunkten von L' und $L_1 . L_2, K$ eine harmonische Punktreihe. I,II. — Andere Fassung. —

9. $d', d'' . . d^N$ sind die senkrechten Abstände des Punktes P von $L_1, L_2 . . L_n$; $f_1(d'^2, d''^2 . . d^{N\,2}) = 0$. II. Besondere Fälle.

10. E' geht durch L_1 und schneidet L_{11} in P', E'' geht durch P' und L_2 und schneidet L_{22} in P'', E''' geht durch P'' und L_3 und schneidet L_{33} in P''' u. s. w., E^{N-1} geht durch P^{N-2} und L_{n-1} und schneidet $L_{(n-1)(n-1)}$ in P^{N-1}, E^N geht durch P^{N-1} und L_n; P liegt im Schnitt von E' und E^N. II.

Besondere Fälle: $n = 2, 3$ u. s. w. II.

P ist Schwerpunkt eines Dreiecks, dessen Ecken oder Seitenmitten sich in L_1, L_2, L_3 bewegen;

11. das Dreieck ist gleichschenklig. II.

12. Das Dreieck ist rechtwinklig. II.

13. Das Dreieck hat unveränderliche Gestalt. II,II.

14. Das Dreieck hat unveränderliche Fläche. IV. —

Umkehrungen. Besondere Fälle. Allgemeinere Fälle. —

15. Ein Dreieck hat unveränderliche Ebenenstellung; drei von den acht Punkten: Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt, Ecken, Seitenmitten bewegen sich in festen Geraden, ein vierter ist P. II,II, wenn unter den vier Punkten der Höhenschnittpunkt sich befindet, in den andern Fällen I,I.

Zahl der logisch verschiedenen Fälle 48. Fälle derselben Art und in gleicher Zahl, wenn der Höhenschnittpunkt durch den Mittelpunkt des Umkreises ersetzt wird. Verallgemeinerung.

16. Von den sieben Punkten eines Dreiecks: Schwerpunkt, Ecken, Seitenmitten bewegen sich vier in festen Geraden, ein fünfter ist P. I,I.

Zahl der logisch verschiedenen Fälle 18. Verallgemeinerung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Ecken oder Seitenmitten eines ebenen Vierecks von unveränderlicher Ebenenstellung bewegen sich in festen Geraden;

17. P ist Schwerpunkt des Eckensystems. I,I.

18. P ist Diagonalschnittpunkt. II,II. —

19. P ist Schwerpunkt des Eckensystems eines ebenen n-ecks von unveränderlicher Ebenenstellung, dessen Ecken oder Seitenmitten sich in festen Geraden bewegen. I,I.

Zweite Stufe. 1. P ist Mittelpunkt einer Kugel, die L_1, L_2 und L_3 berührt. II,II.

Allgemeinere Fälle.

2 F' ist eine Kugel, die L_1 berührt und deren Mittelpunkt sich in L_2 bewegt; P liegt in der auf F' bezogenen Polare von L_3. II

K' ist ein Kreis von unveränderlicher Ebenenstellung, der drei feste Gerade schneidet;

3. P ist Mittelpunkt von K'. II,II.

4. P ist ein beliebiger Punkt von K'. IV. —

K' ist eine Parabel von unveränderlicher Achsen- und Parameterrichtung, die drei feste Gerade schneidet;

5. P ist Scheitel von K'. III,III.

6. P ist ein beliebiger Punkt von K'. IV. —

K' ist eine Ellipse oder Hyperbel von unveränderlichen Achsenrichtungen, die vier feste Gerade schneidet;

7. P ist Mittelpunkt von K'. IV,IV.

8. P ist ein Scheitel von K'. V,V.

9. P ist ein beliebiger Punkt von K'. VI. —

K' ist eine Kurve zweiten Grads von unveränderlicher Ebenenstellung, die fünf feste Gerade schneidet;

10. P ist Mittelpunkt von K'. VI,VI.

11. P ist ein beliebiger Punkt von K'. VIII. —

4. Unterklasse: P auf drei und mehr feste Punkte und Flächen bezogen. (A_1, . . F_1, . .).

Erste Stufe. P' bewegt sich in dem Ellipsoid F;

1. P ist Schwerpunkt des Dreiecks A_1A_2P'. II.

2. P ist Schwerpunkt des Tetraeders $A_1A_2A_3P'$. II. —

Besondere und gleichstehende Fälle. Umkehrungen. —

L' geht durch A und schneidet E_1 in P', E_2 in P";

3. P teilt P'P" im Verhältnis 1:k. II. Besonderer Fall.

4. A, P', P", P ist eine harmonische Punktreihe. I. —

5. P ist Schwerpunkt des Dreiecks A P'P", dessen Ecken P' und P" sich in E und E_2 bewegen, während P'P" unveränderliche Richtung hat. I.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Umkehrungen. I. Eindimensionale Örter durch Hinzufügung der Forderung, dass Dreieck AP'P" gleichschenklig oder rechtwinklig sei. I,II.

6. P ist Ecke eines n-ecks, dessen (n - 1) andere Ecken sich in (n—1) festen Ebenen bewegen, während jede Seite durch einen festen Punkt geht. II,II. Besondere Fälle.

7. P ist Schwerpunkt des Eckensystems eines Vierecks, dessen Ecken mit Ausnahme einer einzigen sich in festen Ebenen bewegen, während zwei getrennte Seiten durch zwei feste Punkte, die beiden anderen durch zwei feste Ebenen halbiert oder in beliebigen unveränderlichen Verhältnissen geteilt werden. I,I. Umkehrungen. Verallgemeinerung für das 2n—eck. I,I.

Zweite Stufe. P ist Mittelpunkt der Kugel F';

1. F' geht durch A_1 und A_2 und berührt E. I,II.

2. F' geht durch A und berührt E_1 und E_2. I,II.

3. F' geht durch A_1 und A_2 und berührt die Kugel F. I,II.

4. F' geht durch A und berührt E und die Kugel F. II,II.

5. F' geht durch A und berührt die Kugeln F_1 und F_2. II,II.— Verallgemeinerungen. —

Der Mittelpunkt und die Äquatorebene eines Drehungsellipsoids (-hyperboloids) F' ist fest; eine durch A gehende Tangente berührt F' in P;

6. der Polarhalbmesser von F' ist unveränderlich. II.

7. Der Äquatorhalbmesser ist unveränderlich. III. —

8. Die Kugel F' berührt E in A_1 und wird von A_2P in P berührt. III. Verallgemeinerung.

9. P ist Pol von E in Beziehung auf eine durch A_1 und A_2 gehende Kugel. II.

P ist Pol von E in Beziehung auf ein Drehungsellipsoid (-hyperboloid) F';

10. F' hat feste Scheitel. I,I.

11. F' hat feste Brennpunkte. I,I. —

12. P ist Pol von E in Beziehung auf ein durch zwei [drei] feste Punkte gehendes Ellipsoid (Hyperboloid, Paraboloid) von unveränderlicher Gestalt und Stellung der Hauptebenen. II. [II,II].

F', F" . . F^N sind Kugeln mit festen Mittelpunkten und den Halbmessern r', r" . . r^N; P' ist Pol von E_1 in Beziehung auf F', P" Pol von E_2 in Beziehung auf F" u. s. w., P^N Pol von E_n in Beziehung auf F^N, P Schwerpunkt des Punktesystems P' P" . . P^N;

13. $r' : r'' \ldots : r^N = k_1 : k_2 \ldots : k_n$. I,I.

14. F' wird von F", F" von F"' u. s. w., F^{N-1} von F^N senkrecht geschnitten. I,I. —

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. Unterklasse: P auf drei und mehr feste Punkte und Linien bezogen. ($A_1, \ldots K_1, \ldots$).

Erste Stufe. 1. P' durchläuft eine Kurve zweiten Grads, P ist Schwerpunkt von A_1A_2P'. I,II. Umkehrungen.

2. $P'P \perp L$ in P', $A_1P' \parallel A_2P$. I,II.

P'P"P'"P ist ein Rechteck, dessen Seite P'P" sich in A_1A_2 so verschiebt, dass $f_1\,(A_1P', A_2P'') = o$ ist;

3. das Rechteck hat unveränderliche Gestalt. II.

4. „ „ „ unveränderlichen Umfang. II.

5. „ „ „ „ Inhalt. IV.

Verwandte Fälle: P'P" bewegt sich so, dass A_1, P', A_2, P" eine harmonische Punktreihe ist. —

6. P ist Ecke eines Dreiecks, dessen Seiten von A_1, A_2 und L in unveränderlichen Verhältnissen geteilt werden. I,I.

Besondere Fälle.

7. P ist Schwerpunkt des Dreiecks AP'P", dessen Ecken P' und P" sich in L_1 und L_2 bewegen. I.

Umkehrungen. Ableitung eindimensionaler Örter durch die Forderung, dass das Dreieck gleichschenklig oder rechtwinklig sei.

8. L' schneidet L_1 senkrecht und ausserdem L ; P ist Fusspunkt des von A auf L' gefällten Lots. II,II.

9. P ist Spitze eines gleichseitig rechtwinkligen Dreikants, von dessen Seiten eine durch einen festen Punkt, die zwei andern je durch eine feste Gerade gehen. II,III.

A_1 liegt in L_1, A_2 in L_2; P' bewegt sich in L_1, P" in L_2;

10. P liegt in P'P", $f_1\,(A_1P', A_2P'') = o$. II.

11. P teilt P'P" im Verhältnis $A_1P' : A_2P''$. III. —

12. P ist Ecke eines Vierecks, in dem zwei Gegenseiten von A_1 und A_2, die zwei andern Gegenseiten von L_1 und L_2 in unveränderlichen Verhältnissen geteilt werden. I.

13. Es werden A_1A_2 von P', A_3A_4 von P" in gleichem (veränderlichem) Verhältnis geteilt; P liegt in P'P". II.

Verallgemeinerung.

14. Es werden A_1A_2 von P', A_3A_4 von P", P'P" von P in gleichem (veränderlichem) Verhältnis geteilt. II,II (auf I,II zurückführbar). Verallgemeinerung.

P liegt in dem Schnitt der Ebenen E' und E", deren jede sich um eine in ihr liegende feste Gerade dreht; ausserdem schneidet E' die Gerade L_1 in P', E" L_2 in P"; in L_1 liegt A_1, in L_2 A_2;

15. $f_1\,(A_1P', A_2P'') = o$. II. 16. $A_1P', A_2P'' = c^2$. II.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

17. P' und P'' bewegen sich gleichförmig und gehen im gleichen Augenblick durch A_1 und A_2 II. —

P ist Spitze eines Dreikants, dessen Seitenflächen, E', E'', E''', sich, jede um eine in ihr liegende feste Gerade drehen; ausserdem schneidet E' die Gerade L_1 in P', E'' L_2 in P'', E''' L_3 in P'''; in L_1 liegt der Punkt A_1, in L_2 A_2, in L_3 A_3;

18. $f_1(A_1P', A_2P'', A_3P''') = 0$. III. Besondere Fälle.

19. $A_1P' : A_2P'' : A_3P''' = k_1 : k_2 : k_3$. II,II.

Besondere Fälle. —

20. n getrennte Seiten eines festen 2n—ecks werden durch $P', P'' \ldots P^N$ in gleichem (veränderlichem) Verhältnis geteilt; P ist Schwerpunkt des Punktesystems $P', P'' \ldots P^N$. I,I.

Besondere Fälle: n = 2, 3 u. s. w. Verallgemeinerung.

Die Punkte $P', P'' \ldots P^N$ durchlaufen die Geraden $L_1, L_2 \ldots L_n$ so, dass im gleichen Augenblick P' durch A_1, P'' durch A_2 u. s. w., P^N durch A_n geht; P ist Schwerpunkt des Systems der beweglichen Punkte;

21. die Bewegungen aller Punkte sind gleichförmig. I,I

22. Die Bewegungen sind gleichmässig beschleunigt. II,II.

23. Die Bewegungen sind teils gleichförmig, teils gleichmässig beschleunigt. II,II. —

Besondere Fälle: n = 2, 3 u. s. w. —

Zweite Stufe. P ist Mittelpunkt einer Kugel,

1. die durch A_1 und A_2 geht und L berührt; I,II;

2. die durch A geht und L_1 und L_2 berührt; II,II. —

Verallgemeinerung. —

3. P ist Mittelpunkt eines Kreises, der durch A geht und L_1 und L_2 schneidet. XII.

Umkehrungen. Besondere Fälle bei besonderer gegenseitiger Lage von A, L_1 und L_2.

F' ist ein Drehungsellipsoid (-hyperboloid) von unveränderlicher Gestalt, dessen Achse sich in L_1 verschiebt; P liegt in der auf F' bezogenen Polare von L_2;

4. A in L_1 ist Mittelpunkt von F'. I.

5. F' geht durch einen beliebigen festen Punkt A. II.

Entsprechende Örter für das Drehungsparaboloid. —

6. F' ist ein sich kongruent bleibendes Paraboloid von unveränderlicher Stellung, das durch zwei feste Punkte geht; P liegt in der auf F' bezogenen Polare von L. II.

Entsprechende Örter für Ellipsoide und Hyperboloide. IV.

7. Die Kugel F' vom Halbmesser r geht durch A und berührt L_1; P liegt in der auf F' bezogenen Polare von L_2. IV.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

F' ist eine Kugel vom Halbmesser r', deren Mittelpunkt P' die A enthaltende Gerade L_1 durchläuft; P liegt in der auf F' bezogenen Polare von L_2;

8. f_1 (AP', r') = o. II. 9. r'^2 = c. AP'. II. —

Entsprechende Örter für Ellipsoide, Hyperboloide, Paraboloide. —

10. Die Mittelpunkte der ihre Halbmesser nicht ändernden Kugeln F', F'', F''' durchlaufen mit unveränderlichen Geschwindigkeiten drei feste Gerade so, dass sie in demselben Augenblick durch drei gegebene feste Punkte gehen; P ist Spitze eines Dreikants, dessen Seitenflächen die auf F', F'', F''' bezogenen Polarebenen von drei weiteren festen Punkten sind. IV,IV.

6. Unterklasse: P auf drei und mehr feste Flächen und Linien bezogen. (F_1, . . K_1, . .).

Erste Stufe. 1. L' schneidet L senkrecht und ausserdem E_1 und E_2; P bildet mit den Schnittpunkten eine harmonische Punktreihe. II.

Verallgemeinerung: L' parallel einer beliebigen festen Ebene. II.

2. L' ist parallel E und schneidet L_1 und L_2; P liegt in L'. II.

3. L' ist parallel E_1 und schneidet L_1, L_2 und E_2; P bildet mit den Schnittpunkten eine harmonische Punktreihe. II,II.

4. Ein Dreieck hat unveränderliche Ebenenstellung; vier von den acht Punkten: Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt, Ecken, Seitenmitten bewegen sich in zwei festen Geraden und zwei festen Ebenen, ein fünfter Punkt ist P. Man erhält die Gradzahlen II,II, wenn unter den fünf Punkten der Höhenschnittpunkt ist, in den andern Fällen I,I.

Zahl der logisch verschiedenen Fälle 272. Fälle derselben Art und in gleicher Zahl, wenn man den Höhenschnittpunkt mit dem Mittelpunkt des Umkreises vertauscht. Allgemeinere Fälle. Verwandte zweidimensionale Örter mit Hilfe von zwei festen Geraden und einer festen Ebene oder von einer festen Geraden und drei festen Ebenen. Verwandte eindimensionale Örter mit Hilfe von einer festen Geraden und vier festen Ebenen.

5. Von den sieben Punkten eines Dreiecks: Schwerpunkt, Ecken, Seitenmitten bewegen sich fünf in drei festen Geraden und zwei festen Ebenen, ein sechster ist P. I,I.

Zahl der logisch verschiedenen Fälle 10. Allgemeinere Fälle. Verwandte zweidimensionale Örter mit Hilfe von zwei festen Geraden und drei festen Ebenen. Verwandte eindimensionale Örter mit Hilfe von zwei festen Geraden und vier festen Ebenen.

6. P ist Ecke eines n - ecks, dessen (n − 1) andere Ecken

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sich in $(n-1)$ festen Geraden (Ebenen) bewegen, während die n Seiten n festen Ebenen (Geraden) parallel sind. I (I,I).
Wird eine der festen Geraden durch eine Linie zweiten Grads oder eine der festen Ebenen durch eine Fläche zweiten Grads ersetzt, so erhält man II (I,II). Besondere Fälle: $n = 3, 4$ u. s. w.

7. P ist Ecke eines n—ecks, dessen $(n-1)$ andere Ecken sich in $(n-1)$ festen Geraden (Ebenen) bewegen, während die n Seiten von n festen Ebenen (Geraden) in unveränderlichen Verhältnissen geteilt werden. I (I,I).
Wird eine der festen Geraden durch eine Linie zweiten Grads oder eine der festen Ebenen durch eine Fläche zweiten Grads ersetzt, so erhält man II (I,II). Besondere Fälle.

Zweite Stufe. P ist Mittelpunkt einer Kugel,

1. die E_1, E_2 und L berührt; I. I,II;
2. die E, L_1 und L_2 berührt; II,II;
3. die E, L und die Kugel F berührt; II, II.II;
4. die L_1 und die Kugeln F_1 und F_2 berührt; IV,IV. —

Allgemeinere Fälle. —

Die Kugel F' berührt E_1 in P, ausserdem

5. E_2 und L; I,II; 6. L_1 und L_2; I.IV. —

7. F' ist eine Kugel, die E_1 berührt und deren Mittelpunkt L durchläuft; P ist Pol von E_2 in Beziehung auf F'. I,II.
Allgemeiner Fall: F' ist ein Ellipsoid von unveränderlicher Gestalt und Stellung, von dessen Achsen eine sich in L verschiebt u. s. w. I,II. Entsprechende Örter für Hyperboloide und Paraboloide. I,II.

8. P ist Pol von E in Beziehung auf eine Kugel, die L_1 und L_2 berührt. IV.

9. In L verschiebt sich die Achse eines sich kongruent bleibenden Paraboloids von unveränderlicher Stellung; P ist der Schwerpunkt des Systems der auf das Paraboloid bezogenen Pole von $E_1, E_2 \ldots E_n$. I,I. Besondere Fälle.

7. Unterklasse: P auf drei und mehr feste Punkte, Flächen und Linien bezogen. $(A_1, \ldots F_1, \ldots K_1, \ldots)$.

Erste Stufe. 1. Der Kreis K wird von A aus auf E (die Kugel F) projiziert; P liegt in der Projektion. I,II. (II,II).
Besondere, allgemeinere Fälle.

2. L' geht durch A und schneidet den Kreis K und die Ebene E (Kugel F); P bildet mit A und den beiden Schnitt punkten eine harmonische Punktreihe. I,II (II,II).
Besondere, allgemeinere Fälle.

Von den vier Punkten A, P', P'', P bilden drei die Ecken,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der vierte den Schwerpunkt eines Dreiecks; P' bewegt sich in L, P'' in E;

3. das Dreieck ist gleichschenklig. II.

4. Das Dreieck ist rechtwinklig. II.

5. Das Dreieck hat unveränderliche Gestalt. II,II. —

Besondere Fälle. Zahl der logisch verschiedenen (ohne Berücksichtigung der besonderen) Fälle 48. —

6. P' P'' P''' ist ein gleichseitiges Dreieck mit dem Schwerpunkt P, die Ecken P' und P'' bewegen sich in der A enthaltenden Geraden L, P''' in E; $f_1(AP', AP'') = o$. II,II.

Umkehrungen. Besondere, allgemeinere Fälle.

7. A, P' und P'' liegen in L, P''' in E, P'P''P'''P ist ein Rechteck von unveränderlicher Gestalt oder unveränderlichem Umfang; $f_1(AP', AP'') = o$. I,II.

A und P' liegen in L, P'' in E, A P' P'' P ist ein Parallelogramm

8. von unveränderlicher Gestalt; II,II;

9. von unveränderlichem Umfang; II. —

10. In dem Viereck P'P''P'''P haben die in P zusammenstossenden Seiten unveränderliche Richtung, während sich die Ecken P' und P'' in L, P''' in E bewegen und die Seite P''P''' durch A geht. II,II.

11. Das Viereck A P' P P'' ist bei A rechtwinklig, P' bewegt sich in L, P'' in E, P'P und P''P haben unveränderliche Richtung. I,II.

12. P ist Ecke eines Vierecks, von dessen Seiten drei unveränderliche Richtung haben, während die vierte durch A geht; zwei der ersteren Seiten werden von L und E halbiert. II,II.

Verallgemeinerung.

13. P ist Ecke eines (3 n)—ecks, dessen übrige Ecken sich in (3 n—1) festen Ebenen bewegen, während je n getrennte Seiten von n festen Punkten, n festen Ebenen und n festen Geraden halbiert oder in beliebigen unveränderlichen Verhältnissen geteilt werden. I,I.

Besondere Fälle: $n = 1, 2$ u. s. w.

14. Die senkrechten Abstände zwischen P und n festen Ebenen seien $d', d'' \ldots d^N$, die senkrechten Abstände zwischen P und q festen Geraden $t', t'' \ldots t^Q$; $f_1(A_1P^2, A_2P^2 \ldots A_3P^2, d'^2, d''^2 \ldots d^{N2}, t'^2, t''^2 \ldots t^{Q2}) = o$. II. Besondere Fälle.

15. Gegeben L, $A_1, A_2 \ldots A_n$; $E_1, E_2 \ldots E_n$; E'_o geht durch L, E' durch (E'_o, E_1) d. h. den Schnitt von E'_o und E_1 und durch A_1, E'' durch (E', E_2) und A_2, E''' durch (E'', E_2) und A_3 u.s.w.,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

E^N durch (E^{N-1}, E_n) und A_n; P liegt im Schnitt von E'_0 und E^N. II.

Besondere Fälle: a) $n = 2, 3$ u. s. w. II. b) Mit E_1 fällt E_3, E_5 u. s. w., mit E_2 E_4, E_6 u. s. w. zusammen. II.

16. E'_0 geht durch L, E' durch (E'_0, E_1) und A_1, E'' durch (E', E_2) und A_2 u. s. w., E^Q durch (E^{Q-1}, E_q) und A_q, ferner E^N durch (E'_0, E_n) und A_n, E^{N-1} durch (E^N, E_{n-1}) und A_{n-1} u. s. w., E^{N-Q} durch (E^{N-Q+1}, E_{n-q}) und A_{n-q}; P liegt im Schnitt von E^Q und E^{N-Q}. II. Besondere Fälle.

Zweite Stufe. 1. P ist Mittelpunkt einer Kugel, die durch A geht und L und E (oder die Kugel F) berührt. II,II.

2. Die Kugel F' geht durch A, berührt E in P und ausserdem L. I,IV.

3. P liegt im Äquator eines Drehungsellipsoids, das E berührt und einen festen Scheitel und feste Achse hat. II.

Verallgemeinerung.

P ist Mittelpunkt eines Drehungsellipsoids F', das von E in einem seiner Scheitel und ausserdem von L in A berührt wird;

4. F' hat unveränderliche Gestalt. I,II.

5. F' hat unveränderlichen Polarhalbmesser. I,II.

6. F' hat unveränderlichen Äquatorhalbmesser. III,IV.

7. F' hat veränderlichen Polar- und Äquatorhalbmesser. III. —

Verallgemeinerung: F' wird von E in einem seiner Scheitel, ausserdem von L berührt und geht durch A. —

8. P ist Brennpunkt eines Drehungsparaboloids F', das durch A geht und von E in seinem Scheitel, ausserdem von L berührt wird. II,II.

Besonderer Fall: L enthält A.

P ist Pol von E in Beziehung auf das Paraboloid F', das durch A geht und dessen Achse sich in L verschiebt;

9. F' hat unveränderliche Stellung der Hauptebenen. III.

10. F' hat ausserdem unveränderliche Gestalt. I,II. —

Besondere Fälle. —

P ist Pol von E in Beziehung auf das Ellipsoid (Hyperboloid) F', das durch A geht und von dessen Achsen eine sich in L verschiebt;

11. F' hat unveränderliche Stellung der Hauptebenen und unveränderliche Gestalt. I,II.

12. F' ist ein Drehungsellipsoid (-hyperboloid). I.

13. F' ist ein Drehungsellipsoid (-hyperboloid) mit unveränderlichem Äquatorhalbmesser. I,II. — Besondere Fälle. —

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

P ist Pol von E in Beziehung auf ein Ellipsoid (Hyperboloid) F', das einen festen Mittelpunkt und unveränderliche Achsenrichtungen hat; a', b', c' sind die Grössen der Halbachsen;

14. $f_1(a'^2, b'^2, c'^2) = 0$. I. Besondere Fälle.

15. $f_1(a', b', c') = 0$. IV. Besondere Fälle.

16. F' ist ein Drehungsellipsoid (-hyperboloid) von unveränderlicher Gestalt oder unveränderlichem Äquator- oder Polarhalbmesser. I,I. —

P ist Pol von E in Beziehung auf ein Paraboloid F' mit dem Scheitel P' und den Parametern 2 p' und 2 p", dessen Hauptebenen unveränderliche Stellung haben und dessen Achse sich in der A enthaltenden Geraden L verschiebt;

17. $f_1(p', p'', AP') = 0$. I. Besondere Fälle.

18. $f_2(p', p'', AP') = 0$. II. Besondere Fälle.

19. F' ist von unveränderlicher Gestalt und ausserdem $f_1(p', p'', AP') = 0$. I,I. Besondere Fälle.

20. F' ist von unveränderlicher Gestalt und ausserdem $f_2(p', p'', AP') = 0$. I,II. Besondere Fälle. —

21. P ist Pol von E in Beziehung auf ein Ellipsoid (Hyperboloid) F', das unveränderliche Gestalt und Stellung hat und von dessen Achsen eine sich in der A enthaltenden Geraden L verschiebt; a' ist eine der Halbachsen, P' Mittelpunkt von F'; $f_1(a', AP') = 0$. I,II. Besondere Fälle.

22. F', F" . . F^N sind Paraboloide, jedes von beliebiger unveränderlicher Gestalt und Stellung der Hauptebenen mit den Scheiteln P', P" . . P^N; ein Parameter von F' sei 2 p', einer von F" 2 p" u. s. w., einer von F^N 2 p^N; die Achsen der Paraboloide verschieben sich mit beliebigen gleichförmigen Geschwindigkeiten in den Geraden L_1, L_2 . . L_n, von denen jede einen der Punkte A_1, A_2 . . A_n enthält; dabei gehen P', P" . . P^N im gleichen Augenblick durch A_1, A_2 . . A_n; ausserdem besteht zwischen A_1P' und p', A_2P'' und p" u. s. w., $A_n P^N$ und p^N je eine beliebige Beziehung ersten Grads. Q' ist der Pol von E_1 in Beziehung auf F', Q" der Pol von E_2 in Beziehung auf F" u. s. w., Q^N der Pol von E_n in Beziehung auf F^N, P Schwerpunkt des Systems dieser Pole. I,I. Besondere Fälle: a) $n = 2, 3$ u. s. w. I,I. b) A_1, A_2 . . A_n fallen zusammen. I,I. c) E_1, E_2 . . E_n fallen zusammen. I,I. d) Zwischen A_1P' und p', A_2P'' und p" u. s w., $A_n P^N$ und p^N besteht dieselbe Beziehung ersten Grads. I,I. e) Die Geschwindigkeiten von P', P" . . P^N sind gleich. I,I.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

23. $F', F'' \ldots F^N$ sind Drehungsellipsoide (hyperboloide), jedes von beliebiger unveränderlicher Gestalt, mit festen Mittelpunkten und Achsen; a' sei Äquator- oder Polarhalbmesser von F', a'' von F'' u. s. w., a^N von F^N, $a' : a'' \ldots : a^N = k_1 : k_2 \ldots : k_n$; $P', P'' \ldots P^N$ sind die Pole von E_1, $E_2 \ldots E_n$ in Beziehung auf $F', F'' \ldots F^N$, P der Schwerpunkt des Systems dieser Pole. I,I. Besondere Fälle: a) $n = 2, 3$ u. s. w. I,I. b) $F', F'' \ldots F^N$ haben einen gemeinsamen Mittelpunkt. I,I. c) $E_1, E_2 \ldots E_n$ fallen zusammen. I,I. d) $F', F'' \ldots F^N$ sind einander ähnlich. I,I. Verallgemeinerung: $F', F'' \ldots F^N$ sind keine Drehungsflächen, haben aber neben unveränderlicher Gestalt und festem Mittelpunkt unveränderliche Stellung der Hauptebenen. I,I.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

23. F', (hyperboloide), jedes von mit festen Mittelpunkten u Polarhalbmesser von F', a" $= k_1 : k_2 \ldots : k_n$; P', P" . . P n Beziehung auf F', F" . . F dieser Pole. I,I. Besondere . FN haben einen gemeinsamen M en. I,I. d) F', F" . . FN sind einan F" . . FN sind keine Drehungsfläch alt und festem Mittelpunkt unverär

© The Tiffen Company, 2007

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf