Die geometrischen Gesetze der Ortsveränderung starrer Systeme.

Von Küpper.

Die Entdeckung der Gesetze, welche bei der Ortsveränderung starrer Systeme, insofern man dieselbe als unabhängig von physischen Ursachen betrachtet, obwalten, ist eine schöne Frucht jener allgemeinen Methoden mathematischer Forschung, deren Einführung in die Wissenschaft den Geometern unserer Zeit vorbehalten war. Obwohl nun diese Gesetze eine ergiebige Quelle mathematischer Wahrheiten sind, und die Auffassung sowie die richtige Anwendung derselben keinen erheblichen Schwierigkeiten unterliegt, so wurde doch bisher weder ihre Bedeutung stark genug betont, noch ihre Begründung und Entwickelung so klar und vollständig gegeben, wie es bei einem in hohem Grade einfachen Gegenstande wünschenswerth erscheinen sollte.

Folgenden hierher gehörigen merkwürdigen Satz hat zuerst Euler mit Hülfe einer geometrischen Construktion bewiesen:

„Wenn zwei congruente feste Körper) einen Punkt gemein haben, so gibt es immer, welches auch die Stellung der beiden Körper im Raume sein mag, eine durch jenen Punkt gehende Gerade, welche gegen beide Körper einerlei Lage hat, so dass durch Drehung um diese Gerade der eine Körper mit dem andern zur Deckung gebracht werden kann.“* Es liegt sehr nahe, diesen Satz dadurch zu generalisiren, dass man die beschränkende Bedingung eines gemeinschaftlichen Punktes aufhebt, und höchst wahrscheinlich leuchtete unserem grossen Mathematiker diese Generalisation sofort ein; indess hat sowohl er, wie auch sein berühmter Nachfolger Lagrange, es unterlassen, das allgemeine Prinzip, welches aus ihren analytischen Formeln leicht herauszulesen ist, in Bezug auf Folgerungen für die Geometrie und Mechanik auszubeuten.

Im Jahre 1830 veröffentlichte der um die Geometrie hochverdiente französische Mathematiker Chasles in dem Bulletin des Sciences von Férussac einen kleinen Aufsatz, in welchem er einige allgemeine Eigenschaften des Systems zweier ähnlichen Körper, die irgendwie im Raume gelegen sind, mittheilt, und diese sodann für die Annahme zweier congruenten Systeme folgendermassen spezialisirt: *„Wenn man im Raum zwei congruente Körper in beliebiger Lage hat, so gibt es immer eine unendliche Gerade, welche, wenn man sie als dem einen Körper angehörig betrachtet, selbst ihre Homologe im andern Körper ist. Woraus man sogleich diese allgemeine Eigenschaft der Ortsveränderung eines festen Körpers folgert: Wenn ein fester Körper irgend eine endliche Ortsveränderung erfährt, so gibt es in diesem Körper stets eine gewisse unendliche Gerade, welche nach der Veränderung sich wieder an derselben Stelle befinden wird, wie vorher. Wenn man den zweiten Körper (d. h. den Körper in seiner zweiten Lage genommen) um diese Gerade dreht, so gelangt er in ähnliche Lage zu dem ersten, und wenn man ihn dann weiter in der Richtung dieser Geraden fortschiebt, so kommt er zur Deckung mit dem ersten Körper; dies beweist, dass man immer einen festen Körper aus einer Lage in eine beliebige andere durch die Bewegung einer Schraube, an welcher er befestigt ist, überführen kann.“*

---

*) Allgemeiner ist der Ausdruck *starres System*, weil er diskontinuirliche Verbindungen von Punkten, deren gegenseitige Abstände unveränderlich sind, mit umfasst.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaft bestätigt fast auf allen Seiten die bemerkenswerthe Thatsache, dass Wahrheiten von allgemeiner Natur nur in seltenen Fällen auf dem direkten Wege erreicht werden, welchen man später als den geeignetsten zu ihrer Deduktion einschlägt: Indem Chasles die Relationen der Lage, welche zwischen zwei projektivischen, oder wie er es nennt, homographischen Gebilden stattfinden, zunächst dem besondern Fall zweier ähnlichen, sodann zweier congruenten Systeme anpasst, gelangt er zu einem Resultat, welches man unmittelbar und ohne Mühe erhalten hätte, wäre man auf der von Euler vorgezeichneten Spur fortgeschritten. Natürlicherweise verbleibt damit der Herleitung Chasles' immerhin der eigenthümliche Vorzug, einen Zusammenhang mit weiteren geometrischen Gesetzen zu offenbaren, der umgekehrt nur auf künstliche Weise wieder hergestellt werden kann. Chasles selbst zeigte in seinem bekannten Werke: Aperçu historique etc. wie man sich seines Theorems zur Construktion der Normalen bei einer grossen Anzahl von Curven bedienen kann; er wies nach, dass die besondere Tangentenmethode, mit deren Hülfe Descartes und Pascal das berühmte Problem über die Cykloide lösten, unter diese Anwendungen zu rechnen sei. Seitdem haben es verschiedene Schriftsteller bei schwierigen Fragen aus der reinen Mechanik mit grossem Nutzen gebraucht: So benutzte Poinsot dasselbe in seinem classischen Werke über die Rotation, um der Vorstellungskraft ein deutliches Bild von der allgemeinen Bewegung eines Körpers zu liefern; Olinde Rodrigues leitete daraus den analytischen Ausdruck der endlichen, oder unendlich kleinen Coordinaten-Variationen in einem beweglichen starren System, sowie die Bedingungen der Unbeweglichkeit eines solchen Systems ab. Auch die Maschinenkunde hat diesem Prinzip einige schätzbare Resultate zu verdanken: zum Beispiel die scharfsinnig erdachte Methode zur Construktion von Zahnformen mittels Kreisbogen, welche der Professor Willis in den transactions of the institution of civil engineers bekannt machte; ein solches wäre ferner die bedeutende Vereinfachung, welche sich für die geometrische Theorie correspondirender Zahnflächen ergeben würde, wollte man ihr dies Prinzip zu Grunde legen. Und bei dem heutigen Standpunkt dieses Zweigs unserer Kenntnisse ist es für den Ingenieur und Maschinenbauer geradezu unerlässlich geworden, sich mit den in Rede stehenden Grundwahrheiten möglichst vertraut zu machen.

Weil ihm aber die gewöhnlichen Handbücher hiezu keine Gelegenheit bieten, so dürfte eine Arbeit nicht überflüssig sein, die es unternimmt, diese Wahrheiten dem allgemeinen Verständniss, insbesondere dem Verständniss des Technikers näher zu bringen. Die letztere Rücksicht bestimmte mich denn auch, eine Methode der Herleitung zu wählen, welche in Bezug auf mathematische Vorkenntnisse nur geringe Anforderungen an den Leser stellt, und solche Uebungen beizufügen, welche den eigentlichen Sinn der Sätze zum Bewusstsein bringen können. Dabei lag es nicht in meiner Absicht, die Anwendungen mit derselben Ausführlichkeit wie die Hauptsache zu behandeln; der Beschränktheit des Raumes wegen musste es überdiess zuweilen bei blosen Andeutungen sein Bewenden haben.

Gelänge es mir, meine Leser soweit anzuregen, dass sie sich aufgefordert fühlten, einige Lücken auszufüllen und Unvollständiges zu ergänzen, so wäre das Ziel, das ich mir bei Abfassung dieser Schrift vorgesetzt habe, erreicht.

§ 1. Ortsveränderung eines ebenen Systems S in seiner Ebene.

Fig. I. Um die Beziehungen zwischen zwei beliebigen Lagen, die ein ebenes System in seiner Ebene einnimmt, zu ermitteln, stelle ich mir einen Kreis vor, welcher zu dem System gehört und in dessen erster Lage mit dem um A mit dem Radius AP beschriebenen Kreise, in der zweiten Lage mit dem um A′ mit demselben Radius beschriebenen Kreise zusammenfällt. Jede Bewegung des ebenen Systems der Art, dass der Kreis (A) mit (A′) zur Deckung kommt und dass ausserdem irgend ein Punkt P des Kreises (A) mit dem ihm entsprechenden [*homologen*] P′ zusammenfällt, kann dazu dienen, S aus der ersten Lage in die zweite überzuführen. Natürlich ist es nun, dass man dem S einmal eine parallele Verschiebung gleich AA′ ertheilt und dasselbe hierauf um den Punkt A′ so lange dreht, bis der Punkt P an die ihm angewiesene Stelle P′ gelangt. Die hiezu erforderliche Drehung sei durch den Winkel 2φ gemessen. Errichtet man nun auf AA′, in A, und A′ die Normalen AC, A′C′, und macht $< PAC = P'A'C' = \varphi$, so sind nothwendig P, P′ zwei homologe Punkte. Zieht man PA, P′A′ und verlängert diese Geraden bis zu ihrem Durchschnitt O, so wird $OP = OP'$, $< POP' = 2\varphi$, und es ist evident, ***dass das System S aus der ersten Lage in die zweite gebracht werden kann, indem man ihm um den Punkt O eine einzige Drehung ertheilt, deren***

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Amplitude 2φ ist. Oder: ***Wenn auf irgend eine Weise die zweite Lage aus der ersten abgeleitet wird, so gibt es in S einen bestimmten Punkt O, welcher an seinen ursprünglichen Ort zurückkehrt, d. h. eine geschlossene Linie beschreibt.***

Zur Uebung. Die Natur der von O beschriebenen Curve hängt allein von dem durchaus willkührlichen Modus der Herleitung der einen Lage aus der andern ab. Behält man die Mittelpunkte A, A' einmal bei, und bestimmt den Radius x der zugehörigen Kreise, so dass: $(OA + x)\, 2\varphi = 2\pi . x$; so kann man den Kreis (A) über dem Bogen PP' fortrollen lassen, bis er mit (A') zusammenfällt, dann werden auch die Punkte P, P' sich decken. Alle Punkte des Systems (A allein ausgenommen) beschreiben Cykloidenbögen, O durchläuft die Schleife einer Cycloide. Einiges Interesse bietet folgende Modifikation dar:

Fig. II. Aus A, A' beschreibe man mit $AO = A'O$ zwei Kreise, welche sich ferner in M schneiden mögen. Aus M beschreibe man mit einem Radius $= 2$ MA einen Kreis, welcher jene in Q, R berührt, und lasse nun den Kreis A über dem Bogen QR rollen. Ist dann A nach A' gekommen, so befindet sich auch das System S in seiner zweiten Lage; denn zieht man die Geraden AOP, $A'OP'$, so sind P, P' zwei homologe Punkte, und es ist bekannt, dass beim Rollen des Kreises (A) über dem Bogen QR der Punkt O das gerade Stück OA hin und her durchläuft, dass P auf der Geraden PMP' bleibt, und demnach, wenn A nach A' gelangt, mit P' zusammenliegt. ***Bei dieser Bewegung beschreibt also O eine geschlossene gerade Linie, alle auf dem Kreise (A) liegende Punkte beschreiben geradlinige Bahnen, welche mit der Bahn von O sich im Punkte M schneiden; die übrigen Punkte von S beschreiben Bögen von Ellipsen, deren Mittelpunkt M, und für welche entweder die Summe der Halbaxen oder die Differenz dem Durchmesser von (A) gleich ist, je nachdem diese Punkte innerhalb oder ausserhalb des Kreises (A) liegen.***

Fig. III. Die nämliche Bewegung nimmt S auch an, wenn man zwei Punkte, welche mit O nicht in einer Geraden liegen, auf geradem Wege in ihre neuen Lagen führt. Denn man sieht leicht, dass, wenn P, Q die ersten, P', Q' die zweiten Lagen der beiden Punkte sind, die Geraden PP', QQ' sich schneiden müssen; etwa in M. Um die Dreiecke MPQ, $MP'Q'$ beschreibe man zwei Kreise, so sind diese von gleicher Grösse, und wegen der Congruenz von APQ, $A'P'Q'$ sind ihre Mittelpunkte A, A' homologe Punkte. Beschreibt man nun noch aus M mit dem Radius 2 MA einen Kreis, und lässt (A) über diesem rollen, bis A und A' zusammenfallen, so werden sich auch die Punkte P, P' decken; wir sind daher auf die vorige Art zurückgeführt.

Die eben betrachteten gleichen Kreise haben noch eine andere Bedeutung: Auf jeder Geraden gibt es, wie man sofort erkennt, zwei homologe Punkte, und nicht mehr. Fragt man nach dem Ort der homologen Punkte, welche sich in einem Strahlenbüschel von gegebenem Mittelpunkt M auf denselben Strahlen finden, so erhält man für diesen zwei gleiche, sich in M und dem Drehpunkt O unter dem Winkel 2φ schneidende Kreise; die Punkte des einen entsprechen denen des andern und ihre Verbindungslinien enthalten den Punkt M. —

Wie aber auf jeder Geraden zwei sich entsprechende Punkte liegen, so gehen durch jeden Punkt zwei und nur zwei homologe Geraden. Der Ort für die den Punkten M einer gegebenen Geraden m zugehörigen Geradenpaare besteht aus zwei congruenten Parabeln, welche die Gerade m zur gemeinschaftlichen Tangente, den Drehpunkt O zum gemeinschaftlichen Brennpunkt haben.

Wählt man als den Ort des Punktes M einen Kreis, so umhüllen die Paare homologer Geraden zwei diesen Kreis doppelt berührende Kegelschnitte, welche O zum Brennpunkt haben und durch eine Drehung von der Amplitude 2φ um O zur Deckung gebracht werden können. Diese Kegelschnitte sind beide entweder Ellipsen oder Hyperbeln, je nachdem der Drehpunkt O von dem Ortskreise M umschlossen wird oder nicht.

Verbindet man die Punkte P, Q einer Geraden mit ihren homologen P', Q, und beachtet, dass die Dreiecke OPP', OQQ' ähnlich sind, so sieht man, dass die Geraden PP', QQ', zusammen mit PQ, $P'Q'$ eine Parabel umhüllen, deren Brennpunkt O ist. — Verbindet man die Punkte eines Kreises mit ihren homologen, so folgt in analoger Weise, dass die Verbindungslinien einen Kegelschnitt (Ellipse oder Hyperbel) umhüllen, welcher von den beiden zugeordneten Kreisen doppelt berührt wird.

Anmerkung. Wenn die beiden Lagen von S einander unendlich nahe liegen (benachbarte sind) so gilt Alles, was wir aufgestellt haben, wenn nur berücksichtigt wird, dass an die Stelle der Verbindungslinie zweier homologen Punkte das Wegelement eines Punktes, und an die Stelle des Durchschnittspunktes zweier homologen Geraden der Berührungspunkt der in Bewegung befindlichen Geraden mit der von ihr umhüllten Curve tritt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 2. Ortsveränderung eines räumlichen Systems, S mit einem absolut festen Punkt.

Fig. IV. Wir betrachten zwei Lagen von S, welche das Gemeinsame haben, dass ein zu S gehöriger Punkt O in beiden Lagen dieselbe Stelle einnimmt, und wollen beweisen, ***dass die eine Lage aus der andern mittels einer einfachen Drehung von S um eine durch O gehende Axe abgeleitet werden kann.*** Bei diesem Beweise verfahre ich ebenso wie vorher; ich suche einem mit S fest verbundenen Kreise eine solche Bewegung zu ertheilen, dass er aus seiner ersten Lage in die zweite gelangt. Um den festen Punkt O als Mittelpunkt denke ich eine Kugel beschrieben und auf dieser sei ein Kreis, dessen Mittelpunkt A und dessen Radius AP ist, so zu bewegen, dass sein Mittelpunkt A nach A′ und noch irgend einer seiner Punkte P nach P′ kommt. Offenbar wird dies erreicht, wenn man den Kreis zuerst um eine im Punkte O auf der Ebene OAA′ normale Axe dreht bis A mit A′ zusammenfällt und zu dieser Drehung noch eine andere um OA′ als Axe hinzufügt, durch welche P nach P′ geführt wird. Seien nun AC, A′C′ die Bögen zweier grössten Kreise, deren Ebenen auf AOA′ normal sind, 2φ der Winkel, um welchen man das System noch zu drehen hat, wenn bereits OA mit OA′ zusammenliegt, so mache man die sphärischen Winkel PAC, P′A′C′ jeden gleich φ, und verlängere die Bogen PA, P′A′ bis zu ihrem Durchschnitt O′. Dann ist O′P = O′P′, und es ist klar, dass der Kreis (A) durch eine Drehung um die Axe OO′ zur Coinzidenz mit (A′) gebracht werden kann, wobei denn auch die Punkte P,P′, also überhaupt irgend zwei homologe Punkte der Kreise sich decken. Die Amplitude der nöthigen Drehung ist der sphärische Winkel AO′A′ = 2φ. Demnach haben wir erreicht, dass durch eine einzige Drehung um die Axe OO′ alle Punkte des gedachten Kreises aus ihrer ersten Lage in die zweite übergeführt werden, und es geht aus der Unveränderlichkeit der gegenseitigen Abstände aller Punkte von S hervor, dass dasselbe von jedem Punkte gilt. ***Bewegt sich ein starres System in der Weise, dass einer seiner Punkte endlich wieder seine ursprüngliche Lage annimmt, so kann man eine durch diesen Punkt gehende Gerade angeben, welche in ihre frühere Lage zurückkehrt; d. h. welche eine geschlossene Fläche beschreibt.*** Oder: Es lässt sich das System in eine Schaar ebener Systeme zerlegen (normal auf der Drehaxe), welche, wenn sie ihre ursprünglichen Ebenen auch verlassen, doch wieder in dieselben zurückkehren, und stets ist die eine Lage aus der andern so abzuleiten, dass jene ebene Systeme in ihren Ebenen verbleiben. In jeder dieser Ebenen gibt es einen zurückkehrenden Punkt O′, und alle diese Punkte liegen auf der Drehaxe. Weil die Verbindungslinien homologer Punkte in einer bestimmten Stellung (normal zur Drehaxe) sich befinden, so liegen alle solche Punkte, deren Verbindungslinien durch einen beliebigen Punkt M gehen, in einer Ebene und in dieser besteht ihr Ort aus zwei gleichen Kreisen, welche durch M und O′ gehen und sich unter dem Winkel 2φ schneiden.

Verbindet man die Punkte einer Geraden G mit ihren homologen, so erfüllen diese Verbindungslinien ein hyperbolisches Paraboloid, welches zu einer Ebene wird, wenn G die Drehaxe schneidet, oder damit parallel, oder darauf normal ist.

Fassen wir zwei benachbarte Lagen in's Auge, so folgt, ***dass die Bahnelemente aller Punkte einer Geraden, die sich unendlich wenig um eine andere dreht, in einem hyperbolischen Paraboloid liegen;*** oder: Errichtet man auf den Ebenen eines Ebenenbüschels in den Punkten, in welchen sie von irgend einer Geraden getroffen werden, Normalen, so erzeugen diese ein hyperbolisches Paraboloid.

Zur Construktion der Drehaxe bedarf es nur der Angabe zweier Punkte P,Q des Systems und ihrer homologen P,′Q′: nämlich die beiden Ebenen, welche in der Mitten von PP′ und QQ′ beziehlich auf diesen Geraden normal sind, schneiden sich in der Drehaxe.

§ 3. Ortsveränderung, bei welcher kein Punkt des Systems S seine anfängliche Stelle im Raume wieder einnimmt.

Vermöge einer derartigen Ortsveränderung sei ein Punkt A nach A′ gekommen, so wird man die zweite Lage aus der ersten dadurch ableiten, dass man dem S eine parallele Verschiebung ertheilt, welche A nach A′ bringt und dasselbe weiter um eine gewisse, durch A′ gehende Axe A′X eine Drehung von bestimmter Amplitude 2φ ausführen lässt. Stellen wir uns nun alle Punkte von S auf dem Parallel-Strahlenbündel vor, dessen Richtung durch AX angegeben ist, so begreift man, dass unter diesen Strahlen einer sein muss, der durch die Drehung in die nämliche Gerade geführt wird, in welcher er sich ursprünglich befand: Denn eine auf AX normale Ebene E hat in der ersten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lage des Strahlenbündels S mit demselben ein ebenes System Σ gemein, welches in der zweiten Lage Σ' in einer mit E parallelen Ebene E′ liegt; so dass der Parallel-Strahlenbündel es jetzt auf E als ein mit Σ congruentes System projizirt. Da aber zwei congruente ebene Systeme immer *einen* Punkt gemein haben, so gibt es auch in der zweiten Lage einen Strahl c, welcher durch denselben Punkt von E geht, den er in der ersten Lage traf, d. h. der nach vollzogener Drehung wieder in die Lage kommt, welche er vor der Verschiebung inne hatte. ***Wenn daher keine Ableitung der beiden Lagen denkbar ist, bei welcher ein Punkt eine geschlossene Linie durchläuft, so kann man unter allen Umständen eine Gerade angeben, die eine geschlossene Fläche beschreibt; die Punktenreihe aber, welche ursprünglich in jener Geraden lag, befindet sich in der zweiten Lage darin um eine gewisse Strecke verschoben.*** Diese Strecke ist nichts anderes als die rechtwinklige Projektion von AA′ auf die Richtung von A′X oder c; oder auch, wenn B,B′ zwei beliebige homologe Punkte sind, die Projektion von BB′ auf jene Richtung. ***Man kann also das System aus einer Lage in jede andere überführen, indem man dasselbe einer gewissen Richtung parallel verschiebt, und es hierauf um eine Gerade, welche dieser Richtung angehört, dreht; diese Gerade heisst Centralaxe*** (wir bezeichnen sie mit c). Wir fanden c parallel der besondern zum Punkte A′ gehörigen Axe A′X, und es könnte scheinen, als wenn ihre Richtung von der Wahl des Punktes A abhinge. Dem ist jedoch nicht so, wie folgendermassen erhellt: B gehöre zu dem auf AX normal gedachten ebenen System Σ, B′ also zu Σ'. Weil die Verschiebung BB′ das System normal gegen sich selbst um dieselbe Grösse entfernt, wie die Verschiebung AA′, so gelangt Σ durch jene in dieselbe Ebene E′, wie durch diese: Soll es mithin nach vollzogener Drehung um eine durch B′ gerichtete Axe B′Y noch in der Ebene E′ sich befinden, wie es ja in der That sein muss, so muss auch die Axe B′Y auf E′ normal, ***d. i. der Centralaxe parallel*** sein. — Ferner seien C,C′ die Punkte von c, welche den Systemen Σ,Σ' angehören, so kann man die Verschiebung BB′ als zusammengesetzt betrachten aus einem mit CC′ gleichen und parallelen Stück BB″, und der in E′ liegenden Strecke B″B′; und der Punkt C kommt durch die Verschiebung BB′ in eine Lage C″ der Art, dass C′C″ gleich und parallel B″B′ ist. Bewirkt man daher die Ortsveränderung von S durch die Verschiebung CC′, und die nachfolgende Drehung um c, so muss durch diese letztere B″ nach B′ geführt werden; bewirkt man sie durch die Verschiebung BB′, welcher eine Drehung um B′Y folgt, so muss vermöge dieser Drehung C″ nach C′ gelangen: Woraus man schliesst, ***dass für alle möglichen Axen die Drehung sowohl der Grösse wie dem Sinne nach die nämliche ist, wie für die Centralaxe.*** Das eben entwickelte Theorem, welches das Fundament der geometrischen Theorie der Bewegung bildet, lautet vollständig:

Die Hinüberleitung eines starren Systems aus einer Lage in irgend eine andere lässt sich auf unzählige Arten mit Hülfe einer parallelen Verschiebung und einer darauf folgenden Drehung, oder auch umgekehrt, erreichen. Dabei ist die Drehaxe durch die beiden Lagen allein der Richtung nach bestimmt; die entsprechende Verschiebung hängt aber davon ab, durch welche Punkte des Systems die Drehaxe geht: Sie ist der Grösse und Richtung nach durch die Verbindungslinie eines solchen Punktes mit seinem homologen gegeben; die Drehung ist, was ihren Sinn und ihre Amplitude betrifft, durchaus constant. Unter den unendlich vielen möglichen Drehaxen befindet sich eine, die Centralaxe, für welche die zugehörige Verschiebung mit ihr selbst parallel und von allen denkbaren die kleinste ist; sie stellt die Axe einer Schraubenbewegung dar, mittels welcher die beabsichtigte Ortsveränderung hervorgebracht werden kann

Zur Construktion der Centralaxe c dient eine Verallgemeinerung der am Ende von § 2 vorgebrachten Bemerkung: Zwei homologe Punkte B,B′ liegen auf einem Umdrehungscylinder, dessen Axe c ist; folglich ist die Mitte M von BB′ derjenige Punkt dieser Linie, welcher am nächsten bei c liegt*). Zieht man daher durch M eine Gerade, normal auf c, so wird diese auch auf BB′ normal sein, oder zieht man durch M eine Gerade c′ parallel zu c (oder BY) und errichtet in c′ auf der Ebene, welche c′ und BB′ enthält, eine Ebene rechtwinklig, so geht diese durch c. Somit genügen bei gegebener Richtung von c zwei Punkte und ihre homologen um c zu finden. —

Von den Eigenschaften homologer Punkte wollen wir nur eine beweisen, welche uns in sehr

*) Um auf zwei windschiefen Geraden die Punkte des kleinsten Abstandes zu erhalten, beschreibe man um eine jede dieser Geraden als Axe einen Rotationscylinder und halbire das Stück, welches diese Fläche auf der andern begrenzt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

verschiedenen Transformationen wieder entgegen treten wird, nämlich; ***Die Verbindungslinien der Punkte einer Geraden mit ihren homologen bilden ein hyperbolisches Paraboloid.*** — Den Punkten P,Q einer Geraden mögen P′,Q′ als homologe entsprechen: Durch PP′ denke man eine Ebene E parallel QQ′, dann werden die Geraden PQ, P′Q′ gegen E gleich geneigt sein, denn PQ = P′Q′, und die Abstände der Punkte Q,Q′ von der gedachten Ebene sind ebenfalls gleich. Ist daher R ein Punkt der Linie PQ, so muss sein homologer R′, weil durch die Relation PR = P′R′ bestimmt, eben so weit von E entfernt sein wie R, mithin ist RR′ mit E parallel.

§ 4. Anwendungen.

I. Benachbarte Lagen und Bewegung eines starren Systems. Jede unendlich kleine Bewegung eines ebenen Systems, bei welcher dasselbe seine Ebene nicht verlässt, fällt mit einer Drehung um einen bestimmten Punkt der Ebene zusammen; die Normalen der Bahnelemente aller Punkte schneiden sich in diesem ***augenblicklichen Drehpunkt.*** Wenn das System fortfährt sich in seiner Ebene zu bewegen, und man verfolgt den Weg des jedesmaligen Drehpunktes, so bemerkt man eine, durch die Natur der Bewegung bestimmte Curve. Aber anstatt die ***absolute*** Stelle in's Auge zu fassen, welche der Drehpunkt einnimmt, kann man auch die Reihenfolge derjenigen Punkte des bewegten Systems betrachten, welche successive zu Drehpunkten werden, und als Ort für diese wird man eine gewisse Curve finden, welche an der Bewegung des Systems Theil nimmt. Betrachtet man die absolut feste, und die mit dem beweglichen System verbundene Curve als gegeben, so erhält man die Bewegung des Systems auch dadurch, dass man die zweite Curve in gewissem Sinn auf der ersten rollen lässt und mit jener das System unveränderlich verbindet.

Jede unendlich kleine Bewegung eines Systems um einen festen Punkt fällt mit einer Drehung um eine bestimmte durch diesen Punkt gehende Axe zusammen; die Normalebenen für die Bahnelemente aller Punkte schneiden sich in dieser Axe. Fährt das System fort, um jenen festen Punkt sich zu bewegen, so erhält man für den Ort der jedesmaligen Drehaxe einen Kegel, welcher den festen Punkt zur Spitze hat und im Raume fest ist. Verfolgt man aber die Geraden des Systems, welche der Reihe nach mit den Drehaxen zusammenfallen, so bilden diese einen zweiten, mit dem System beweglichen Kegel. Die Bewegung des Systems erhält man nun auch dadurch, dass man den beweglichen Kegel in gewissem Sinne auf dem festen rollen lässt und mit jenem das System unveränderlich verbindet.

Endlich, jede beliebige unendlich kleine Bewegung eines Systems kann betrachtet werden als zusammengesetzt aus einer Drehung um eine gewisse Gerade als Axe, und einer Verschiebung parallel zu dieser Axe. Die Bahnelemente aller Punkte gehören cylindrischen Spiralen an, welche gemeinsame Axe und gleiche Ganghöhe haben. Stellt man sich den Ort der Geraden vor, welche der Reihe nach Axen werden, einmal im absoluten Raume, sodann im beweglichen System, so erhält man zwei Regelflächen, wovon die eine über der andern rollt und zugleich gleitet. Denkt man sich diese beiden Flächen, sowie die Bewegung der einen gegeben, so hat man ein einfaches Mittel, die wirkliche Bewegung des Systems zu erzeugen, und z. B. für jeden Punkt Geschwindigkeit und Beschleunigung, wie auch die lebendige Kraft des Systems zu berechnen.

II. Zusammensetzung zweier Bewegungen. Unterliegt ein System nacheinander mehreren Rotationen und Verschiebungen, so handelt es sich darum, für die definitive Deplacirung die Centralaxe, die zugehörige Drehung und Verschiebung anzugeben. Zur Lösung dieser Aufgabe richtet man sein Augenmerk darauf, die gerade Punktenreihe zu ermitteln, welche, nachdem sie alle Bewegungen, denen sie unterworfen war, durchgemacht hat, schliesslich wieder in der Geraden sich befindet, in welcher sie anfangs war; und es kommt einzig und allein darauf an, das Verlangte für zwei derartige Bewegungen zu leisten. Von unserer Betrachtung schliessen wir, als hinreichend bekannt, die Zusammensetzung von blossen Verschiebungen, und, als minder wichtig, den Fall von ***endlichen*** Ortsveränderungen aus, für den die allgemeine Methode zwar anwendbar bleibt, der sich aber wesentlich von dem unendlich kleiner Bewegungen dadurch unterscheidet, dass bei jenem die Ordnung, in welcher die Zusammensetzung vorgenommen wird, nicht, wie bei diesem, gleichgültig ist. Der für die Philosophie der Mathematik äusserst wichtige Umstand, dass bei der Zusammensetzung ***unendlich kleiner*** Bewegungen die Art der Aufeinanderfolge ohne Einfluss auf das Resultat bleibt, leitet uns aus dem Gebiet der Geometrie über in das der Mechanik, welche ***coexistirende*** unendlich kleine Bewegungen (die von gewissen zugleichbestehenden Ursachen, wenn diese einzeln thätig wären,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

hervorgebracht würden) zu einer Gesammtwirkung vereinigt; aber es ist der Beachtung wohl werth, ***dass die Uebereinstimmung zwischen den Gesetzen der geometrischen und mechanischen Zusammensetzung von Bewegungen durch keinen Schluss a priori eingesehen werden kann, dass sie hier, wie überall ein eigentliches Naturgesetz, einen der Erfahrung entlehnten oder ihr antizipirten Satz constituirt.***

III. Zusammensetzung einer Drehung $d\varphi$ um eine Axe a mit einer Verschiebung dv, deren Richtung einer Geraden G parallel ist, die mit a den Winkel ω bildet. — Um die Axe a denke man einen Umdrehungs-Cylinder, dessen Normalschnitt den Radius ϱ hat, beschrieben, und an diesem zwei Berührungsebenen parallel zu G gelegt. Bei der Drehung bleiben die Berührungsseiten in diesen Ebenen, und auch noch bei der Verschiebung: eine der gedachten Seiten bewegt sich vermöge der Drehung um $\varrho\, d\varphi$ in einem der Verschiebungscomponente $dv \sin\omega$ gerade entgegengesetzten Sinn; die Grösse ihres definitiven Fortrückens ist folglich: $\varrho\, d\varphi - dv \sin\omega$, und wird Null, wenn ϱ der Bedingung $\varrho\, d\varphi = dv \sin\omega$ gemäss angenommen wird. Um daher die Centralaxe zu erhalten, beschreibe man um die Axe a denjenigen Umdrehungs-Cylinder, dessen Punkten die Rotationsgeschwindigkeit $dv \sin\omega$ zukommt, und lege in diesem je nach dem Sinn der Drehung eine Berührungsebene der Geraden G parallel; dann ist die Seite, in welcher die Berührung stattfindet, Centralaxe. Die Drehungsamplitude ist $d\varphi$, die Verschiebung in der Richtung von c ist $dv \cos\omega$, denn die mit a zusammenfallende Punktenreihe des Systems wird durch diese Bewegung ebenso deplacirt, wie durch die ursprünglich gegebene.

Wenn die Richtung von dv einen rechten Winkel mit a bildet, so findet man sofort durch Umkehrung die vielfach brauchbare Regel: ***Einer gegebenen Drehung $d\varphi$ um eine Axe c kann man eine gleiche Drehung um eine beliebige mit c parallele Axe a substituiren, wenn man mit dieser noch eine normal gegen die Ebene beider Axen gerichtete Verschiebung verbindet, welche gerade hinreicht, um die durch die zweite Drehung aus ihrer Lage gebrachte Axe c wieder in dieselbe zurückzuführen.***

Zur Uebung. Relative Bewegung eines Systems S, welches mit einer der Grösse und Richtung nach unveränderlichen Geschwindigkeit v fortschreitet, gegen den mit constanter Winkelgeschwindigkeit φ um eine feste Axe a rotirenden Raum R. Aufgabe ist, den Ort derjenigen Punkte des Raumes R zu charakterisiren, welche successive mit denen des Systems S zusammenfallen, der Vorstellung gleichsam die Spur zu zeigen, welche S in R zurücklässt. Hierzu benutzen wir den bekannten Grundsatz, wonach die relative Bewegung zweier Körper nicht gestört wird, wenn man beiden eine gemeinschaftliche Bewegung mittheilt. Fügen wir nun den vorhandenen Bewegungen eine Rotation hinzu, welche der des Raumes R geradezu entgegengesetzt ist und mit derselben Geschwindigkeit $d\varphi$ vor sich geht, so gelangt R für eine unendlich kurze Dauer dt zur Ruhe, die relative Bewegung von S wird zu einer absoluten und diese ist in jedem dt zusammengesetzt aus der Drehung $-d\varphi$ und der Verschiebung dv. Beide Bewegungen lassen sich nach dem Vorigen durch eine Drehung von gleicher Grösse und gleichem Sinn um eine mit a parallele Axe c und eine Verschiebung in der Richtung dieser Axe ersetzen, und welchen Moment man auch zur Bestimmung von c wählen möge, c wird seine Lage im absoluten Raume nicht ändern; dahingegen wird die mit c zusammenfallende Punktenreihe des Raumes R, je nach dem gewählten Moment jedesmal eine andere sein: Denkt man sich nämlich im Raume R einen Umdrehungs-Cylinder ϱ, welcher c zur Axe und a zur Seite hat, so wird nach jedem dt eine neue Seite dieses Cylinders mit c zusammenfallen. Aehnlicherweise werden die Geraden des fortschreitenden Systems S, welche gleichzeitig mit jenen Cylinderseiten sich in c befinden, in S eine Ebene E zum Ort haben, welche mit v parallel ist und den Cylinder ϱ in der Seite c berührt.

Stellen wir uns demnach vor, der Cylinder ϱ sei mit dem Raume R fest, die Ebene E wälze sich über seiner Oberfläche, indem sie zugleich in der Richtung von c fortgleitet und S sei mit E unveränderlich verbunden, so nimmt das System eine Bewegung an, welche mit der zu suchenden relativen im Raume R identisch ist: Jede Gerade von S, welche a parallel ist, beschreibt eine cylindrische Fläche, deren Normalschnitt eine gewöhnliche, gestreckte oder verkürzte Evolvente des Kreises ist, welcher den Normalschnitt von ϱ darstellt, zugleich verschieben sich die Punkte einer solchen Geraden in derselben um $dv \cos\omega$. Jede Gerade von S, welche in E liegt, behält ihren kürzesten Abstand von der Cylinderaxe bei und berührt den Cylinder fortwährend in Punkten einer leicht zu bestimmenden Schraubenlinie; diese Schraubenlinie wird ein Kreis für alle Geraden, welche die Richtung v haben, deshalb beschreiben die bezüglichen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Geraden Rotationshyperboloide; die übrigen Geraden von S beschreiben im Allgemeinen windschiefe, bei einer besondern Lage jedoch auch abwickelbare Schraubenflächen. Die relative Trajektorie eines Punktes ist eine Art Spirale auf einem Kreisevolventen-Cylinder und kann auch als Durchschnitt eines solchen Cylinders mit einer abwickelbaren Schraubenfläche construirt werden. — ***Nimmt man die Richtung der Bewegung von S normal gegen die Axe a an, so erhält man die Basis für die Theorie der Kreisevolventen-Verzahnung.***

IV. Zusammensetzung zweier Drehungen $d\mu$, $d\nu$ um parallele Axen m, n. Um die Axen m, n denke man zwei Umdrehungs-Cylinder, welche sich in der Weise berühren, dass ihre zusammenliegenden Seiten, indem sie den betreffenden Drehungen folgen, in entgegengesetztem Sinn auseinandertreten. Wenn nun die Radien ϱ, ϱ' der Normalschnitte beider Cylinder so gewählt sind, dass $\varrho\, d\mu = \varrho'\, d\nu$, so wird die Berührungslinie, wenn sie nacheinander beide Drehungen vollzieht, wieder in ihre anfängliche Lage gelangen; sie ist mithin die Centralaxe c. Was die Amplitude der resultirenden Drehung betrifft, so sei diese $d\psi$; weil nun n durch Drehung um m ebenso deplacirt werden muss, wie durch Drehung um c, so ist entweder:

$$(\varrho + \varrho')\, d\mu = \varrho'\, d\psi, \text{ oder } \pm (\varrho - \varrho')\, d\mu = \varrho'\, d\psi$$

je nachdem c zwischen m und n liegt, oder über m, oder über n hinaus. Der Kürze wegen setzen wir im Folgenden stets voraus, dass die resultirende Drehaxe zwischen die gegebenen Axen falle, eine Voraussetzung, welche die Allgemeinheit unseres Verfahrens nicht beeinträchtigt. Man hat gleicherweise

$$(\varrho + \varrho')\, d\nu = \varrho\, d\psi; \text{ daher 1) } \varrho\, d\mu = \varrho'\, d\nu; \text{ und 2) } d\psi = d\mu + d\nu$$

Woraus folgt, dass die Centralaxe den Abstand der Axen m,n im umgekehrten Verhältniss der Drehungs-Amplitüden $d\mu$, $d\nu$ theilt; ***oder die Centralaxe hat die Richtung der Resultante zweier in m,n wirkenden Kräfte, von den Intensitäten $d\mu$, $d\nu$; die zugehörige Drehung hat eine Amplitüde, welche dieser Resultanten gleich ist.***

Zur Uebung. Die Bewegung eines ebenen Systems, von dem ein bestimmter Kreis (M, Radius ϱ) auf einem absolut festen Kreise (N, Radius ϱ') rollt, fällt in jedem Moment mit einer Drehung um den Berührungspunkt beider Kreise zusammen: denn das gedachte System lässt sich immer aus einer Lage in die benachbarte durch zwei successive Drehungen beziehlich um die Punkte M,N überführen, und wenn $d\mu$ die Amplitüde der ersten Drehung ist, so wird $\frac{\varrho\, d\mu}{\varrho'}$ die der zweiten sein; der augenblickliche Drehpunkt C theilt demnach die Linie MN in dem Verhältniss: $\varrho : \varrho'$; die resultirende Amplitüde ist $(1 \pm \frac{\varrho}{\varrho'})\, d\omega$, je nachdem der rollende Kreis sich ausser oder innerhalb des festen befindet. Das Bahnelement für irgend einen Punkt P wird $PC\,(1 \pm \frac{\varrho}{\varrho'})\, d\omega$, und man sieht, dass die Rektification der von P beschriebenen Curve auf die Ermittelung des Integrals $\int PC\, d\omega$ hinausläuft. Ohne analytische Hülfsmittel in Anspruch zu nehmen, kann man sich über die Natur dieses Integrals auf folgende Weise Aufklärung verschaffen: Liegt der rollende Kreis in dem festen, und ist $\varrho = \frac{1}{2}\varrho'$, so wird das Differenzial der von P beschriebenen Curve $\frac{1}{2} PC\, d\omega$, und da diese Linie bekanntlich entweder ein elliptischer Bogen (P ausserhalb des rollenden Kreises), oder eine gerade Linie (P im Umfang dieses Kreises) ist, so erhellt, ***dass die Rektifikation der gestreckten und verkürzten Cykloiden aller Art durch ein elliptisches Integral zweiter Gattung, die der gewöhnlichen Cykloiden einfach durch eine Kreisfunktion bewerkstelligt wird. Auf diesem Wege kommt man am schnellsten zu den von Pascal herrührenden Sätzen über gleiche Ellipsen und Cykloidenbögen.***

V. Zusammensetzung zweier Drehungen $d\mu$, $d\nu$ um zwei Axen m, n, welche sich in einem Punkte O schneiden. Um diese Axen denkt man zwei sich berührende Umdrehungskegel der Art, dass ihre beiden zusammenfallenden Seiten, indem sie den betreffenden Drehungen folgen, in entgegengesetztem Sinn sich bewegen. Wenn nun die Radien ϱ, ϱ' zweier sich berührenden Kreisschnitte dieser Kegel so angenommen sind, dass $\varrho\, d\mu = \varrho'\, d\nu$, so wird ihre Berührungslinie, wenn sie nacheinander beide Drehungen vollzogen hat, wieder in ihrer anfänglichen Lage sein. Diese Linie ist also Centralaxe. Die Amplitüde $d\psi$ der resultirenden Drehung kann danach bestimmt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

werden, dass ein beliebiger Punkt M der Axe m durch diese Drehung in dieselbe Lage gelangt, wie durch die Drehung $d\nu$ um die Axe n, d. h.

Fig. V. $$OM \sin \omega \, d\psi = OM \sin \alpha \, d\nu, \text{ oder } ON \sin (\alpha - \omega) \, d\psi = ON \sin \alpha \, d\mu.$$

Auch hier stellt sich heraus, ***dass die Centralaxe mit der Resultanten zweier in m,n wirkenden Kräfte $d\mu$, $d\nu$ zusammenfällt, und dass die Amplitude der resultirenden Drehung dieselbe Grösse $d\psi$ zum Mass hat, wie diese Resultante.***

In den mitgetheilten Sätzen tritt eine merkwürdige Analogie zwischen der Zusammensetzung von Kräften und von Rotationen zu Tage. Da wir an einer andern Stelle Gelegenheit haben werden, darauf zurückzukommen, so genüge hier die Bemerkung, dass Poinsot, indem er den glücklichen Gedanken der Aequivalenz einer Verschiebung oder Translation und eines sogenannten Drehungspaars (d. i. zweier successiven, gleichen, aber entgegengesetzten Drehungen um parallele Axen) durchführte, eine vollkommen gleichartige Behandlung der Statik und Dynamik ermöglichte und anbahnte. Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die erwähnte Analogie keineswegs, wie man auf den ersten Blick vermuthen möchte, neben die Verschiebung die einfache Kraft, neben die Drehung das Kräftepaar stellt, dass sie im Gegentheil die Kraft der Rotation, das Kräftepaar (die Axe desselben) der Translation entsprechen lässt.

Wir gehen auf die Zerlegung von Rotationen in andere, als eine durch das bisher Gesagte eigentlich schon erledigte Aufgabe, nicht näher ein, und wenden uns zu einer Untersuchung, welche die momentane Bewegung eines Systems von einer neuen Seite zeigen, und uns gestatten wird, der Lehre von der Zusammensetzung von Bewegungen gegenüber einen höhern Standpunkt zu gewinnen.

VI. Von der Zusammensetzung zweier Drehungen $d\mu$, $d\nu$, um windschiefe Axen m, n.

Fig. VI. 1) Man ziehe die auf m und n normalstehende Gerade MN (die Linie des kürzesten Abstandes), ihre Länge sei e. Durch den Punkt N ziehe man $m' \parallel m$, so lässt sich statt der um m erfolgenden Drehung $d\mu$ eine um die Axe m' erfolgende Drehung von gleicher Amplitude und gleichem Sinn substituiren, wenn nur zu dieser noch eine Verschiebung sich gesellt, die normal gegen die Ebene mm' gerichtet ist und deren Mass: $e\,d\mu$. Die beiden jetzt bestehenden Drehungen um m' und n geben eine resultirende Drehung $d\psi$ um eine gewisse, in der Ebene mm' liegende und durch den Punkt N gehende Axe c'. Bezeichnen wir die Winkel $m'c'$, $m'n$, d. h. welche von den Geraden m',c' und m',n gebildet werden, mit ω, α so muss:

$$1)\ d\mu \sin \omega = d\nu \sin (\alpha - \omega);\quad 2)\ d\psi = \frac{d\nu \sin \alpha}{\sin \omega} = \frac{d\mu \sin \alpha}{\sin (\alpha - \omega)}.$$

Aber die Drehung $d\psi$ um c', vereinigt mit der Verschiebung $e\,d\mu$ führt auf eine Drehung $d\psi$ um eine mit c' parallele Axe c, combinirt mit einer zu c parallelen Verschiebung, deren Grösse: $e\,d\mu \cos (\frac{\pi}{2} - \omega) = e\,d\mu \sin \omega$. Daraus, dass die Richtung von $e\,d\mu$ einen rechten Winkel mit MN bildet, folgert man leicht, dass c die Linie MN in einem Punkte C treffen muss, der je nach dem Sinn von $d\mu$ entweder auf der Strecke MN, oder auf deren Verlängerung liegt, jedoch stets so, dass

$$CN\,d\psi = e\,d\mu \cos \omega.$$

Setzen wir $CM = \varrho$, $CN = \varrho'$; so folgt:

$$\varrho'\,d\psi = e\,d\mu \cos \omega, \text{ also } \varrho' = \frac{d\mu}{d\nu} \frac{\sin \omega \cos \omega}{\sin \alpha} = e \frac{\cos \omega \sin (\alpha - \omega)}{\sin \alpha}$$

$$\text{Und: } \varrho = e - \varrho' = e \frac{\sin \omega \cos (\alpha - \omega)}{\sin \alpha};\ \text{daher: } 3)\ \frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{\tang \omega}{\tang (\alpha - \omega)}.$$

Fig. VII. 2) ***Construktion der Centralaxe c.*** Die horizontale Projektionsebene sei durch MN normal auf m gelegt, die Vertikal-Ebene gehe durch m und sei mit n parallel; n'',n' seien die Projektionen von n, durch die Gerade c'' werde der Winkel $PMO = \alpha$ in zwei Theile ω, $\alpha - \omega$ getheilt, deren Sinus in dem umgekehrten Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten $d\mu$, $d\nu$ stehen; dann ist c'' die Vertikal-Projektion der Axe c. Ihre Horizontal-Projektion zu bestimmen, ziehe ich auf c'' eine beliebige Normale $PR''Q''$, betrachte dieselbe als Vertikal-Projektion einer Geraden, welche sich an die Axen m,n in den Punkten P,Q anlehnt, deren Horizontal-Projektion mithin MQ' ist. Ich behaupte, dass die Linie PQ auch einen Punkt R mit der Axe c gemein hat; R'',R' müssten dann die Projektionen von R sein und das Behauptete ist bewiesen, wenn ich zeige, dass die Linie $R'C$, die ich mit n'

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

parallel ziehe, die Horizontal-Projektion von c ist. Nach Gleichung 3) bedarf es nur des Nachweises, dass $\frac{CM}{CN} = \frac{\text{tang}\,\omega}{\text{tang}(\alpha-\omega)}$; und die Figur zeigt sofort, dass diese Gleichung durch: $\frac{PR''}{R''Q''} = \frac{\text{tang}\,\omega}{\text{tang}(\alpha-\omega)}$, welche in der That erfüllt ist, mitbedingt wird. Hiermit ist unsere Aufgabe erledigt; zugleich ersieht man, dass die zu Hülfe genommene Gerade PQ, da ihre Vertikal-Projektion auf c'' normal, c'' aber mit c parallel ist, die Centralaxe in dem Punkte R unter rechtem Winkel schneidet: ***Die Geraden m, n, c gehören folglich zu der einen Schaar von Seiten eines hyperbolischen Paraboloid's, von welchem die Seiten der andern Schaar, wie PQ, mit c einen rechten Winkel bilden.***

Fig. VIII. 3) ***Identität einer willkürlichen unendlich kleinen Bewegung eines starren Systems mit zwei successiven Drehungen um windschiefe Axen.*** Wir setzen voraus, dass die gegebene Bewegung zurückgeführt sei auf eine Drehung $d\psi$ um die Centralaxe c, und eine Verschiebung df, parallel dieser Axe. N sei ein beliebiger Punkt des Systems, die Linie NC sei normal auf der Centralaxe. Durch den Punkt N ziehen wir $N\psi'$ zu c parallel, so ist die vorliegende Bewegung zu ersetzen durch eine Drehung $d\psi$ um die Axe $N\psi'$ vereint mit einer Verschiebung, welche aus der gegebenen df und der vermöge der ursprünglichen Drehung erfolgenden Bewegung $CN\,d\psi$ des Punktes N geometrisch zusammengesetzt ist. Diese Resultante (*die Axe der Translation für N*) sei NN'. Nun zerlegen wir $N\psi'$, das Mass von $d\psi$, in zwei Componenten $N\nu = d\nu$, $N\mu' = d\mu$, wovon die letztere normal auf der Ebene CNN', die erste beliebig, natürlicherweise aber in der durch $N\psi'$ und $N\mu'$ gelegten, auf CN normalen Ebene enthalten ist. Die Drehung $N\mu'$, verbunden mit der auf ihrer Axe normalen Verschiebung NN' führt auf eine Drehung $d\mu$ um eine mit $N\mu'$ parallele Axe $M\mu$, so dass endlich die gegebene Bewegung auf zwei Drehungen $d\mu$, $d\nu$ um die Axen $M\mu$ oder m, $N\nu$ oder n zurückgeführt ist. ***Diese Axen nennen wir Gegenaxen, die Punkte M,N, die Endpunkte des kleinsten Abstands zwischen ihnen, Gegenpunkte.***

Man bemerkt, dass eine solche Axe (wie $M\mu$) mit der Translationsaxe ihres Gegenpunktes (N) einen rechten Winkel bildet, und wenn daher ω der Winkel ist, unter welchem $M\mu$ (oder $N\mu'$) gegen die Axe c sich neigt, so ist dies derselbe, den NN' mit der Richtung von $CN\,d\psi$ einschliesst; folglich:

$$\text{tang}\,\omega = \frac{df.}{CN\,d\psi} \quad \ldots\ 1)$$

ω hängt somit von der Lage des Punktes N, nicht aber von der der Axe $N\nu$ ab; dieser letzteren gemäss bestimmt sich aber die Lage des Punktes M: Wenn $N\nu$ alle möglichen Lagen (normal auf CN) annimmt, so beschreibt gleichzeitig der Punkt M die unendlich verlängerte Gerade NC, die Axe $M\mu$ bleibt dabei in einer Ebene, welche mit c den Winkel ω bildet. Um bei einer besondern Lage von $N\nu$, die durch den Winkel α bestimmt sei, welchen $N\nu$, $M\mu$ bilden sollen, den Punkt M zu bestimmen, hat man:

$$MN\,d\mu = NN' = \sqrt{CN^2\,d\psi^2 + df^2};$$

Also nach 1) $$MN\,d\mu = CN\,d\psi\,\sqrt{1 + \text{tang}\,\omega^2} = \frac{CN\,d\psi}{\cos\,\omega}.$$

Weil aber, in Folge der Zerlegung von $d\psi$: $\frac{d\psi}{d\mu} = \frac{\sin\,\alpha}{\sin\,(\alpha-\omega)}$, so ist auch:

$$\frac{MN}{CN} = \frac{\sin\,\alpha}{\cos\,\omega\,\sin\,(\alpha-\omega)} = \frac{\text{tang}\,\omega + \text{tang}\,(\alpha-\omega)}{\text{tang}\,(\alpha-\omega)}$$

Mithin: $$\frac{CM}{CN} = \frac{\text{tang}\,\omega}{\text{tang}\,(\alpha-\omega)}, \text{ und: } CM = \frac{df}{d\psi\,\text{tang}\,(\alpha-\omega)} \quad \ldots\ 2)$$

Es genügt, auf die bei der Construktion von c vorkommende Betrachtung hinzuweisen, um den Satz aufstellen zu können, dass irgend zwei Gegenaxen m,n nebst der Centralaxe c einem hyperbolischen Paraboloid als Seiten angehören, in welchem die eine Schaar von Geraden auf c, die andere auf der Geraden NM, in welcher die kürzesten Abstände von m, c, n liegen, normal ist.

4) ***Eigenschaften der Gegenaxen.*** Ehe wir diese Auseinandersetzung beginnen, müssen wir in Kürze des Falles Erwähnung thun, bei dem es sich um die Gegenaxe einer Geraden m handelt, welche die Centralaxe schneidet: Zunächst ist klar, dass, wenn der Winkel mc ein Rechter ist,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von einer Zerlegung der Drehung $d\psi$ nach der Axe m nicht die Rede sein kann, also auch nicht von einer Gegenaxe; wenn ferner derselbe Winkel = Null ist, oder m ∥ c, so gehört zu der Drehung $d\psi$ um m noch eine parallele Verschiebung, die auch als eine Drehung um eine unendlich ferne Axe angesehen werden darf. Im Allgemeinen zerlege man $d\psi$ in zwei Componenten, wovon die eine m zur Axe, die zweite eine auf c normale Axe hat. Diese letztere liefert in Verbindung mit der Verschiebung df eine Drehung um eine Axe n, welche einmal in einer im Durchschnittspunkt von m,c auf c normalstehenden Ebene, sodann in einer der Ebene mc parallelen Ebene liegen muss. Hiernach kehren wir zu den Gegenaxen m,n zurück, die wir in der vorigen Nummer näher bestimmt haben. Die Punkte M,N,C, die Winkel α,ω nehmen wir in derselben Bedeutung, wie dort, und bezeichnen der Kürze wegen die im Punkte N auf NC normale Ebene in der Folge stets mit $\mathfrak{N}$.

Wir fanden, dass, wofern die Gerade n in der Ebene $\mathfrak{N}$ bleibt und fortwährend den Punkt N enthält, ihre Gegenaxe m einen constanten Winkel ω mit c bildet, sonst aber ihre Lage dergestalt ändert, dass sie eine durch NC gehende Ebene beschreibt. Der Reihenfolge von Lagen, in denen die Geraden m,n Gegenaxen sind, entspricht eine Schaar von hyperbolischen Paraboloiden, welche dieselbe (auf c normale) Richtebene, sowie zwei Seiten (c und die Gerade NC) gemein haben. Diese Paraboloide können dazu dienen, um der Vorstellung die Anordnung der möglichen Gegenaxen zugängig zu machen, und wir werden zeigen, ***dass in einem solchen Paraboloid unendlich viele Paare von Gegenaxen liegen, dass für ein solches Paar das Rechteck aus den Entfernungen der beiden Axen von c, ebenso wie das Produkt aus den Tangenten der Winkel, welche sie mit c bilden, constant ist.***

In dem Paraboloid, welches c,m,n enthält, seien s,t zwei zur selben Schaar wie m,n gehörige Seiten, S,T seien die Punkte, in welchen sie die Gerade MN schneiden, α' heisse der Winkel st, ω' der Winkel sc, dann ist

$$\frac{CS}{CT} = \frac{\operatorname{tang}\omega'}{\operatorname{tang}(\alpha'-\omega')}.$$

Wenn nun zwei Drehungen $d\sigma$, $d\tau$ um s,t als Axen vorliegen, derart, dass $d\sigma : d\tau = \sin(\alpha'-\omega') : \sin\omega'$, so wird die resultirende Centralaxe mit c parallel werden. Damit zugleich die resultirende Drehung $= d\psi$ werde, muss:

$$\frac{d\sigma \sin\alpha'}{\sin(\alpha'-\omega')} = d\psi, \text{ oder auch: } \frac{d\tau \sin\alpha'}{\sin\omega'} = d\psi \ldots . 3)$$

Und damit ferner die resultirende Axe mit c zusammenfalle, muss:

$$CT\, d\psi = ST\, d\sigma \cos\omega' . \ldots 4)$$

Endlich, damit die resultirenden Verschiebungen identisch seien, ist erforderlich:

$$ST\, d\sigma \sin\omega' = e\, d\mu \sin\omega \ldots 5)$$

Die Gleichungen 4), 5) transformire ich durch Einführung von $e = \varrho + \varrho'$, und durch Benutzung der Proportion: $\varrho + \varrho' : \varrho' = \operatorname{tang}\omega + \operatorname{tang}(\alpha-\omega) : \operatorname{tang}(\alpha-\omega) = \sin\alpha : \cos\omega \sin(\alpha-\omega)$. Es entsteht:

$$ST\, d\sigma \sin\omega' = \varrho' d\mu \operatorname{tang}\omega \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\omega)}; \text{ daher nach 4):}$$

$$CT \operatorname{tang}\omega' d\psi = \varrho' d\mu \operatorname{tang}\omega \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\omega)}, \text{ und weil:}$$

$d\psi : d\mu = \sin\alpha : \sin(\alpha-\omega)$, so folgt: $CT = \varrho' \dfrac{\operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\omega'} \ldots . 6)$

Mit Hülfe der Gleichungen $\varrho : \varrho' = \operatorname{tang}\omega : \operatorname{tang}(\alpha-\omega)$, $CS : CT = \operatorname{tang}\omega' : \operatorname{tang}(\alpha'-\omega')$ ergibt sich:

$$CS = \varrho \frac{\operatorname{tang}(\alpha-\omega)}{\operatorname{tang}(\alpha'-\omega')} \ldots . 7)$$

Hiernach kann der Punkt T, oder die Axe t willkührlich angenommen werden, der Winkel ω', den die Gegenaxe s mit c bildet, ist dann nach 6) bestimmt; und durch diesen Winkel hat man sogleich S; denn in dem betrachteten Paraboloid ist:

$$CS : \varrho = \operatorname{tang}\omega' : \operatorname{tang}\omega \ldots . 8)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Endlich folgt aus 7) und 8) die zur Bestimmung von Gegenaxen bequeme Beziehung:

$$CS.CT = \varrho\varrho',$$ die erste der behaupteten Eigenschaften.

Sie enthält nach 6) und 7) die zweite:

$$\operatorname{tang}\omega \operatorname{tang}(\alpha-\omega) = \operatorname{tang}\omega' \operatorname{tang}(\alpha'-\omega').$$

b) Die Gleichungen 3), 4), 5) beziehen sich nicht blos auf Gegenaxen in einem bestimmten Paraboloid, sondern sie enthalten ganz allgemeine Eigenschaften dieser Linien. Wendet man nun auf 5) die Formeln:

$$d\tau = \frac{d\psi \sin\omega'}{\sin\alpha'},\ d\nu = \frac{d\psi \sin\omega}{\sin\alpha} \text{ an,}$$

so kommt: $STd\sigma\, d\tau \sin\alpha' = ed\mu\, d\nu \sin\alpha \ldots .$ 9)

Denken wir uns auf den Axen s,t die Stücke $d\sigma$, $d\tau$ abgeschnitten, und ein Tetraeder gebildet, welches zu gegenüberliegenden Seiten eben diese Stücke hat, so drückt die linke Seite der Gleichung 9) den Inhalt dieses Tetraeders aus; ähnliches gilt für die rechte Seite in Bezug auf die Stücke $d\mu$, $d\nu$ in den Axen m,n: ***Wie man auch die gegebenen Drehungen $d\mu$, $d\nu$ durch zwei andere ersetzen mag, stets bleibt das Tetraeder, welches die auf den Drehaxen abgetragenen Masse dieser Drehungen zu gegenüberliegenden Seiten hat, von unveränderlichem Inhalt.*** Dieser Satz ist das Analogon des bekannten Chasles'schen Satzes über zwei einem Kräftesystem aequivalente Kräfte.

c) Der Winkel α, den zwei in einem bestimmten der vorhin erwähnten Paraboloide liegende Gegenaxen einschliessen, ändert sich im Allgemeinen von einem Paar zum andern, denn sonst würde die Gleichung $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\operatorname{tang}\omega + \operatorname{tang}(\alpha-\omega)}{1 - \operatorname{tang}\omega \operatorname{tang}(\alpha-\omega)}$ wegen der Constanz des Werthes von $\operatorname{tang}\omega \operatorname{tang}(\alpha-\omega)$ auf einen bestimmten Werth von ω führen, was offenbar nicht möglich ist. Jedoch bildet eine Ausnahme der Fall, wo $\operatorname{tang}\omega \operatorname{tang}(\alpha-\omega) = 1$ oder $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Erinnert man sich daran, dass, während die Axe n sich in der Ebene $\mathfrak{N}$ um den Punkt N drehte, ihre Gegenaxe m sich selbst parallel blieb, dabei mit der Translationsaxe NN' einen rechten Winkel bildete, so gewahrt man, dass, wenn n mit dieser Translationsaxe zusammenfällt, und nur dann, ihre Gegenaxe m mit ihr einen rechten Winkel bildet. Stellen wir uns mithin das Paraboloid her, in welchem jetzt m,n,c Seiten sind, so sind in diesem irgend zwei Gegenaxen normal gegen einander gerichtet und sie fallen zusammen mit den Translationsaxen ihrer der Centralaxe zunächst liegenden Punkte. In keinem der andern Paraboloide gibt es zwei unter rechtem Winkel geneigte Gegenaxen.

d) Eigentlich versteht es sich von selbst, dass zwei Gegenaxen dadurch charakterisirt sind, dass die Wegelemente (Translationsaxen) der Punkte der einen normal gegen die andere gerichtet sind: weil aber der direkte Beweis dieser Eigenschaft sehr einfach ist, so fügen wir ihn hier noch bei.

$N\nu$ ist die Axe n, NN' die Translationsaxe von N, $N\mu'$ mit m, $N\psi'$ mit c parallel; diese verschiedenen Geraden liegen in der Ebene $\mathfrak{N}$ und Winkel $N'N\mu'$ ist ein rechter. Nun ist das Wegelement des Punktes ν die Resultante von NN' und einer Drehung um die Axe $N\psi'$, und die letztgenannte Componente ist normal gegen die Ebene $\psi'N\nu$, d. h. parallel der Geraden NC; folglich ist die in Rede stehende Resultante der Ebene CNN' parallel, oder gehört einer auf $N\mu'$ (m) normalen Stellung an.

5) Hier ist der Ort, einige Sätze aufzustellen, welche mit gewissen, von Möbius in seiner Statik mitgetheilten die grösste Aehnlichkeit haben. Damit aber diese eigenthümliche Verwandtschaft zwischen dem Gegenstande nach wesentlich verschiedenen Wahrheiten recht sichtbar hervortrete, bediene ich mich der von Möbius gebrauchten Namen:

Unter Nullebene des Punktes N soll die Ebene verstanden werden, welche in N normal auf der Translationsaxe NN' von N ist. Dieselbe enthält nach Früherem die Gegenaxe einer jeden durch N gehenden auf NC normalen oder in $\mathfrak{N}$ liegenden Geraden. —

Nullpunkt einer Ebene E heisst derjenige Punkt von E, dessen Translationsaxe normal auf E ist. Diese Definition verlangt eine besondere Rechtfertigung: Wenn E die Centralaxe schneidet und zugleich auf ihr normal ist, so sieht man, dass der Punkt, in welchem sie die Centralaxe trifft, ihr Nullpunkt ist; denn dieser und kein anderer ausser ihm bewegt sich normal gegen E. Ferner,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schneidet E die Centralaxe c in einem Punkte C, ohne auf c normal zu sein, so denke man durch C in E eine Normale auf c: die Translationsaxen der Punkte dieser Linie bilden ein hyperbolisches Paraboloid und neigen sich gegen E unter allen möglichen Winkeln, mithin ist eine und nur eine normal auf E; diese sei NN′. Dass für keinen zweiten Punkt von E die Translationsaxe mit NN′ parallel ist, folgt so: durch N ziehe man c′ ∥ c, so besteht die Bewegung aus einer Drehung $d\psi$ um c′ und einer Verschiebung gleich und parallel NN′, also muss das Wegelement eines jeden Punktes von E, als zusammengesetzt aus NN′ und einem andern gegen c′ normal gerichteten Stück, von der Richtung NN′ abweichen. Wenn E der Centralaxe parallel ist, so gibt es in ihr keinen Nullpunkt, denn die eine Componente des Wegelementes eines jeden ihrer Punkte ist mit c parallel, fällt also in E.

Erster Satz. Die Nullebene eines beliebigen Punktes O einer Ebene E geht durch den Nullpunkt N von E.

Beweis. Das Wegelement des Punktes O ist die Resultante von NN′ und dem Kreiselement, welches O vermöge der Drehung um die durch N zu c parallel gedachte Axe c′ beschreibt. Da dieses letztere normal auf der durch c′ und ON gehenden Ebene, NN′ aber auf E normal ist, so muss jene Resultante auf ON normal sein, mithin muss die Nullebene von O die Gerade ON enthalten.

Zweiter Satz. Die Nullpunkte aller Ebenen, welche einen Punkt N gemein haben, fallen in die Nullebene E dieses Punktes.

Denn E muss, als Nullebene von N durch den Nullpunkt einer jeden Ebene gehen, in welcher N liegt.

Dritter Satz. Die Nullebenen der Punkte einer Geraden n schneiden sich in einer andern Geraden m, und diese ist die Gegenaxe jener.

Beweis. E′,E″ seien die Nullebenen zweier Punkte Q′,Q″ der Geraden n, sie mögen sich in einer Geraden m schneiden; P′,P″ seien zwei beliebige Punkte von m, ihre Nullebenen F′,F″ müssen nach dem Vorigen sowohl Q′ als Q″ enthalten, weil jeder der Punkte P′,P″ sowohl in E′ als auch in E″ liegt. Betrachtet man demnach n als Durchschnittslinie von F′,F″, so erhellt, dass die Nullebene eines jeden ihrer Punkte durch P′ und P″, also auch durch m gehen muss.

Um zweitens zu erweisen, dass m,n Gegenaxen sind, stelle man sich das hyperbolische Paraboloid vor, welches die von den Punkten Q′,Q″ etc. der Geraden n auf die Centralaxe gefällten Normalen Q′C′, Q″C″ etc. enthält. In diesem Paraboloid liegt, wie wir wissen, die Gegenaxe von n. Weil aber die Ebenen E′,E″ etc. sich in einer Geraden m schneiden, und beziehlich durch die Geraden Q′C′, Q″C″ etc. gehen, so wird m auch von den zuletzt genannten Geraden getroffen; m ist daher eine Seite des gedachten Paraboloids. Nun sei N der der Centralaxe zunächstliegende Punkt von n, E seine Nullebene; E enthält bekanntlich die Gegenaxe von n, und da E auch die Gerade m enthält, so müsste, wenn m diese Gegenaxe nicht selbst wäre, die Ebene E drei Seiten unseres Paraboloids, nämlich NC, m, und die Gegenaxe von n aufnehmen, was unmöglich ist: somit fällt m mit der Gegenaxe von n zusammen. W. z. b. w.

Ebenso beweist man das Reziproke: die Nullpunkte der Ebenen eines Ebenenbüschels, dessen Axe n ist, liegen in der Gegenaxe von n.

Vierter Satz. Die Gegenaxen aller durch einen Punkt N gehenden Geraden befinden sich in der Nullebene E dieses Punktes. Denn jede durch N gehende Gerade ist die Axe eines Büschels von Ebenen, deren Nullpunkte in der Gegenaxe dieser Geraden und auch in der Ebene E liegen. (Nach dem dritten und zweiten Satz.)

Umgekehrt: ***Die Gegenaxen aller Geraden einer Ebene E schneiden sich im Nullpunkt N dieser Ebene.*** Denn die Nullebenen der Punkte einer solchen Geraden müssen durch deren Gegenaxe und zugleich durch N gehen. (Nach dem dritten und ersten Satz.)

Die vorstehenden Sätze enthalten eine spezielle Art dualer oder reziproker Beziehung zweier Raumsysteme aufeinander: Jedem Gebilde, insofern es als Ort eines Punktes angesehen wird, ist ein anderes, von einer durch diesen Punkt gehenden Ebene umhülltes Gebilde zugeordnet, und umgekehrt. Jeder von einer Geraden n beschriebenen Regelfläche entspricht eine andere, die von ihrer Gegenaxe m erzeugt wird; einem Kegel z. B. entspricht ein von einer Curve begrenztes Stück einer Ebene. Anstatt aber zu einer vorgegebenen Regelfläche die reziproke aufzusuchen, welches das gewöhnliche Verfahren ist, kann man auch irgend eine der Natur der Sache gemässe Abhängigkeit zwischen zwei reziproken Elementen (Geraden) feststellen, und nach der Anordnung derselben in zwei sich entsprechenden Grundgebilden (Ebene und Strahlenbündel) fragen: Indem wir beispielsweise nur solche

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gegenaxen berücksichtigen, welche einen rechten Winkel miteinander bilden, d. i., welche zugleich Translationsaxen für ihre der Centralaxe am nächsten gelegenen Punkte sind, werden wir zu Eigenschaften geführt, die wiederum eine phoronomische Deutung zulassen; und so kommen wir zu dem Punkt zurück, von dem wir ausgegangen sind.

Anordnung der Translationsaxen oder Tangenten für die Bahnen der Punkte eines eine willkürliche momentane Bewegung vollziehenden starren Systems:

a) in einer Ebene E.

In einer auf der Centralaxe c normalen Ebene gibt es keine Translationsaxe, es müsste denn die Verschiebung df Null sein. In einer mit c parallelen Ebene findet man alle darin enthaltenen Translationsaxen so: um c beschreibe man einen Rotationscylinder, welcher E in einer Geraden g berührt, dann fallen die Translationsaxen der Punkte von g in E und sind, weil diese Punkte gleichweit von c abstehen, parallel. Für keinen andern Punkt von E kann die Translationsaxe in E fallen, denn beschreibt man durch einen solchen Punkt um c als Axe einen Rotationscylinder, so wird dieser von der gedachten Translationsaxe berührt, welche daher E schneidet. Die Ebene möge endlich mit c den Punkt C gemein haben, N sei ihr Nullpunkt, NN′ dessen Translationsaxe, also normal auf E. Der Nullpunkt P einer jeden durch NN′ gehenden Ebene liegt in E, und da eine solche Ebene auf E normal ist, so liegt auch die Translationsaxe p von P in E. Ausser diesen Axen p liegt keine in E, denn wäre q eine solche für den Punkt Q, so müsste die Nullebene von Q einmal durch N gehen, dann auch normal auf q oder auf E sein, mithin müsste sie NN′ enthalten, also unter den vorhin gedachten Ebenen vorkommen. Die Nullpunkte P liegen nach Früherem auf der zu NN′ rechtwinkligen Gegenaxe MM′ (in E); verbinden wir daher N mit den Punkten P und errichten auf NP in E Normalen, so sind diese die sämmtlichen in E vorkommenden Translationsaxen: ***Sie umhüllen, wie man sieht, eine Parabel, deren Brennpunkt N, deren Scheiteltangente MM′ ist.***

Das erlangte Resultat gestattet noch eine andere Auslegung: Der Ort für diejenigen Punkte P eines starren Systems, welche bei dessen momentaner Bewegung in einer festen Ebene E verharren, ist in E eine gewisse Gerade MM′; die übrigen Punkte treten aus E heraus, ein einziger darunter (N) normal gegen E. Das ebene System, welches E verlässt, gelangt in eine benachbarte Lage und schneidet E in jener Geraden MM′; folglich berührt das ebene System die abwickelbare Fläche, welche es umhüllt, in MM′, oder MM′ ist seine ***charakteristische Linie***. Es leuchtet ein, dass jede Translationsaxe und nur eine solche für ***eine*** durch sie hindurchgehende Ebene die charakteristische Linie darstellt, weshalb denn auch die ausschliesslich für Translationsaxen stattfindenden Sätze gültig bleiben, wenn man an deren Stelle die charakteristischen Linien der zugehörigen Ebenen setzt. Bei dieser Umformung lehren sie etwas wesentlich Neues, wie z. B. ***die charakteristischen Linien, welche sich gleichzeitig in einer gegebenen Ebene E befinden, umhüllen darin eine Parabel, deren Brennpunkt der Nullpunkt von E, deren Scheiteltangente die charakteristische Linie von E ist.***

b) In einem Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt N sei.

Wir erinnern daran, dass aus der Construktion des Wegelementes NN′ eines Punktes N unmittelbar hervorgeht: erstens, eine vorliegende Gerade kann Translationsaxe nur für denjenigen ihrer Punkte sein, welcher der Centralaxe zunächst liegt; zweitens, damit diese Gerade Translationsaxe sei, muss zwischen dem Winkel ω, den sie mit c bildet, und ihrem kleinsten Abstand CN von c diese Abhängigkeit bestehen:

$$\cot \omega = \frac{df}{CN\, d\psi}.$$

Auch muss nach dem Bisherigen hinlänglich deutlich geworden sein, dass die erforderliche und hinreichende Bedingung, dass eine Gerade Translationsaxe ist, sich darin ausspricht, dass ihre Gegenaxe mit ihr einen rechten Winkel bildet. Wenn demnach E die Nullebene des Punktes N ist, so können sich in N nur solche Translationsaxen treffen, deren Gegenaxen mit den in E liegenden Translationsaxen zusammenfallen, und weil diese letztern nach dem Vorigen bekannt sind, so können sie uns dazu dienen, jene zu bestimmen. Die Kegelfläche, welche die durch N gehenden Translationsaxen enthält, ist das Reziproke der eben in E gefundenen Parabel; aber wir wollen sie ohne Rücksicht auf diesen Zusammenhang direkt aufsuchen:

Fig. IX. Durch N führen wir eine beliebige Ebene F der Centralaxe c parallel, so gibt es in F eine einzige durch N gehende Translationsaxe: Denn ϱ sei der Abstand der Ebene F von c, ω der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Winkel, den eine in F liegende Translationsaxe mit c bildet, so ist $\operatorname{tang} \omega = \frac{\varrho \, d\psi}{df}$, somit für F constant, oder die Translationsaxen in F sind parallel; folglich befindet sich unter ihnen eine l, und nur diese, welche den Punkt N aufnimmt. Nennen wir λ den Punkt von l, für welchen l Translationsaxe ist, $\gamma\lambda$ den kürzesten Abstand zwischen l,c, ferner φ den Winkel, den F mit der durch N und c gehenden Ebene einschliesst, so ist:

$$\varrho = CN \sin \varphi, \text{ daher:}$$

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{CN \, d\psi}{df} \sin \varphi.$$

Oder, wenn wir mit ω' den Winkel bezeichnen, den NN′ mit c oder mit der zu c parallelen NC′ bildet:

$$\operatorname{tang} \omega = \operatorname{tang} \omega' \sin \varphi.$$

Diese Gleichung charakterisirt den Ort, in welchem l liegt: Denken wir im Abstande 1 von N eine Ebene normal auf c, so werde diese von NN′ im Punkte N′, von NC′ in C′, von l in L′ geschnitten.

$$\text{Daher: } NC' = 1,\ C'N' = \operatorname{tang} \omega',\ C'L' = \operatorname{tang} \omega,\ \angle L'C'N' = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

$$\text{Gemäss unserer Gleichung folgt: } C'L' = C'N' \cos L'C'N'.$$

Mithin ist $\angle N'L'C'$ ein Rechter, und L′ hat einen Kreis zum Ort, dessen Durchmesser gleich C′N′ ist, oder die Geraden l liegen auf einem Kegel, welcher diesen Kreis aus dem Punkte N projizirt. Dieser Kegel berührt die durch N und c gelegte Ebene in der Graden NC′, sein Hauptschnitt ist das bei C′ rechtwinklige Dreieck NC′N′, die Ebene seines zweiten Kreisschnitts ist auf NN′ normal, d. i. der Nullebene von N parallel:

Die in einem Strahlenbündel (N) befindlichen Translationsaxen erfüllen einen Kegel zweiten Grades, dessen Hauptschnitt die Ebene darstellt, welche die zum Punkte N gehörige Translations- und Rotationsaxe enthält, und dessen beide Kreisschnitte auf je einer dieser Axen normal sind.

Fig. X. Zum Schlusse beantworten wir noch die sich hier von selbst aufdrängende Frage nach dem Orte der Punkte λ, deren Translationsaxen durch N gehen. Zunächst gewahrt man, dass diese Punkte auf einem Rotationscylinder liegen, dessen Schnitt mit einer durch NC rechtwinklig gegen c geführten Ebene der über NC als Durchmesser beschriebene Kreis ist; denn legen wir durch c eine, auf die vorhin gedachte Ebene F normale Ebene, so muss λ sich in der Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen finden; der Ort für diese Durchschnittslinie ist aber offenbar der beschriebene Cylinder. Wenn wir weiter durch $\gamma\lambda$ eine Ebene normal auf c legen, welche NN′ im Punkte ν, N′C′ im Punkte γ' schneidet, so ist das Dreieck $\gamma'\lambda\nu$ dem C′L′N′ ähnlich, daher $\angle \gamma'\lambda\nu = \frac{\pi}{2}$.

Weil nun $\gamma\lambda$ auf der Ebene F, also auch auf der Linie $\lambda\gamma'$ normal ist, so liegen die Punkte γ, λ, ν in einer Geraden. Alle ebenso erhaltenen Geraden erfüllen das hyperbolische Paraboloid, in welchem NN′, c, und die Gegenaxe von NN′ Leitlinien sind, und ***so kann der Ort der Punkte λ als Durchschnittscurve von je zweien der drei Flächen: Cylinder, Kegel, Paraboloid betrachtet werden.*** Seine Gleichung ergibt sich sehr einfach als eine Beziehung zwischen dem Abstande z des Punktes λ von der durch N rechtwinklig auf c gelegten Ebene und dem oben mit φ bezeichneten Winkel.

$$\text{Es ist: } CN \cos \varphi = \gamma'\lambda; \text{ und } \gamma'\lambda \cot \omega = z,$$

$$\text{folglich: } z = CN \cos \varphi \cot \omega, \text{ und wegen: } \operatorname{tang} \omega = \operatorname{tang} \omega' \sin \varphi$$

$$z = CN \cot \varphi \cot \omega', \text{ aber } CN = \frac{df \operatorname{tang} \omega'}{d\psi},$$

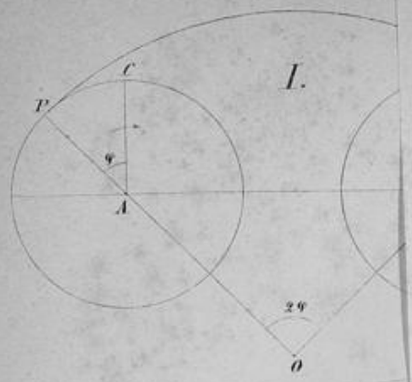
$$\text{mithin: } z = \frac{df}{d\psi} \cot \varphi.$$

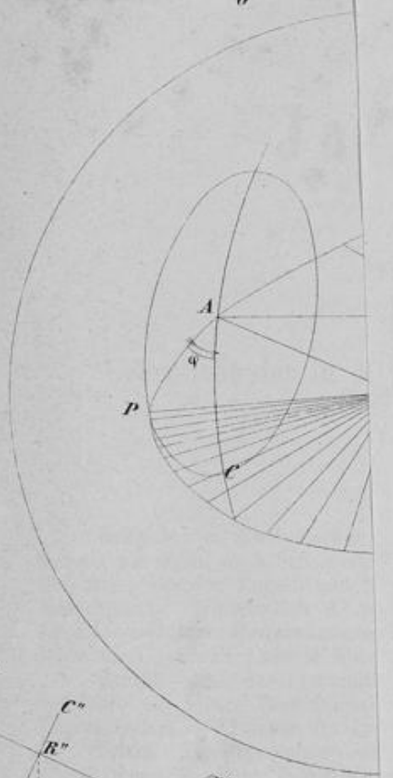
Im Wesentlichen drückt folgender Satz das Ergebniss der letzten Untersuchung aus: ***Bei einer willkürlichen momentanen Bewegung eines starren Systems bleiben dessen Punkte in gewissen***

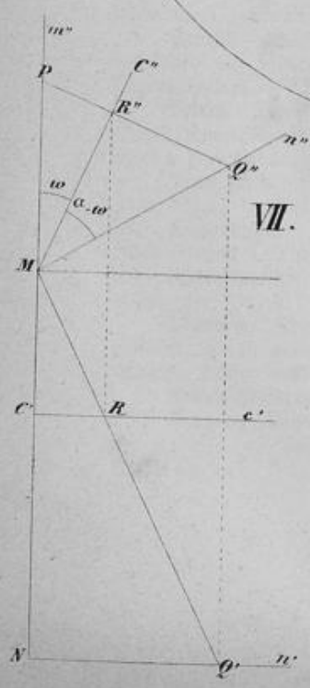
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Geraden t (ihren Translationsaxen), drehen sich seine ebenen Systeme um die nämlichen Geraden t (ihren charakteristischen Linien). Diejenigen Punkte, welche für eine unendlich kleine Dauer in derselben Ebene E bleiben, befinden sich in der charakteristischen Linie von E; die ihnen zugehörigen Geraden t berühren eine Parabel in E. Diejenigen Punkte, welche gleichzeitig auf einen bestimmten Punkt N sich hinbewegen, liegen in einer unendlichen, durch N gehenden gewundenen Curve; die ihnen zugehörigen Geraden t sind die Seiten eines Kegels vom zweiten Grade, der zu jener Parabel in reziproker Verwandtschaft steht. (Vergl. Chasles: Aperçu historique.)

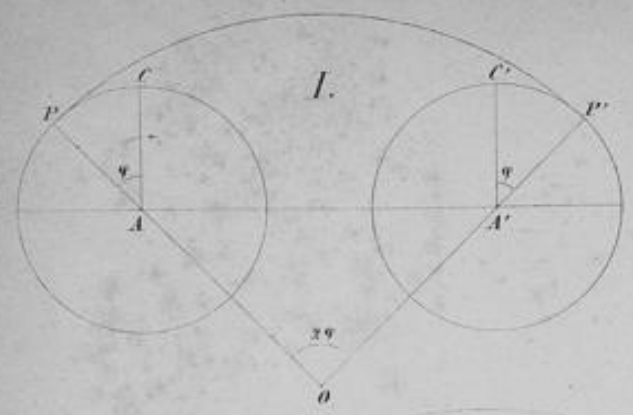
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

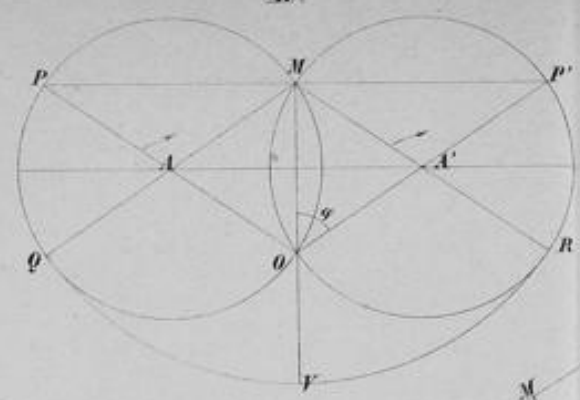


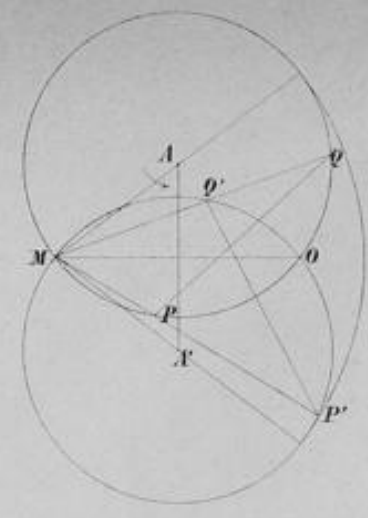


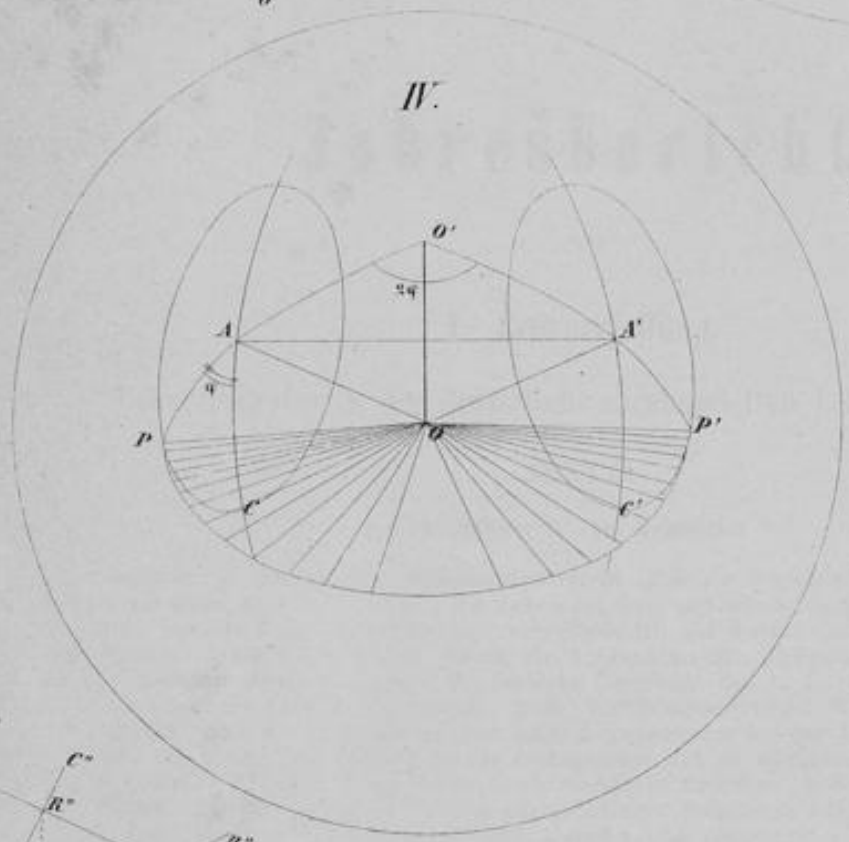


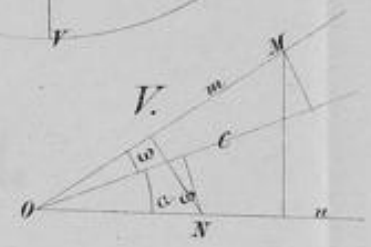
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

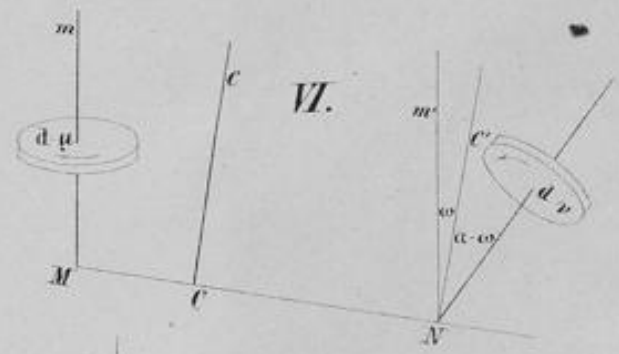


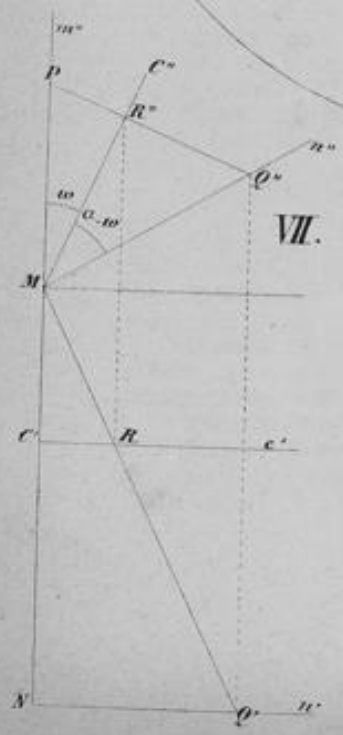


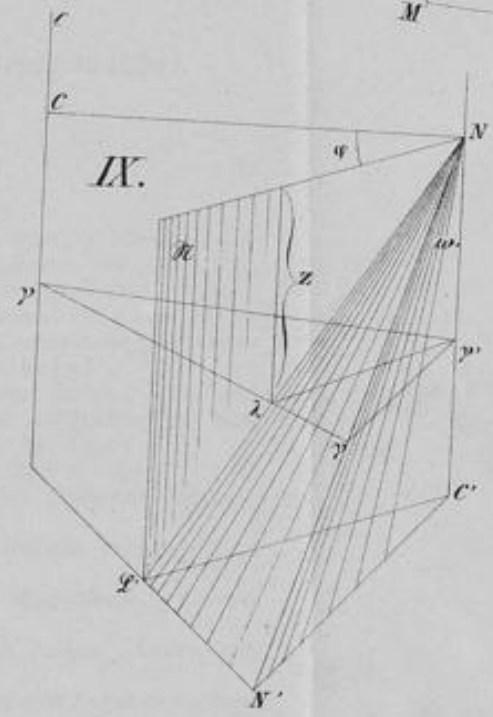


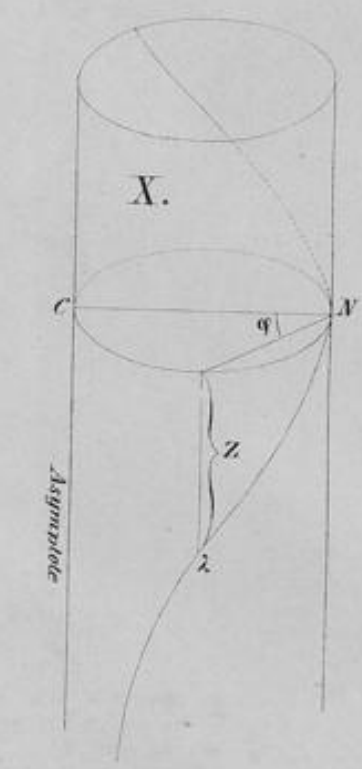


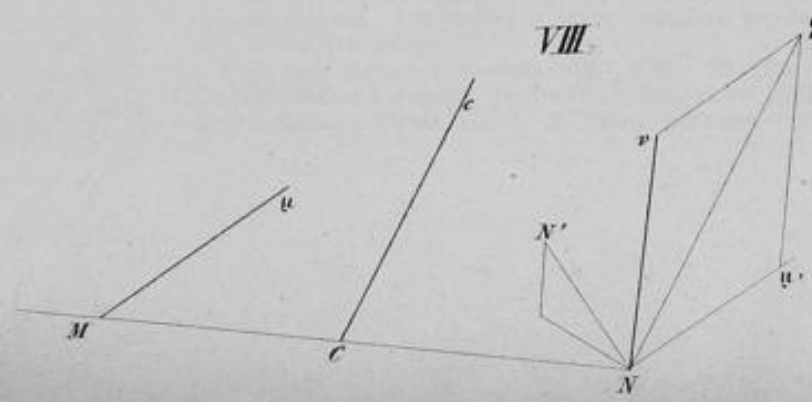












Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf