VII. Abschnitt.

Das Berührungsproblem des Apollonius.

Konnte bis zur Aufstellung einer geeigneten Vergleichsmethode die Beurteilung der Einfachheit und Genauigkeit der Konstruktionen schon bei einfacheren Aufgaben nur in einer unsicheren Schätzung bestehen, so hörte bei komplizierteren auch die Möglichkeit einer solchen Schätzung auf, und man war lediglich auf den durch den Wortlaut der Lösungen hervorgerufenen Schein angewiesen. Aus dem Folgenden mag man ersehen, wie man auch in solchen Fällen an der Hand der Lemoineschen Methode einen klaren Überblick über alle Einzelheiten der Konstruktion gewinnen und entscheiden kann, welche unter den verschiedenen Lösungen desselben Problems die größte Wahrscheinlichkeit für die Genauigkeit der wirklichen Ausführung bietet.

Von den zahlreichen Lösungen des Apollonischen Problems der Berührungskreise zu 3 gegebenen Kreisen sind für die Behandlung in der Schule außer der Vietaschen wohl vorzugsweise die auf der Theorie der Isogonalkreise beruhende und die Gergonne-Bobilliersche von Interesse. Die beiden letzteren wollen wir bezüglich der wirklichen Ausführung miteinander vergleichen. Wir beschränken uns auf den allgemeinsten Fall, in welchem 8 Berührungskreise existieren und keiner der gegebenen Kreise in eine Gerade oder einen Punkt ausgeartet ist.

A. Hilfskonstruktionen.

a) Von einem Punkte H aus auf die 4 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 die Senkrechten zu fällen.

Konstruktion. — „Man beschreibe um 2 Paar Gegenecken des durch g_1, g_2, g_3, g_4 gebildeten vollständigen Vierseits Kreise, welche durch H gehen $[8C_1 + 4C_2]$. Diese legen zu H die bezüglich g_1, g_2, g_3, g_4 symmetrischen Punkte fest. Man verbinde H mit jedem dieser Punkte $[8R_1 + 4R_2]$. Die Verbindungslinien sind die verlangten Senkrechten."

$$\text{op} : (8R_1 + 4R_2 + 8C_1 + 4C_2) = (24;\ 16)\ (4 \text{ Gerade, } 4 \text{ Kreise}).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) Zu 2 Kreisen O_1 und O_2 mit den Radien r_1 und r_2 die Ähnlichkeitspolaren zu konstruieren.

Die Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise erhält man (Lemoine*)) geometrographisch mit $S = 17$, die Polare eines Punktes in bezug auf einen Kreis (Tarry**)) mit $S = 19$. Durch geeignete Kombination der betreffenden beiden Konstruktionen in Verbindung mit I § 2, 4 erreichen wir bei der Konstruktion der 4 Ähnlichkeitspolaren den Einfachheitsgrad 56.

Konstruktion (Fig. VII, 1). — „Man ziehe die Zentrale $O_1 O_2$ $[2R_1 + R_2]$. B_1 und C_1 seien die Schnittpunkte derselben mit O_1, ferner

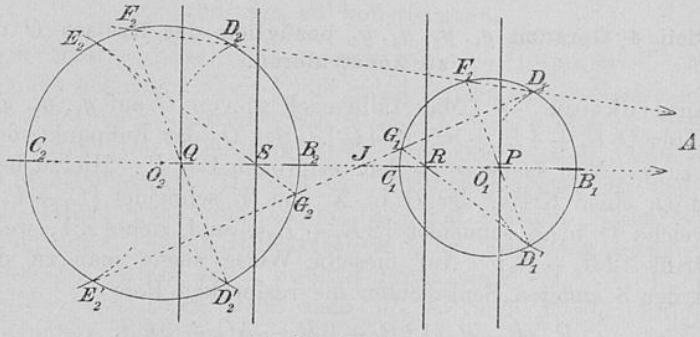

Fig. VII, 1.

B_2 und C_2 die Schnittpunkte mit O_2 ($B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ von demselben Sinne wie $O_1 O_2$). Man beschreibe die Kreise

$$B_1(r_1),\ B_2(r_2),\ C_2(r_2)\ [(2C_1 + C_2) + (2C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)].$$

Der erste dieser Kreise treffe O_1 in D_1 und D_1', die beiden letzteren treffen O_2 in D_2 und D_2', bzw. in E_2 und E_2' (D_1, D_2, E_2 auf derselben Seite von $O_1 O_2$). Man ziehe $D_1 D_2$ und $D_1 E_2'$ $[4R_1 + 2R_2]$. Die Zentrale werde von $D_1 D_2$ in A, von $D_1 E_2'$ in J getroffen. A ist der äußere, J der innere Ähnlichkeitspunkt von O_1 und O_2, denn es ist $O_1 D_1 // O_2 D_2$, ebenso $O_1 D_1 // O_2 E_2'$.

Die Gerade $D_1 D_2$ treffe den Kreis O_1 noch in F_1, den Kreis O_2 noch in F_2. Die Gerade $D_1 E_2'$ treffe O_1 noch in G_1, den Kreis O_2 noch in G_2. Wir suchen zu A und J bezüglich O_1 und O_2 die reziproken Pole. Zu diesem Zwecke brauchen wir nur die Geraden $F_1 D_1'$, $F_2 D_2'$, $G_1 D_1'$, $G_2 E_2$ zu ziehen $[8R_1 + 4R_2]$. Die Schnittpunkte dieser 4 Geraden mit der Zentralen seien der Reihe nach P, Q, R, S. Dann liegt P reziprok zu A bezüglich O_1, Q reziprok zu A bezüglich O_2, R reziprok zu J be-

*) Scientia LXVII. **) Scientia XLVI. Troisième constr.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

züglich O_1, S reziprok zu J bezüglich O_2. Nun errichte man auf der Zentralen in P, Q, R, S nach I § 2, 4 die Senkrechten. Nimmt man hierbei etwa F_1 zum Mittelpunkt der 4 konzentrischen Kreise, so spart man noch 1 Gerade $(F_1 P)$ und kommt mit op : $[12 R_1 + 6 R_2 + 5 C_1 + 4 C_2]$ aus. Die Senkrechten in P und Q sind die äußeren, die Senkrechten in R und S die inneren Ähnlichkeitspolaren."

Beweis: Daß z. B. P der reziproke Pol zu A bezüglich O_1 ist, folgt daraus, daß wegen der Gleichheit der Bogen $D_1 B_1$ und $D_1' B_1$ die 4 Strahlen $F_1 A$, $F_1 B_1$, $F_1 P$, $F_1 C_1$ harmonisch sind.

op : $(26 R_1 + 13 R_2 + 10 C_1 + 7 C_2) = (56;\ 36)$ (13 Gerade, 7 Kreise).

c) Zu den 4 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 bezüglich des Kreises O die Pole zu konstruieren.

Konstruktion. — „Man fälle nach a) von O auf g_1, g_2, g_3, g_4 die Senkrechten $[8 R_1 + 4 R_2 + 8 C_1 + 4 C_2]$. Sei Q_1 der Fußpunkt der Senkrechten zu g_1. Man suche zu Q_1 den reziproken Pol P_1. Hierzu beschreibe man um Q_1 einen Kreis, der O in X und Y schneidet $[C_1 + C_2]$, ziehe $Q_1 X$, welche O in Z schneidet $[2 R_1 + R_2]$, und ziehe ZY, welche OQ in P_1 trifft $[2 R_1 + R_2]$. Auf dieselbe Weise suche man zu den Fußpunkten der 3 anderen Senkrechten die reziproken Pole

$$P_2,\ P_3,\ P_4\ [12 R_1 + 6 R_2 + 3 C_1 + 3 C_2].$$

P_1, P_2, P_3, P_4 sind die Pole der gegebenen Geraden."

op : $(24 R_1 + 12 R_2 + 12 C_1 + 8 C_2) = (56;\ 36)$ (12 Gerade, 8 Kreise).

Diese Konstruktion ist zwar nicht geometrographisch, wird aber in B. § 2 guten Dienst leisten.

d) Zu 3 Kreisen O_1, O_2, O_3 mit den Radien r_1, r_2, r_3 die Ähnlichkeitsachsen zu konstruieren.

Die für diese Aufgabe von Herrn Lemoine angegebene Konstruktion mit dem Einfachheitsgrad $S = 38$ läßt sich folgendermaßen mit $S = 37$ ausführen.

Geometrographische Konstruktion. — „Man ziehe $O_1 O_2$, $O_2 O_3$, $O_3 O_1$ $[6 R_1 + 3 R_2]$. $O_1 O_2$ schneide O_1 in B_1 und C_1, O_2 in B_2 und C_2 ($B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ von demselben Sinne wie $O_1 O_2$). Man beschreibe $O_1(r_3)$ $[3 C_1 + C_2]$, der $O_1 O_2$ in D trifft. Ohne die Spitze von O_1 abzuheben, nehme man dann $O_1 O_3$ in den Zirkel und beschreibe $D(O_1 O_3)$ $[2 C_1 + C_2]$, der O_3 in E trifft (D und E auf derselben Seite von $O_1 O_3$). Dann ist $O_3 E$, welche nicht gezogen zu werden braucht, parallel zu $O_1 O_2$ und von demselben Sinne. Nun ziehe man $B_2 E$ und $C_2 E$ $[4 R_1 + 2 R_2]$, welche auf $O_2 O_3$ den inneren Ähnlichkeitspunkt J_1 und den äußeren A_1 der Kreise

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

O_2 und O_3 bestimmen. Man ziehe $B_1E[2R_1+R_2]$, welche auf O_1O_3 den inneren Ähnlichkeitspunkt J_2 der Kreise O_1 und O_3 festlegt, und ziehe $A_1J_2[2R_1+R_2]$. Dies ist eine der Ähnlichkeitsachsen. A_1J_2 schneide O_1O_2 in J_3. Man ziehe $J_3J_1[2R_1+R_2]$. Dies ist eine zweite Ähnlichkeitsachse. Man ziehe $J_2J_1[2R_1+R_2]$, welche O_1O_2 in A_3 trifft. Dies ist eine dritte Ähnlichkeitsachse. Endlich ziehe man $A_1A_3[2R_1+R_2]$. Dies ist die vierte Ähnlichkeitsachse."

$$\text{op}:(20R_1+10R_2+5C_1+2C_2)=(37;\,25)\ (10\text{ Gerade, }2\text{ Kreise}).$$

e) Zu 3 Kreisen O_1, O_2, O_3 mit den Radien r_1, r_2, r_3 das Potenzzentrum zu konstruieren.

Geometrographische Konstruktion. — (Lemoine.) „Man beschreibe einen beliebigen Kreis k, der jeden der gegebenen Kreise schneidet $[C_2]$, und ziehe die Potenzachse von k und O_1, von k und O_2, von k und O_3 $[6R_1+3R_2]$. Der Schnittpunkt M_3 der beiden ersten dieser Geraden ist ein Potenzpunkt von O_1 und O_2, der Schnittpunkt M_1 der beiden letzten ein Potenzpunkt von O_2 und O_3. Auf dieselbe Weise bestimme man mittels eines zweiten Hilfskreises k' einen zweiten Potenzpunkt M_3' von O_1 und O_2, sowie einen zweiten Potenzpunkt M_1' von O_2 und O_3 $[6R_1+3R_2+C_2]$. Dann ziehe man M_3M_3' und M_1M_1' $[4R_1+2R_2]$. Ihr Schnittpunkt H ist das gesuchte Potenzzentrum."

$$\text{op}:(16R_1+8R_2+2C_2)=(26;\,16)\ (8\text{ Gerade, }2\text{ Kreise}).$$

B. Einen Kreis zu zeichnen, der die Kreise O_1, O_2, O_3 berührt.

§ 1. Die aus der Theorie der Isogonalkreise sich ergebende Lösung.

Zur bequemeren Darstellung des Folgenden sei die Ableitung der Lösung kurz vorausgeschickt.*)

Sämtliche Kreise, welche die gegebenen O_1, O_2, O_3 unter gleichen bzw. Supplementwinkeln schneiden, die sogenannten Isogonalkreise, bilden 4 Büschel, von denen jedes eine der 4 Ähnlichkeitsachsen von O_1, O_2, O_3 zur Potenzachse hat. Diesen 4 Büscheln gehören auch die gesuchten Berührungskreise paarweise an, als Isogonalkreise für den Winkel 0^0.

---

*) Ausführliche Darstellungen der Ableitung finden sich in Milinowski: Elementar-synthet. Geom. d. Kegelschn. (1882) und in Stolte: Die neuere Geometrie, ein Unterrichtsgegenstand der höheren Lehr-Anst., (Straßburg 1883). Die Lösung ist auch später von Fouché, Nouvelles Ann. de Math. 1892, und von A. Maßfeller, Jahresbericht d. Kaiser Wilhelms-Gymn. zu Montabaur 1901 unter verschiedenen Gesichtspunkten eingehender behandelt worden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Potenzzentrum von O_1, O_2, O_3 ist Ähnlichkeitspunkt eines jeden dieser Paare von Berührungskreisen. Einen beliebigen Kreis Δ eines Büschels findet man, indem man zu einem beliebigen Punkte von O_1 die inversen Punkte auf O_2 und O_3 bestimmt. Δ schneidet stets alle drei gegebenen Kreise, wenn er nicht gerade einer der gesuchten Berührungskreise ist. Sei nun Ω (Fig. VII, 2) ein Berührungskreis, der mit Δ demselben Büschel angehört, seien ferner B_1, C_1 die Schnittpunkte von Δ und O_1, und Q der Schnittpunkt der Geraden B_1C_1 mit der dem Büschel zugeordneten Ähnlichkeitsachse a. Dann ist B_1C_1 Potenzachse von O_1 und Δ, und a Potenzachse von Ω und Δ, also ist Q Potenzzentrum von Ω, O_1 und Δ. Daher muß auch die Potenzachse von Ω und O_1, nämlich die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte T_1 derselben, durch Q gehen, und QT_1 muß mittlere Proportionale zwischen QB_1 und QC_1 sein. Die Berührungspunkte von Ω mit O_2 und O_3 liegen zu T_1 invers in Bezug auf A_3 bzw. A_2.

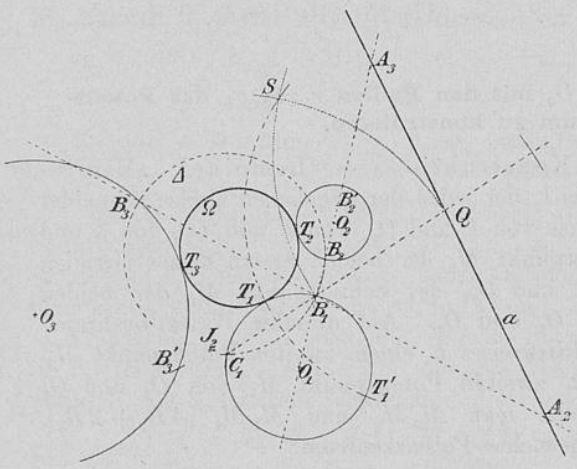

Fig. VII, 2.

Man kann der Lösung daher folgenden Wortlaut geben, der in allen Spezialfällen beibehalten werden kann, in welchen die gegebenen Kreise nicht sämtlich degeneriert sind:

„Man ziehe die 4 Ähnlichkeitsachsen, von denen eine a heiße. Dann lege man auf O_1, O_2, O_3 drei zu a invers liegende Punkte B_1, B_2, B_3 fest und beschreibe durch B_1, B_2, B_3 den Hilfskreis Δ. Hierauf ziehe man die gemeinschaftliche Sehne B_1C_1 von O_1 und Δ, welche a in Q schneidet, und beschreibe mit der mittleren Proportionalen zwischen QB_1 und QC_1 um Q den Kreis. Dieser trifft O_1 in den Berührungspunkten T_1 und T_1' der zwei zu a gehörenden Berührungskreise. Dann bestimme man zu T_1 und T_1' auf O_2 bzw. O_3 die inversen Punkte T_2, T_2' bzw. T_3, T_3' und beschreibe die Kreise $T_1T_2T_3$ und $T_1'T_2'T_3'$.

Die übrigen Paare von Berührungskreisen erhält man in derselben Weise, indem man jedesmal von einer anderen Ähnlichkeitsachse ausgeht.“

Zwecks ökonomischer Ausführung der Konstruktion beachte man nun Folgendes.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Jedes Paar der Berührungskreise verlangt einen anderen Hilfskreis Δ.*) Da aus jedem der 4 Büschel ein ganz beliebiger Kreis als Hilfskreis dienen kann, so kann man diejenigen 4 Kreise der Büschel wählen, welche durch denselben Punkt B_1 von O_1 gehen. Da B_1 auf O_1 ebenfalls beliebig ist, so kann derselbe in einen der Schnittpunkte von O_1 mit der Zentralen $O_1 O_2$ gelegt werden, welche bei der Konstruktion der Ähnlichkeitsachsen ohnedies zu ziehen ist. Damit sind dann auf O_2 auch die bezüglich A_3 und J_3 zu B_1 inversen Punkte, B_2 bzw. B_2', festgelegt, wenn A_1, A_2, A_3 in der üblichen Bezeichnung die äußeren, J_1, J_2, J_3 die inneren Ähnlichkeitspunkte von O_1, O_2, O_3 sind. Von den 4 Hilfskreisen Δ gehen alsdann 2 durch B_1 und B_2, nämlich diejenigen, welche zu den von A_3 auslaufenden Ähnlichkeitsachsen gehören, die beiden anderen gehen durch B_1 und B_2', nämlich diejenigen, welche zu den von J_3 auslaufenden Ähnlichkeitsachsen gehören. Sei B_3 auf O_3 der in bezug auf A_2 zu B_1 inverse, B_3' der in bezug auf J_2 zu B_1 inverse Punkt. Dann gehen 2 von den Hilfskreisen durch B_3, nämlich diejenigen, welche zu den von A_2 auslaufenden Ähnlichkeitsachsen gehören; die beiden anderen gehen durch B_3', nämlich diejenigen, welche zu den von J_2 auslaufenden Ähnlichkeitsachsen gehören. Hierdurch wird es möglich, die Mittelpunkte der 4 Hilfskreise mit $S = 22$ zu bestimmen.

Die Mittelpunkte der Berührungskreise legt man am einfachsten dadurch fest, daß man zu den auf O_1 gefundenen Berührungspunkten nur auf einem der beiden Kreise O_2 und O_3 die inversen sucht und in diesem Kreise, sowie in O_1 die Berührungsradien zieht.

Konstruktion. — „Man ziehe die 4 Ähnlichkeitsachsen

$$\text{op: } [20\,R_1 + 10\,R_2 + 5\,C_1 + 2\,C_2].$$

Die Zentrale $O_1 O_2$ schneide den Kreis O_1 in B_1, den Kreis O_2 in B_2 und B_2' (B_1 und B_2 invers bezüglich A_3). Man ziehe $B_1 A_2$ und $B_1 J_2$ ... op : $[4\,R_1 + 2\,R_2]$.

Der Kreis O_3 werde von $B_1 A_2$ in dem zu B_1 inversen Punkte B_3, von $B_1 J_2$ in dem zu B_1 inversen Punkte B_3' getroffen.

Um die Mittelpunkte der 4 Hilfskreise Δ, nämlich der Kreise $B_1 B_2 B_3$, $B_1 B_2 B_3'$, $B_1 B_2' B_3$, $B_1 B_2' B_3'$ zu finden, konstruiere man die Mittelsenkrechten von $B_1 B_2$, $B_1 B_2'$, $B_1 B_3$, $B_1 B_3'$ mit Hilfe der 5 Kreise $B_1\,(\lambda)$,

*) Besitzen O_1, O_2, O_3 einen Orthogonalkreis, so gehört dieser jedem der 4 Büschel an, kann also für jedes Paar von Berührungskreisen als Hilfskreis Δ genommen werden. Als Örter für die Mittelpunkte der Berührungskreise kann man alsdann die vom Potenzzentrum auf die Ähnlichkeitsachsen gefällten Senkrechten benutzen, wodurch die Bestimmung der Berührungspunkte auf O_2 und O_3 überflüssig wird. Als Symbol dieser Konstruktion, die als partikulär zu betrachten ist, findet man

$$\text{op: } (63\,R_1 + 32\,R_2 + 59\,C_1 + 36\,C_2) = (190;\ 122)\ (32 \text{ Gerade, } 36 \text{ Kreise}).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$B_2(\lambda)$, $B_2'(\lambda)$, $B_3(\lambda)$, $B_3'(\lambda)$, wobei der Radius λ hinreichend groß zu nehmen ist

$$\ldots \text{ op: } [8\,R_1 + 4\,R_2 + 5\,C_1 + 5\,C_2].$$

Man ziehe die 4 Kreise $\varDelta$

$$\ldots \text{ op: } [8\,C_1 + 4\,C_2].\text{“}$$

Bis hierhin war insgesamt

$$(\varDelta) \ldots \text{ op: } [32\,R_1 + 16\,R_2 + 18\,C_1 + 11\,C_2]$$

erforderlich.

Der noch folgende Teil der Konstruktion muß für jeden Kreis $\varDelta$, also viermal ausgeführt werden.

„Einer der Kreise $\varDelta$ schneide O_1 außer in B_1 noch in C_1. Man ziehe die gemeinschaftliche Sehne $B_1 C_1$, welche die zugehörige Ähnlichkeitsachse in Q trifft

$$\ldots \text{ op: } [2\,R_1 + R_2].$$

Dann konstruiere man man zu QB_1 und QC_1 die mittlere Proportionale QS, wobei man unter Anwendung von II § 6, 1 mit

$$\text{op: } [4\,C_1 + 3\,C_2]$$

auskommt, und beschreibe $Q\ (QS) \ldots$ op: $[2\,C_1 + C_2]$.

Dieser Kreis legt auf O_1 zwei der gesuchten Berührungspunkte, T_1 und T_1', fest.

Nun verbinde man den auf der benutzten Ähnlichkeitsachse liegenden Ähnlichkeitspunkt von O_1 und O_2 (oder von O_1 und O_3) mit T_1 und T_1'

$$\ldots \text{ op: } [4\,R_1 + 2\,R_2].$$

Die 2 Verbindungslinien bestimmen auf O_2 (oder O_3) zu T_1 und T_1' die inversen Punkte T_2 bzw. T_2' (oder T_3 bzw. T_3').

Hierauf ziehe man $O_1 T_1$ und $O_2 T_2$ (oder $O_3 T_3$), sowie $O_1 T_1'$ und $O_2 T_2'$ (oder $O_3 T_3'$), welche sich in Ω bzw. Ω' treffen

$$\ldots \text{ op: } [8\,R_1 + 4\,R_2].$$

Schließlich beschreibe man die Kreise $\Omega(\Omega T_1)$ und $\Omega'(\Omega' T_1')$

$$\ldots \text{ op: } [4\,C_1 + 2\,C_2].\text{“}$$

Ω und Ω' bilden das eine Paar der gesuchten Berührungskreise. Zu ihrer Konstruktion war nach Festlegung der 4 Hilfskreise $\varDelta$ im ganzen noch

$$(\Omega) \ldots \text{ op: } [14\,R_1 + 7\,R_2 + 10\,C_1 + 6\,C_2)$$

erforderlich.

Als Gesamtsymbol für die Konstruktion der 8 Berührungskreise erhält man also $(\varDelta) + 4\text{mal}\,(\Omega)$, d. i.

$$\text{op: } (88\,R_1 + 44\,R_2 + 58\,C_1 + 35\,C_2) = (225;\ 146)\ (44 \text{ Gerade, } 35 \text{ Kreise}).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da die Mittelpunkte Ω der Berührungskreise paarweise auf den Senkrechten zu den Ähnlichkeitsachsen aus den Mittelpunkten der zugehörigen Hilfskreise Δ liegen müssen, so können auch diese Senkrechten als Örter für die Punkte Ω benutzt werden, anstatt der Berührungsradien in O_2 (oder O_3). Dann brauchen nur zu O_1 die Berührungspunkte festgelegt zu werden, und man spart 16 Gerade $[32\,R_1 + 16\,R_2]$, während die Konstruktion jeder der 4 Senkrechten nur op: $[2\,R_1 + R_2 + 2\,C_1 + 3\,C_2]$ erfordert, wenn man dieselbe an die Konstruktion des zugehörigen Kreises Δ unmittelbar anschließt. Die auf diese Weise modifizierte Konstruktion hat das Symbol

op: $(64\,R_1 + 32\,R_2 + 66\,C_1 + 47\,C_2) = (209;\ 130)$ (32 Gerade, 47 Kreise).

Man sieht leicht, wie die Lösung 1. des allgemeinen Problems für die Spezialfälle auf die üblichen Konstruktionen führt und daher als Verallgemeinerung der letzteren betrachtet werden kann.

Für den einfachen Fall z. B., in welchem ein Kreis O_1 und 2 Punkte O_2 und O_3 gegeben sind, würde die Lösung folgende Gestalt annehmen:

„Man ziehe die einzige Ähnlichkeitsachse $O_2\,O_3$ $[2\,R_1 + R_2]$ und beschreibe einen beliebigen Kreis Δ, der durch O_2 und O_3 geht und O_1 in B_1 und C_1 schneidet $[3\,C_1 + 3\,C_2]$. Dann ziehe man $B_1 C_1$, welche $O_2\,O_3$ in Q trifft $[2\,R_1 + R_2]$, konstruiere zu $Q\,B_1$ und $Q\,C_1$ die mittlere Proportionale $Q\,S$ $[4\,C_1 + 3\,C_2]$ und beschreibe $Q\,(Q\,S)\,[2\,C_1 + C_2]$. Dieser Kreis bestimmt auf O_1 die Berührungspunkte T und T' der beiden (im allgemeinen möglichen) Berührungskreise. Man ziehe $O_1\,T$ und $O_1\,T'$ $[4\,R_1 + 2\,R_2]$, ferner die Mittelsenkrechte von $O_2\,O_3$, von welcher bei der Konstruktion von Δ schon 2 Punkte festgelegt sind $[2\,R_1 + R_2]$. Um die Schnittpunkte Ω und Ω' der Mittelsenkrechten mit $O_1\,T$ bzw. $O_1\,T'$ beschreibe man dann die Kreise $\Omega\,(\Omega\,T)$ und $\Omega'\,(\Omega'\,T')$ $[4\,C_1 + 2\,C_2]$. Dies sind die Berührungskreise."

op: $(10\,R_1 + 5\,R_2 + 13\,C_1 + 9\,C_2) = (37;\ 23)$ (5 Gerade, 9 Kreise).

§ 2. Die Lösung von Gergonne und Bobillier.

„Man sucht das Potenzzentrum der gegebenen Kreise O_1, O_2, O_3, die 4 Ähnlichkeitsachsen und die Pole jeder Ähnlichkeitsachse bezüglich O_1, O_2, O_3. Man erhält im ganzen 12 Pole. Die 12 Verbindungslinien dieser Pole mit dem Potenzzentrum treffen O_1, O_2, O_3 in den Berührungspunkten mit den gesuchten Kreisen, deren Mittelpunkte sich als Schnittpunkte der zu diesen Berührungspunkten gezogenen Radien ergeben."

Diese Lösung gilt als die vollkommenste. In der Tat zeichnet sie sich aus durch Einfachheit und Eleganz in der Herleitung sowohl als im Wortlaut und ermöglicht eine bequeme Diskussion der verschiedenen Realitätsverhältnisse. Aber sie hat doch auch ihre Schattenseiten; denn

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

abgesehen davon, daß sie in manchen Fällen (z. B. wenn die Mittelpunkte O_1, O_2, O_3 auf einer Geraden liegen, oder wenn 2 der gegebenen Kreise in parallele Gerade ausgeartet sind*)), ganz versagt, ist sie, was die wirkliche Ausführung nach dem klassischen Verfahren angeht, keineswegs die einfachste, sondern wohl die komplizierteste von allen gebräuchlichen Lösungen des Problems.

Bezüglich der Ausführung unter durchgängiger Anwendung klassischer Hilfskonstruktionen berufen wir uns auf Herrn Lemoine, der in dem Journal Mathesis 1888, S. 241 die beiden Lösungen von Vieta und von Gergonne und Bobillier verglichen und das Symbol der ersteren auf

$$\text{op} : (100 R_1 + 55 R_2 + 96 C_1 + 84 C_2) = (335;\ 196)\ (55 \text{ Gerade, } 84 \text{ Kreise}),$$

das der letzteren aber auf

$$\text{op} : (169 R_1 + 85 R_2 + 134 C_1 + 112 C_2) = (500; 303)\ (85 \text{ Gerade, } 112 \text{ Kreise})$$

festgestellt hat.

Nach dem klassischen Verfahren ausgeführt, erfordert also die Gergonne-Bobilliersche Lösung nicht weniger als 58 Gerade und Kreise und 107 vorbereitende Elementaroperationen mehr als die alte Vietasche.

Sehen wir nun zu, wie sich die Lösung in geometrographischer Ausführung gestaltet.

Die 4 Ähnlichkeitsachsen mit ihren 12 Polen kann man geometrographisch mit der Einfachheit 217 finden. Wenn wir uns aber an den Petersenschen Wortlaut der Lösung halten und die 12 Ähnlichkeitspolaren der gegebenen Kreise konstruieren, so ergeben sich jene Pole (welche eben in den Schnittpunkten der Ähnlichkeitspolaren liegen) schon mit der Einfachheit 168.

Wir wollen also die folgende Vorschrift ökonomisch auszuführen suchen:

„Um die beiden gleichartig berührenden Kreise zu erhalten, ziehe man die äußeren Ähnlichkeitspolaren und verbinde die in Betracht kommenden Schnittpunkte S_1, S_2, S_3 derselben mit dem Potenzzentrum. Diese Verbindungslinien legen auf O_1, O_2, O_3 die Berührungspunkte T_1, T_2, T_3 der beiden Berührungskreise fest. Um ein Paar ungleichartig berührender Kreise zu finden, ziehe man für 2 Paare der Kreise O_1, O_2, O_3 die inneren, für das dritte Paar die äußeren Ähnlichkeitspolaren."

Konstruktion: „Nach A, e konstruiere man das Potenzzentrum H von O_1, O_2, O_3

$$\ldots \text{op} : [16 R_1 + 8 R_2 + 2 C_2].$$

*) Die Lösung 1. ist auch in diesen Fällen anwendbar.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

abgesehen davon, daß n die Mittelpunkte O_1, O_2, O_3 auf er gegebenen Kreise in parallele Ge ist sie, was die wirkliche Ausführu geht, keineswegs die einfachste, so len gebräuchlichen Lösungen des P

Bezüglich der Ausf g klassischer Hilfskonstruktionen ber der in dem Journal Mathesis 1888 eta und von Gergonne und Bobill ersteren auf

op : $(100R_1 + 55R_2 + 9$, 84 Kreise),

das der letzteren aber a

op : $(169R_1 + 85R_2 + 1$, 112 Kreise)

festgestellt hat.

Nach dem klassis t also die Gergonne-Bobillier Gerade und Kreise und 107 vorber ls die alte Vietasche.

Sehen wir nun zu, ischer Ausführung gestaltet.

Die 4 Ähnlichkeitsa geometrographisch mit der Einfa ber an den Petersenschen Wortlau hnlichkeitspolaren der gegebenen jene Pole (welche eben in den Schr gen) schon mit der Einfachheit 168.

Wir wollen also di uszuführen suchen:

„Um die beiden gleic ziehe man die äußeren Ähnlichkeitsp ommenden Schnittpunkte S_1, S_2, S_3 Diese Verbindungslinien legen auf T_2, T_3 der beiden Berührungskreise erührender Kreise zu finden, ziehe ma ie inneren, für das dritte Paar die ä

Konstruktion: „Na entrum H von O_1, O_2, O_3

...

*) Die Lösung 1. ist auc

TIFFEN Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach A, b konstruiere man die 12 Ähnlichkeitspolaren

$$\ldots \text{ op} : 3\text{mal } [26 R_1 + 13 R_2 + 10 C_1 + 7 C_2].$$

Man verbinde die 12 in Betracht kommenden Schnittpunkte der Ähnlichkeitspolaren mit H

$$\ldots \text{ op} : [24 R_1 + 12 R_2].$$

Von den 24 Schnittpunkten dieser Verbindungslinien mit O_1, O_2, O_3 seien T_1 und T_2 diejenigen, in welchen O_1 bezw. O_2 von einem der gesuchten Kreise berührt werden.

Man ziehe $O_1 T_1$ und $O_2 T_2$, welche sich in Ω schneiden

$$\ldots \text{ op} : [4 R_1 + 2 R_2],$$

und beschreibe $\Omega(\Omega T_1)$

$$\ldots \text{ op} : [2 C_1 + C_2].$$

Dies ist einer der gesuchten Berührungskreise. Um die 7 übrigen zu erhalten, ist noch

$$\ldots \text{ op} : 7\text{mal } [(4 R_1 + 2 R_2) + (2 C_1 + C_2)]$$

auszuführen."

Im ganzen erfordert die Konstruktion

$$\text{op} : (150 R_1 + 75 R_2 + 46 C_1 + 31 C_2) = (302;\ 196) \text{ (75 Gerade, 31 Kreise).}$$

In geometrographischer Ausführung wird also die Lösung 2. von 1. an Einfachheit um 77 Elementaroperationen übertroffen.

Durch dieselbe Modifikation, wie die an der Lösung 1. angebrachte, läßt sich aber auch hier eine bedeutende Vereinfachung der Konstruktion herbeiführen.

Jedes zu einer Ähnlichkeitsachse gehörende Paar von Berührungskreisen hat das Potenzzentrum H zum Ähnlichkeitspunkt. Daher müssen die Senkrechten aus H zu den Ähnlichkeitsachsen die Mittelpunkte Ω der zugehörigen Berührungskreise enthalten. Nimmt man diese Senkrechten als Örter für die Punkte Ω, so braucht man nur auf einem der gegebenen Kreise die Berührungspunkte festzulegen. Hierzu genügen die 4 Pole der Ähnlichkeitsachsen bezüglich O_1 und ihre Verbindungslinien mit H. Unter Zuhilfenahme von A, a und A, c erhalten wir auf diese Weise folgende, um 103 Elementaroperationen einfachere

Konstruktion: „Nach A, d ziehe man die Ähnlichkeitsachsen

$$\text{op} : [20 R_1 + 10 R_2 + 5 C_1 + 2 C_2].$$

Nach A, e konstruiere man das Potenzzentrum H

$$\text{op} : [16 R_1 + 8 R_2 + 2 C_2].$$

Nach A, a fälle man aus H auf die Ähnlichkeitsachsen die Senkrechten, beschreibe aber dabei unmittelbar nach jedem der Hilfskreise, ohne die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Spitze aufzuheben, noch durch O_1 den Kreis, wodurch man auch die bezüglich der Ähnlichkeitsachsen zu O_1 symmetrischen Punkte erhält

$$\text{op: } [8R_1 + 4R_2 + 8C_1 + 4C_2] + \text{op: } [4C_1 + 4C_2].$$

Nach A, c suche man zu den Ähnlichkeitsachsen bezüglich O_1 die Pole, wobei man mit

$$\text{op} : [24R_1 + 12R_2 + 4C_1 + 4C_2]$$

auskommt, da vorher schon für jede der Senkrechten aus O_1 auf die Ähnlichkeitsachsen ein zweiter Punkt festgelegt wurde.

Man verbinde diese Pole mit H, wodurch sich auf O_1 die 8 Berührungspunkte ergeben

$$\text{op} : [8R_1 + 4R_2].$$

Man ziehe in O_1 die Berührungsradien, welche die Senkrechten aus H zu den Ähnlichkeitsachsen in den Mittelpunkten der gesuchten Kreise treffen

$$\text{op} : [16R_1 + 8R_2].$$

Man beschreibe diese Kreise

$$\text{op} : [16C_1 + 8C_2].\text{“}$$

Das Gesamtsymbol ist

$$\text{op} : (92R_1 + 46R_2 + 37C_1 + 24C_2) = (199;\ 129)\ (46 \text{ Gerade, } 24 \text{ Kreise}).$$

Bezüglich der von Herrn L. Gérard (1898) gegebenen geometrographischen Lösung des Problems, welche in der Anwendbarkeit auf die Spezialfälle keiner der Lösungen 1. und 2. nachsteht, beide aber sowohl in der Ableitung als auch in der Ausführung an Einfachheit ($S = 152$) weitaus übertrifft, sei auf Scientia, L verwiesen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf