VI. Abschnitt.

Merkwürdige Kreise des Dreiecks ABC.

§ 1. Der Umkreis.

Geometrographische Konstruktion. — „Man konstruiere den Mittelpunkt M nach V, § 2 $[4R_1 + 2R_2 + 3C_1 + 3C_2]$ und beschreibe den Kreis $M(MA)[2C_1 + C_2]$. Dies ist der Umkreis."

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_2) = (15;\ 9)\ (2 \text{ Gerade, } 4 \text{ Kreise}).$$

§ 2. Der Inkreis und die Ankreise.

Die klassische Methode sucht zunächst die Schnittpunkte der Halbierungslinien der Dreieckswinkel und bestimmt dann die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mit einer der Dreiecksseiten durch Senkrechte von jenen Schnittpunkten auf diese Seite. Benutzt man hierzu etwa die geometrographischen Konstruktionen V, § 3 und I, § 4, 1, so kann man die 4 Berührungskreise durch

$$\text{op} : (16R_1 + 8R_2 + 25C_1 + 18C_2) = (67;\ 41)\ (8 \text{ Gerade, } 18 \text{ Kreise})$$

erhalten.

Wesentlich einfacher ist aber das folgende Verfahren.

Sind $A'A_\alpha'A_\beta'A_\gamma'$ die Berührungspunkte der gesuchten Kreise $OO_\alpha O_\beta O_\gamma$ mit der Seite BC, und beschreibt man die Kreise $B(c)$ und $C(b)$, welche BC in D und D_1, bzw. E und E_1 schneiden (D_1D und EE_1 mit BC gleichgerichtet), so sind $A'A_\alpha'A_\beta'A_\gamma'$ bzw. die Mittelpunkte der Strecken DE, D_1E_1, DE_1, ED_1; denn setzt man $\frac{a+b+c}{2} = s$, so ist

$$A'D = A'C - DC = (s - c) - (a - c) = s - a,$$
$$A'E = A'B - EB = (s - b) - (a - b) = s - a,$$

mithin $A'D = A'E$ usw.

Die Punkte $OO_\alpha O_\beta O_\gamma$ kann man also als Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von DE, D_1E_1, DE_1, ED_1 mit den 2 Halbierungslinien der Winkel bei B finden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Geometrographische Konstruktion. — (Bernès.) „Man beschreibe die Kreise $B(c)$ und $C(b)$ . . . op : $[4C_1 + 2C_2]$. Der erstere treffe BC in D und D_1, der letztere treffe BC in E und E_1 (D_1D und EE_1 mit BC gleichgerichtet).

Mit einem genügend großen Radius ϱ beschreibe man dann die Kreise $A(\varrho)$, $D(\varrho)$, $D_1(\varrho)$, $E(\varrho)$, $E_1(\varrho)$ . . . op : $[5C_1 + 5C_2]$. Die 3 ersten dieser Kreise legen für die Halbierungslinien der Winkel bei B je 1 Punkt fest, während die 4 letzten je 2 Punkte der Mittelsenkrechten von DE, D_1E_1, DE_1, ED_1 bestimmen.

Man ziehe diese 6 Geraden . . . op : $[12R_1 + 6R_2]$.

Dieselben legen die Mittelpunkte der gesuchten Kreise und ihre Berührungspunkte mit BC fest.

Man ziehe diese Kreise . . . op : $[8C_1 + 4C_2]$."

op : $(12R_1 + 6R_2 + 17C_1 + 11C_2) = (46; 29)$ (6 Gerade, 11 Kreise).

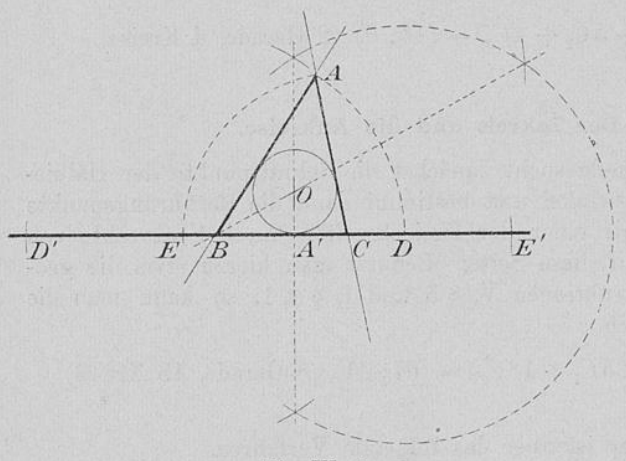

Fig. VI, 1.

Wird nur einer der Berührungskreise, z. B. der Inkreis, verlangt, so operiere man, wie folgt:

„Durch die Kreise $B(c)$ und $C(b)$ (Fig. VI, 1) bestimme man auf BC die Punkte D und E (D in der Richtung BC, E in der Richtung CB) $[4C_1 + 2C_2]$, konstruiere die Mittelsenkrechte von DE vermittelst der hinreichend großen Kreise $D(\varrho)$ und $E(\varrho)$ $[2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_2]$, und ziehe die Halbierungslinie des $\sphericalangle \beta$ vermittelst des schon gezogenen Kreises $D(\varrho)$ und des Kreises $A(\varrho)$ $[2R_1 + R_2 + C_1 + C_2]$. Sei A' der Fußpunkt der Mittelsenkrechten, O ihr Schnittpunkt mit der Halbierungslinie. Man ziehe $O(OA')$ $[2C_1 + C_2]$. Dies ist der Inkreis."

op : $(4R_1 + 2R_2 + 9C_1 + 6C_2) = (21; 13)$ (2 Gerade, 6 Kreise).

Auf dieselbe Weise erhält man jeden der Ankreise, indem man anstatt der Mittelsenkrechten von DE diejenige von D_1E_1, DE_1 oder ED_1 nimmt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 3. Der Feuerbachsche Kreis.

(Kreis der 9 Punkte.)

Geometrographische Konstruktion. — „Man konstruiere (Fig. VI, 2) über BC als Durchmesser den Kreis k, der AB in C_0 und und AC in B_0 schneidet

$$[2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_2].$$

Dann beschreibe man mit dem Radius $\frac{a}{2}$, den man im Zirkel hat, die Kreise $C_0\left(\frac{a}{2}\right)$ und $B_0\left(\frac{a}{2}\right)$ $[2C_1 + 2C_2]$. Der Kreis k werde von $C_0\left(\frac{a}{2}\right)$ in X und Y, von $B_0\left(\frac{a}{2}\right)$ in U und V getroffen. Dann ziehe man XY und UV, die sich in F schneiden $[4R_1 + 2R_2]$, und beschreibe $F(FC_0)\,[2C_1 + C_2]$. Dies ist der Feuerbachsche Kreis."

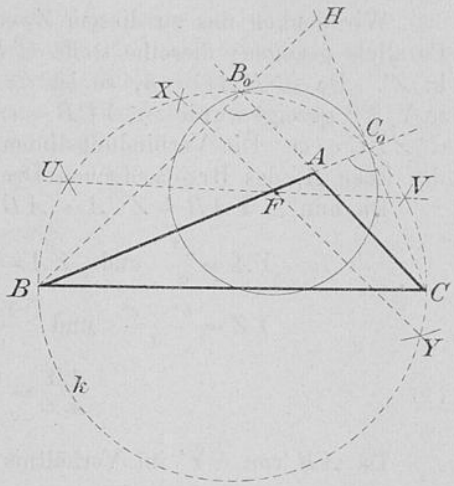

Fig. VI, 2.

$$\text{op} : (6R_1 + 3R_2 + 8C_1 + 6C_2)$$
$$= (23;\ 14)\ (3 \text{ Gerade, } 6 \text{ Kreise}).$$

§ 4. Der Brocardsche Kreis.

(Kreis der 7 Punkte.)

Durch die Konstruktion V, § 9, b haben wir die beiden Brocardschen Punkte N und N', sowie die Ecke A_1 des Brocardschen Dreiecks erhalten. Würden wir von dieser Konstruktion ausgehen, so würde sich der Brocardsche Kreis als der Umkreis des Dreiecks $NN'A_1$ durch

$$\text{op} : (12R_1 + 6R_2 + 20C_1 + 13C_2) = (51;\ 32)\ (6 \text{ Gerade, } 13 \text{ Kreise})$$

ergeben.

Wir können aber 13 Elementaroperationen sparen, wenn wir die gegenseitige Lage des Umkreismittelpunktes M des Urdreiecks und des in V, 7 gefundenen Punktes $\mathfrak{G}$ auf dem Brocardschen Kreise beachten.

Gewöhnlich wird der Grebesche Punkt als der Schnittpunkt der Parallelen definiert, die man durch die Ecken A_1, B_1, C_1 des Brocardschen Dreiecks zu den Seiten BC, CA, AB des Urdreiecks ziehen kann, woraus dann gefolgert wird, daß der Umkreismittelpunkt M und der Grebesche Punkt auf dem Brocardschen Kreise Gegenpunkte sind. Da

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wir aber $\mathfrak{G}$ als den Schnittpunkt der Ecktransversalen konstruiert haben, welche die Gegenseiten im Verhältnis der Quadrate der Anseiten teilen, so ist erst noch zu zeigen, daß dieser Punkt $\mathfrak{G}$ mit dem Grebeschen Punkte der gewöhnlichen Definition identisch ist, d. h. daß die durch die Ecken A_1, B_1, C_1 des Brocardschen Dreiecks zu BC, CA, AB gezogenen Parallelen sich in $\mathfrak{G}$ schneiden.

Wir denken uns zu diesem Zwecke in Fig. V, 6 durch A zu BC die Parallele gezogen; dieselbe treffe $C'B$ in Y, $C'C$ in Y', $B'C$ in Z, $B'B$ in Z'. Da $\sphericalangle B'AC = \beta$, so ist $\sphericalangle C'BA = C'AB = \gamma$, daher ist (wie in V, § 9 gezeigt wurde) $\sphericalangle YCB = \omega$ der Brocardsche Winkel; ferner ist $\sphericalangle ZBC = \omega$. Die Verbindungslinien YC und ZB schneiden sich also in der Ecke A_1 des Brocardschen Dreiecks.

Da nun $\triangle YAB \sim ZCA \sim ABC$, so ist

$$YA = \frac{c^2}{a} \quad \text{und} \quad ZA = \frac{b^2}{a}, \quad \text{folglich}$$

$$YZ = \frac{b^2 + c^2}{a} \quad \text{und} \quad \frac{YZ}{a} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}, \quad \text{mithin auch}$$

$$(1) \qquad \frac{A_1 Y}{A_1 C} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}.$$

Da AB von CY' im Verhältnis $\frac{b^2}{a^2}$ und AC von BZ' im Verhältnis $\frac{c^2}{a^2}$ geteilt wird, so hat man ferner

$$Y'A : a = b^2 : a^2 \quad \text{oder} \quad Y'A = \frac{b^2}{a},$$

$$Z'A : a = c^2 : a^2 \quad \text{oder} \quad Z'A = \frac{c^2}{a}, \quad \text{also ist}$$

$$Y'Z' = Y'A + Z'A = \frac{b^2 + c^2}{a} \quad \text{und} \quad \frac{Y'Z'}{a} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}.$$

Da sich nun $Y'C$ und $Z'B$ in $\mathfrak{G}$ treffen, so hat man auch

$$(2) \qquad \frac{\mathfrak{G}Y'}{\mathfrak{G}C} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}.$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{A_1 Y}{A_1 C} = \frac{\mathfrak{G}Y'}{\mathfrak{G}C}, \quad \text{d. h.}$$

YC und $Y'C$ werden von A_1 bzw. $\mathfrak{G}$ in demselben Verhältnis geteilt. Mithin muß $A_1\mathfrak{G} /\!/ BC$ sein; ebenso ergibt sich, daß $B_1\mathfrak{G} /\!/ CA$ und $C_1\mathfrak{G} /\!/ AB$ ist.

Es steht also fest, daß die Strecke $M\mathfrak{G}$ Durchmesser des Brocardschen Kreises ist, und wir erhalten folgende

Geometrographische Konstruktion. — „Man führe die Konstruktion V, § 7, 2 aus, welche gleichzeitig den Umkreismittelpunkt M und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

den Grebeschen Punkt $\mathfrak{G}$ liefert $[10R_1 + 5R_2 + 6C_1 + 4C_2]$. Dann ziehe man (Fig. V, 6) $M\mathfrak{G}[2R_1 + R_2]$ und beschreibe über $M\mathfrak{G}$ als Durchmesser den Kreis $[2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_2]$. Dies ist der Brocardsche.

$$\text{op} : (14R_1 + 7R_2 + 10C_1 + 7C_2) = (38;\ 24)\ (7 \text{ Gerade, } 7 \text{ Kreise}).\text{“}$$

Anmerkung. — Die Mittelsenkrechten der Seiten des Urdreiecks treffen den Brocardschen Kreis in den Ecken des Brocardschen Dreiecks. Die Ecken B_1 und C_1 des letzteren sind also durch die eben angegebene Konstruktion schon bestimmt. Zieht man noch die Mittelsenkrechte von BC (wozu keine neuen Kreise nötig sind), so hat man die Ecken des Brocardschen Dreiecks durch

$$\text{op} : (16R_1 + 8R_2 + 10C_1 + 7C_2) = (41;\ 26)\ (8 \text{ Gerade, } 7 \text{ Kreise}).$$

Diese Konstruktion ist geometrographisch.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf