V. Abschnitt.

Merkwürdige Punkte des Dreiecks ABC.

§ 1. Der Schwerpunkt, S.

Liegen die Punkte B' und C' so, daß die Vierecke $ABCB'$ und $ACBC'$ Parallelogramme sind, so schneiden sich BB' und CC' im Schwerpunkt S des Dreiecks ABC.

Geometrographische Konstruktion. — „Man beschreibe (Fig. V, 1) den Kreis $A(BC)\,[3C_1 + C_2]$, dann die Kreise $B(AC)$ und $C(BA)\,[(2C_1 + C_2) + (2C_1 + C_2)]$. Der Kreis um A werde von $B(AC)$ in C', von $C(BA)$ in B' geschnitten. Man ziehe BB' und $CC'\,[4R_1 + 2R_2]$."

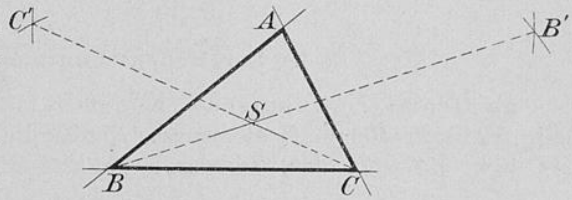

Fig. V, 1.

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 3C_2) = (16; 11) \text{ (2 Gerade, 3 Kreise).}$$

§ 2. Der Mittelpunkt des Umkreises, M.

Geometrographische Konstruktion. — a sei die größte Seite. Mit beliebigem Radius $\varrho > \frac{a}{2}$ beschreibe man die Kreise $A(\varrho)$, $B(\varrho)$, $C(\varrho)$ $[3C_1 + 3C_2]$ und ziehe die gemeinschaftlichen Sehnen zweier Paare dieser Kreise $[4R_1 + 2R_2]$.

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 3C_1 + 3C_2) = (12; 7) \text{ (2 Gerade, 3 Kreise).}$$

§ 3. Die Mittelpunkte des Inkreises und der Ankreise O, O_α, O_β, O_γ.

Die gewöhnliche Konstruktion wird bei ökonomischer Ausführung geometrographisch, wenn man eine Seite des Dreiecks als Radius der Hilfskreise nimmt und beibehält.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Geometrographische Konstruktion. — „Man beschreibe (Fig. V, 2) die Kreise $B(a)$ und $C(a)$ $[3C_1 + 2C_2]$. Seien C' und C'' die Schnittpunkte von $B(a)$ und BA, B' und B'' die Schnittpunkte von $C(a)$ und CA. Man ziehe $B'(a)$, $B''(a)$, $C'(a)$, $C''(a)$ $[4C_1 + 4C_2]$. Diese 4 Kreise legen auf $B(a)$ und $C(a)$ je einen Punkt der 4 Halbierungslinien der Winkel bei B und C fest. Man ziehe diese Halbierungslinien

$$[8R_1 + 4R_2].$$

Sie treffen sich in O, O_α, O_β, O_γ.

$$\text{op} : (8R_1 + 4R_2 + 7C_1 + 6C_2) = (25; 15) \text{ (4 Gerade, 6 Kreise).}$$

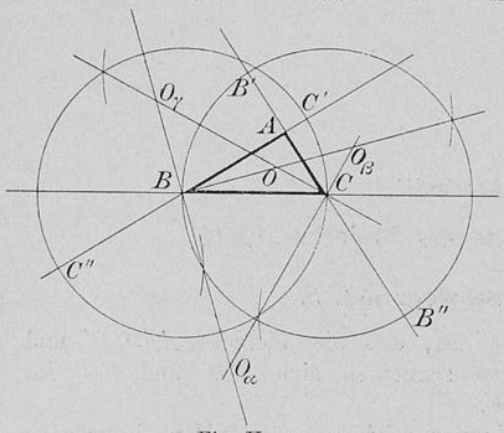

Fig. V, 2.

§ 4. Der Höhenschnittpunkt, H.

a) Geometrographische Konstruktion. — „Man konstruiere (Fig. V, 3) zu B und C die symmetrischen Punkte B' und C' bezüglich AC bzw. AB. Zu dem Zwecke ziehe man $B(a)$, der AC noch in C_0 schneidet $[2C_1 + C_2]$, und $C(a)$, der AB noch in B_0 trifft $[C_1 + C_2]$. Dann ziehe man $C_0(a)$, der auf $C(a)$ den Punkt B' bestimmt $[C_1 + C_2]$, und $B_0(a)$, der auf $B(a)$ den Punkt C' festlegt $[C_1 + C_2]$. Schließlich ziehe man BB' und CC' $[4R_1 + 2R_2]$. Diese treffen sich in H.“

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_2) = (15; 9)$$

(2 Gerade, 4 Kreise).

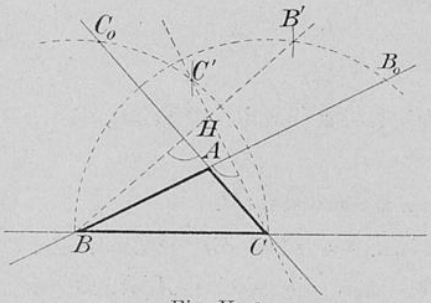

Fig. V, 3.

Ich gebe noch eine zweite Lösung an, deren Einfachheitskoeffizient zwar um 1 höher ist, die uns aber zur geometrographischen Konstruktion des Feuerbachschen Kreises führt.

b) Konstruktion. — „Man beschreibe (Fig. VI, 2) über BC als Durchmesser den Kreis, der BA noch in C_0 und CA noch in B_0 schneidet $[2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_2]$, und ziehe BB_0 und CC_0 $[4R_1 + 2R_2]$. Diese treffen sich in H.“

Denn $\sphericalangle BB_0C$ und $\sphericalangle BC_0C$ sind Peripheriewinkel im Halbkreis.

$$\text{op} : (6R_1 + 3R_2 + 4C_1 + 3C_2) = (16; 10) \text{ (3 Gerade, 3 Kreise).}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 5. Der Schnittpunkt der Ecktransversalen nach den Berührungspunkten des Inkreises, G (Gergonnescher Punkt).

Geometrographische Konstruktion. — (Lemoine.) „Man beschreibe (Fig. V, 4) die Kreise $B(c)$ und $C(b)$ $[4C_1 + 2C_2]$. Der erstere treffe BC in der Richtung BC in D, der letztere treffe BC in der Richtung CB in E. Dann ist $DE = b + c - a$. Man bestimme den Mittelpunkt A' von DE $[2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_2]$. Dann ist $BA' = \frac{a+c-b}{2}$, mithin A' Berührungspunkt des Inkreises mit BC. Man ziehe den Kreis $B(BA')$, der BA in C' schneidet $[2C_1 + C_2]$, und die Geraden AA' und CC' $[4R_1 + 2R_2]$. Die letzteren treffen sich in G."

op : $(6R_1 + 3R_2 + 8C_1 + 5C_2) = (22; 14)$ (3 Gerade, 5 Kreise).

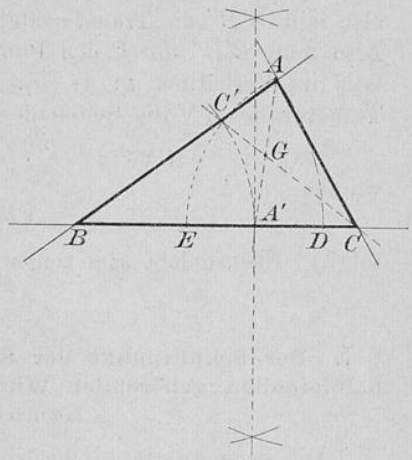

Fig. V, 4.

§ 6. Der Schnittpunkt der Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der Ankreise, N (Nagelscher Punkt).

Geometrographische Konstruktion. — (Lemoine.) „Sei a die größte Seite. Man beschreibe (Fig. V, 5) den Kreis $A(a)$, der AB im Sinne AB in B', und AC im Sinne AC in C' schneidet $[3C_1 + C_2]$. Dann beschreibe man den Kreis $B(BB')$, der BC im Sinne BC in B'' trifft $[2C_1 + C_2]$, und den Kreis $C(CC')$, der BC im Sinne CB in C'' trifft $[2C_1 + C_2]$. Hierauf ziehe man die Geraden $B'B''$ und $C'C''$ $[4R_1 + 2R_2]$. Ihr Schnittpunkt ist der Nagelsche Punkt N."

op : $(4R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 3C_2)$ $= (16; 11)$ (2 Gerade, 3 Kreise).

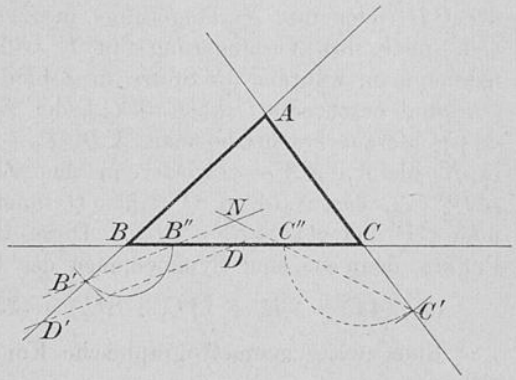

Fig. V, 5.

Beweis: Setzt man $\frac{a+b+c}{2} = s$, so ist $BB'' = BB' = a - c$ und $CC'' = CC' = a - b$, folglich $B''C'' = 2(s - a)$. Ist nun D der Mittel-

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

punkt von $B''C''$, so hat man $BD = (a - c) + (s - a) = s - c$, mithin ist D der Berührungspunkt der Seite BC mit dem Ankreise O_α, und AD muß den Nagelschen Punkt N enthalten. Ist ferner D' der Berührungspunkt der Seite AB mit dem Ankreise O_α, so ist $D'D // B'B''$, also teilt $B'B''$ die Transversale AD im Verhältnis $AB' : B'D' = a : (s - a)$. Also muß $B'B''$ durch den Punkt N gehen, denn dieser teilt AD ebenfalls im Verhältnis $a : (s - a)$. (Nach dem Satz des Menelaos teilt die Transversale BN die Seiten des Dreiecks DAC derart, daß man hat

$$AN \cdot (s - c) \cdot (s - a) = DN \cdot a \cdot (s - c),$$

woraus

$$AN : DN = a : (s - a)$$

folgt.) Ebenso läßt sich zeigen, daß $C'C''$ durch N geht.

§ 7. Der Schnittpunkt der Symmedianen, d. i. der zu den Seitenhalbierenden gehörenden Winkelgegentransversalen, $\mathfrak{G}$ (Grebescher, Lemoinescher Punkt).

Die geometrographische Konstruktion einer Symmediane allein besitzt nach II, § 9, 5 die Einfachheit 13. Man kann also den Punkt $\mathfrak{G}$ durch zweimalige Ausführung der Konstruktion II, § 9, 5 mit $S = 26$ finden. Dabei spart man noch $1\,C_1$, wenn man die Konstruktion folgendermaßen einrichtet.

1. Geometrograpische Konstruktion. — „Man beschreibe $A(c)$ $[2\,C_1 + C_2]$, der AC (oder ihre Verlängerung) in X trifft, dann $A(b)$ $[C_1 + C_2]$, der AB (oder ihre Verlängerung) in Y trifft, dann $C(b)$ $[C_1 + C_2]$, der CB (oder ihre Verlängerung) in Z trifft, dann $C(a)$ $[C_1 + C_2]$, der CA (oder ihre Verlängerung) in U trifft, dann $Z(a)$ $[C_1 + C_2]$. Dann nehme man, während die Spitze in Z bleibt, $ZC = b$ wieder in den Zirkel $[C_1]$ und beschreibe $U(b)$ $[C_1 + C_2]$, der $Z(a)$ in P trifft (P innerhalb des $\sphericalangle\,\gamma$); hierauf beschreibe man $X(b)$ $[C_1 + C_2]$, nehme, während die Spitze in X bleibt, $XA = c$ wieder in den Zirkel $[C_1]$ und beschreibe $Y(c)$ $[C_1 + C_2]$, der $X(b)$ in Q trifft (Q innerhalb des $\sphericalangle\,\alpha$). Endlich ziehe man CP und AQ $[4R_1 + 2R_2]$. Diese treffen sich in dem Grebeschen Punkte, denn sie sind Symmedianen des Dreiecks.“

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 11\,C_1 + 8\,C_2) = (25;\ 15) \quad (2 \text{ Gerade, } 8 \text{ Kreise}).$$

Eine zweite geometrographische Konstruktion des Punktes $\mathfrak{G}$ ergibt sich aus dem

Satz: Konstruiert man über der Seite AC des Dreiecks ABC als Basis nach außen das gleichschenklige Dreieck $AB'C$ mit dem Basiswinkel $B'AC = \beta$, so ist BB' die Winkelgegentransversale der zu BC gehörenden Seitenhalbierenden BD (die zu BC gehörende Symmediane).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis: Seien (Fig. V, 6) B_0 und D_0 die Schnittpunkte von BB' bzw. BD mit dem Umkreise k des Dreiecks. AB' und CB' sind Tangenten an k in A bzw. C, mithin ist AC die Polare von B' in bezug auf k, und die Strahlen DD_0, DB', DB_0, DC sind harmonisch; deswegen

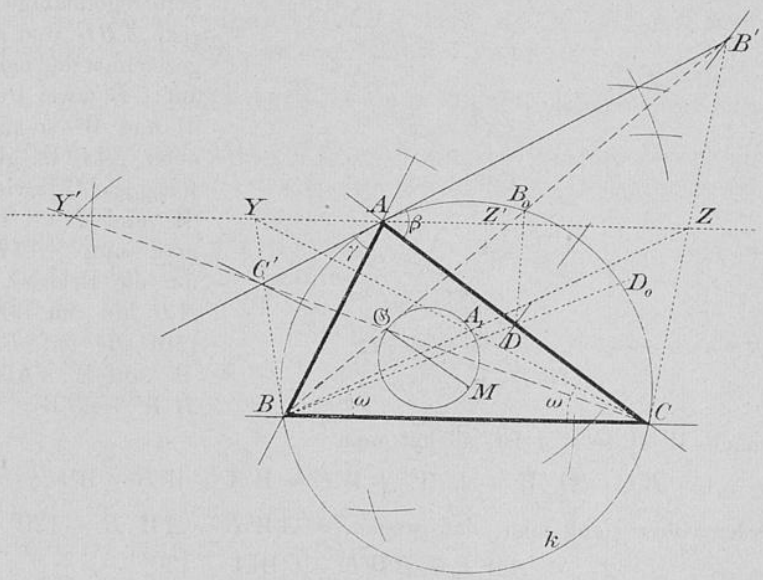

Fig. V, 6.

halbiert DB' den Bogen D_0B_0, und es ist $\sphericalangle D^0BA = B^0BC$, d. h. BB' ist Winkelgegentransversale zu BD.

2. Geometrographische Konstruktion. — (Bernès.) „Man ziehe (Fig. V, 6) die Mittelsenkrechten von AB und AC mit Hilfe von 3 um A, B, C beschriebenen gleichen Kreisen $[4R_1 + 2R_2 + 3C_1 + 3C_2]$. Dann lege man in A an AC (außerhalb des Dreiecks) einen Winkel $= \beta$ an, indem man hierbei die Kreise um A und B benutzt $[2R_1 + R_2 + 3C_1 + C_2]$. Der freie Schenkel von β möge die Mittelsenkrechten von AB und AC in C' bzw. B' schneiden. Man ziehe BB' und CC' $[4R_1 + 2R_2]$. Diese treffen sich in dem Grebeschen Punkte $\mathfrak{G}$."

$$\text{op}: (10R_1 + 5R_2 + 6C_1 + 4C_2) = (25; 16) \text{ (5 Gerade, 4 Kreise).}$$

§ 8. Der Punkt W innerhalb des Dreiecks, für welchen die Summe der Entfernungen von den Ecken ein Minimum ist.

Zu einer einfachen Konstruktion dieses Punktes verhilft der Umstand, daß von ihm aus gesehen die 3 Seiten des Dreiecks gleiche schein-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bare Größe haben. Daß letzteres der Fall ist, kann man, falls keiner der Dreieckswinkel $> 120^0$ ist, in folgender Weise zeigen.

Sei J (Fig. V, 7) ein beliebiger Punkt innerhalb des Dreiecks. Wir denken uns über AB und AJ nach der dem Punkte C abgewandten Seite regelmäßige Dreiecke ABB' und AJJ' gezeichnet und nehmen auf CB' zwei Punkte W und W' so an, daß auch $\triangle AWW'$ gleichseitig ist (W' zwischen W und B'). Dreht man nun $\triangle AB'W'$ um die Ecke A nach AB hin um 60^0, so fällt B' auf B und W' auf W. Also ist $B'W' = BW$. Da aber auch $W'W = WA$ ist, so hat man

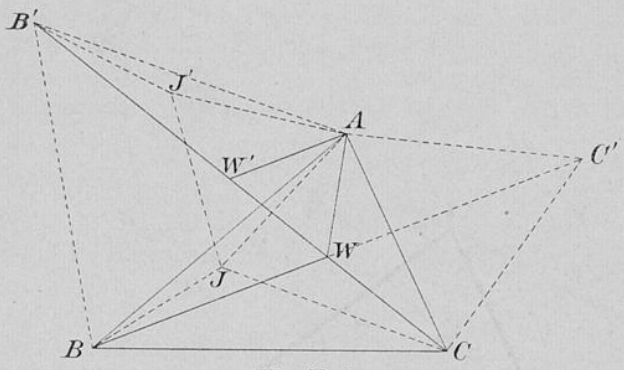

Fig. V, 7.

$$1)\quad B'C = W'W + B'W' + WC = WA + WB + WC.$$

Außerdem aber sieht man, daß wegen $\sphericalangle AWB = AW'B' = 120^0$ auch

$$2)\quad \sphericalangle AWB = BWC = CWA = 120^0$$

sein muß. Dreht man ferner $\triangle AB'J'$ um A nach AB hin um 60^0, so fällt B' auf B und J' auf J. Also ist $J'B' = JB$. Da aber auch $JJ' = JA$ ist, so hat man

$$3)\quad B'J' + J'J + JC = JA + JB + JC.$$

Nun ist die gebrochene Linie $B'J'JC$ größer als $B'C$, daher ist auch $JA + JB + JC > B'C$ und wegen 1) schließlich

$$4)\quad JA + JB + JC > WA + WB + WC.$$

Soll also die Summe der Entfernungen eines innerhalb des Dreiecks liegenden Punktes von den Ecken ein Minimum sein, so muß er mit W zusammenfallen, also müssen (nach 2)) seine Verbindungslinien mit den Ecken gleiche Winkel miteinander bilden.

Diese Schlußfolgerung wird hinfällig, wenn einer der Dreieckswinkel $> 120^0$ ist. Denn wäre z. B. $\sphericalangle C > 120^0$, so würde W in die Verlängerung von $B'C$ fallen, und anstatt der Gleichung 1) würde die folgende gelten: $B'C = WA + WB - WC$. Man würde dann zu der Ungleichung $JA + JB + JC > WA + WB - WC$ geführt, welche nicht aussagt, daß $WA + WB + WC$ ein Minimum sei. In diesem Falle existiert aber ein Minimumpunkt W überhaupt nicht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

W kann nun als Schnittpunkt der beiden durch A und B, bzw. A und C gehenden Kreise gesucht werden, deren dem Punkte C bzw. B zugewandte Bogen eines Peripheriewinkels $= 120^0$ fähig sind. Dies sind die Umkreise der auf AB und AC als Grundlinien (nach außen) aufsetzbaren gleichseitigen Dreiecke ABB' und ACC'. Diese Konstruktion, ökonomisch ausgeführt, hat das Symbol

$$\text{op} : (8R_1 + 4R_2 + 12C_1 + 8C_2) = (32; 20) \text{ (4 Gerade, 8 Kreise).}$$

Einen viel einfacheren Weg weist die oben benutzte Beweisfigur V, 7. Die Spitzen B' und C' der beiden gleichseitigen Dreiecke (deren Seiten nicht gezogen zu werden brauchen) genügen, um 2 Örter für W, nämlich die Geraden $B'C$ und $C'B$ festzulegen.*) Die Punkte B' und C' werden durch die Kreise $B(BA)$ und $A(BA)$, bzw. $A(AC)$ und $C(AC)$ bestimmt, und man kommt aus mit

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_2)$$
$$= (15; 9) \text{ (2 Gerade, 4 Kreise).}$$

Diese Konstruktion enthält aber noch einen überflüssigen Kreis, indem sie die zunächst zu zeichnenden Kreise $B(BA)$ und $A(BA)$ nicht vollständig ausnutzt. Wir benutzen die letzteren, um nach Aufg. I, § 11, a durch A eine Gerade zu ziehen, die mit $B'C$ einen Winkel $= 120^0$ bildet, und gelangen zu folgender

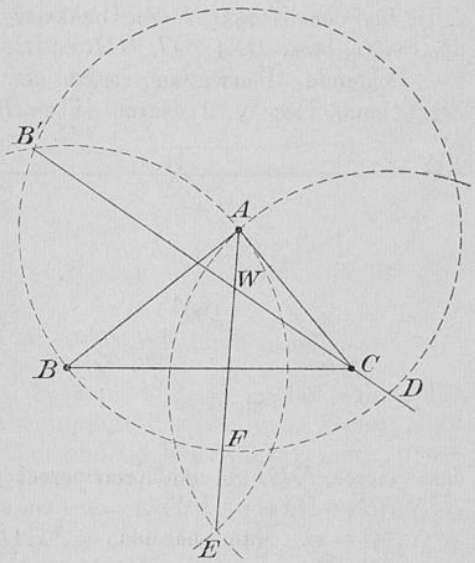

Fig. V, 8.

Geometrographischer Konstruktion. — „Man beschreibe (Fig. V, 8) die Kreise $B(BA)$ und $A(BA)$, welche sich auf der dem Punkte C abgewandten Seite von AB in B' schneiden $[(2C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)]$. Dann ziehe man $B'C$, welche den Kreis $A(BA)$ in D trifft $[2R_1 + R_2]$. Hierauf beschreibe man mit BA, das man im Zirkel hat, den Kreis $D(BA)$, der den Kreis $B(BA)$ noch in E trifft $[C_1 + C_2]$, und ziehe schließlich AE $[2R_1 + R_2]$. Der Schnittpunkt von $B'C$ und AE ist der gesuchte Punkt W, gefunden durch

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 3C_2) = (13; 8) \text{ (2 Gerade, 3 Kreise).“}$$

*) Vgl. Schwering, „100 Aufgaben“, 14.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis: Sei F der Schnittpunkt des Bogens BD mit der Geraden AE, so ist Bogen $BF = DF$, daher

$$\sphericalangle BAF = BB'D \quad \text{und} \quad \sphericalangle AWB' = ABB' = 60^0,$$

mithin $\sphericalangle AWC = 120^0$. Ferner ist $\sphericalangle BWC = 2 \cdot FWD = 120^0$.

§ 9. Die beiden Punkte N und N' innerhalb des Dreiecks ABC, für welche $\sphericalangle NCB = NBA = NAC = N'BC = N'AB = N'CA$ ist (Brocardsche Punkte, Segmentärpunkte).

Die herkömmliche Konstruktion dieser Punkte beruht darauf, daß z. B. für den Punkt N die Umkreise der Dreiecke NCB, NBA, NAC die Seiten bzw. BA, AC, CB in B, A, C berühren.

Folgende Überlegung ergibt ein wesentlich einfacheres Verfahren. Zieht man (Fig. V, 9) durch A zu BC die Parallele und legt in B an BA außerhalb des Dreiecks den $\sphericalangle \gamma$ an, dessen freier Schenkel die Parallele in Y trifft, so ist $\sphericalangle YCB = \omega$ der Brocardsche Winkel. Denn nimmt man auf YC innerhalb des Dreiecks einen Punkt N so an, daß auch

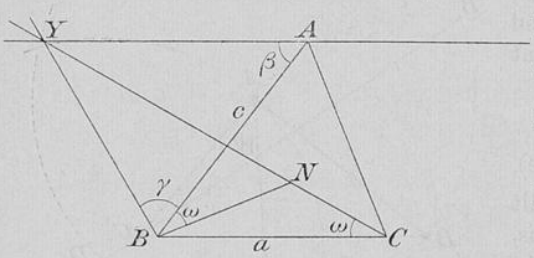

Fig. V, 9.

$$\sphericalangle NBA = \omega,$$

so ist wegen

$$\sphericalangle NYA = NBA = NCB = \omega$$

das Viereck $NBYA$ ein Kreisviereck, mithin $\sphericalangle NAB = NYB$. Da nun $\sphericalangle NYB = BYA - NYA = \alpha - \omega$, so ist auch $\sphericalangle NAB = \alpha - \omega$ und $\sphericalangle NAC = \omega$. Man hat also $\sphericalangle NAC = NBA = NCB = \omega$, d. h. N ist einer der Brocardschen Punkte und ω der Brocardsche Winkel.

Geht man ökonomisch vor, so kann man auf diese Weise den Winkel ω durch

$$\text{op}\,(6R_1 + 3R_2 + 7C_1 + 4C_2) = (20; 13) \text{ (3 Gerade, 4 Kreise)}$$

und die beiden Punkte N und N' durch

$$\text{op} \cdot (12R_1 + 6R_2 + 12C_1 + 7C_2) = (37; 24) \text{ (6 Gerade, 7 Kreise)}$$

finden.

Man spart aber noch 1 Elementaroperation, wenn man den Punkt Y durch die Konstruktion II, § 5, 3a der dritten Proportionalen festlegt, indem man beachtet, daß wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und YAB die Strecke $YA = \frac{c^2}{a}$ sein muß. Diese partikuläre Konstruktion ist hier anwendbar, weil man $c < a$ voraussetzen kann.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man operiere folgendermaßen.

a) Der Brocardsche Winkel ω. — (Lemoine.) „Man ziehe (Fig. V, 10) den Kreis $C(a)$ $[2C_1 + C_2]$, dann $B(c)$, der $C(a)$ in M schneidet (M und A auf derselben Seite von BC) $[2C_1 + C_2]$; hierauf ziehe man $M(c)$, der BC im Sinne BC in D trifft $[C_1 + C_2]$. Dann ist $BD = \frac{c^2}{a}$, und Y muß die vierte Ecke des Parallelogramms $YBDA$ werden. Man ziehe daher den Kreis $A(BD)$ $[3C_1 + C_2]$, nehme, während die Spitze in A bleibt, AD in den Zirkel und ziehe

$$B(AD)\,[2C_1 + C_2].$$

Diese beiden Kreise schneiden sich in Y (Y und D durch AB getrennt). Schließlich ziehe man CY $[2R_1 + R_2]$. Diese bildet mit CB den $\sphericalangle\,\omega$ und enthält den Punkt N."

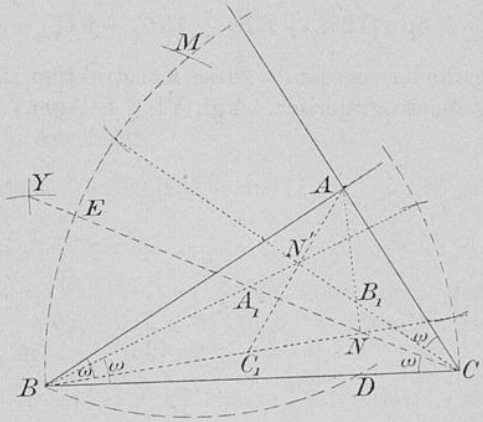

Fig. V, 10.

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 10C_1 + 5C_2) = (18; 12)\ (1 \text{ Gerade, } 5 \text{ Kreise}).$$

b) Die Brocardschen Punkte N und N'.*) — „Man führe die Konstruktion a) aus, ziehe aber dabei unmittelbar vor dem Kreise $B(c)$ noch den Kreis $B(a)$, wodurch $1C_2$ zum Symbole hinzukommt. Der innerhalb des $\sphericalangle\,\gamma$ liegende Schnittpunkt von CY und $C(a)$ heiße E. Nun lege man vermittelst des Bogens BE und der Kreise $B(a)$ und $C(a)$ innerhalb des Dreiecks in B an BA, in B an BC, in C an CA Winkel $= \omega$ an $[2C_1 + 3(C_1 + C_2) + 3(2R_1 + R_2)]$. Der freie Schenkel des ersten dieser 3 Winkel schneidet CY in N, die freien Schenkel der beiden anderen schneiden sich in N'."

$$\text{op} : (8R_1 + 4R_2 + 15C_1 + 9C_2) = (36; 23)\ (4 \text{ Gerade, } 9 \text{ Kreise}).$$

Anmerkung. — Die Ecken A_1, B_1, C_1 des Brocardschen Dreiecks (Fig. V, 10) sind die Spitzen der über den Seiten BC, CA, AB des Urdreiecks nach innen konstruierbaren gleichschenkligen Dreiecke mit dem Brocardschen $\sphericalangle\,\omega$ als Basiswinkel. Daher ist durch die Konstruktion b) die Ecke A_1 dieses Dreiecks als Schnittpunkt von CN und BN' fest-

*) Geringe Vereinfachung der Lemoineschen Konstruktion in A. F. Besançon, pag. 123, wo versehentlich op : $[C_1 + C_2]$ weggelassen und daher 35 anstatt 37 als Einfachheitskoeffizient angegeben ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gelegt. Zieht man noch AN und AN', so erhält man B_1 als Schnittpunkt von AN und CN', sowie C_1 als Schnittpunkt von BN und AN'. Die Ecken des Brocardschen Dreiecks können also auf diese Weise durch

$$\text{op} : (12R_1 + 6R_2 + 15C_1 + 9C_2) = (42; 27) \text{ (6 Gerade, 9 Kreise)}$$

gefunden werden. (Diese Konstruktion des $\triangle A_1 B_1 C_1$ ist aber noch nicht geometrographisch. Vgl. VI, § 4, Anm.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf