IV. Abschnitt.

Geometrische Örter.

§ 1. Der Kreis um einen gegebenen Punkt mit einem gegebenen Radius.

$$\text{op} : (3\,C_1 + C_2).$$

§ 2. Die Mittelsenkrechte einer Strecke.

$$\text{op} : (2\,R_1 + R_2 + 2\,C_1 + 2\,C_2) = (7;\ 4)\ (1\ \text{Gerade},\ 2\ \text{Kreise}).$$

§ 3. Die Parallelen zu der Geraden g im Abstande h.

a) Geometrographische Konstruktion. — „Um den beliebigen Punkt B von g (Fig. IV, 1) beschreibe man den Kreis $B(h)$, der g in C schneidet $[3\,C_1 + C_2]$. Dann beschreibe man den Kreis $C(h)\,[C_1 + C_2]$ und ziehe die Mittelsenkrechte von $BC\,[2\,R_1 + R_2]$. Auf dieser trage man vom Fußpunkt O aus die Strecke $OD = h$ ab $[C_1 + C_2]$ und beschreibe $O(BD)$ $[C_1 + C_2]$, der $B(h)$ und $C(h)$ in B' und B'', bzw. C' und C'' trifft (B' und C' auf derselben Seite von BC). Schließlich ziehe man $B'C'$ und $B''C''$ $[4\,R_1 + 2\,R_2]$. Diese Geraden bilden den gesuchten Ort."

$$\text{op} : (6\,R_1 + 3\,R_2 + 8\,C_1 + 4\,C_2) = (21;\ 14)\ (3\ \text{Gerade},\ 4\ \text{Kreise}).$$

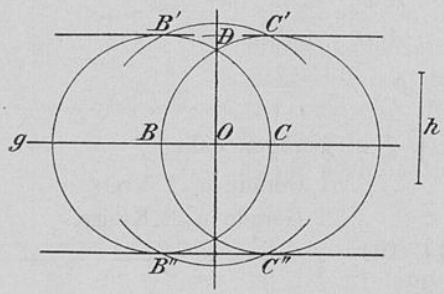

Fig. IV, 1.

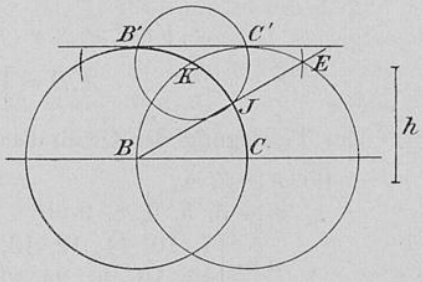

Fig. IV, 2.

Wird nur eine der Parallelen verlangt, so kommt von dem Symbole op : $[2\,R_1 + R_2]$ in Wegfall.

Um $1\,C_1$ einfacher ist alsdann folgende Konstruktion:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) „Man ziehe (Fig. IV, 2), wie vorher, die Kreise $B(h)$ und $C(h)$ $[4C_1 + 2C_2]$. Sei K einer ihrer Schnittpunkte. Man ziehe $K(h)$, der $C(h)$ in E schneidet $[C_1 + C_2]$, und ziehe BE, welche $B(h)$ in J trifft (J zwischen B und E) $[2R_1 + R_2]$. Dann ziehe man $K(KJ)$, der $B(h)$ und $C(h)$ in B' bzw. C' trifft $[2C_1 + C_2]$, und ziehe $B'C'$ $[2R_1 + R_2]$."

op : $(4R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 4C_2)$ $= (17; 11)$ (2 Gerade, 4 Kreise).

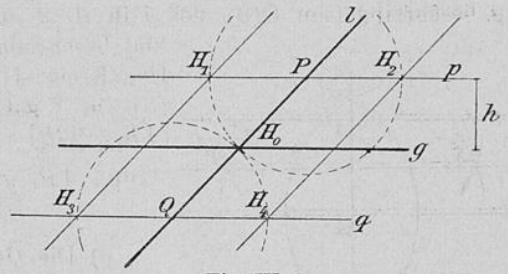

Fig. IV, 3.

Anmerkung. — Sind zu 2 Geraden g und l im Abstande h die Parallelen zu ziehen, so verfahre man folgendermaßen:

c) „Man konstruiere (Fig. IV, 3) zunächst zu g im Abstand h die Parallelen p und q $[6R_1 + 3R_2 + 8C_1 + 4C_2]$. l werde von g, p, q bzw. in H_0, P, Q getroffen. Nun beschreibe man $P(PH_0)$ und $Q(PH_0)$, welche p und q in H_1 und H_2, bzw. H_3 und H_4 treffen (H_2 und H_4 auf derselben Seite von l) $[3C_1 + 2C_2]$, und ziehe H_1H_3 und H_2H_4 $[4R_1 + 2R_2]$."

op : $(10R_1 + 5R_2 + 11C_1 + 6C_2) = (32; 21)$ (5 Gerade, 6 Kreise).

§ 4. Der geometrische Ort der Endpunkte aller Strecken $= m$, die mit der Geraden g den $\sphericalangle \sigma$ bilden.

Geometrographische Konstruktion. — „Sei (Fig. IV, 4) S der Scheitel von σ und B ein beliebiger Punkt auf g. Man beschreibe $S(m)$, der die Schenkel von σ in P und Q schneidet $[3C_1 + C_2]$, und beschreibe $B(m)$, der g in C und C' trifft $[C_1 + C_2]$. Dann mache man auf $B(m)$ Bogen

$$CD = CD' = C'E = C'E' = PQ$$

(D und E auf derselben Seite von g) $[4C_1 + 2C_2]$ und ziehe die Geraden DE und $D'E'$ $[4R_1 + 2R_2]$. Diese bilden den gesuchten Ort."

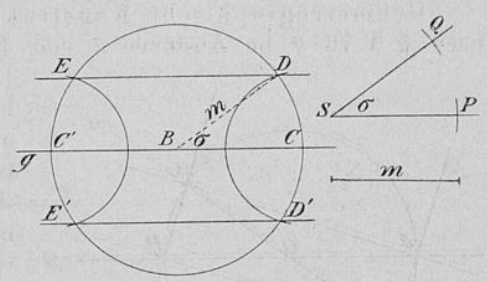

Fig. IV, 4.

op : $(4R_1 + 2R_2 + 8C_1 + 4C_2) = (18; 12)$ (2 Gerade, 4 Kreise).

Wird nur eine der Parallelen verlangt, so kommt man aus mit

op : $(2R_1 + R_2 + 8C_1 + 4C_2) = (17; 11)$ (1 Gerade, 4 Kreise).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 5. Der geometrische Ort der Punkte, die von den Geraden g und g' gleichen Abstand haben.

a) Die Geraden g und g' schneiden sich in O.

Geometrographische Konstruktion. — „Mit beliebigem Radius ϱ beschreibe man $O(\varrho)$, der g in A, g' in B und C schneidet $[C_1 + C_2]$, und beschreibe $A(\varrho)$, $B(\varrho)$, $C(\varrho)$ $[3C_1 + 3C_2]$. Der Kreis $A(\varrho)$ werde von $B(\varrho)$ in X, von $C(\varrho)$ in Y getroffen. Man ziehe OX und OY $[4R_1 + 2R_2]$. Diese bilden den gesuchten Ort."

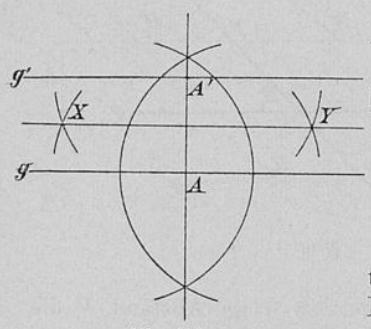

Fig. IV, 5.

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 4C_2) = (14;\ 8)$$

(2 Gerade, 4 Kreise).

b) Die Geraden g und g' sind parallel.

Geometrographische Konstruktion. — „Man konstruiere (Fig. IV, 5) nach I, § 1 zu g und g' eine beliebige Senkrechte, welche g in A und g' in A' schneidet

$$[2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_2].$$

Dann beschreibe man um A und A' zwei beliebige sich in X und Y schneidende Kreise $[2C_1 + 2C_2]$ und ziehe $XY[2R_1 + R_2]$. Dies ist der gesuchte Ort."

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 4C_2) = (14;\ 8)$$ (2 Gerade, 4 Kreise).

§ 6. Der geometrische Ort der Punkte, für welche die Summe bzw. Differenz der Abstände von den Geraden g und g' gleich a ist.

a) Die Geraden g und g' schneiden sich in O.

Geometrographische Konstruktion. — „Man ziehe (Fig. IV, 6) nach § 3 zu g im Abstande a eine Parallele, die g' in A' schneidet $[4R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 4C_2]$. Dann beschreibe man $O(OA')$, der g' noch in B' und g in A und B trifft $[2C_1 + C_2]$, und ziehe AA', AB', BA', BB' $[8R_1 + 4R_2]$. Dann bilden die von g und g' begrenzten Stücke dieser Geraden den gesuchten Ort für die Summe, ihre ins Unendliche sich erstreckenden Verlängerungen aber den Ort für die Differenz."

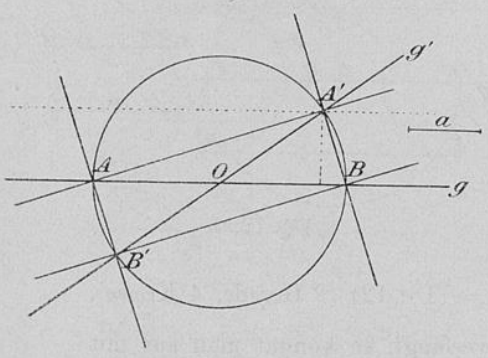

Fig. IV, 6.

$$\text{op} : (12R_1 + 6R_2 + 9C_1 + 5C_2)$$
$$= (32;\ 21)$$ (6 Gerade, 5 Kreise)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) Die Geraden g und g' sind parallel.

Geometrographische Konstruktion. — „Man errichte (Fig. IV, 7) auf g nach I, § 1 eine beliebige Senkrechte, welche g in A, g' in A' schneidet $[2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_2]$. Dann beschreibe man die Kreise $A(a)$ und $A'(a)[4C_1 + 2C_2]$. Die Senkrechte schneide den Kreis $A(a)$ in B', den Kreis $A'(a)$ in B (A' und B' auf derselben Seite von A, ferner A und B auf derselben Seite von A'). Man beschreibe $B(a)$ und $B'(a)[2C_1 + 2C_2]$. Die Schnittpunkte von $A(a)$ und $B(a)$ seien X und Y, die Schnittpunkte von $A'(a)$ und $B'(a)$ seien U und V. Man ziehe XY und $UV[4R_1 + 2R_2]$. Diese bilden den gesuchten Ort."

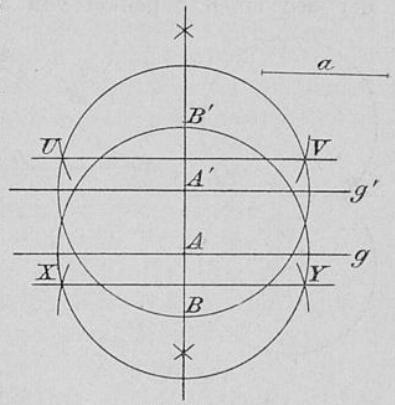

Fig. IV, 7.

op : $(6R_1 + 3R_2 + 8C_1 + 6C_2) = (23; 14)$ (3 Gerade, 6 Kreise).

§ 7. Der Kreis über der Strecke BC als Durchmesser.

op : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_2) = (10; 6)$ (1 Gerade, 3 Kreise).

§ 8. Die beiden Kreissegmente über der Strecke BC als Sehne, welche eines Peripheriewinkels $= \sigma$ fähig sind.

Sei zunächst nur eines der beiden Segmente zu konstruieren, sei $BC = a$ und S der Scheitel von $\sphericalangle \sigma$.

1. Klassische Konstruktion (Euklid). — „Man lege $\sphericalangle \sigma$ in B an BC an, errichte auf dem freien Schenkel in B die Senkrechte, welche die Mittelsenkrechte von BC in O scheidet, und beschreibe $O(OB)$."

Hierbei kommt man, unter Vermeidung eines 2ten Hilfskreises um B, auf

op : $(6R_1 + 3R_2 + 11C_1 + 8C_2) = (28; 17)$ (3 Gerade, 8 Kreise).

Ändert man aber die in der Lösung vorgeschriebene Reihenfolge der Teilkonstruktionen derart ab, daß man mit der Mittelsenkrechten von BC beginnt, so kann man den um B zu schlagenden Kreis gleichzeitig auch zum Anlegen des Winkels und zum Errichten der Senkrechten in B benutzen, wodurch man op : $[C_1 + C_2]$ spart. Das Symbol der klassischen, geometrographisch ausgeführten Konstruktion ist demnach

op : $(6R_1 + 3R_2 + 10C_1 + 7C_2) = (26; 16)$ (3 Gerade, 7 Kreise).

Schneidet man von dem $\sphericalangle \sigma$ das gleichschenklige $\triangle SDE$ ab, in welchem SE Basis und der Schenkel $SD = a$ ist, so faßt der Umkreis

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

des $\triangle SDE$ den $\sphericalangle SED = \sigma$ als Peripheriewinkel. Sein Radius ist also gleich dem Radius des gesuchten Segments. Hierauf beruht die

2. Konstruktion. — (Tarry.) „Man beschreibe (Fig. IV, 8) $S(a)$, der den einen Schenkel von σ in D schneidet $[3C_1 + C_2]$, dann $D(a)$, der den anderen Schenkel von σ in E trifft $[C_1 + C_2]$, ferner $E(a)\,[C_1 + C_2]$. Dann bestimme man mit Hilfe dieser 3 Kreise den Mittelpunkt K des Umkreises von $\triangle SDE\,[4R_1 + 2R_2]$ und lege durch B und C einen Kreis mit dem Radius $KS\,[5C_1 + 3C_2]$. Dieser enthält das gesuchte Segment."

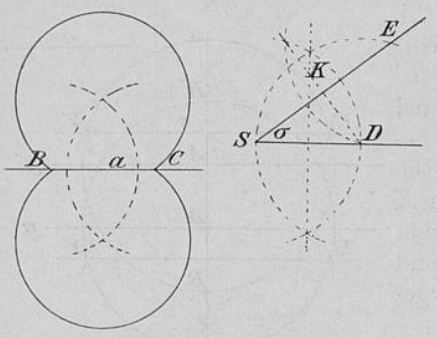

Fig. IV, 8.

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 6C_2)$$
$$= (22;\,14)\ (2 \text{ Gerade, } 6 \text{ Kreise}).$$

Konstruiert man nach I, § 12 das Komplement von σ und legt das gleichschenklige $\triangle PMQ$ mit dem Schenkel PM so an BC an, daß P auf B fällt, so erhält man folgende

3. Konstruktion. — (Tarry.) „Mit einem Radius $\varrho > \frac{BC}{2}$ beschreibe man (Fig. IV, 9) um einen beliebigen Punkt M der Ebene den Kreis $M(\varrho)$, der durch den Scheitel S von $\sphericalangle \sigma$ geht und die Schenkel desselben in P und Q schneidet $[C_1 + C_2]$. Mit Hilfe der Kreise $B(\varrho)$ und $C(\varrho)$ konstruiere man dann zu BC die Mittelsenkrechte $[2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_2]$. Der Kreis $B(\varrho)$ treffe BC in M'. Man beschreibe jetzt

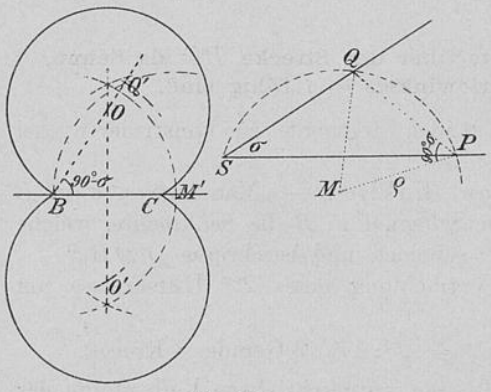

Fig. IV, 9.

$$M'(\varrho)\,[C_1 + C_2],$$

dann $B(PQ)$, der $M'(\varrho)$ in Q' trifft $[3C_1 + C_2]$, ziehe BQ', welche die Mittelsenkrechte in O trifft $[2R_1 + R_2]$, und beschreibe schließlich den Kreis $O(OB)\,[2C_1 + C_2]$. Dieser bestimmt das gesuchte Segment."

Beweis: $\sphericalangle Q'BM' = QPM = 90^0 - \sigma$.

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 9C_1 + 6C_2) = (21;\,13)\ (2 \text{ Gerade, } 6 \text{ Kreise}).$$

Die Reduktion des Symbols ist bei unserer Aufgabe, wie bei vielen anderen, nur sehr langsam von statten gegangen. Nachdem Herr Lemoine im Jahre 1892 eine Lösung mit dem Einfachheitsgrade 23 an-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gegeben hatte, war derselbe von Herrn Tarry 1893 durch die Konstruktion 2. auf 22 reduziert worden. Dies blieb 8 Jahre lang der Stand des Problems, bis es 1901 Herrn Tarry gelang, unter Anwendung des der Konstruktion I, § 12, d zugrunde liegenden Kunstgriffs den Grad 21 zu erreichen. Diese neue Konstruktion war aber kein Fortschritt in der Lösung der Aufgabe, die beiden Kreissegmente gleichzeitig zu finden, denn dabei führt die Konstruktion 2. auf $S = 24$, die Konstruktion 3. aber auf $S = 25$.

Eine beide Kreissegmente einfacher liefernde Konstruktion hat erst Herr Güntsche 1902 gegeben, indem er ein neues Lösungsprinzip einführte.

Da (Fig. IV, 9) $\triangle PQM \sim BCO$, so verhält sich $PQ : PM = BC : BO$, mithin ist BO als 4te Proportionale zu den Strecken PQ, PM, BC konstruierbar. Hierzu benutze man die partikuläre Konstruktion II, § 4, C, 2, welche hier anwendbar ist, weil M so gewählt werden kann, daß $2PQ > BC$.

4. Geometrographische Konstruktion. — (Güntsche.) „Um einen beliebigen, hinreichend entfernten Punkt M (Fig. IV, 10) beschreibe man den Kreis $M(MS)$, der die Schenkel von $\sphericalangle \sigma$ in P und Q schneidet $[C_1 + C_2]$. Dann beschreibe man die Kreise $Q(QP)$ und $P(a)$ $[(2C_1 + C_2) + (3C_1 + C_2)]$. R sei Schnittpunkt von $Q(QP)$ und $M(MS)$, T sei Schnittpunkt von $Q(QP)$ und $P(a)$. Man ziehe RT, welche $M(MS)$ in U trifft $[2R_1 + R_2]$. PU ist gleich dem Radius des gesuchten Segments. Man beschreibe nun die Kreise $B(PU)$ und $C(PU)$, die sich in O und O' treffen $[(3C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)]$, und schließlich die Kreise $O(PU)$ und $O'(PU)$ $[2C_1 + 2C_2]$. Diese enthalten die gesuchten Segmente.“

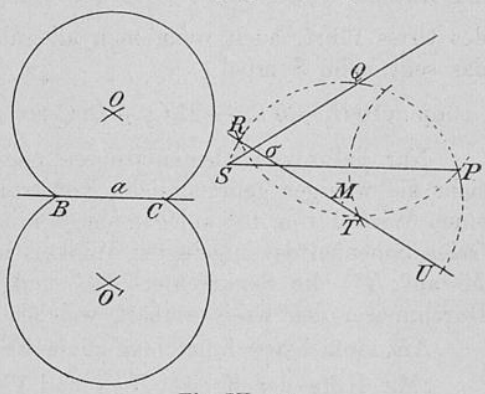

Fig. IV, 10.

Beweis: Die beiden sich in R und P schneidenden Kreise $M(PM)$ und $Q(PQ)$ werden von der Sekante RT nach II, § 4, C, 2 in U und T so geschnitten, daß $PU : PT = PM : PQ$. Daher sind die gleichschenkligen Dreiecke PUT ($\triangle PUQ \cong TUQ$, daher $PU = TU$) und PMQ ähnlich, mithin $\sphericalangle PUT = PMQ = 2\sigma$, also auch $\sphericalangle BOC = BO'C = 2\sigma$.

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 12C_1 + 7C_2) = (22; 14) \text{ (1 Gerade, 7 Kreise).}$$

Wird nur ein Segment verlangt, so reduziert sich das Symbol auf

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 11C_1 + 6C_2) = (20; 13) \text{ (1 Gerade, 6 Kreise).}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 9. Der geometrische Ort der Punkte, für welche die Summe der Quadrate ihrer Entfernungen von den Endpunkten der Strecke BC dem Quadrate über der gegebenen Strecke f gleich ist.

Ist X ein Punkt des gesuchten Ortes, so daß $\overline{XB}^2 + \overline{XC}^2 = f^2$, und ist M Mittelpunkt von $BC = a$, so hat man bekanntlich

$$\overline{XB}^2 + \overline{XC}^2 = f^2 = 2\left(\overline{XM}^2 + \frac{a^2}{4}\right), \quad \text{also}$$

$$XM = \sqrt{\frac{f^2}{2} - \frac{a^2}{4}}.$$

X liegt also auf dem Kreise um M mit dem Radius $\sqrt{\frac{f^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$. Gewöhnlich wird nun dieser Ausdruck für den Radius XM so konstruiert, daß man die mittlere Proportionale g zwischen f und $\frac{f}{2}$ und dann XM als zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse g und der Kathete $\frac{a}{2}$ bestimmt. Die auf diese Weise vorgehende Konstruktion des Ortes führt, auch wenn man alle überflüssigen Linien vermeidet, auf das sehr hohe Symbol

$$\text{op} : (10R_1 + 5R_2 + 22C_1 + 12C_2) = (49; 32) \text{ (5 Gerade, 12 Kreise).}$$

Nur halbsoviel Elementaroperationen verlangt bei ökonomischer Vorsicht die weniger gebräuchliche Konstruktion, bei der man an BC in B einen Winkel von 45^0 anlegt, um C mit f den Kreis beschreibt, der den freien Schenkel des angelegten Winkels in F und F' schneidet, von F und F' auf BC die Senkrechten FG und $F'G'$ fällt, und über GG' als Durchmesser den Kreis schlägt, welcher der gesuchte Ort ist.

Am einfachsten führt man diese Konstruktion folgendermaßen aus.

„Mit Hilfe der Kreise $B(f)$ und $C(f)$ beschreibe man über BC als Durchmesser den Kreis $[(3C_1 + C_2) + (C_1 + C_2) + (2R_1 + R_2)]$. O sei sein Mittelpunkt, P und Q seine Schnittpunkte mit der Mittelsenkrechten von BC. Man ziehe BP und BQ, welche $C(f)$ in F und F', bzw. in H und H' schneiden (F und H auf derselben Seite von BC) $[4R_1 + 2R_2]$."

F und H' liegen symmetrisch zu BC, ebenso H und F'. Ferner liegen die zu BC senkrechten Verbindungslinien FH' und HF' symmetrisch zu O; daher genügt eine derselben, um auf BC den Radius des gesuchten Kreises festzulegen.

„Man ziehe FH', welche BC in G trifft $[2R_1 + R_2]$, und beschreibe $O(OG)$ $[2C_1 + C_2]$."

$$\text{op} : (8R_1 + 4R_2 + 8C_1 + 4C_2) = (24; 16) \text{ (4 Gerade, 4 Kreise)}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Geometrographische Konstruktion. — „Man ziehe (Fig. IV, 11) die Mittelsenkrechte der Strecke

$$PQ = f[2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_2]$$

und schlage über PQ als Durchmesser den Kreis, der die Mittelsenkrechte in R trifft $[2C_1 + C_2]$. Dann schlage man die Kreise $B(PR)$ und $C(PR)[4C_1 + 2C_2]$. Treffen sich diese in X und X', so ziehe man $XX'[2R_1 + R_2]$, welche auf BC den Mittelpunkt M bestimmt. Schließlich schlage man den Kreis $M(MX)[2C_1 + C_2]$. Dies ist der gsuchte Ort."

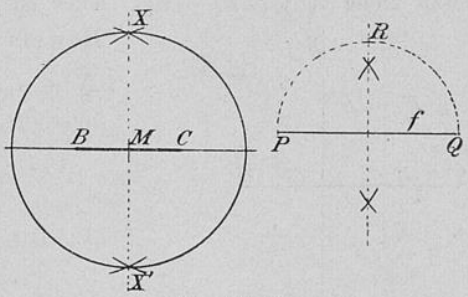

Fig. IV, 11.

Beweis: $BX = CX = PR = \sqrt{\frac{f^2}{2}}$, also $MX = \sqrt{\frac{f^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$.

op : $(4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 6C_2) = (22; 14)$ (2 Gerade, 6 Kreise).

§ 10. Der geometrische Ort der Punkte, für welche die Differenz der Quadrate ihrer Entfernungen von den Endpunkten der Strecke BC dem Quadrate über der gegebenen Strecke f gleich ist.

1. Geometrographische Konstruktion. — „Man beschreibe (Fig. IV, 12) $B(f)$, der BC in D und D' schneidet $[3C_1 + C_2]$. Mit einem hinreichend großen Radius λ beschreibe man dann $D(\lambda)$ und $D'(\lambda)$, die sich in E schneiden, und $B(\lambda)$ $[3C_1 + 3C_2]$, nehme, während die Spitze in B bleibt, BE in den Zirkel, und beschreibe $C(BE)$, der $B(\lambda)$ in A und A' trifft $[2C_1 + C_2]$. Man ziehe $AA'[2R_1 + R_2]$. Dies ist der gesuchte Ort."

Beweis: Es ist

$$\overline{BA}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 = f^2$$

op : $(2R_1 + R_2 + 8C_1 + 5C_2) = (16; 10)$

(1 Gerade, 5 Kreise).

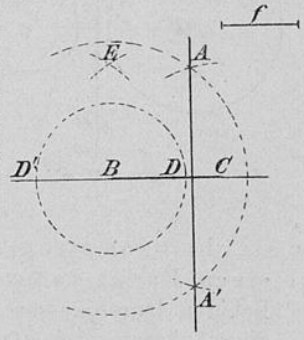

Fig. IV, 12.

2. Geometrographische Konstruktion. — „Man beschreibe (Fig. IV, 13) durch C einen hinreichend großen Kreis k, so daß sein Durchmesser CC' auf BC liegt $[2C_1 + C_2]$. Dann beschreibe man $C'(f)$, der k in K schneidet $[3C_1 + C_2]$, nehme, während die Spitze in C' bleibt, $C'C$ in den Zirkel und beschreibe $B(C'C)$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$[2C_1 + C_2]$, hierauf $C(CK)$, der $B(C'C)$ in X und X' trifft $[2C_1 + C_2]$. Man ziehe $XX'[2R_1 + R_2]$. Dies ist der gesuchte Ort."

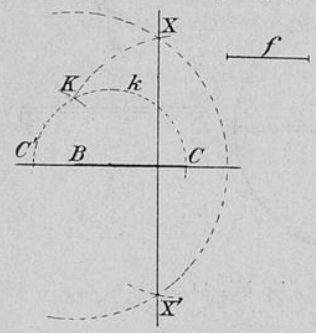

Fig. IV, 13.

Beweis: Es ist

$$\overline{BX}^2 - \overline{CX}^2 = \overline{C'C}^2 - \overline{CK}^2 = \overline{C'K}^2 = f^2.$$

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 9C_1 + 4C_2) = (16; 11)$$

(1 Gerade, 4 Kreise).

§ 11. Die Potenzachse zweier Kreise $O(r)$ und $O'(r')$.*)

Die gewöhnliche Konstruktion sucht einen Punkt P der Potenzachse vermittelst eines beliebigen, O und O' schneidenden Kreises und fällt von P auf die Zentrale OO' die Senkrechte. Legt man die letztere durch den bezüglich OO' zu P symmetrischen Punkt P' fest, so braucht OO' nicht gezogen zu werden, und man gelangt zu dem Symbole

$$\text{op} : (6R_1 + 3R_2 + 4C_1 + 3C_2) = (16; 10) \text{ (3 Gerade, 3 Kreise).}$$

a) Geometrographische Konstruktion. — „Mit r' als Radius beschreibe man (Fig. IV, 14) einen Kreis, der $O(r)$ in S und S' schneidet $[2C_1 + C_2]$. Sein Zentrum heiße Ω. Mit einem hinreichend großen Radius λ beschreibe man dann die Kreise $\Omega(\lambda)[C_2]$ und $O'(\lambda)[C_1 + C_2]$, ziehe SS', welche $\Omega(\lambda)$ in Q trifft $[2R_1 + R_2]$, beschreibe $O(OQ)$, der $O'(\lambda)$ in P und P' trifft $[2C_1 + C_2]$, und ziehe $PP'[2R_1 + R_2]$. Dies ist die gesuchte Potenzachse."

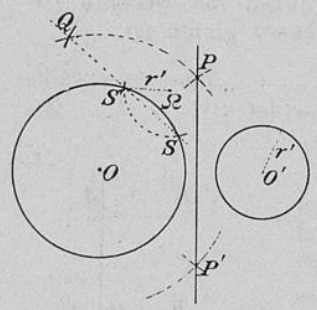

Fig. IV, 14.

Beweis:

$$\overline{OP}^2 - \overline{O'P}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{\Omega Q}^2 = \overline{OS}^2 - \overline{\Omega S}^2 = r^2 - r'^2.$$

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_2) = (15; 9)$$

(2 Gerade, 4 Kreise).

b) Geometrographische Konstruktion, wenn O' sich auf einen Punkt reduziert. — „Man ziehe in O (Fig. IV, 15) einen beliebigen Durchmesser $DD'[R_1 + R_2]$. Mit einem hinreichend großen Radius λ beschreibe man dann die Kreise $D(\lambda)$ und $D'(\lambda)$, welche sich in E schneiden, und $O(\lambda)[3C_1 + 3C_2]$. Während die Spitze in O bleibt, nehme man dann OE in den Zirkel und beschreibe $O'(OE)$, der $O(\lambda)$

*) Wie mir die Redaktion des Archivs für M. u. Ph. mitteilt, sind für die Aufgaben 11 a und b auch von Herrn Güntsche, etwas früher, dieselben Lösungen gefunden worden.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

in P und P' trifft $[2C_1 + C_2]$, und ziehe PP' $[2R_1 + R_2]$. Dies ist die gesuchte Potenzachse, denn es ist

$$\overline{OP}^2 - \overline{O'P}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{OE}^2 = OD^2.\text{“}$$

$$\text{op} : (3R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_2) = (14; 8)$$

(2 Gerade, 4 Kreise).

Berühren sich O und O', so reduziert sich das Symbol auf das der gemeinschaftlichen Tangente im Berührungspunkt

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_2)^{*});$$

schneiden sie sich, so auf op : $(2R_1 + R_2)$.

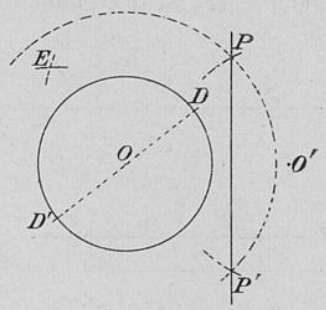

Fig. IV, 15.

§ 12. Der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von zwei Geraden g und g' das Verhältnis $m : n$ haben.

a) Die Geraden g und g' schneiden sich in O.

Geometrographische Konstruktion. — „Man trage (Fig. IV, 16) auf g' die Strecke $OA = m$, auf g die Strecken $OB = n$ und $OC =$ ab $[6C_1 + 2C_2]$. Dann beschreibe man $A(n)$ $[C_1 + C_2]$, nehme, während die Spitze in A bleibt, $AO = m$ wieder in den Zirkel $[C_1]$ und beschreibe $B(m)$ und $C(m)$, welche $A(n)$ in B' bzw. C' treffen (B' mit B auf derselben Seite von g', ebenso C' mit C) $[2C_1 + 2C_2]$. Man ziehe OB' und

$$OC' [4R_1 + 2R_2].$$

Diese bilden den gesuchten Ort.“

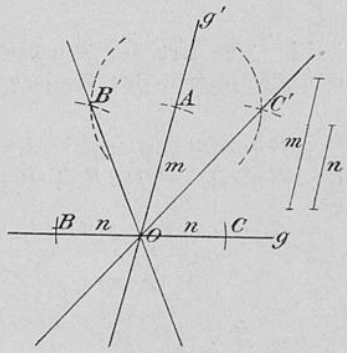

Fig. IV, 16.

Beweis: Im Parallelogramm verhalten sich die Höhen umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 5C_2) = (21; 14) \text{ (2 Gerade, 5 Kreise).}$$

b) Die Geraden g und g' sind parallel.

Geometrographische Konstruktion. — „Man trage (Fig. IV, 17) auf g die Strecken $AB = m$ und $AC = m$ ab $[3C_1 + C_2]$ und verbinde einen beliebigen Punkt A' von g' mit B und C $[3R_1 + 2R_2]$. Dann trage man auf g' die Strecken $A'B' = n$ und $A'C' = n$ ab $[3C_1 + C_2]$ und ziehe AB' und AC' $[4R_1 + 2R_2]$. Sei D Schnittpunkt von AB' und

*) Symbol d. Bernèsschen Konstr. d. Tang. am Kreise O im Punkte A: „Um einen belieb. Punkt B von O beschr. man einen Kreis k, der O in A und C trifft, u. beschr. $A(AC)$. Dieser bestimmt auf k einen 2ten Punkt d. gesuchten Tang.“

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

BA', E Schnittpunkt von AC' und CA', F Schnittpunkt von AB' und CA', G Schnittpunkt von BA' und AC'. Man ziehe DE und $FG\,[4R_1 + 2R_2]$. Diese bilden den gesuchten Ort."

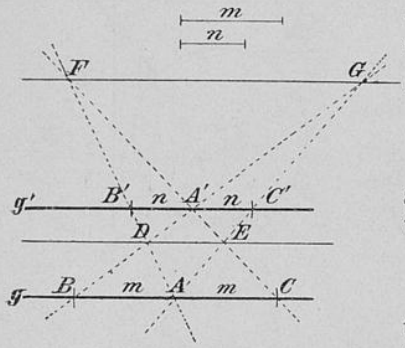

Fig. IV, 17.

op : $(11R_1 + 6R_2 + 6C_1 + 2C_2) = (25; 17)$ (6 Gerade, 2 Kreise).

§ 13. Der zu der Strecke BC und dem Verhältnis $m : n$ gehörende Apollonische Kreis.

Geometrographische Konstruktion. — „Man teile BC (nach II, § 2, 2) im Verhältnis

$$m : n\,[4R_1 + 2R_2 + 9C_1 + 5C_2]$$

und beschreibe über der Entfernung der Teilpunkte als Durchmesser den Kreis $[2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_2]$.

op : $(6R_1 + 3R_2 + 13C_1 + 8C_2) = (30; 19)$ (3 Gerade, 8 Kreise).

§ 14. Der Ort der Punkte, in welchen die vom Punkte P aus nach der Peripherie des Kreises O gezogenen Strecken im Verhältnis $m : n$ geteilt werden.

Geometrographische Konstruktion. — „Man ziehe (Fig. IV, 18) die Zentrale $PO\,[2R_1 + R_2]$. Um diese im Verhältnis $m : n$ zu teilen, ziehe man durch P eine beliebige Gerade $[R_1 + R_2]$, mache auf derselben $PX = m$ und $XY = n$ (Y in der Verlängerung von PX) $[6C_1 + 2C_2]$, beschreibe $O(n)\,[C_1 + C_2]$, nehme, während die Spitze in O bleibt, OY in den Zirkel $[C_1]$ und beschreibe $X(OY)$, der $O(n)$ in Z trifft (Z mit X auf derselben Seite von OY) $[C_1 + C_2]$, und ziehe $ZX\,[2R_1 + R_2]$.

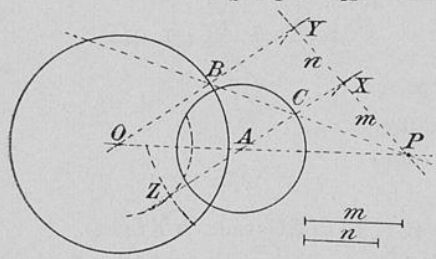

Fig. IV, 18.

Dann ist $ZX \parallel OY$ und teilt die Zentrale in A so, daß $PA : OA = m : n$. Nun ziehe man OY, welche den gegebenen Kreis in B schneidet $[2R_1 + R_2]$, und ziehe PB, welche ZX in C trifft $[2R_1 + R_2]$. Schließlich beschreibe man $A(AC)\,[2C_1 + C_2]$. Dieser Kreis ist der gesuchte Ort."

Beweis: P ist äußerer Ähnlichkeitspunkt der Kreise O und $A(AC)$.

op : $(9R_1 + 5R_2 + 11C_1 + 5C_2) = (30; 20)$ (5 Gerade, 5 Kreise).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf