III. Abschnitt.

Vervielfachung und Teilung des Quadrats.

§ 1. Ein Quadrat x^2 zu konstruieren, welches das n-fache ($n = 2, 3, 4 \ldots$ bis 32) eines gegebenen Quadrats $ABCD$ mit der Seite a ist.

Will man, wie üblich, die gesuchte Quadratseite $x = \sqrt{na^2}$ als mittlere Proportionale zu a und na konstruieren, so verfährt man z. B. für $n = 19$ ökonomisch folgendermaßen.

„Man trage auf BC hintereinander die Strecken $CP = a$, $PQ = 2a$, $QR = 4a$, $RS = 8a$, $ST = 3a$ ab $[11C_1 + 5C_2]$. Dann ist $BT = 19a$. Hierauf beschreibe man über BT als Durchmesser den Kreis, der CD in U schneidet $[2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_2]$. Dann ist CU die gesuchte Quadratseite $\sqrt{19a^2}$, erhalten durch

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 15C_1 + 8C_2) = (26;\ 17)\ (1 \text{ Gerade, } 8 \text{ Kreise}).\text{“}$$

Bei der Fertigstellung des Quadrats kommen dann noch 2 Gerade und drei Kreise hinzu.

Sehr viel einfacher führt die Anwendung des Hauptsatzes des Pythagoras zum Ziele, wobei zur Festlegung der Quadratseite z. B. für $n = 19$ schon 2 Kreise genügen, und für kein $n \leqq 32$ mehr als 3 Kreise, für kein $n \leqq 128$ mehr als 4 Kreise erforderlich sind.

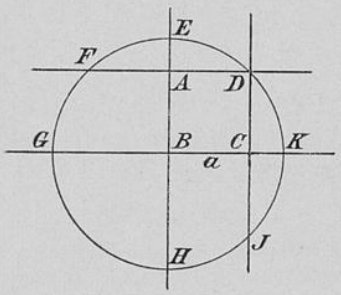

Fig. III, 1.

a) Wir setzen $a = 1$ und beschreiben (Fig. III, 1) um B mit $BD = \sqrt{2}$ den Kreis. Die Schnittpunkte desselben mit den Seiten des gegebenen Quadrats seien der Reihe nach D, E, F, G, H, J, K. Dann ist

$$CA = \sqrt{2}, \qquad CF = \sqrt{5},$$
$$CE = \sqrt{3}, \qquad KG = \sqrt{8}.$$
$$DF = \sqrt{4},$$

Beschreibt man ferner (Fig. III, 2) um A mit $DF = 2$ den Kreis, der den Kreis um B zwischen G und H in $\varkappa$, zwischen J und K in λ

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schneidet und auf den Seiten des Quadrats der Reihe nach die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta$ festlegt (α in der Verlängerung von BA, die Aufeinanderfolge von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und von $D, E, F, \ldots$ in demselben Drehungssinn), so hat man weiter

$$\alpha B = \sqrt{9}, \qquad \beta J = \sqrt{13},$$
$$\alpha C = \sqrt{10}, \qquad \alpha\lambda = \sqrt{14},$$
$$\alpha K = \sqrt{11}, \qquad \alpha\delta = \sqrt{16},$$
$$\alpha\zeta = \sqrt{12}, \qquad \alpha J = \sqrt{17}.$$

Nimmt man (Fig. III, 3) anstatt des Kreises um A mit dem Radius 2 den Kreis um E mit dem Radius $KG = 2\sqrt{2}$, der BA in ω (A zwischen B und ω), BC in χ (C zwischen B und χ), CD in φ und ψ (D zwischen C und φ) trifft, so ist ferner

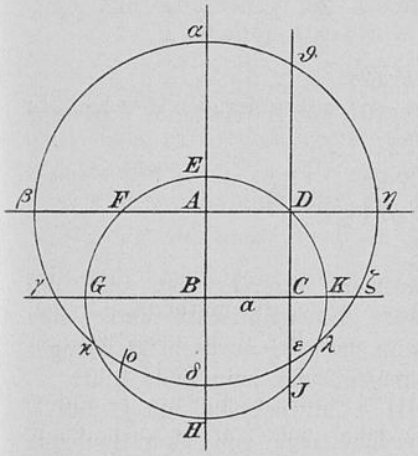

Fig. III, 2.

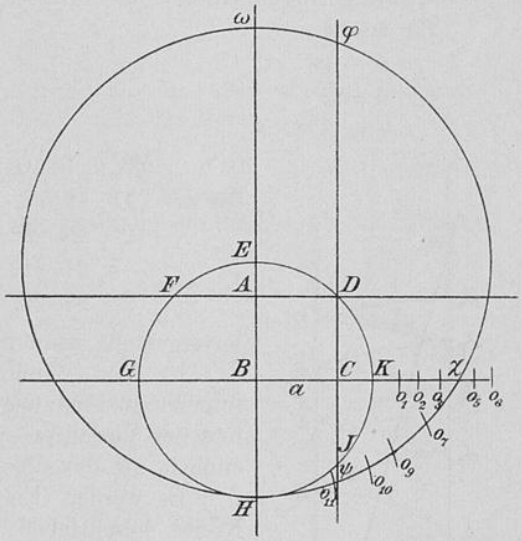

Fig. III, 3.

$$B\chi = \sqrt{6}, \qquad \omega K = \sqrt{20},$$
$$A\chi = \sqrt{7}, \qquad \omega\chi = \sqrt{24},$$
$$\omega B = \sqrt{18}, \qquad \varphi\psi = \sqrt{28},$$
$$\omega C = \sqrt{19}, \qquad \omega H = \sqrt{32}.$$

Die 10 für $n < 32$ noch fehlenden Quadratseiten erfordern nachweislich einen dritten Kreis.

Macht man in Fig. III, 2 die Sehne $\delta o = \delta J = 1$, so ist $\alpha o = \sqrt{15}$. Trägt man in Fig. III, 3 auf BC die Strecken $Bo_1 = EC = \sqrt{3}$, $Bo_2 = FD = \sqrt{4}$, $Bo_3 = FC = \sqrt{5}$, $Bo_5 = A\chi = \sqrt{7}$, $Bo_6 = GK = \sqrt{8}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ab, und macht man die Sehnen $Ho_7 = \sqrt{5}$, $Ho_9 = \sqrt{3}$, $Ho_{10} = \sqrt{2}$, $Ho_{11} = 1$, so bekommt man noch

$$\begin{array}{ll} \omega o_1 = \sqrt{21}, & \omega o_7 = \sqrt{27}, \\ \omega o_2 = \sqrt{22}, & \omega o_9 = \sqrt{29}, \\ \omega o_3 = \sqrt{23}, & \omega o_{10} = \sqrt{30}, \\ \omega o_5 = \sqrt{25}, & \omega o_{11} = \sqrt{31}. \\ \omega o_6 = \sqrt{26}, & \end{array}$$

Auf dieselbe Weise läßt sich die Quadratseite x für jedes $n \leqq 128$ durch 3 bzw. 4 Kreise finden.

Sorgt man dafür, daß die Diagonalen bzw. zwei Seiten des gesuchten Quadrats auf zwei Seiten des gegebenen zu liegen kommen, so kann dasselbe mit geringen Einfachheitsunterschieden

für $n = 4$	mit 3 Geraden	u. 1	Kreise,	
„ $n = 16$	„ 4	„	„ 2	Kreisen
„ $n = 2$	„ 2	„	„ 3	„
„ $n = 3, 5, 8$	„ 2	„	„ 4	„

$$\text{für } n = \left\{\begin{array}{l} 6, 7, 9, 10, 11, 12 \\ 13, 14\ 17, 18, 19 \\ 20, 24, 28, 32 \end{array}\right\} \text{ mit 2 Geraden u. 5 Kreisen}$$

$$\text{„ } n = \left\{\begin{array}{l} 15, 21, 22, 23, 25 \\ 26, 27, 29, 30, 31 \end{array}\right\} \text{ „ 2 „ „ 6 „}$$

fertiggestellt werden.

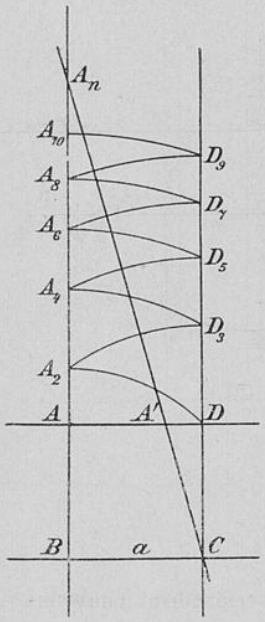

Fig. III, 4.

b) Von ökonomischem Interesse ist auch das folgende in Holzmüller, „Elementarmathematik“ sich findende Verfahren, wenn dasselbe auch meist weniger einfach, als das oben angegebene, zum Ziele führt.

Es werden (Fig. III, 4) abwechselnd um B und C Kreise beschrieben, welche eine von D auslaufende Zickzacklinie ergeben, deren Spitzen auf den Geraden BA und CD liegen. Sind $A_2 A_4 A_6 \ldots$ die auf BA liegenden, $D_3 D_5 D_7 \ldots$ die auf CD liegenden Spitzen dieser Linie, so ist

$$\begin{array}{ll} BA_2 = \sqrt{2} & CD_3 = \sqrt{3} \\ BA_4 = \sqrt{4} & CD_5 = \sqrt{5} \\ BA_6 = \sqrt{6} & CD_7 = \sqrt{7} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \text{usw.} & \text{usw.} \end{array}$$

Der Weg kann oft abgekürzt werden, indem man auf der Geraden BA von B aus zunächst das p-fache der Strecke BA abträgt, wenn p

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die der Zahl n zunächst liegende Quadratzahl ist, und dann, mit dem Kreis $C(p \cdot a)$ oder $B(p \cdot a)$ beginnend, in der Konstruktion der Zickzacklinie vorwärts, bzw. rückwärts fortschreitet, bis der Punkt A_n bzw. D_n erreicht ist.

Auf diese Weise kann man die Quadratseite $\sqrt{na^2}$

für	$n = 2, 3, 4, 5$	durch	1 Kreis,
„	$n = 6, 9, 10, 16, 17$ . . .	„	2 Kreise,
„	$n = 7, 8, 11, 15, 18, 25, 26$	„	3 „
„	$n = 12, 14, 19, 24, 27$ . .	„	4 „
„	$n = 13, 20, 23, 28$ . . .	„	5 „
„	$n = 21, 22, 29$	„	6 „
„	$n = 30, 32$	„	7 „
„	$n = 31$	„	8 „

erhalten.

§ 2. Ein Quadrat y^2 zu konstruieren, welches der n^{te} Teil eines gegebenen Quadrats $ABCD$ mit der Seite a ist.

Die Konstruktion der Quadratseite $y = \sqrt{\frac{1}{n} a^2}$ als der mittleren Proportionalen zwischen a und $\frac{1}{n} a$ ist noch umständlicher als die übliche Konstruktion von $x = \sqrt{na^2}$.

Am besten führt man die Aufgabe 2. auf 1. zurück.

„Man bestimme nach 1. die Strecke $\sqrt{na^2}$. Dann schneide man (Fig. III, 4) auf BA die Strecke $BA_n = \sqrt{na^2}$ ab und ziehe CA_n, welche AD in A' trifft. Dann ist $A'D$ die gesuchte Quadratseite $\sqrt{\frac{1}{n} a^2}$."

Denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BCA_n und $DA'C$ folgt

$$BA_n : BC = CD : A'D, \quad \text{d. h.}$$
$$\sqrt{na^2} : a \quad = a \quad : A'D, \quad \text{mithin}$$
$$A'D = \sqrt{\frac{1}{n} a^2}.$$

Zur Festlegung der Quadratseite $\sqrt{\frac{1}{n} a^2}$ genügen daher

für	$n = 2, 4$	1 Gerade	u.	1	Kreis,
„	$n = 3, 5, 6, 8, 9, 18$	1 Gerade	u.	2	Kreise,
„	$n = \begin{Bmatrix} 7, 10, 11, 12, 13, 14, 16 \\ 17, 19, 20, 24, 28, 32 \end{Bmatrix}$	1 „	„	3	„
„	$n = \begin{Bmatrix} 15, 21, 22, 23, 25 \\ 26, 27, 29, 30, 31 \end{Bmatrix}$ . .	1 „	„	4	„

Bei der Fertigstellung des Quadrats kommen dann für jedes n noch 2 Gerade und 3 Kreise hinzu.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf