II. Abschnitt.

Teilung der Strecke.

§ 1. Die Strecke $BC = a$ in n gleiche Teile zu teilen.

1. Klassische Konstruktion (Fig. II, 1). — „Man trägt auf einer beliebigen durch B gehenden Geraden von B aus n gleiche Strecken ϱ hintereinander ab, verbindet den letzten Endpunkt B_n mit C und zieht durch die übrigen die Parallelen zu B_nC.

Die Gerade BB_n, das Abtragen der n gleichen Strecken und die Verbindungslinie B_nC erfordern op : $[(R_1 + R_2) + n(C_1 + C_2) + (2R_1 + R_2)]$. Die Parallelen erhält man am einfachsten dadurch, daß man mit Hilfe der Kreise $B_1(\varrho)$, $B_2(\varrho) \ldots B_{n-1}(\varrho)$ in den Punkten $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ an BB_n Winkel $= \sphericalangle BB_nC$ anlegt. Zu diesem Zwecke beschreibt man noch den Kreis $B_n(\varrho)$, der B_nC in D_n trifft $[C_1 + C_2]$. Dann beschreibt man um

$$B, B_1, B_2, \ldots B_{n-2}$$

mit dem Radius $B_{n-1}D_n$ Kreise, welche die Kreise um $B_1, B_2, B_3, \ldots B_{n-1}$ auf der dem C zugewandten Seite von BB_n in $D_1, D_2, D_3, \ldots D_{n-1}$ schneiden

$$[2C_1 + (n-1)(C_1 + C_2)],$$

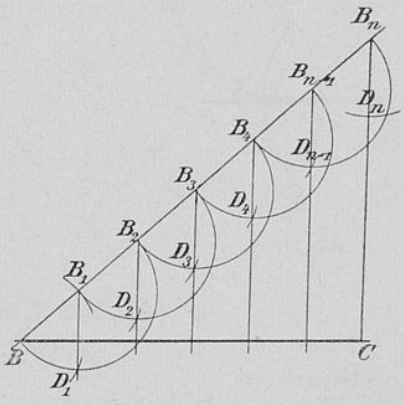

Fig. II, 1.

und zieht die Verbindungslinien

$$B_1D_1, B_2D_2, B_3D_3, \ldots B_{n-1}D_{n-1}[(n-1)(2R_1 + R_2)].$$

Als einfachstes Gesamtsymbol ergibt sich hiernach

$$\text{op} : [(2n+1)R_1 + (n+1)R_2 + 2(n+1)C_1 + 2nC_2]$$
$$= [7n+4;\ 4n+3][(n+1) \text{ Gerade, } 2n \text{ Kreise}].$$

Es wird also die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3-Teilung mit $S = 25$ (4 Gerade, 6 Kreise),
5 „ „ $S = 39$ (6 Gerade, 10 Kreise),
6 „ „ $S = 46$ (7 Gerade, 12 Kreise),
15 „ „ $S = 109$ (16 Gerade, 30 Kreise)

vollzogen.

Man sieht, daß das klassische Verfahren, die Teilung vermittelst des Zirkels und des Lineals vorzunehmen, bei einigermaßen beträchtlichem n sehr umständlich ist und geringe Wahrscheinlichkeit für die Genauigkeit der Zeichnung bietet.

2. Konstruktion (Fig. II, 2). — „Mit beliebigem Radius $\varrho > \frac{a}{2}$ beschreibe man die Kreise $B(\varrho)$ und $C(\varrho)$, welche sich in B_1 und B_1' schneiden $[2C_1 + 2C_2]$, und ziehe BB_1 $[2R_1 + R_2]$. Auf dieser Geraden trage man von B_1 aus die Strecke ϱ noch $(n-2)$ mal ab $[(n-2)(C_1+C_1)]$.*) Der letzte Endpunkt heiße B_{n-1}. Man ziehe $B_{n-1}B_1'$, welche BC in X trifft. Die Strecke CX ist der n^{te} Teil von BC, erhalten durch

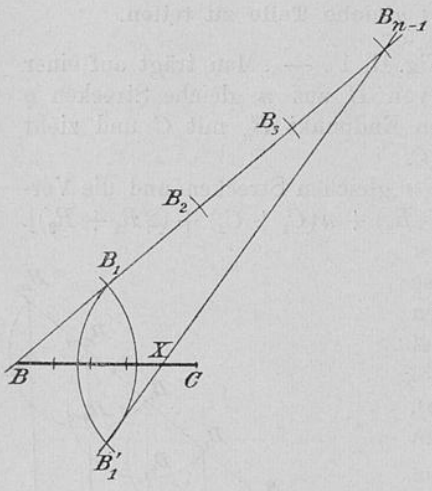

Fig. II, 2.

$$\text{op} : [4R_1 + 2R_2 + nC_1 + nC_2]$$
$$= (2n + 6;\ n + 4)\ (2 \text{ Gerade}, n \text{ Kreise}).$$

Um nun die Konstruktion zu vollenden, trage man die Strecke CX von X aus auf CB noch $(n-2)$ mal ab

$$[(2C_1 + C_2) + (n-3)(C_1 + C_2)],$$

so daß die n-Teilung durch

$$\text{op} : [4R_1 + 2R_2 + (2n-1)C_1 + 2(n-1)C_2]$$
$$= (4n + 3;\ 2n + 3)\ (2 \text{ Gerade}, 2(n-1) \text{ Kreise})$$

vollzogen ist."

Beweis: Da $CB_1' // BB_{n-1}$, ferner $CB_1' = \varrho$ und $BB_{n-1} = (n-1)\varrho$, so ist

*) Das Abtragen von Strecken wird in der Praxis vermittelst des Handzirkels bewerkstelligt. Die Operation: „Einsetzen einer Zirkelspitze auf eine Linie, während die andere Spitze schon eingesetzt ist und die Zirkelöffnung beibehalten wird" und die Operation C_1: „Einsetzen einer Zirkelspitze in einen Punkt, während die andere Spitze schon eingesetzt ist" können für die Beurteilung der Genauigkeit offenbar nicht als gleichwertig betrachtet werden. Der Gebrauch des Handzirkels würde also für diesen speziellen Fall die Einführung eines neuen Symbols nötig machen. Wir schließen denselben daher aus.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{CX}{BX} = \frac{\varrho}{(n-1)\varrho} = \frac{1}{n-1}, \quad \text{daher}$$

$$\frac{CX}{BC} = \frac{1}{n}, \quad \text{oder} \quad CX = \frac{1}{n} \cdot BC.$$

Diese Methode liefert die

3-Teilung mit $S = 15$ (2 Gerade, 4 Kreise),
5 „ „ $S = 23$ (2 Gerade, 8 Kreise),
6 „ „ $S = 27$ (2 Gerade, 10 Kreise),
15 „ „ $S = 63$ (2 Gerade, 28 Kreise).

Der Weg zur Bestimmung des Punktes B_{n-1} kann meist noch abgekürzt werden, indem man z. B. für $n = 9$ auf der Geraden BB_1 von B_1 aus hintereinander die Strecken ϱ, 2ϱ, 4ϱ abträgt, anstatt 7 mal die Strecke ϱ.

Die Strecke $CX = \frac{1}{3}a$ erhält man (Fig. II, 3) mit $S = 12$ (2 Gerade, 3 Kreise), die Strecke $CY = \frac{1}{5}a$ mit $S = 16$ (2 Gerade, 5 Kreise). Konstruiert man X und Y zugleich und halbiert $XY = \frac{2}{15}a$, so hat man gleichzeitig $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{5}a$, $\frac{1}{15}a$ mit $S = 26$ (4 Gerade, 7 Kreise).

Fügt man zur Konstruktion des Punktes X die Gerade B_1B_1' hinzu welche BC in O halbiert, so erhält man $OX = \frac{1}{6}a$ mit $S = 15$ (3 Gerade, 3 Kreise).

Noch seien die beiden folgenden einfachen Konstruktionen von $\frac{1}{4}a$ und $\sqrt{a}$ angemerkt.

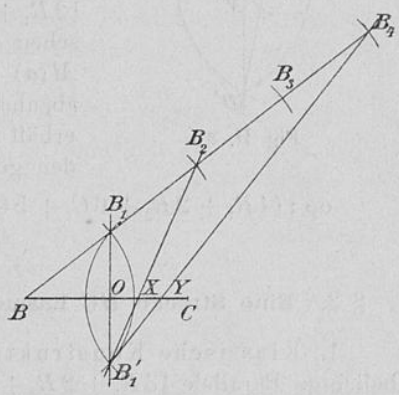

Fig II, 3.

3. Konstruktion der Strecke $\frac{1}{4}a$ (Fig. II, 3a). — „Man beschreibe $B(a)$ $[2C_1 + C_2]$, ferner $C(a)[C_1 + C_2]$, der BC noch in E schneidet, dann $E(2a)[2C_1 + C_2]$ der BC noch in F, und $B(a)$ in G und G' trifft, und ziehe $GG'[2R_1 + R_2]$, welche BC in H trifft. Dann ist $BH = \frac{1}{4}a$, denn BH ist die dritte Proportionale zu $BF = 4a$ und $BG = a$, also $BH = \frac{a^2}{4a} = \frac{1}{4}a$."

op : $(2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_2) = (11\,;\,7)$
(1 Gerade, 3 Kreise).

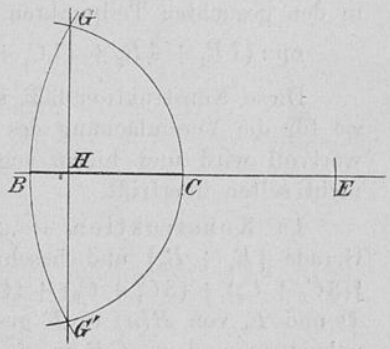

Fig. II, 3a.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die klassische Konstruktion durch Halbierung von BC und von $\frac{BC}{2}$ hat das Symbol

$$\text{op}: (4R_1 + 2R_2 + 3C_1 + 3C_2) = (12;\ 7) \text{ (2 Gerade, 3 Kreise).}$$

4. Konstruktion der Strecke $\frac{1}{3}a$ (Fig. II, 3b). — „Man beschreibe $B(a)$ und $C(a)\,[3C_1 + 2C_2]$, welche sich in D und D' schneiden, ferner $D(a)\,[C_1 + C_2]$, welcher $B(a)$ in M trifft, und $M(a)\,[C_1 + C_2]$, welcher $D(a)$ außer in B noch in B' trifft. Schließlich ziehe man die Gerade $B'D'\,[2R_1 + R_2]$. Diese schneidet von BC ein Drittel ab.“

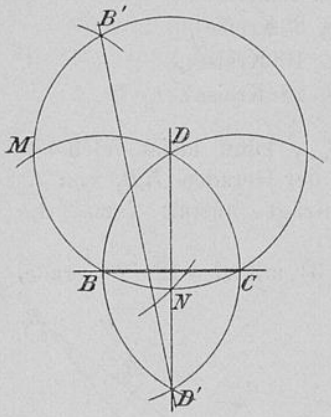

Fig. II, 3b.

$$\text{op}: (2R_1 + R_2 + 5C_1 + 4C_2) = (12;\ 7)$$
(1 Gerade, 4 Kreise).

Zieht man hierbei, nachdem $D(a)$ beschrieben ist, noch die Mittelsenkrechte DD' $[2R_1 + R_2]$, welche $D(a)$ in N trifft (N zwischen D und D'), und beschreibt, nachdem $M(a)$ beschrieben ist, ohne die Spitze von M abzuheben, noch den Kreis $M(MN)\,[C_1 + C_2]$, so erhält man (vgl. II § 8, 5) gleichzeitig $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ und den goldenen Abschnitt von BC durch

$$\text{op}: (4R_1 + 2R_2 + 6C_1 + 5C_2) = (17;\ 10) \text{ (2 Gerade, 5 Kreise).}$$

§ 2. Eine Strecke BC harmonisch im Verhältnis $m : n$ zu teilen.

1. Klassische Konstruktion. — „Man ziehe durch B und C zwei beliebige Parallele $[3R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 3C_2]$. Auf der einen trage man die Strecke $BD = m\,[3C_1 + C_2]$, auf der anderen $CE = n$ und $CF = n$ ab $[3C_1 + C_2]$ und ziehe DE und $DF\,[4R_1 + 2R_2]$. Diese treffen BC in den gesuchten Teilpunkten A und A'.“

$$\text{op}: (7R_1 + 4R_2 + 11C_1 + 5C_2) = (27;\ 18) \text{ (4 Gerade, 5 Kreise).}$$

Diese Konstruktion läßt sich in folgender Weise abändern, wodurch sie für die Vereinfachung des Symbols zusammengesetzter Aufgaben sehr wertvoll wird und hierin sogar die geometrographische Konstruktion 2. nicht selten übertrifft.

1a. Konstruktion. — „Man ziehe (Fig. II, 4) durch B eine beliebige Gerade $[R_1 + R_2]$ und beschreibe die Kreise $B(m)$, $B(n)$ und $C(n)$ $[(3C_1 + C_2) + (3C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)]$. Die Gerade werde von $B(m)$ in D und E, von $B(n)$ in F geschnitten. Während die Spitze in C bleibt, nehme man dann CB in den Zirkel $[C_1]$, beschreibe $F(CB)\,[C_1 + C_2]$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welcher $C(n)$ in G schneidet (F und G auf derselben Seite von BC), und ziehe DG und $EG\,[4R_1 + 2R_2]$. Diese treffen BC in den gesuchten Teilpunkten."

Beweis: $BFGC$ ein Parallelogramm.

op: $(5R_1 + 3R_2 + 9C_1 + 4C_2) = (21; 14)$ (3 Gerade, 4 Kreise).

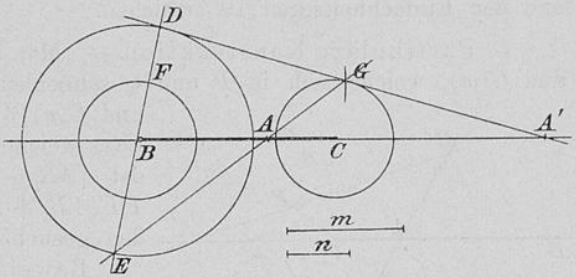

Fig. II, 4.

Ist nur einer der Teilpunkte gesucht, so fällt entweder DG oder EG fort, und man kommt mit

$$\text{op} : (3R_1 + 2R_2 + 9C_1 + 4C_2) \text{ aus.}$$

Die klassische Konstruktion führt zur geometrographischen, wenn man nicht beliebige durch B und C gehende Parallele, sondern solche benutzt, welche mit BC Winkel von 60^0 bilden. Dann braucht keine derselben wirklich gezogen zu werden.

2. Geometrographische Konstruktion. — (Lemoine.) „Man beschreibe (Fig. II, 5) $B(m)\,[3C_1 + C_2]$, der BC im Sinne BC in D schneidet. Dann beschreibe man $D(m)\,[C_1 + C_2]$, der $B(m)$ in E schneidet, dann $C(n)\,[3C_1 + C_2]$, der BC im Sinne BC in F und in G schneidet. Man ziehe ferner $F(n)$ und $G(n)\,[2C_1 + 2C_2]$; der erstere möge $C(n)$ in H, der letztere in J schneiden (H und E auf derselben, H und J auf entgegengesetzter Seite von BC). Schließlich ziehe man

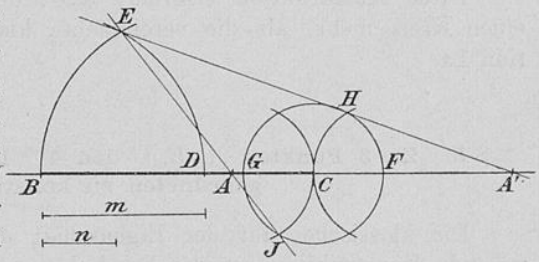

Fig. II, 5.

EH und $EJ\,[4R_1 + 2R_2]$.

Diese treffen BC in den gesuchten Teilpunkten A und A'."

Beweis: $\sphericalangle EBD = HCF = GCJ = 60^0$, daher JH Durchmesser in $C(n)$ und $BE // JH$.

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 9C_1 + 5C_2) = (20; 13) \text{ (2 Gerade, 5 Kreise).}$$

Ist nur einer der Teilpunkte verlangt, so fallen entweder $F(n)$ und EH oder $G(n)$ und EJ fort, und es genügt

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 8C_1 + 4C_2) = (15; 10) \text{ (1 Gerade, 4 Kreise).}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist eine der gegebenen Strecken, etwa $m > \frac{BC}{2}$, so kann man, um die Parallelen durch B und C festzulegen, die Konstruktion I, § 5, 2 benutzen und den Einfachheitsgrad 19 erreichen.

3. Partikuläre Konstruktion. — „Man beschreibe (Fig. II, 6) $B(m)$ und $C(m)$, welche sich in P und Q schneiden $[(3C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)]$, und $C(n)[3C_1 + C_2]$. Dann ziehe man CQ, welche $C(n)$ in E und F schneidet $[2R_1 + R_2]$, und ziehe PE und $PF[4R_1 + 2R_2]$. Diese treffen BC in den gesuchten Punkten."

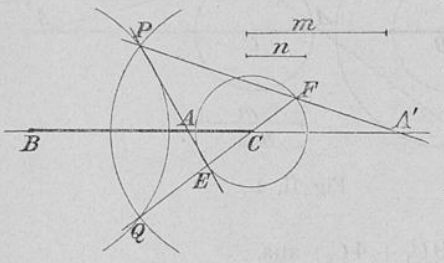

Fig. II, 6

Beweis: BP und QC sind parallel.

$$\text{op} : (6R_1 + 3R_2 + 7C_1 + 3C_2)$$
$$= (19;\ 13)\ (3 \text{ Gerade, } 3 \text{ Kreise}).$$

Anmerkung. Führt man für $m + n > a$ die Teilung nach dem Satze aus: „Die Halbierungslinien eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseiten im Verhältnis der Anseiten", so kommt man, ökonomisch vorgehend, auf das Symbol

$$\text{op} : (6R_1 + 3R_2 + 9C_1 + 5C_2) = (23;\ 12)\ (3 \text{ Gerade, } 5 \text{ Kreise}).$$

Diese Konstruktion erfordert also, obwohl sie nur partikulär ist, einen Kreis mehr, als die vereinfachte klassische, allgemeine Konstruktion 1a.

§ 3. Zu 3 Punkten A, B, C den 4ten harmonischen, dem A zugeordneten zu konstruieren.

Die klassische, auf der Eigenschaft des vollständigen Vierseits beruhende Konstruktion hat das Symbol

$$\text{op} : (9R_1 + 6R_2) = (15;\ 9)\ (6 \text{ Gerade}).$$

1. Geometrographische Konstruktion. — (Nach 2. der vorigen Aufgabe.) „Man beschreibe (Fig. II, 7 u. Fig. II, 8) $B(BA)$ und $A(BA)$ $[(2C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)]$, welche sich in E schneiden, dann $C(CA)$ $[2C_1 + C_2]$, der BC noch in F (Fig. II, 7) oder in G (Fig. II, 8) trifft, je nachdem A innerhalb oder außerhalb BC liegt. Im ersteren Falle beschreibe man dann $F(CA)$, der $C(CA)$ in H trifft (E und H auf derselben Seite von BC), im letzteren beschreibe man $G(CA)$, der $C(CA)$ in J trifft (E und J auf entgegengesetzter Seite von BC) $[C_1 + C_2]$. Dann

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ziehe man EH bzw. $EJ[2R_1 + R_2]$. BC wird von EH bzw. EJ in dem gesuchten Punkte getroffen."

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 6C_1 + 4C_2) = (13;\ 8)\ (1\ \text{Gerade},\ 4\ \text{Kreise}).$$

2. Geometrographische Konstruktion. — (Nach 3. der vorigen Aufgabe.) — „Sei $BA > CA$. Man beschreibe (Fig. II, 9 u. Fig. II, 10) $B(BA)$ und $C(BA)\,[(2C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)]$,

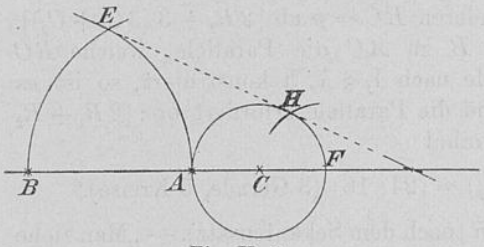

Fig. II, 7.

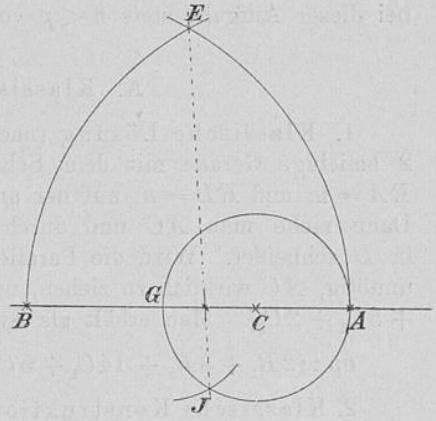

Fig. II, 8.

welche sich in P und Q schneiden, nehme, während die Spitze in C bleibt, CA in den Zirkel und beschreibe $C(CA)$ $[C_1 + C_2]$. Dann ziehe man $QC[2R_1 + R_2]$, welche von $C(CA)$ in E und F ge-

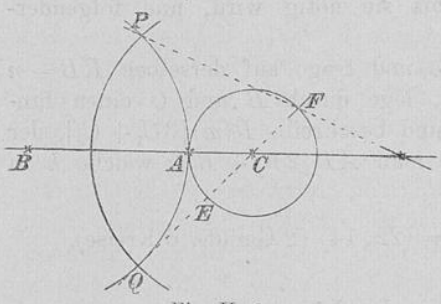

Fig. II, 9.

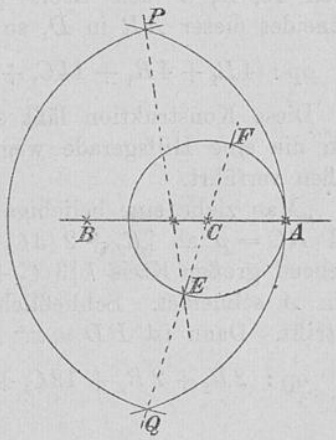

Fig. II, 10.

schnitten wird (P und F auf derselben Seite von BC), und ziehe PF (Fig. II, 9) oder PE (Fig. II, 10), je nachdem A innerhalb oder außerhalb BC liegt $[2R_1 + R_2]$. Dann wird BC von PF bzw. von PE in dem gesuchten Punkte getroffen."

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 3C_2) = (13;\ 8)\ (2\ \text{Gerade},\ 3\ \text{Kreise}).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 4. **Zu drei Strecken m, n, p die 4te Proportionale x zu konstruieren;** $m : n = p : x$.

Da n und p miteinander vertauscht werden können, so setzen wir bei dieser Aufgabe stets $n < p$ voraus.

A. Klassische Lösungen.

1. Klassische Lösung (nach dem Proportionalsatz). — „Man ziehe 2 beliebige Gerade mit dem Schnittpunkt R und trage auf der einen $RA = m$ und $RB = n$, auf der anderen $RC = p$ ab $[2R_2 + 3(3C_1 + C_2)]$. Dann ziehe man AC und durch B zu AC die Parallele, welche RC in D schneidet. Wird die Parallele nach I, § 7, 5 konstruiert, so ist es unnötig, AC wirklich zu ziehen, und die Parallele erfordert op : $[2R_1 + R_2 + 5C_1 + 2C_2]$. Man erhält als Symbol

op : $(2R_1 + 3R_2 + 14C_1 + 5C_2) = (24; 16)$ (3 Gerade, 5 Kreise).“

2. Klassische Konstruktion (nach dem Sekantensatz). — „Man ziehe 2 beliebige Gerade mit dem Schnittpunkt R, trage auf der einen $RA = m$, auf der anderen $RB = n$ und $RC = p$ ab $[2R_2 + 3(3C_1 + C_2)]$ und lege durch A, B, C den Kreis $[3(C_1 + C_2) + 2(2R_1 + R_2) + (2C_1 + C_2)]$. Schneidet dieser AR in D, so ist $RD = x$.

op : $(4R_1 + 4R_2 + 14C_1 + 7C_2) = (29; 18)$ (4 Gerade, 7 Kreise).“

Diese Konstruktion läßt sich nicht unerheblich vereinfachen, wenn man die eine Hilfsgerade wegläßt, bis sie nötig wird, und folgendermaßen verfährt.

„Man ziehe eine beliebige Gerade und trage auf derselben $RB = n$ und $RC = p$ ab $[R_2 + 2(3C_1 + C_2)]$, lege durch B und C einen hinreichend großen Kreis $k[3(C_1 + C_2)]$ und beschreibe $R(m)[3C_1 + C_2]$, der k in A schneidet. Schließlich ziehe man $AR[2R_1 + R_2]$, welche k in D trifft. Dann ist $RD = x$.“

op : $(2R_1 + 2R_2 + 12C_1 + 6C_2) = (22; 14)$ (2 Gerade, 6 Kreise).

B. Geometrographische Lösungen.

Die bis jetzt bekannten geometrographischen Lösungen haben die Einfachheit 21. Aber auch die klassische Lösung A, 2 läßt sich so umgestalten, daß sie mit $S = 21$ ausführbar ist, wenn die Strecke p wirklich gezeichnet vorliegt, also nicht nur durch ihre Endpunkte bestimmt ist.

1. Geometrographische Konstruktion (nach A, 2). — „Man beschreibe (Fig. II, 11) einen beliebigen, aber hinreichend großen Kreis $k[C_2]$ und um irgendeinen Punkt B von k den Kreis $B(n)[3C_1 + C_2]$. Dann

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

schneide man n von p ab $[C_1 + C_2]$, beschreibe $B(p-n)[3C_1 + C_2]$, der k in C schneidet, und ziehe $BC[2R_1 + R_2]$, welche $B(n)$ in R trifft (R außerhalb BC). Dann ist $RC = n + (p-n) = p$. Ferner beschreibe man $R(m)[3C_1 + C_2]$, der k in A schneidet, und ziehe schließlich $RA[2R_1 + R_2]$. Ist D der Schnittpunkt von RA und k, so ist $RD = x$."

op : $(4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 5C_2) = (21; 14)$ (2 Gerade, 5 Kreise).

2. Geometrographische Konstruktion.

Dieselbe beruht auf dem Satz:

„Ist in dem Umkreise des ΔABC (Fig. II, 12) die Sehne $AD \parallel BC$, so wird jede durch A gehende Gerade von BC (oder ihrer Verlängerung)

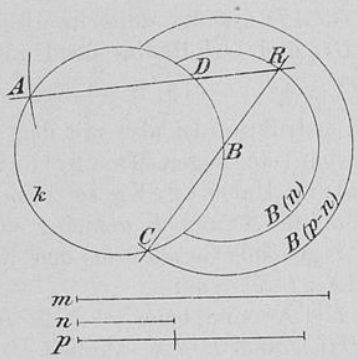

Fig. II, 11.

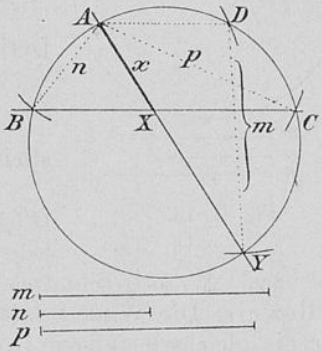

Fig. II, 12.

und dem Kreise in X bzw. Y so geschnitten, daß $AX \cdot DY = AB \cdot AC$ ist."

Beweis: Verbinde B mit D und Y. Dreieck $ABX \sim DYB$ und $DB = AC$.

(Tarry.) „Man beschreibe (Fig. II, 12) mit beliebigem Radius, der aber größer sein muß als die Hälfte der größten von den Strecken m, n, p, einen Kreis $[C_2]$, bestimme in demselben die Punkte A, B, C, D, Y so, daß Sehne $AB = n[3C_1 + C_2]$, Sehne $AC = p[3C_1 + C_2]$, Sehne $BD = p[C_1 + C_2]$, Sehne $DY = m[3C_1 + C_2]$ ist, und ziehe die Geraden BC und $AY[2(2R_1 + R_2)]$, welche sich in X schneiden. Dann ist $AX = x$."

op : $(4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 5C_2) = (21; 14)$ (2 Gerade, 5 Kreise).

C. Partikuläre Lösungen.

Ist in Fig. II, 12 $AX \perp BC$, so ist DY Durchmesser und der in B, 2 angeführte Satz läßt sich dann so aussprechen:

„In jedem Dreieck ist das Produkt aus 2 Seiten gleich dem Produkt aus der Höhe zur dritten Seite und dem Durchmesser des Umkreises,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder gleich dem Produkt aus der doppelten Höhe zur dritten Seite und dem Radius des Umkreises."

Aus diesem Satze ergibt sich das folgende, sehr einfache Verfahren, welches aber voraussetzt, daß $2m > p$.

1. Partikuläre Konstruktion (Fig. II, 13). — (Lemoine.) „Man beschreibe einen Kreis $O(m)\,[2C_1 + C_2]$. Um irgendeinen Punkt B von $O(m)$ beschreibe man $B(n)\,[3C_1 + C_2]$, der $O(m)$ in A schneidet, beschreibe ferner $A(p)\,[3C_1 + C_2]$, der $O(m)$ in C schneidet, und schließlich $C(p)\,[C_1 + C_2]$, der $B(n)$ in D trifft. Dann ist AD, welche nicht gezogen zu werden braucht, die gesuchte Strecke x."

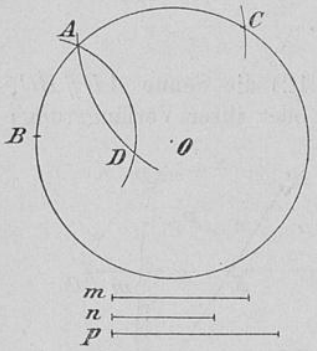

Fig. II, 13.

Beweis: AD ist die doppelte Höhe des Dreiecks ABC und OA Radius des Umkreises.

$$\text{op} : (9C_1 + 4C_2) = (13;\ 9)\ (4 \text{ Kreise}).$$

Diese Konstruktion ist also mit dem Zirkel allein ausführbar (eine sogen. Mascheronische).

Lehrsatz: „Haben 2 Kreise $O(m)$ und $O'(p)$ die Punkte A und B gemein, so wird jede durch A gehende Gerade von den Kreisen in X bzw. X' so geschnitten, dass $BX : BX' = m : p$."

Beweis: Die Winkel BOX und $BO'X'$ sind beide $= \sphericalangle\, 2 \cdot BAX'$ daher die gleichschenkligen Dreiecke BOX und $BO'X'$ ähnlich.

Dieser Satz liefert die folgende sehr einfache Konstruktion, welche $2m > n$ voraussetzt, also auch noch anwendbar ist, wenn $2m$ zwischen p und n liegt.

2. Partikuläre Konstruktion (Fig. II, 14). — (Güntsche.) „Um die beliebigen Punkte O und O' beschreibe man die Kreise $O(m)$ und

$$O'(p)\,[2\,(2C_1 + C_2)],$$

die sich in A und B schneiden. Dann beschreibe man $B(n)\,[3C_1 + C_2]$, der $O(m)$ in X schneidet, und ziehe $AX\,[2R_1 + R_2]$, welche $O'(p)$ in X' trifft. Dann ist $BX' = x$."

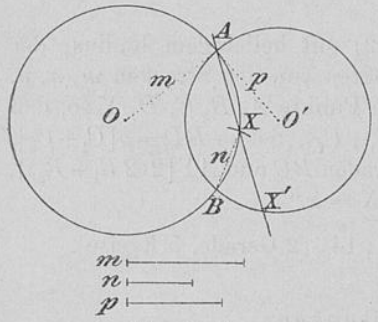

Fig. II, 14.

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 7C_1 + 3C_2) = (13;\ 9)$$

(1 Gerade, 3 Kreise).

Lehrsatz: „Rücken 2 Punkte auf 2 konzentrischen Kreisen derart fort, daß ihre gegenseitige Entfernung dieselbe bleibt, so verhalten sich die durchlaufenen Bogen wie die Radien."

Hierauf gründet sich folgende

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

3. Partikuläre Konstruktion (Fig. II, 15), die unter Umständen mit Vorteil zu verwenden ist, obwohl sie einen um 1 höheren Einfachheitskoeffizienten besitzt als 1. und 2.

(Mascheroni.) „Man beschreibe um den beliebigen Punkt O die Kreise $O(m)\,[2C_1 + C_2]$ und $O(p)\,[3C_1 + C_2]$, dann um den beliebigen Punkt A von $O(m)$ den Kreis $A(n)\,[3C_1 + C_2]$, der $O(m)$ in B schneidet, ferner um A und B mit beliebigem Radius $\varrho \begin{cases} > p - m \\ < p + m \end{cases}$ die Kreise $A(\varrho)$ und $B(\varrho)$ $[C_2 + (C_1 + C_2)]$, welche $O(p)$ in X bezw. Y treffen (X und Y durch die Durchmesser OA und OB getrennt). Dann ist XY die gesuchte Strecke."

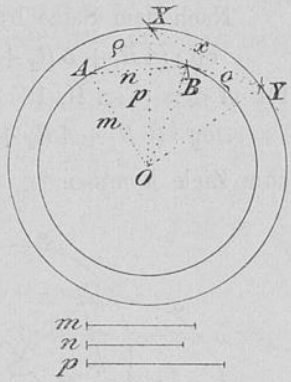

Fig. II, 15.

Beweis: Wegen $AX = BY = \varrho$ ist $\sphericalangle AOX = BOY$, daher $\sphericalangle AOB = XOY$, also $\triangle AOB \sim XOY$.

$$\text{op} : (9C_1 + 5C_2) = (14;\ 9)\ (5 \text{ Kreise}).$$

Diese Konstruktion setzt $2m > n$ voraus.

Ist der Abstand der beiden Kreise $O(m)$ und $O(p)$ kleiner als n, so kann man $\varrho = n$ nehmen und den 2ten Kreis um A sparen. Dies ist der Fall, wenn außer $2m > n$ noch die Bedingung $p + n > m > p - n$ erfüllt ist. Das Symbol reduziert sich dann auf

$$\text{op} : (9C_1 + 4C_2) = (13;\ 9)\ (4 \text{ Kreise}).$$

§ 5. Zu zwei Strecken m und n die 3te Proportionale x zu konstruieren; $m : n = n : x$.

Es ist herkömmlich, zur Lösung dieser Aufgabe entweder die Lösung A, 1 oder A, 2 der vorhergehenden Aufgabe für $p = n$ zu spezialisieren, oder einen der Sätze anzuwenden:

„Im rechtwinkligen Dreieck ist

a) die Höhe mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse,

b) jede Kathete mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte derselben."

Bei den Konstruktionen A, 1 und A, 2 kommt für $p = n$ der Kreis $R(p)$ in Wegfall, wodurch sich die Einfachheit derselben auf 24 bzw. 25, oder, wenn man die dort angegebenen Vereinfachungen anbringt, auf 20 bzw. 18 reduziert.

Die auf dem Satze a) beruhende Konstruktion, welche, nach der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gewöhnlichen Vorschrift ökonomisch ausgeführt, $S = 28$ ergibt, kann (nach Fig. II, 16) durch

$$\text{op} : (8R_1 + 5R_2 + 7C_1 + 3C_2) = (23; 15) \text{ (5 Gerade, 3 Kreise)}$$

ausgeführt werden.

Nach dem Satze b) kann man für $m > n$ (Fig. II, 17) durch

$$\text{op} : (4R_1 + 3R_2 + 9C_1 + 4C_2) = (20; 13) \text{ (3 Gerade, 4 Kreise)},$$

für $m < n$ (Fig. II, 18) durch

$$\text{op} : (6R_1 + 4R_2 + 7C_1 + 3C_2) = (20; 13) \text{ (4 Gerade, 3 Kreise)}$$

zum Ziele kommen.*)

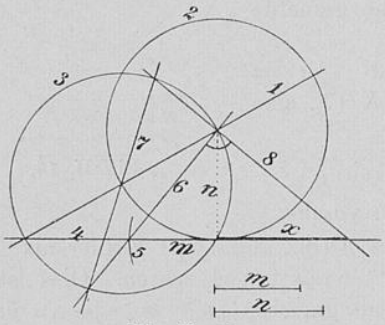

Fig. II, 16.

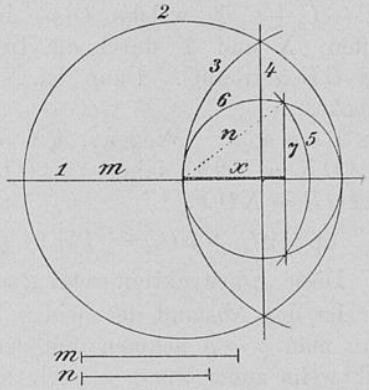

Fig. II, 17.

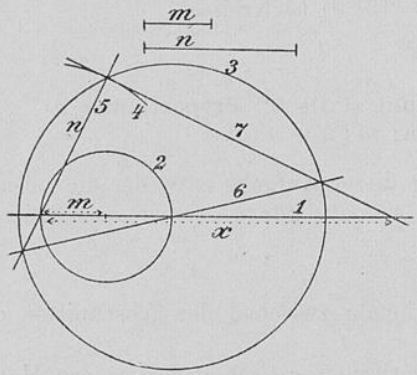

Fig. II, 18.

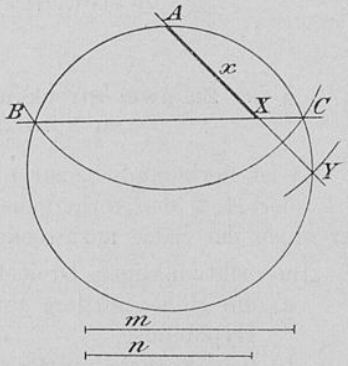

Fig. II, 19.

1. Geometrographische Konstruktion. — Man erhält dieselbe, indem man die geometrographische Konstruktion 2. der 4ten Proportionalen

*) In den Figuren II, 16, II, 17, II, 18 sind die Hilfslinien nach der Reihe, in welcher man sie zu ziehen hat, um die angegebenen Symbole zu erhalten, mit Ziffern versehen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

für $p = n$ ausführt. Der der letzteren zugrunde liegende Satz läßt sich für $AB = AC$ so aussprechen:

c) „Jede durch die Spitze A des gleichschenkligen Dreiecks ABC gehende Gerade wird von der Basis BC und dem Umkreis in X bzw. Y so geschnitten, daß $AX \cdot AY = \overline{AB}^2$ ist“,

und die Konstruktion der 3ten Proportionalen gestaltet sich hiernach folgendermaßen:

(Tarry.) „Man beschreibe (Fig. II, 19) mit beliebigem Radius, der aber größer sein muß als die Hälfte der größten von den Strecken m und n, einen Kreis $[C_2]$, bestimme in demselben die Punkte A, B, C, Y derart, daß Sehne $AB = AC = n[3C_1 + C_2]$, Sehne $AY = m[3C_1 + C_2]$ ist, und ziehe die Geraden BC und $AY[4R_1 + 2R_2]$, welche sich in X schneiden. Dann ist $AX = x$.“

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 6C_1 + 3C_2) = (15; 10) \text{ (2 Gerade, 3 Kreise).}$$

Die geometrographische Lösung 1. der 4ten Proportionalen versagt für $p = n$.

Ist die Bedingung $2m > n$ erfüllt, so erhält man nach der partikulären Konstruktion 2. der 4ten Proportionalen folgende sehr einfache

2. Partikuläre Konstruktion (Fig. II, 20). — (Güntsche.) „Um den beliebigen Punkt O beschreibe man den Kreis $O(m)[2C_1 + C_2]$ und um den beliebigen Punkt O' von $O(m)$ den Kreis $O'(n)[3C_1 + C_2]$, welcher $O(m)$ in A und B schneidet. Dann ziehe man $AO'[2R_1 + R_2]$, welche $O'(n)$ in X' trifft. BX', welche nicht gezogen zu werden braucht, ist die verlangte 3te Proportionale.“

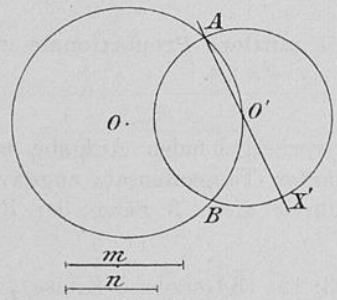

Fig. II, 20.

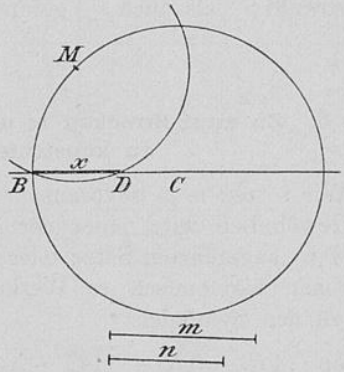

Fig. II, 21.

Eine zweite partikuläre Lösung, die ebenfalls $2m > n$ voraussetzt und die Einfachheit 10 besitzt, ergibt sich aus dem Satze:

d) „Schneidet man von einem gleichschenkligen Dreieck von einer Basisecke aus ein demselben ähnliches ab, so ist die Basis des gegebenen mittlere Proportionale zwischen dem Schenkel des gegebenen und der Basis des abgeschnittenen Dreiecks.“

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Partikuläre Konstruktion*) (Fig. II, 21). — „Um den beliebigen Punkt C beschreibe man den Kreis $C(m)[2C_1 + C_2]$ und um den beliebigen Punkt M von $C(m)$ den Kreis $M(n)[3C_1 + C_2]$, welcher $C(m)$ in B schneidet. Dann ziehe man $BC[2R_1 + R_2]$, welche $M(n)$ in D schneidet. BD ist die verlangte Strecke."

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 5C_1 + 2C_2) = (10;\ 7)\ (1\ \text{Gerade},\ 2\ \text{Kreise}).$$

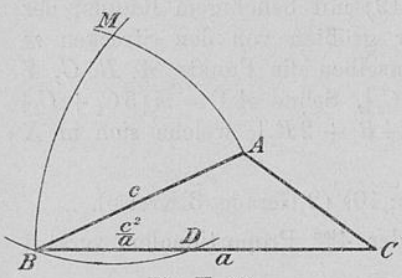

Fig. II, 22.

Sind a, b, c die Seiten des ΔABC und ist $c < 2a$, so erhält man nach 3. die Strecke $\frac{c^2}{a}$ auf folgende Weise schon mit $S = 8$.

3a. Partikuläre Konstruktion (Fig. II, 22). — (Bernès.) „Man beschreibe die Kreise $C(a)$ und $B(c)$ $[4C_1 + 2C_2]$, welche sich in M schneiden, dann den Kreis $M(c)[C_1 + C_2]$, der BC im Sinne BC in D trifft. Dann ist $BD = \frac{c^2}{a}$, denn die gleichschenkligen Dreiecke BCM und BMD sind ähnlich."

$$\text{op} : (5C_1 + 3C_2) = (8;\ 5)\ (3\ \text{Kreise}).$$

Ist a die größte Seite des Dreiecks, so kann durch diese Konstruktion sowohl $\frac{c^2}{a}$ als auch $\frac{b^2}{a}$ gefunden werden (vgl. V, § 9).

§ 6. Zu zwei Strecken m und n die mittlere Proportionale x zu konstruieren; $m : x = x : n$.

Wir setzen $m > n$ voraus.

Gewöhnlich wird einer der bei der vorhergehenden Aufgabe unter a) und b) angeführten Sätze oder der Sekanten-Tangentensatz angewandt. Geht man ökonomisch zu Werke, so führen diese 3 Sätze der Reihe nach zu den Symbolen

$$\text{op} : (4R_1 + 3R_2 + 11C_1 + 5C_2) = (23;\ 15)\ (3\ \text{Gerade},\ 5\ \text{Kreise}),$$
$$\text{op} : (4R_1 + 3R_2 + 10C_1 + 5C_2) = (22;\ 14)\ (3\ \text{Gerade},\ 5\ \text{Kreise}),$$
$$\text{op} : (4R_1 + 3R_2 + 11C_1 + 6C_2) = (24;\ 15)\ (3\ \text{Gerade},\ 6\ \text{Kreise}).$$

Eine einfachere Lösung ergibt sich aus dem Satze c) (vorhergeh. Aufgabe):

*) Vgl. die Bemerkung zu 1. und 2. der nächsten Aufgabe.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Konstruktion (Fig. II, 23). — „Um den Punkt A eines beliebigen, aber hinreichend großen Kreises $k[C_2]$ beschreibe man die Kreise $A(m)$ und $A(n)\,[(3\,C_1 + C_2) + (3\,C_1 + C_2)]$. $A(m)$ schneide k in B und C. Man ziehe AB und $AC\,[4\,R_1 + 2\,R_2]$, welche $A(n)$ innerhalb k in D bezw. E schneiden, und ziehe $DE\,[2\,R_1 + R_2]$, welche k in X trifft. AX ist die gesuchte mittlere Proportionale."

$$\text{op} : (6\,R_1 + 3\,R_2 + 6\,C_1 + 3\,C_2) = (18;\,12)$$

(3 Gerade, 3 Kreise).

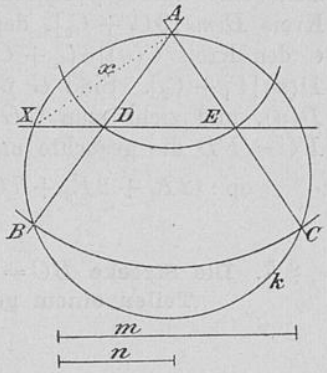

Fig. II, 23.

Die Anwendung des Satzes d) führt zu der

1. Geometrographischen Konstruktion*) (Fig. II, 24). — „Man ziehe eine Gerade $g[R_2]$ und beschreibe um den Punkt B derselben den Kreis $B(m)\,[3\,C_1 + C_2]$, der g in C schneidet. Dann trage man auf CB das Stück $CD = n$ ab $[3\,C_1 + C_2]$, nehme, während die Spitze in C bleibt, $CB = m$ wieder in den Zirkel $[C_1]$ und trage auf g von D aus nach C hin das Stück $DE = m$ ab $[C_1 + C_2]$. Schließlich beschreibe man den Kreis $E(m)\,[C_1 + C_2]$, der $B(m)$ in F trifft. Dann ist $FC = FD$ die gesuchte mittlere Proportionale."

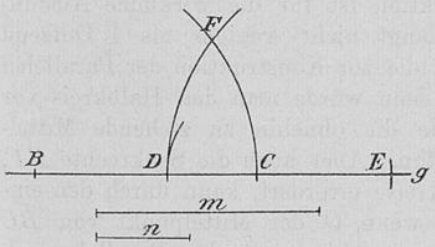

Fig. II, 24.

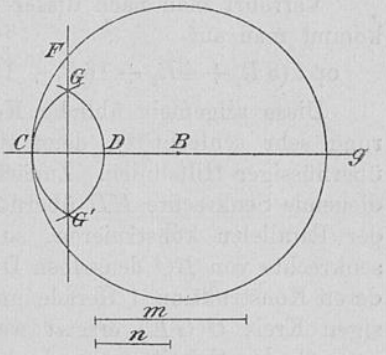

Fig. II, 25.

$$\text{op} : (R_2 + 9\,C_1 + 4\,C_2) = (14;\,9)\ (1\ \text{Gerade, 4 Kreise}).$$

Indem man den Kreis $E(m)$ durch die Mittelsenkrechte von CD

*) Die beiden Konstruktionen 1. und 2. sind nicht neu. Die 1te findet sich — von einem kleinen graphischen Unterschiede abgesehen — schon in Snells „Planimetrie", 1841, und in geometrographischer Gestalt in J. K. Beckers „Elementargeometrie", 1877. Die 2te ist nach einer Bemerkung von Herrn J. Mackay (Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1893) schon 1684 von Thomas Struve in einem Briefe an Wallis mitgeteilt worden, der dieselbe 1685 in seinen „Treatise of Algebra" aufgenommen hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ersetzt, kann man mit derselben Einfachheit auch folgendermaßen verfahren.

2. Geometrographische Konstruktion*) (Fig. II, 25). — „Man ziehe eine Gerade $g[R_2]$ und beschreibe um den Punkt B derselben den Kreis $B(m)[3C_1 + C_2]$, der g in C schneidet. Dann beschreibe man um C den Kreis $C(n)[3C_1 + C_2]$, der BC innen in D trifft, und den Kreis $D(n)[C_1 + C_2]$. Sind G und G' die Schnittpunkte der Kreise $C(n)$ und $D(n)$, und zieht man $GG'[2R_1 + R_2]$, welche $B(m)$ in F trifft, so ist $FC = FD$ die gesuchte mittlere Proportionale."

$$\text{op} : (2R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 3C_2) = (14;\ 9)\ (2 \text{ Gerade, } 3 \text{ Kreise}).\text{"}$$

§ 7. Die Strecke $BC = a$ so zu teilen, daß das Rechteck aus den Teilen einem gegebenen Quadrate f^2 gleich wird.

a) Innere Teilung.

1. Klassische Konstruktion. — „Man errichte auf BC in B die Senkrechte $BD = f$, ziehe zu BC durch D die Parallele, beschreibe über BC als Durchmesser den Halbkreis, der die Parallele in E schneidet, und fälle $EF \perp BC$. Der Punkt F genügt der Aufgabe."

Verfährt man nach dieser Vorschrift in der gewöhnlichen Weise, so kommt man auf

$$\text{op} : (8R_1 + 4R_2 + 16C_1 + 13C_2) = (41;\ 24)\ (4 \text{ Gerade, } 13 \text{ Kreise}).$$

Diese allgemein übliche Konstruktion ist für die wirkliche Ausführung sehr schlecht**), denn sie verlangt nicht weniger als 1 Dutzend überflüssiger Hilfslinien. Zunächst ist die zur Konstruktion der Parallelen dienende Senkrechte BD überflüssig, denn würde man den Halbkreis vor der Parallelen konstruieren, so würde die ohnehin zu ziehende Mittelsenkrechte von BC denselben Dienst tun. Aber auch die Senkrechte EF, deren Konstruktion 1 Gerade und 3 Kreise erfordert, kann durch den einzigen Kreis $O(GE)$ ersetzt werden, wenn O der Mittelpunkt von BC und G der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit der Parallelen ist, denn es ist $OE = GF$. Das Symbol würde dann übergehen in

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 13C_1 + 8C_2) = (27;\ 17)\ (2 \text{ Gerade, } 8 \text{ Kreise}).$$

Obendrein sind auch die Parallele und der Halbkreis überflüssig, denn beide dienen nur zur Bestimmung des Punktes E, dessen es aber nicht bedarf, weil wegen $FG = OE = \frac{a}{2}$ der Punkt F durch den einzigen Kreis $G\left(\frac{a}{2}\right)$ festgelegt werden kann.

*) Siehe Fußnote S. 31.

**) Bei geometrographischer Vorsicht kann man allerdings den Einfachheitsgrad 30 erreichen.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

2. Geometrographische Konstruktion*) (Fig. II, 26). — „Man errichte im Mittelpunkte O von BC die Senkrechte $[(2C_1 + 2C_2) + (2R_1 + R_2)]$, trage auf derselben die Strecke $OG = f$ ab $[3C_1 + C_2]$, nehme, während die Spitze in O bleibt, OB in den Zirkel $[C_1]$ und beschreibe den Kreis $G(OB)\,[C_1 + C_2]$. Wenn dieser BC in F schneidet, so genügt F der Aufgabe."

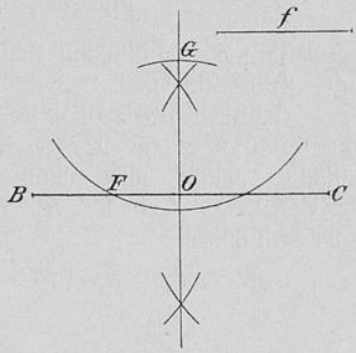

Fig. II, 26.

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 7C_1 + 4C_2) = (14;\ 9)$$
(1 Gerade, 4 Kreise).

b) Äußere Teilung.

1. Klassische Konstruktion. — „Man errichte auf BC in B die Senkrechte $BD = f$ und beschreibe um den Mittelpunkt O von BC mit OD den Kreis, der BC in H schneidet. Der Punkt H genügt der Aufgabe."

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 7C_2) = (23;\ 14)$$ (2 Gerade, 7 Kreise).

Auch hier kann man die Senkrechte in B durch die ohnehin nötige Mittelsenkrechte von BC ersetzen und gelangt so zu der

2. Geometrographischen Konstruktion (Fig. II, 27). — (Lemoine.) „Man errichte im Mittelpunkt O von BC die Senkrechte

$$OG = f[(2C_1 + 2C_2) + (2R_1 + R_2) + (3C_1 + C_2)]$$

und beschreibe den Kreis $O(GB)\,[3C_1 + C_2]$, der BC in H trifft. H genügt der Aufgabe."

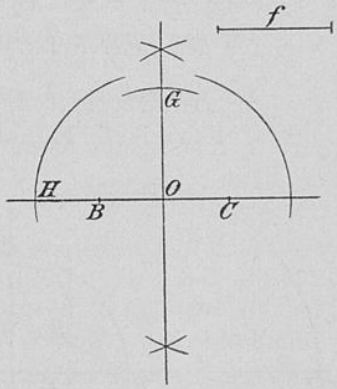

Fig. II, 27.

Beweis: Es ist

$$\overline{OH}^2 = \overline{BG}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + f^2, \text{ mithin } \left(OH + \frac{a}{2}\right)\left(OH - \frac{a}{2}\right) = BH \cdot CH = f^2.$$

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 8C_1 + 4C_2) = (15;\ 10)$$ (1 Gerade, 4 Kreise).

---

*) Man findet neben dem klassischen Verfahren auch dieses bisweilen (z. B. in Lieber u. v. Lühmann, § 139) angegeben, aber ohne Bemerkung über die handgreifliche, sehr große Überlegenheit bezüglich der wirklichen Ausführung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

c) Innere und äußere Teilung.

Für $f < \frac{a}{2}$ gibt es sowohl einen inneren Teilpunkt, F, als einen äußeren, H. Man kann dann F und H gleichzeitig durch Kombination der Konstruktionen a, 2 und b, 2 erhalten.

Geometrographische Konstruktion. — „Man führe die Konstruktion a, 2 aus $[2R_1 + R_2 + 7C_1 + 4C_2]$. Während die Spitze in G bleibt, nehme man dann GB in den Zirkel $[C_1]$ und beschreibe $O(GB)[C_1 + C_2]$, der BC in H trifft. Die Punkte F und H genügen der Aufgabe."

op : $(2R_1 + R_2 + 9C_1 + 5C_2) = (17; 11)$ (1 Gerade, 5 Kreise).

§ 8. Die Strecke $BC = a$ innen und außen nach dem goldenen Schnitt zu teilen.

Sei X der innere, X' der äußere Teilpunkt. Dann soll

$$\overline{BX}^2 = BC \cdot CX \text{ und gleichzeitig}$$
$$\overline{BX'}^2 = BC \cdot CX' \text{ sein.}$$

Setzt man $BX = x$ und $BX' = x'$, so hat man

für den inneren Teilpunkt $x^2 = a(a - x)$, also $x = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2}$,

für den äußeren Teilpunkt $x'^2 = a(a + x')$, also $x' = \frac{a}{2}\sqrt{5} + \frac{a}{2}$.

1. Klassische Konstruktion (Fig. II, 28). — „Man halbiere BC und errichte in C auf BC die Senkrechte $CD = \frac{a}{2}[4R_1 + 2R_2 + 6C_1 + 5C_2]$. Dann beschreibe man $D\left(\frac{a}{2}\right)[C_1 + C_2]$, ziehe $BD[2R_1 + R_2]$, welche $D\left(\frac{a}{2}\right)$ in E und E' trifft, und beschreibe $B(BE)$ und

$$B(BE')[(2C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)].$$

BC werde von $B(BE)$ innen in X, von $B(BE')$ im Sinne CB in X' getroffen. Dann sind X und X' die gesuchten Teilpunkte."

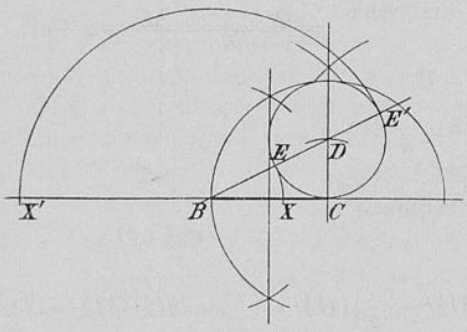

Fig. II, 28.

op : $(6R_1 + 3R_2 + 10C_1 + 8C_2) = (27; 16)$ (3 Gerade, 8 Kreise).

Sei H der Punkt auf der Verlängerung von CB, für welchen $HB = \frac{a}{2}$ ist. Dann ist $HX = HX' = \frac{a}{2}\sqrt{5}$. Man erhält nun eine Reihe

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

von Lösungen*) mit den Einfachheitsgraden 14 bis 17, wenn man die Strecke $\frac{a}{2}\sqrt{5}$ in geeigneter Weise als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und $\frac{a}{2}$ bestimmt (Euklids Methode) und dann mit dieser Hypotenuse um H den Kreis schlägt, z. B. die beiden folgenden Lösungen 2. und 3.

2. Konstruktion (Fig. II, 29). — „Man beschreibe $B(a)[2C_1 + C_2]$, der BC noch in C' schneidet, hierauf $C'(a)[C_1 + C_2]$, der $B(a)$ in J und K trifft. Dann ziehe man $JK[2R_1 + R_2]$, welche den Mittelpunkt H von $C'B$ bestimmt. Auf JK schneide man dann $HG = a$ ab $[C_1 + C_2]$ und

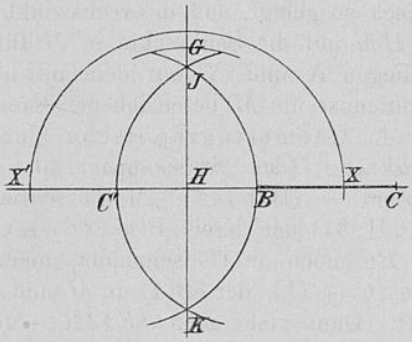

Fig. II, 29.

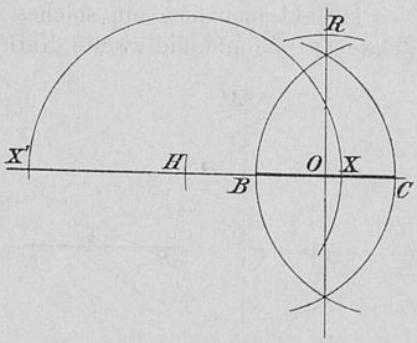

Fig. II, 30.

beschreibe den Kreis $H(BG)[3C_1 + C_2]$. Dieser trifft BC in den gesuchten Punkten X und X'."

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 7C_1 + 4C_2) = (14; 9) \text{ (1 Gerade, 4 Kreise).}$$

3. Konstruktion (Fig. II, 30). — „Mit Hilfe der Kreise $B(a)$ und $C(a)$ konstruiere man die Mittelsenkrechte von $BC[2R_1 + R_2 + 3C_1 + 2C_2]$. O sei ihr Fußpunkt. Dann beschreibe man $O(a)[C_1 + C_2]$, der BC im Sinne CB in H und die Mittelsenkrechte in R trifft, und beschreibe $H(BR)[3C_1 + C_2]$. Dieser trifft BC in den gesuchten Punkten X und X'."

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 7C_1 + 4C_2) = (14; 9) \text{ (1 Gerade, 4 Kreise).}$$

Die bis jetzt bekannten 4 geometrographischen Lösungen, von welchen 3 von Herrn Bernès (1893), die 4. von Herrn Güntsche (1903) angegeben worden ist, verlassen das Euklidsche Prinzip und bestimmen die

*) Hierzu gehört auch die als Renaldische (1668) bezeichnete Konstruktion (vgl. Zeitschrift f. math.. u. naturw. Unterricht, Bd. XII, S. 97), welche mit der von Euklid (Elemente II, 11) gegebenen identisch ist, wenn man diese ihres dem Beweise dienenden Beiwerks entkleidet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Strecke $\frac{a}{2}\sqrt{5}$ als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem die Hypotenuse und die andere Kathete bzw. sind

$$\begin{array}{llll}
\alpha) & a\sqrt{3} \text{ und } & \frac{a}{2}\sqrt{7} & \left[(a\sqrt{3})^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{7}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2\right], \\
\beta) & \frac{3}{2}a \quad \text{„} & a & \left[\left(\frac{3}{2}a\right)^2 - a^2 \qquad = \left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2\right], \\
\gamma) & a\sqrt{2} \quad \text{„} & \frac{a}{2}\sqrt{3} & \left[(a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2\right], \\
\delta) & 2a \quad \text{„} & \frac{a}{2}\sqrt{11} & \left[(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{11}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2\right].
\end{array}$$

Denkt man sich ein solches Dreieck so gelegt, daß die rechtwinklige Ecke auf H und die zweite Kathete HM auf die Senkrechte in H fällt, so liegen X und X' auf dem mit der Hypotenuse um M beschriebenen Kreise.

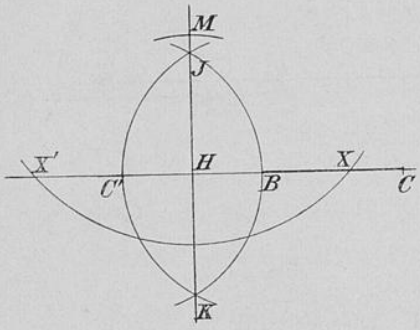

Fig. II, 31.

4. Geometrographische Konstruktion (das Streckenpaar β benutzend). — (Bernès.) „Man beschreibe (Fig. II, 31) den Kreis $B(a)[2C_1 + C_2]$, der BC noch in C' schneidet, hierauf $C'(a)[C_1 + C_2]$, der $B(a)$ in J und K trifft. Dann ziehe man $JK[2R_1 + R_2]$, welche den Mittelpunkt H von $C'B$ bestimmt, und beschreibe $H(a)[C_1 + C_2]$, der JK in M trifft. Während die Spitze in H bleibt, greife man $HC = \frac{3a}{2}$ ab $[C_1]$ und beschreibe $M\left(\frac{3a}{2}\right)[C_1 + C_2]$. Dieser Kreis trifft BC in den gesuchten Teilpunkten X und X'."

Beweis:

$$BX = HX - HB = \sqrt{\overline{MX}^2 - \overline{MH}^2} - HB$$
$$= \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - a^2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2},$$
$$BX' = HX' + HB = \sqrt{\overline{MX'}^2 - \overline{MH}^2} + HB$$
$$= \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - a^2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{5} + \frac{a}{2}.$$

op : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 4C_2) = (13; 8)$ (1 Gerade, 4 Kreise).

Für die Schule am besten geeignet scheint mir das folgende Verfahren 5. zu sein. Dasselbe kann als Modifikation der 3ten Bernèsschen Konstruktion betrachtet werden, bietet aber dieser sowie den 3 anderen

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

geometrographischen Konstruktionen gegenüber den Vorteil, daß es der Verlängerung von BC nicht benötigt, falls die unverlängerte Strecke BC gezeichnet vorliegt und man nur den inneren Teilpunkt braucht.

5. Geometrographische Konstruktion (Fig. II, 32). — „Man beschreibe $B(a)$ und $C(a)\,[3\,C_1 + 2\,C_2]$, die sich in D und D' schneiden, dann $D(a)\,[C_1 + C_2)$, der $B(a)$ in M und $C(a)$ in M' trifft. Dann ziehe man die

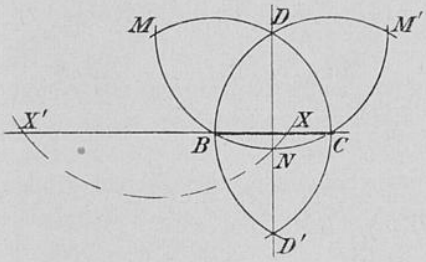

Fig. II, 32.

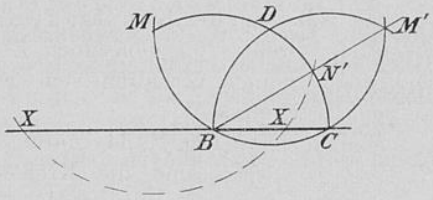

Fig. II, 33.

Mittelsenkrechte DD' von $BC[2\,R_1 + R_2]$, welche $D(a)$ in N trifft (N zwischen D und D'), und beschreibe $M(MN)\,[2\,C_1 + C_2]$. Dieser trifft BC in den gesuchten Punkten X und X'."

$$\text{op} : (2\,R_1 + R_2 + 6\,C_1 + 4\,C_2) = (13;\,8) \text{ (1 Gerade, 4 Kreise).}$$

Anstatt die Mittelsenkrechte DD' zu ziehen und dann den Kreis $M(MN)$ zu beschreiben, kann man auch (Fig. II, 33) die Gerade BM' ziehen, welche $B(a)$ in N' schneidet (N' zwischen B und M'), und dann den Kreis $M(MN')$ beschreiben.

Das Symbol bleibt dasselbe.

§ 9. Eine Strecke BC im Verhältnis zweier Quadrate, $m^2 : n^2$, zu teilen.

Die in den ausführlicheren Sammlungen für diese Aufgabe nebeneinander gestellten Lösungen zeigen sehr erhebliche Einfachheitsunterschiede, ohne daß es möglich wäre, diese Unterschiede nach dem Wortlaut der Lösungen auch nur schätzungsweise zu beurteilen. Wir wollen von den in der Sammlung von Lieber und v. Lühmann angegebenen Lösungen die 3 ersten miteinander vergleichen, wobei wir die Ausführung derselben möglichst ökonomisch zu gestalten suchen.

1. Klassische Konstruktion. — Sie beruht auf dem Satze: „Im rechtwinkligen Dreieck verhalten sich die Höhenabschnitte wie die Quadrate der anliegenden Katheten." —

„Man schneide auf BC die Strecke $BD = m$ ab $[3\,C_1 + C_2]$, errichte auf BD in D (nach I, § 2, 3) die Senkrechte $[4\,R_1 + 2\,R_2 + C_1 + C_2]$, schneide auf dieser die Strecke $DE = n$ ab $[3\,C_1 + C_2]$, schlage den Kreis $E(n)$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$[C_1 + C_2]$, der den Kreis $B(m)$ noch in F trifft, und ziehe DF und BE $[4R_1 + 2R_2]$. Schneiden sich diese in G, so ist $BG : GE = m^2 : n^2$. Nun teile man BC im Verhältnis $BG : GE$, was nach II 2, 1a hier durch op : $[(3C_1 + C_2) + 2(C_1 + C_2) + (2C_1 + C_2) + 2 \cdot (2R_1 + R_2)]$ geschehen kann."

Das Gesamtsymbol ist

op : $(12R_1 + 6R_2 + 15C_1 + 8C_2) = (41; 27)$ (6 Gerade, 8 Kreise).

2. Klassische Konstruktion. — Man benutzt den Satz: „Die Quadrate zweier von demselben Endpunkte eines Kreisdurchmessers ausgehenden Sehnen verhalten sich wie die Projektionen der Sehnen auf diesen Durchmesser."

„Man ziehe (Fig. II, 34) durch B einen beliebigen, hinreichend großen Kreis k $[C_1 + C_2]$ und die Kreise $B(m)$, $B(n)$ und $C(n)$ $[(3C_1 + C_2) + (3C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)]$. k werde von $B(m)$ und $B(n)$ in X und X', bzw. F und F' getroffen. Ferner ziehe man BF und

XX' $[4R_1 + 2R_2]$,

welche sich in D schneiden mögen. Dann ist $BF : BD = m^2 : n^2$. (Beweis: Ziehe FF' und von B aus in k den Durchmesser.) Nun teile man BC nach II, § 2, 1a im Verhältnis $BF : BD$, wozu hier, da $C(n)$ schon gezogen ist, nur noch op : $[(2C_1 + C_2) + (2C_1 + C_2) + (2R_1 + R_2) + (2R_1 + R_2)]$ erforderlich ist."

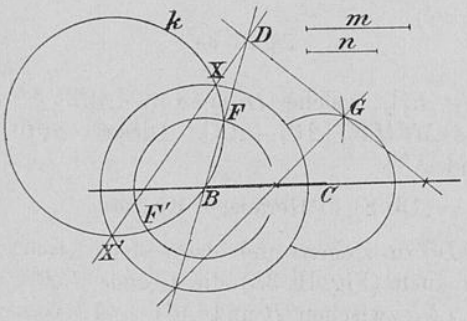

Fig. II, 34.

Als Gesamtsymbol erhält man

op : $(8R_1 + 4R_2 + 12C_1 + 6C_2) = (30; 20)$ (4 Gerade, 6 Kreise).

3. Klassische Konstruktion. — (Nach dem Proportionalsatz.) „Auf der Geraden BC trage man in entgegengesetzter Richtung die Stücke $BD = m$ und $CE = n$ ab $[6C_1 + 2C_2]$. Dann beschreibe man $D(n)$ $[C_1 + C_2]$, nehme, während die Spitze in D bleibt, $DB = m$ in den Zirkel und beschreibe $E(m)$ $[2C_1 + C_2]$. Dann errichte man (nach I, § 2, 3) auf BD in D und E die Senkrechten $[2(4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_2)]$, welche von den Kreisen $D(n)$ und $E(m)$ in F und F', bzw. G und G' geschnitten werden (F und G auf derselben Seite von BC), und ziehe die Geraden BF, CG, CG' $[6R_1 + 3R_2]$. Von dem Schnittpunkte H der Geraden BF und CG, sowie von dem Schnittpunkte J der Geraden BF und CG' aus fälle man dann (nach I, § 4, 1) auf BC die Senkrechten HX und JY $[(2C_1 + C_2) + (C_1 + C_2) + (2C_1 + C_2) + (C_1 + C_2) + 2(2R_1 + R_2)]$. Dann sind X und Y die gesuchten Teilpunkte."

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gesamtsymbol:

$$\text{op} : (18\,R_1 + 9\,R_2 + 17\,C_1 + 10\,C_2) = (54;\,35) \quad (9 \text{ Gerade, } 10 \text{ Kreise}).$$

Während also die 2te Konstruktion mit 10 Hilfslinien ausführbar ist, erfordert die 1te deren mindestens 14, die 3te sogar mindestens 19, also nahezu doppeltsoviel als die zweite.

4. Geometrographische Konstruktion. — Sei $m > n$ und seien x und y zwei beliebige Strecken, die sich wie $m^2 : n^2$ verhalten. Wählt man $x = m$, so hat man $m : y = m^2 : n^2$, mithin $y = \frac{n^2}{m}$; also läßt sich y als 3te Proportionale zu m und n konstruieren. Hierzu kann die partikuläre Konstruktion II, § 5, 3 benutzt werden, da $2\,m > n$ ist. Teilt man nun BC im Verhältnis $m : y$, wozu hier die vereinfachte klassische Konstruktion II 2, 1a sich am besten eignet, so ist die Aufgabe gelöst.

„Man beschreibe (Fig. II, 35) den Kreis $B(m)$ $[3\,C_1 + C_2]$ und um den beliebigen Punkt H von $B(m)$ den Kreis $H(n)$ $[3\,C_1 + C_2]$, welcher $B(m)$ in D schneidet. Dann ziehe man BD $[2\,R_1 + R_2]$, welche $B(m)$ noch in E, $H(n)$ noch in J trifft. Dann ist $JD = \frac{n^2}{m}$, also $BD : JD = m : \frac{n^2}{m} = m^2 : n^2$.“

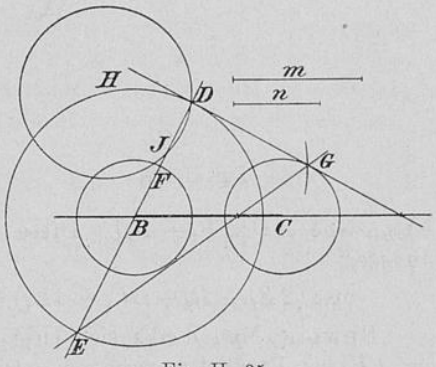

Fig. II, 35.

„Um nun BC im Verhältnis $BD : JD$ zu teilen (II 2, 1a), beschreibe man $B(JD)$ $[3\,C_1 + C_2]$, der BD innen in F schneidet, ferner $C(JD)$ $[C_1 + C_2]$, nehme, während die Spitze in C bleibt, CB in den Zirkel und beschreibe $F(CB)$ $[2\,C_1 + C_2]$, der den Kreis um C in G schneidet. Schließlich ziehe man DG und EG $[4\,R_1 + 2\,R_2]$. Diese treffen BC in den gesuchten Teilpunkten.“

$$\text{op} : (6\,R_1 + 3\,R_2 + 12\,C_1 + 5\,C_2) = (26;\,18) \quad (3 \text{ Gerade, } 5 \text{ Kreise}).$$

Einer der Teilpunkte kann also mit $S = 23$ gefunden werden. Sind die Strecken m, n und BC als Seiten eines Dreiecks gegeben, so läßt sich der innere Teilpunkt, wie wir jetzt zeigen wollen, schon mit $S = 13$ finden.

5. Aufgabe: Die Seite BC des ΔABC innen im Punkte S so zu teilen, daß die Teile sich verhalten wie die Quadrate der Anseiten, daß also $BS : CS = c^2 : b^2$ ist.

Wir stützen uns auf den Satz, daß die Winkelgegentransversalen der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Seitenhalbierenden die Gegenseiten im Verhältnis der Quadrate der Anseiten teilen.*)

Geometrographische Konstruktion. — „Man ziehe (Fig. II, 37) $A(c)[2C_1 + C_2]$, der AC (im Sinne AC) in X trifft, dann $A(b)[C_1 + C_2]$, der AB (im Sinne AB) in Y trifft, dann $X(b)[C_1 + C_2]$, nehme, während die Spitze in X bleibt, $XA = c$ wieder in den Zirkel $[C_1]$ und beschreibe $Y(c)[C_1 + C_2]$, der $X(b)$ in Q trifft (Q innerhalb des $\sphericalangle \alpha$).

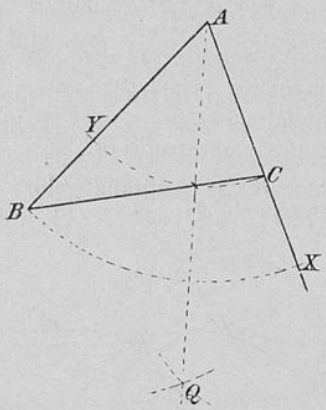

Fig. II, 37.

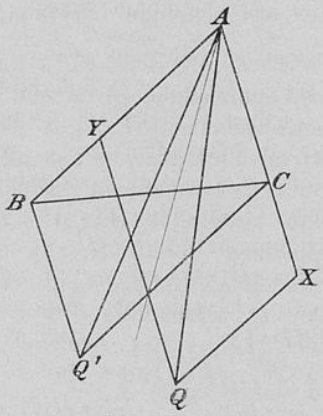

Fig. II, 38.

Man ziehe $AQ[2R_1 + R_2]$. Diese trifft BC in dem gewünschten Teilpunkte."

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 6C_1 + 4C_2) = (13;\ 8)\ (1 \text{ Gerade, } 4 \text{ Kreise}).$$

Beweis: Man denke sich (Fig. II, 38) durch B zu AC und durch C zu AB die Parallelen gezogen. Q' sei ihr Schnittpunkt. Dann liegen AQ und AQ' symmetrisch zur Halbierungslinie von $\sphericalangle \alpha$, ferner wird BC von AQ' halbiert. Also ist AQ die Winkelgegentransversale zu der Seitenhalbierenden.

---

*) Beweis: Ist (Fig. II, 36) $AT = t$ die zu BC gehörende Seitenhalbierende, AW die Halbierende von $\sphericalangle \alpha$, $AS = s$ die Winkelgegentransversale zu AT, und setzt man $BT = a_1$, $TW = b_1$, $WS = c_1$, $SC = d_1$, so hat man

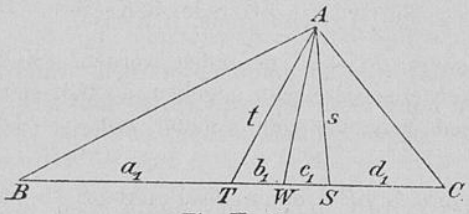

Fig. II, 36.

$$\frac{\Delta ABT}{\Delta ASC} = \frac{a_1}{d_1} = \frac{c \cdot t}{b \cdot s},$$

$$\frac{\Delta ABS}{\Delta ATC} = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{b_1 + c_1 + d_1} = \frac{c \cdot s}{b \cdot t}.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation

$$\frac{a_1 \cdot (a_1 + b_1 + c_1)}{(b_1 + c_1 + d_1) \cdot d_1} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{a/_2 \cdot BS}{a/_2 \cdot CS} = \frac{BS}{CS} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 10. Eine Strecke BC so zu teilen, daß die Quadrate der Teile im Verhältnis $m : n$ stehen.

Man kann bei ökonomischem Vorgehen zwei Strecken x und y, deren Quadrate sich wie $m : n$ verhalten, durch op : $(4R_1 + 2R_2 + 11C_1 + 5C_2)$ festlegen, wenn man über der Geraden BC ein rechtwinkliges Dreieck mit den Höhenabschnitten m und n konstruiert (ohne die Katheten zu ziehen). Teilt man dann BC geometrographisch (II 2, 2) im Verhältnis $x : y$, wobei man mit op : $[4R_1 + 2R_2 + 8C_1 + 5C_2]$ auskommt, wenn man eine Ecke des Dreiecks nach B oder C gelegt hat, so ist die Aufgabe durch

$$\text{op} : (8R_1 + 4R_2 + 19C_1 + 10C_2) = (41;\ 27)\ \text{(4 Gerade, 10 Kreise)}$$

gelöst. Dies ist das herkömmliche Verfahren. Durch eine ähnliche Überlegung, wie die bei II 9, 4 angestellte, gelangt man aber zu einem weit einfacheren Symbole.

Seien x und y zwei beliebige Strecken, welche der Bedingung $x^2 : y^2 = m : n$ genügen. Wählt man $x = m$, so hat man $m^2 : y^2 = m : n$, mithin $y^2 = m \cdot n$; also läßt sich y als mittlere Proportionale zwischen m und n finden. Teilt man dann BC im Verhältnis $m : y$, so ist die Aufgabe gelöst.

Wir suchen die geometrographischen Konstruktionen II 6, 1 und II 2, 1a in geeigneter Weise zu verbinden.

1. Konstruktion. — „Sei $m > n$. Man beschreibe (Fig. II, 39) $B(m)\,[3C_1 + C_2]$, der BC in D schneidet (D mit C auf derselben Seite von B). Dann beschreibe man

$$D(n)\,[3C_1 + C_2],$$

der BD in E schneidet (E zwischen B und D), nehme, während die Spitze in D bleibt, $DB = m$ wieder in den Zirkel und beschreibe $D(m)$ $[C_1 + C_2]$, dann $E(m)\,[C_1 + C_2]$, der BC in F trifft (F in der Verlängerung von BD), dann $F(m)\,[C_1 + C_2]$, der $B(m)$ in G trifft. $EG = y$ ist mittlere Proportionale zwischen m und n.

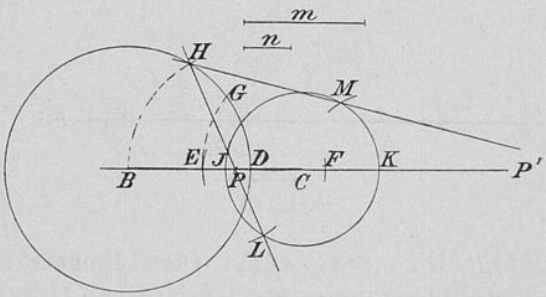

Fig. II, 39.

Sei H ein Schnittpunkt der Kreise $B(m)$ und $D(m)$. Um BC im Verhältnis $m : y$ zu teilen, beschreibe man $C(y)\,[3C_1 + C_2]$, der BC in J und K trifft (K in der Verlängerung von BC), und beschreibe $J(y)$ und $K(y)\,[2C_1 + 2C_2]$, welche $C(y)$ in L bzw. M treffen (M mit H auf der-

selben Seite von BC). Man ziehe HL und $HM[4R_1 + 2R_2]$. Diese Geraden treffen BC in den gesuchten Teilpunkten P und P'."

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 14C_1 + 8C_2) = (28;\ 18)\ (2 \text{ Gerade, } 8 \text{ Kreise}).$$

Bei der gewöhnlichen Konstruktion beträgt also die Anzahl der Elementaroperationen nahezu um die Hälfte mehr, wie bei der eben beschriebenen. Man kann aber noch etwas einfacher zu Werke gehen.

Sei BC außen in A' nach dem Verhältnis $m : n$ geteilt und sei P einer der gesuchten Teilpunkte, etwa der innere. Betrachten wir die gegenseitige Lage von A' und P.

Wir setzen $A'B = b$, $A'C = c$, $PB = x$, $PC = y$. Dann muß sein

$$x^2 : y^2 = m : n,$$
$$b : c = m : n,$$

also $x^2 : y^2 = b : c$. Ferner muß

$$x + y = b - c \quad \text{sein.}$$

Hieraus erhält man $\quad y = \sqrt{bc} - c$, also

$$A'P = y + c = \sqrt{bc}.$$

Ebenso findet man $A'P' = \sqrt{bc}$, wenn P' der äußere der gesuchten Teilpunkte ist. Diese kann man also dadurch erhalten, daß man BC außen*) in A' nach dem Verhältnis $m : n$ teilt und mit der mittleren Proportionalen zwischen $A'B$ und $A'C$ um A' den Kreis schlägt.

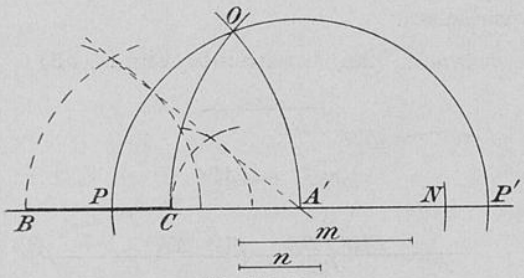

Fig. II, 40.

2. Geometrographische Konstruktion. — „Man teile (Fig. II, 40) nach II, § 2, 2 BC außen im Verhältnis $m : n$ $[2R_1 + R_2 + 8C_1 + 4C_2]$. Der Teilpunkt heiße A'. Um jetzt die mittlere Proportionale zu $A'B$ und $A'C$ zu konstruieren, beschreibe man $B(BA')[2C_1 + C_2]$, ferner $C(BA')[C_1 + C_2]$, der BA' in N trifft (N in

*) Wollte man anstatt des äußeren Teilpunktes den inneren benutzen, so würde man zu einer weit umständlicheren Konstruktion geführt.

Ist die Strecke BC schon von vornherein innen in A oder außen in A' nach dem Verhältnis $m : n$ geteilt, so kann die Teilung $\frac{PB^2}{PC^2} = \frac{A'B}{A'C} = \frac{m}{n}$ schon mit $S = 10$ vollzogen werden; für die Teilung $\frac{PB^2}{PC^2} = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$, welche geometrographisch bis-

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

der Verlängerung von BC), dann $N(BA')[C_1 + C_2]$. Ist O ein Schnittpunkt von $B(BA')$ und $N(BA')$, so ist $A'O$, welche nicht gezogen zu werden braucht, mittlere Proportionale zwischen $A'B$ und $A'C$. Man beschreibe den Kreis $A'(A'O)[2C_1 + C_2]$. Dieser trifft BC in den gesuchten Teilpunkten P und P'."

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 14C_1 + 8C_2) = (25;\ 16)\ (1 \text{ Gerade, } 8 \text{ Kreise}).$$

---

lang mit $S = 23$ ausgeführt wurde, enthalten meine demnächst im Archiv f. M. u. Ph. zum Abdruck gelangenden „Geometrographischen Beiträge" eine Konstruktion mit $S = 21$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf